

Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βοηθήματος, έντυπου ή ηλεκτρονικού και οι πάσης φύσεως συνεργασίες και συνομιλίες. Πρέπει να απενεργοποιήσετε τα κινητά σας τηλέφωνα πριν ξεκινήσει η εξέταση. **Δεν** χρειάζεται να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ερωτήσεις Αληθές/Ψευδές: Κάθε σωστή απάντηση θα σας δώσει 2 μονάδες και κάθε λάθος θα σας αφαιρέσει 2 μονάδες. Αν δεν απαντήσετε κάποια ερώτηση θα πάρετε 0 μονάδες σε αυτήν.

1. ____ Η κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα είναι μοναδική.
2. ____ Εάν $\mathbf{b} \in \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ τότε το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί σε έναν επαυξημένο πίνακα $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]$ έχει λύση.
3. ____ Η εξίσωση $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ έχει μόνον την τετριμμένη λύση αν η εξίσωση έχει μια ελεύθερη μεταβλητή.
4. ____ Αν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει λιγότερα διανύσματα από όσα είναι τα στοιχεία του κάθε διανύσματος τότε το σύνολο αυτό είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
5. ____ Το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A .
6. ____ Αν ο $T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ περιστρέφει τα διανύσματα γύρω από την αρχή των αξόνων κατά ϕ μοίρες τότε ο T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.
7. ____ Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις τότε πρέπει οπωσδήποτε να έχει και άλλες λύσεις.
8. ____ Αν ένας $m \times n$ πίνακας A έχει έναν οδηγό σε κάθε γραμμή τότε η εξίσωση $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
9. ____ Η δεύτερη γραμμή του AB είναι η δεύτερη γραμμή του A πολλαπλασιασμένη από τα δεξιά με τον B .
10. ____ Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε $A^T + B^T = (A + B)^T$.
11. ____ Αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε $(A^{-1})^{-1} = A$.
12. ____ Αν $AB = I$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
13. ____ Αν ο πίνακας A προκύπτει μετά από δύο εναλλαγές γραμμών ενός πίνακα B τότε $\det B = \det A$.
14. ____ Αν η εξίσωση $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ είναι συνεπής τότε $\text{Col}A = \mathbb{R}^m$.
15. ____ Αν ο πίνακας B είναι κλιμακωτή μορφή του πίνακα A τότε οι στήλες του B που φέρουν οδηγό αποτελούν βάση του $\text{Col}A$.
16. ____ Οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B^{-1}AB$ έχουν τα ίδιο σύνολα ιδιοτιμών όπου B κάθε $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας.

Ερωτήσεις Πολλαπλών Επιλογών: Κάθε ερώτηση έχει μόνον μια ορθή επιλογή. Κάθε σωστή επιλογή θα σας δώσει 5 μονάδες. Αν δηλώσετε περισσότερες από μια επιλογές σε μια ερώτηση θα πάρετε 0 μονάδες για την συγκεκριμένη ερώτηση. Δεν υφίσταται αρνητική βαθμολόγηση για τυχόν λάθος επιλογές σας.

1. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι γραμμικά ανεξάρτητο;

$$\bigcirc \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \quad \bigcirc \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \quad \bigcirc \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix} \right\}, \quad \bigcirc \text{Κανένα}$$

2. Αν $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ τότε σημειώστε ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει.

$$\bigcirc \underline{u}^T \underline{v} = \underline{u} \underline{v}^T \quad \bigcirc \underline{u}^T \underline{v} = \underline{v}^T \underline{u} \quad \bigcirc \underline{u}^T \underline{v}^T = \underline{u} \underline{v} \quad \bigcirc \underline{u}^T \underline{v}^T = \underline{u} \underline{v}^T \quad \bigcirc \text{καμία από τις δοθείσες}$$

3. Αν A είναι ένας 4-επι-4 πίνακας και $k \neq 0$, τότε $\det(kA) =$
☐ $k \det A$ ☐ $k^4 \det A$ ☐ $4k + \det A$ ☐ $k + \det A$ ☐ δεν μπορούμε να αποφανθούμε
4. Αν A, B, C είναι m -επι- n , p -επι- q και r -επι- s πίνακες αντίστοιχα, τότε ο πίνακας ABC ορίζεται αν
☐ $n = p$ και $q = r$ ☐ $m = p = r$ ☐ $n = q = s$ ☐ $m = n, p = q$ και $r = s$ ☐ $m = n = 1$
5. Αν για τα στοιχεία του $n \times n$ πίνακα A ισχύει η σχέση $a_{i,j} = 0$ αν $i \geq j$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ τότε:
☐ ο A είναι αντιστρέψιμος ☐ $A^2 = A$ ☐ ο A δεν είναι αντιστρέψιμος ☐ $A^k = 0$ για κάποιο k
6. Αν $\underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{b}$, όπου $\underline{b} \neq \underline{0}$, και $\underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$. Τότε
☐ $\underline{u} + \underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$
☐ $\underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{b}$
☐ $\underline{u} + \underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{b}$
☐ $\underline{u}$ είναι μια λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$
☐ καμιά από τις παραπάνω επιλογές δεν είναι ορθή
7. Η j -στη στήλη του πίνακα AB είναι
☐ το γινόμενο της j -στης στήλης του πίνακα A με την j -στη στήλη του πίνακα B
☐ το γινόμενο της j -στης γραμμής του πίνακα A με την j -στη στήλη του πίνακα B
☐ το γινόμενο του πίνακα A με την j -στη στήλη του πίνακα B
☐ το γινόμενο της j -στης στήλης του πίνακα A με τον πίνακα B
☐ καμιά από τις παραπάνω επιλογές δεν είναι ορθή

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενών: Κάθε ερώτηση στην οποία θα συμπληρώσετε σωστά ΟΛΑ τα κενά θα σας δώσει 8 μονάδες, ειδάλλως θα πάρετε 0 μονάδες για την συγκεκριμένη ερώτηση.

1. Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ είναι:
2. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b, c όπου $a \neq 0$, Δώστε όλες τις τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -1/a & x & x^2 \end{bmatrix}$.
3. Αν $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι η γενικευμένη λύση του $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ -13 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ τότε ο πίνακας A έχει
 στήλες, γραμμές και τάξη .
4. Αν όλες οι λύσεις του συστήματος

$$y - z + 2w = 8$$

$$x - y + z + w = 5$$

$$2x - y - 3z + 4w = 18$$

είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\underline{v} = \underline{r} + c\underline{s}$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$ τότε $\underline{r} =$ και $\underline{s} =$.