

# Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή στους γραμμικούς μετασχηματισμούς

## Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ως πρόβλημα προς επίλυση

---

$$\text{Διανυσματική εξίσωση : } x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

**Τι σημαίνει:** Ψάχνουμε να βρούμε τους συντελεστές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστούν με τα διανύσματα  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , ο γραμμικός συνδυασμός να μας δίνει το διάνυσμα  $\mathbf{b}$ .

$$\text{Εξίσωση πινάκων: } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

**Τι σημαίνει:** Μια συμπαγής μορφή για να συμβολίσουμε την διανυσματική εξίσωση. Μαζεύουμε τα διανύσματα  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , στις στήλες του πίνακα  $A$  και τους αγνώστους στο διάνυσμα  $\mathbf{x}$ . Ψάχνουμε να βρούμε το κατάλληλο διάνυσμα  $\mathbf{x}$  έτσι ώστε το γινόμενο  $A\mathbf{x}$  να μας δώσει το διάνυσμα  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, ο στόχος μας ήταν να βρούμε το “κλειδί” που μας οδηγεί στον “στόχο”  $\mathbf{b}$ .

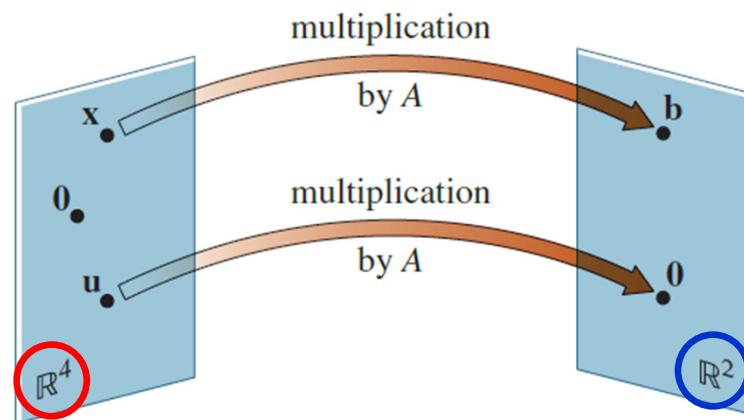
**Η Διαδικασία:** Επαυξημένος πίνακας, γραμμοπράξεις, κλιμακωτές μορφές.

# Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ως μετασχηματισμός

## Παράδειγμα

Ο πολλαπλασιασμός με το  $A$  μετατρέπει το  $\mathbf{x}$  σε  $\mathbf{b}$  και το  $\mathbf{u}$  σε  $\mathbf{0}$ .

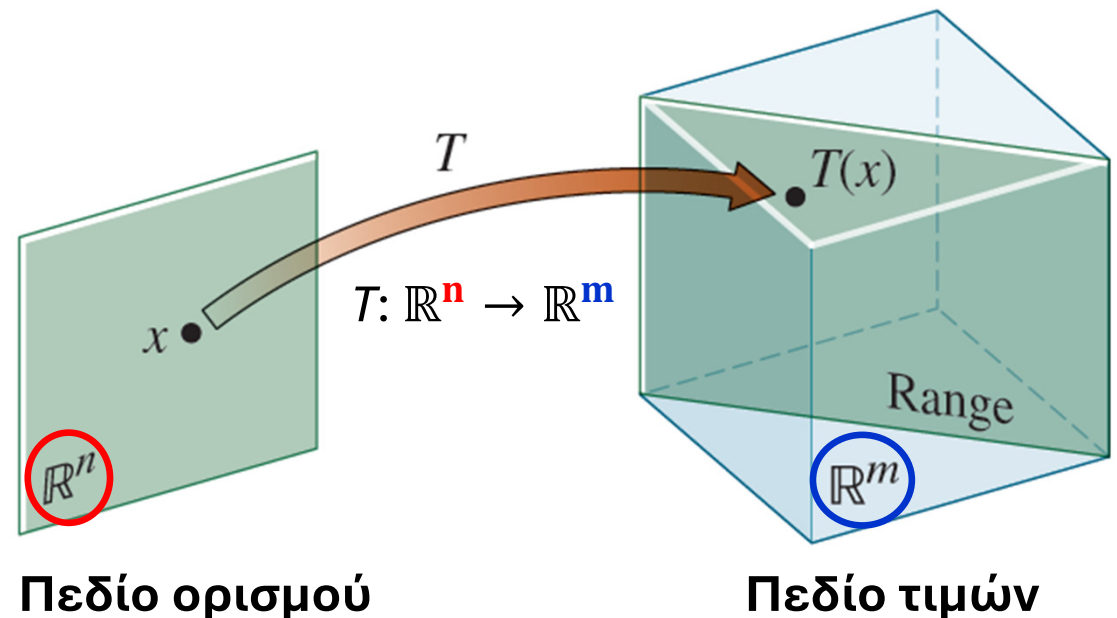
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{x}}{=} \overset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{u}}{=} \overset{\mathbf{0}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$



