

Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βοηθήματος, έντυπου ή ηλεκτρονικού και οι πάσης φύσεως συνεργασίες και συνομιλίες. **Προσοχή:** Δεν χρειάζεται να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. Υποθέστε ότι όλοι οι παρακάτω πίνακες είναι μη-μηδενικοί.

Ερωτήσεις Αληθές/Ψευδές: Κάθε σωστή απάντηση θα σας δώσει 3 μονάδες και κάθε λάθος θα σας αφαιρέσει 2 μονάδες. Αν δεν απαντήσετε κάποια ερώτηση θα πάρετε 0 μονάδες σε αυτήν.

1. **A** Αν ο $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ περιστρέφει τα διανύσματα γύρω από την αρχή των αξόνων κατά ϕ μοίρες τότε ο T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.
2. **Ψ** Αν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει λιγότερα διανύσματα από όσα είναι τα στοιχεία του κάθε διανύσματος τότε το σύνολο αυτό είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
3. **A** Το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A .
4. **Ψ** Το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ είναι συνεπές εάν ο επαυξημένος πίνακας $[A \ \underline{b}]$ έχει οδηγό σε κάθε γραμμή του.
5. **Ψ** Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A έχουμε ότι $\det(-A) = -\det A$.
6. **A** Εάν ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε το 0 είναι ιδιοτιμή του A .
7. **A** Οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B^{-1}AB$ έχουν τα ίδιο σύνολα ιδιοτιμών για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
8. **Ψ** Αν δύο διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε θα είναι και ορθογώνια μεταξύ τους.
9. **A** Ο χώρος γραμμών ενός πίνακα A είναι ορθογώνιος στον μηδενόχωρο του A^T .
10. **A** Αν A είναι ένας 6×4 πίνακας τάξης 3, τότε ο πίνακας $A^T A$ δεν αντιστρέφεται.

Ερωτήσεις Πολλαπλών Επιλογών: Κάθε σωστή επιλογή θα σας δώσει 7 μονάδες. Αν δηλώσετε περισσότερες από μια επιλογές σε μια ερώτηση θα πάρετε 0 μονάδες για την συγκεκριμένη ερώτηση. Δεν υφίσταται αρνητική βαθμολόγηση για τυχόν λάθος επιλογές σας.

1. Πόσες διαφορετικές βάσεις είναι δυνατόν να έχει ο χώρος γραμμών ενός πίνακα 17×231 ;
☐ 1 ☒ άπειρες ☐ 17 ☐ 231 ☐ 214
2. Εάν $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ και $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ca & b \\ 1 & ab & c \end{vmatrix}$ τότε
☒ $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$, ☐ $\Delta_1 + 2\Delta_2 = 0$, ☐ $\Delta_1 = \Delta_2$, ☐ Δεν ισχύει καμία από τις δοθείσες σχέσεις
3. Η σχέση $|AA^T| = |A^T A|$ ισχύει
☐ Μόνον για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ,
☐ Μόνον για κάθε ταυτοτικό τετραγωνικό πίνακα A ,
☒ Για κάθε πίνακα A ,
☐ Μόνον για κάθε συμμετρικό τετραγωνικό πίνακα A ,
☐ Δεν ισχύει για κανέναν πίνακα A .

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 2 \\ -2 & -1 & y & 3 \\ 3 & 1 & c & 1 \end{bmatrix}$ και εάν $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι η άνω κλιμακωτή μορφή η οποία προκύπτει από την διαδικασία της απαλοιφής χωρίς εναλλαγή γραμμών στον πίνακα A , τότε $(x, y, z) =$
☐ $(3, -2, 0)$ ☒ **$(3, -4, 7)$** ☐ $(0, 0, 1)$ ☐ $(3, -2, 7)$ ☐ $(1, -3, 4)$ ☐ καμία από τις δοθείσες.
5. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι **υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$ (με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με αριθμό);
☐ Το σύνολο όλων των διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε $x + y + z = 1$
☐ Το σύνολο όλων των διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
☐ Το σύνολο όλων των διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε $xy = 0$
☒ **Το σύνολο όλων των διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε $x + y = z$ και $x - y = z$**
☐ Το σύνολο όλων των διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε $z = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή η ένωση του επιπέδου xy και του επιπέδου yz)
☐ Κανένα από τα δοθέντα.

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενών: Κάθε σωστή απάντηση θα σας δώσει 7 μονάδες, ειδικά θα πάρετε 0 μονάδες για την συγκεκριμένη ερώτηση.

1. Η διάσταση του $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -17 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ είναι 3
2. Αν $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τις σχέσεις
 $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ τότε $f \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -69 \\ 10 \end{pmatrix}}$
3. Ένας πίνακας 4×5 του οποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 3 είναι ο εξής $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. Το ελάχιστο πλήθος των προσθαφαιρέσεων και πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα είναι περίπου $\frac{n^3}{3}$ (επειδή τόσες είναι οι πράξεις που απαιτούνται για την απαλοιφή).
5. Αν $A = LU$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ τότε το x_3 , το τρίτο στοιχείο της λύσης του $A\underline{x} = \underline{b}$ είναι ίσο με $-\frac{98}{15}$