

1. Αν το διάνυσμα  $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  ανήκει στον μηδενόχωρο του πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  εκφράστε την τέταρτη στήλη  $\underline{a}_4$

του πίνακα  $A$  σαν γραμμικό συνδυασμό των τριών πρώτων στηλών  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  και  $\underline{a}_3$  του πίνακα  $A$ . Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

**Σολυτιον:** Επειδή το  $x$  ανήκει στον μηδενόχωρο του  $A$  έχουμε ότι  $A\underline{x} = \underline{0}$  οπότε

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow 3a_1 - a_2 - 2a_3 + 4a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -1/4a_1 - 1/2a_2 - 3/4a_3$$

2. Ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί  $c$  και  $d$  για να αποτελεί το διάνυσμα  $c\underline{u} + d\underline{v}$  λύση του  $A\underline{x} = \underline{b}$  όπου τα διανύσματα  $\underline{u}$  και  $\underline{v}$  είναι λύσεις του γραμμικού συστήματος  $A\underline{x} = \underline{b}$ . Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

**Σολυτιον:** Πρέπει τα  $c$  και  $d$  είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε  $c + d = 1$  Επειδή  $\underline{u}$  και  $\underline{v}$  είναι λύσεις του  $A\underline{x} = \underline{b}$  έχουμε

$$A\underline{u} = \underline{b}, A\underline{v} = \underline{b} \Rightarrow cA\underline{u} = c\underline{b}, dA\underline{v} = d\underline{b} \Rightarrow Ac\underline{u} = c\underline{b}, Ad\underline{v} = d\underline{b} \Rightarrow A(c\underline{u}) + A(d\underline{v}) = c\underline{b} + d\underline{b} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(c\underline{u} + d\underline{v}) = (c + d)\underline{b} \Rightarrow A(c\underline{u} + d\underline{v}) = \underline{b}$$

3. Δώστε τον άνω κλιμακωτό πίνακα  $U$  που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα  $A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{array} \right]$  με απαλοιφή του Γκάους χωρίς οδήγηση. Δώστε επίσης **όλες** τις λύσεις του συστήματος που αντιστοιχούν στον πίνακα  $A$ . Δικαιολογήστε εν συντομία την απάντησή σας.

**Σολυτιον:**  $U = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4. Δώστε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα  $L$  με μονάδες στην κύρια διαγώνιο και έναν άνω κλιμακωτό πίνακα  $U$  τέτοιους ώστε  $LU = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ . Δικαιολογήστε εν συντομία την απάντησή σας.

**Σολυτιον:**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1 \rightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = U,$   $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$