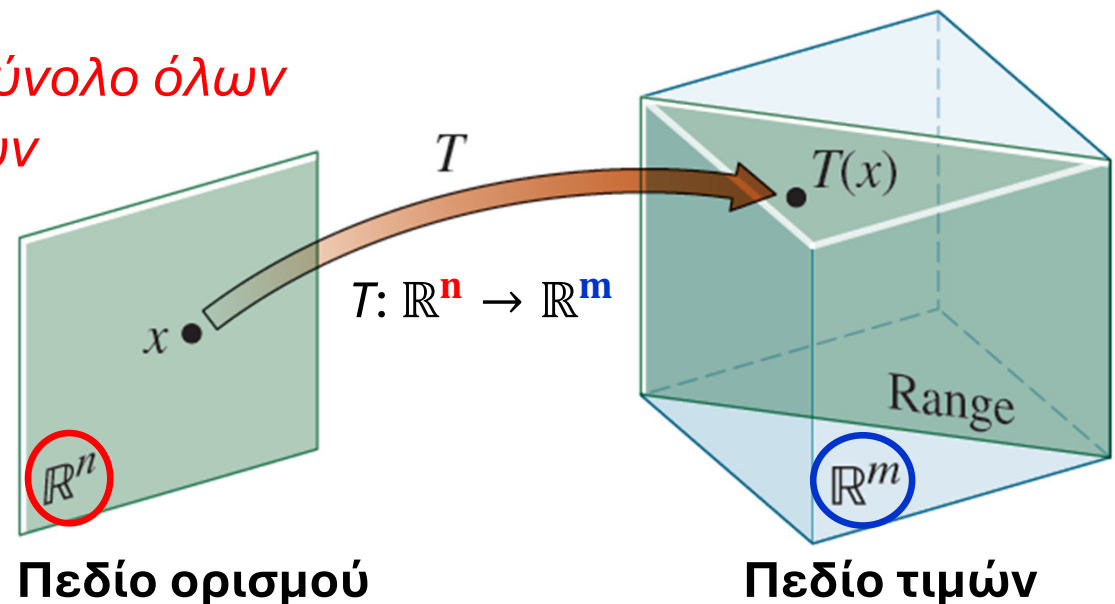
Στην περίπτωση αυτή η επίλυση της εξίσωσης  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ισοδυναμεί με την εύρεση όλων των διανυσμάτων  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^4$ , που μετασχηματίζονται στο διάνυσμα  $\mathbf{b}$  στο  $\mathbb{R}^2$ , κάτω από την “δράση” του πολλαπλασιασμού με το  $A$ .

# Μετασχηματισμοί

- **Μετασχηματισμός** (ή συνάρτηση ή απεικόνιση)  $T$  από τον  $\mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}^m$  είναι ένας **κανόνας που αντιστοιχίζει** σε κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^n$  ένα διάνυσμα  $T(\mathbf{x})$  στο  $\mathbb{R}^m$ .
- Το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **πεδίο ορισμού** του  $T$  και το  $\mathbb{R}^m$  ονομάζεται **πεδίο τιμών** του  $T$ .
- Ο συμβολισμός  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  δηλώνει ότι το πεδίο ορισμού είναι το  $\mathbb{R}^n$  και το πεδίο τιμών το  $\mathbb{R}^m$ .
- Για  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^n$ , το **διάνυσμα  $T(\mathbf{x})$**  στο  $\mathbb{R}^m$  ονομάζεται **εικόνα (image)** του  $\mathbf{x}$ , μέσω της δράσης του  $T$ .
- Το σύνολο όλων των εικόνων  $T(\mathbf{x})$  ονομάζεται **σύνολο τιμών ή εύρος (range)** του  $T$ .



- Για κάθε  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^n$ , το  $T(\mathbf{x})$  υπολογίζεται ως  $A\mathbf{x}$ , όπου  $A$  είναι ένας  $m \times n$  πίνακας.
- Για λόγους απλότητας, κάποιες φορές συμβολίζουμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό πίνακα ως  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$
- Το πεδίο ορισμού του  $T$  είναι ο  $\mathbb{R}^n$  όταν το  $A$  έχει  $n$  στήλες και το πεδίο τιμών του  $T$  είναι ο  $\mathbb{R}^m$  όταν κάθε στήλη του  $A$  έχει  $m$  στοιχεία.
- Το εύρος (*range*) του  $T$  είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του  $A$ .



### Παράδειγμα

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

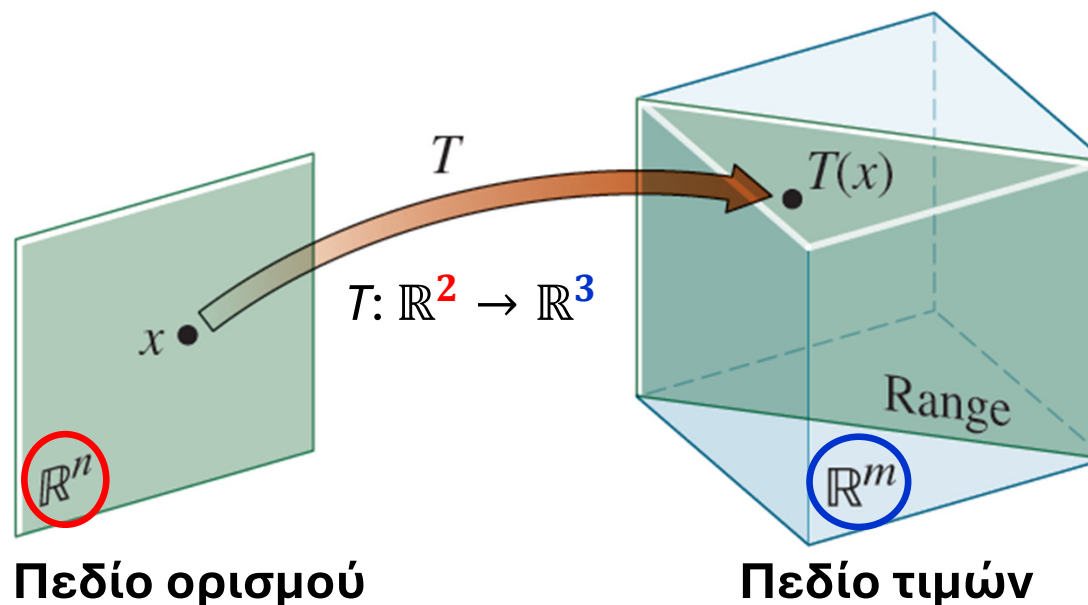
και ο μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , ώστε

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

- Βρείτε το  $T(\mathbf{u})$ , δηλαδή την εικόνα του  $\mathbf{u}$  μέσω του μετασχηματισμού  $T$ .
- Βρείτε ένα  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^2$  του οποίου η εικόνα μέσω του  $T$  είναι το  $\mathbf{b}$ .
- Υπάρχουν περισσότερα από ένα  $\mathbf{x}$  των οποίων η εικόνα μέσω του  $T$  είναι το  $\mathbf{b}$ ;
- Προσδιορίστε εάν το  $\mathbf{c}$  βρίσκεται στο εύρος (range) του μετασχηματισμού  $T$ .

# Μετασχηματισμοί πινάκων – Παράδειγμα

Μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$



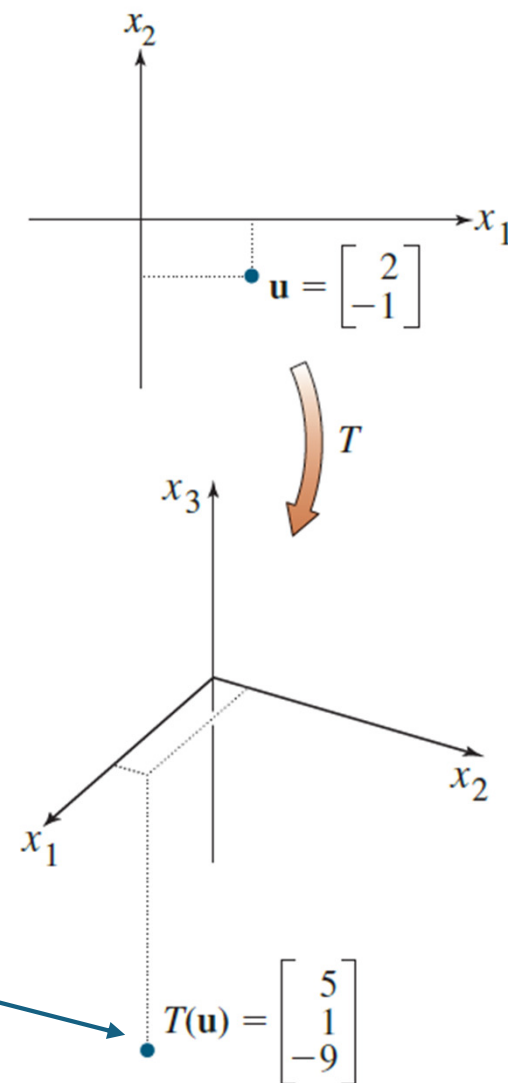
$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

## Μετασχηματισμοί πινάκων – Παράδειγμα

- Βρείτε το  $T(\mathbf{u})$ , δηλαδή την **εικόνα** του  $\mathbf{u}$  μέσω του μετασχηματισμού  $T$ .

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$



**Εικόνα** του  $\mathbf{u}$  μέσω του  
μετασχηματισμού  $T$

## Μετασχηματισμοί πινάκων – Παράδειγμα

- Βρείτε ένα  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^2$  του οποίου η εικόνα μέσω του  $T$  είναι το  $\mathbf{b}$ .

Η εικόνα του  $\mathbf{x}$  μέσω του  $T$  είναι το  $T(\mathbf{x})$ . Συνεπώς πρέπει να βρω ένα  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Δηλαδή πρέπει να λύσουμε την εξίσωση  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } x_1 = 1.5 \text{ και } x_2 = -0.5. \text{ Συνεπώς } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

- Υπάρχουν περισσότερα από ένα  $\mathbf{x}$  των οποίων η εικόνα μέσω του  $T$  είναι το  $\mathbf{b}$ ;

Κάθε  $\mathbf{x}$  του οποίου η εικόνα μέσω του  $T$  είναι το  $\mathbf{b}$  πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή στην οποία καταλήξαμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

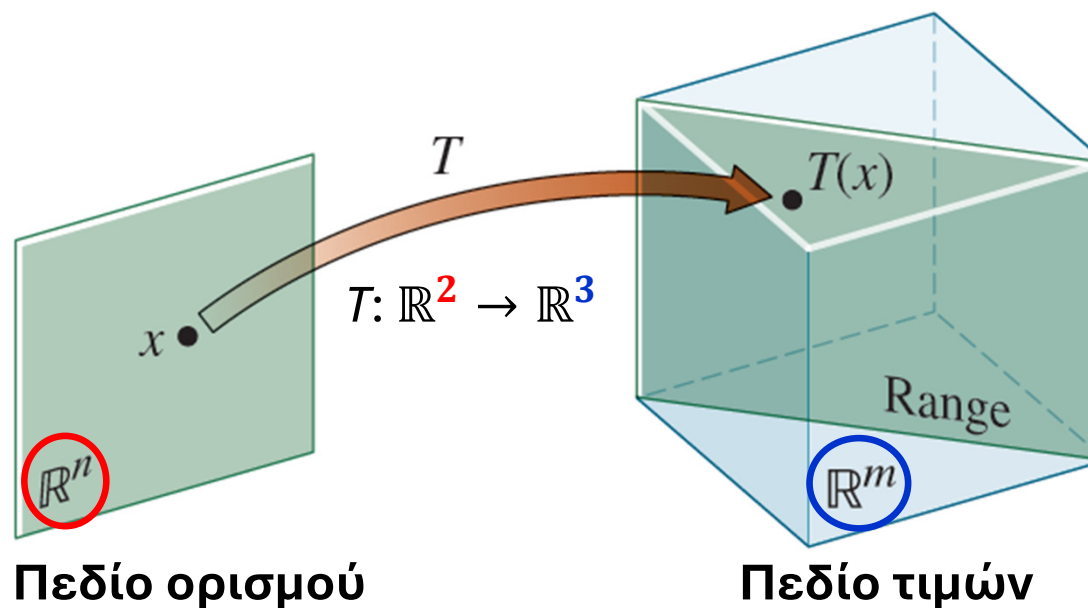
είναι σαφές ότι η εξίσωση  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  έχει **μοναδική λύση**.

Συνεπώς, υπάρχει ακριβώς ένα  $\mathbf{x}$  του οποίου η εικόνα είναι  $\mathbf{b}$ .

## Μετασχηματισμοί πινάκων – Παράδειγμα

- Προσδιορίστε εάν το  $\mathbf{c}$  βρίσκεται στο εύρος (range) του μετασχηματισμού  $T$ .

Μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$



Το διάνυσμα  $\mathbf{c}$  είναι στο εύρος (range) του  $T$  αν το  $\mathbf{c}$  είναι η εικόνα κάποιου  $\mathbf{x}$ .  
Δηλαδή, αν  $\mathbf{c} = T(\mathbf{x})$  για κάποιο  $\mathbf{x}$ .

Ισοδύναμα, είναι το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  συνεπές;

## Μετασχηματισμοί πινάκων – Παράδειγμα

- Προσδιορίστε εάν το  $\mathbf{c}$  βρίσκεται στο εύρος (range) του μετασχηματισμού  $T$ .  
(συνέχεια)

Είναι το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  συνεπές;

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

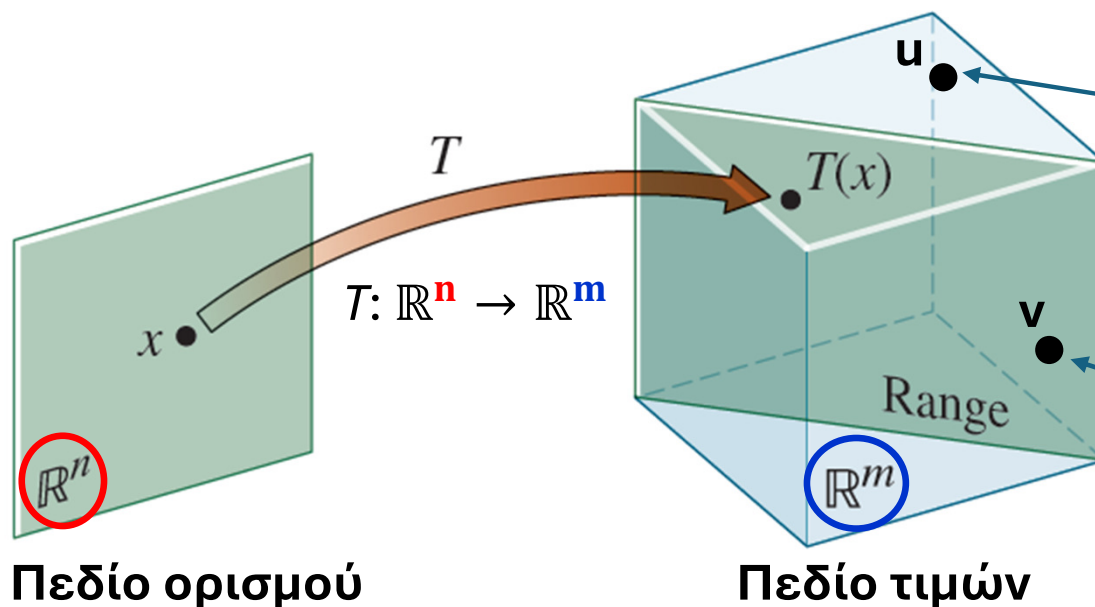
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Η τρίτη εξίσωση,  $0 = 10$ , δείχνει ότι το σύστημα είναι ασυνεπές.  
Άρα το  $\mathbf{c}$  **δεν είναι** στο εύρος του  $T$ .

Μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

Έστω δυο διανύσματα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  που ανήκουν στο **πεδίο τιμών** του μετασχηματισμού  $T$ .  
Δηλαδή τα διανύσματα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ανήκουν στον  $\mathbb{R}^m$ .

- Ο μετασχηματισμός  $T$  **δεν μπορεί** να “πετύχει” το  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \notin \text{Range } T$ )
- Ο μετασχηματισμός  $T$  **μπορεί** να “πετύχει” το  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v} \in \text{Range } T$ )



Ένα διάνυσμα  $\mathbf{u}$  που δεν ανήκει στο εύρος (range) του  $T$ .  
Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$  είναι ασυνεπές.

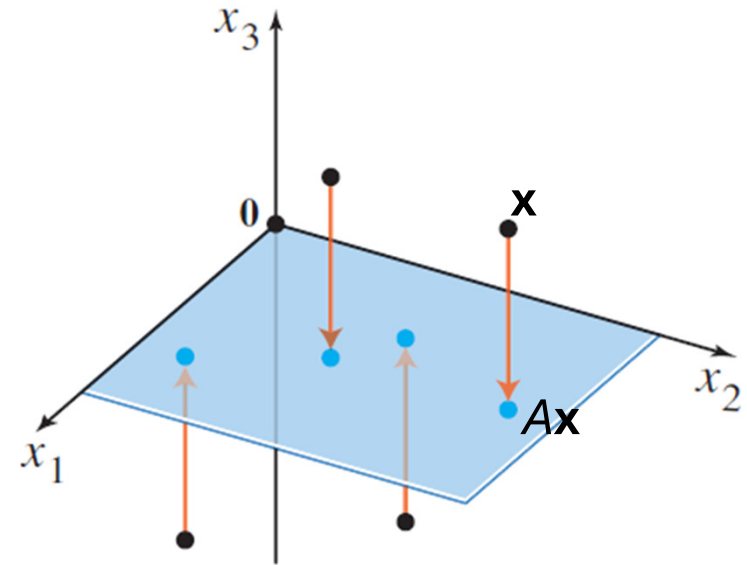
Ένα διάνυσμα  $\mathbf{v}$  που ανήκει στο εύρος (range) του  $T$ .  
Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$  είναι συνεπές.

## Παράδειγμα μετασχηματισμού προβολής

Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , τότε ο μετασχηματισμός  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  προβάλλει σημεία του  $\mathbb{R}^3$

στο  $x_1x_2$ -επίπεδο.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ : ο μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

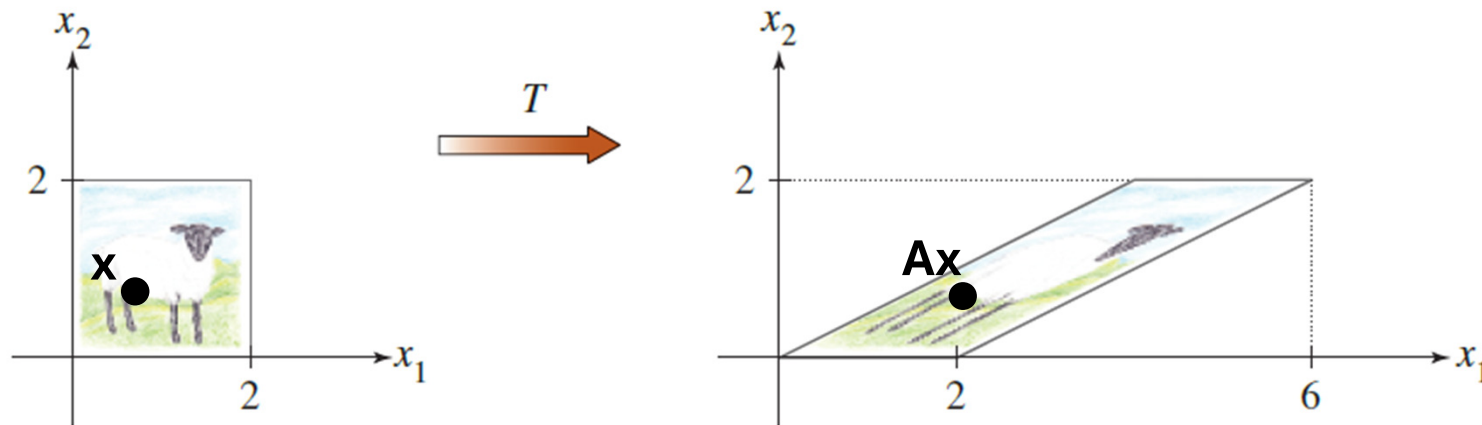
## Παράδειγμα μετασχηματισμού διάτμησης

Έστω  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Ο μετασχηματισμός  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  ονομάζεται μετασχηματισμός διάτμησης.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν ο μετασχηματισμός  $T$  δράσει σε **κάθε σημείο**  $\mathbf{x}$  ενός  $2 \times 2$  τετραγώνου τότε το σύνολο των εικόνων του  $\mathbf{x}$  ( $A\mathbf{x}$ ) σχηματίζει ένα κεκλιμένο παραλληλόγραμμο.

**Βήματα για την απόδειξη (Τα κρίσιμα ερωτήματα):**

- Τα ευθύγραμμά τμήματα παραμένουν ευθύγραμμα;
- Πού μεταφέρονται οι 4 γωνίες του τετραγώνου; Αυτές θα ορίσουν αυτόματα τις 4 κορυφές του κεκλιμένου παραλληλογράμμου.



$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ : ο μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

**Ορισμός:** Ένας μετασχηματισμός (ή απεικόνιση)  $T$  είναι **γραμμικός** αν

- a.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  στο πεδίο ορισμού του  $T$ .
- b.  $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$  για κάθε βαθμωτό  $c$  και  $\mathbf{u}$  στο πεδίο ορισμού του  $T$ .

Κάθε μετασχηματισμός πίνακα (δηλαδή όταν  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ) είναι **γραμμικός**.

**Υπενθύμιση:** Θεώρημα για το γινόμενο  $A\mathbf{x}$

Αν  $A$  είναι ένας  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  πίνακας,  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι διανύσματα του  $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$  και  $c$  βαθμωτό, τότε

- a.  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- b.  $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί **διατηρούν** τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με βαθμωτό.

Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$

Η ιδιότητα  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  μας λέει ότι οι δυο παρακάτω επιλογές είναι ισοδύναμες:

**Επιλογή Α:** Πρώτα πρόσθεση, Μετά μετασχηματισμός

1. Προσθέτουμε τα διανύσματα  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ . Βρίσκουμε δηλαδή το άθροισμα τους στον  $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ .
2. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό  $T$  στο άθροισμα αυτό. Βρίσκουμε το  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  στον  $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ .

**Επιλογή Β:** Πρώτα μετασχηματισμός, Μετά πρόσθεση

1. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό  $T$  στα διανύσματα  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ . Βρίσκουμε δηλαδή τις εικόνες  $T(\mathbf{u})$ ,  $T(\mathbf{v})$  στον  $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ .
2. Προσθέτουμε τις εικόνες αυτές. Βρίσκουμε το  $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  στον  $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ .

Αν  $T$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός τότε από τον ορισμό προκύπτουν τα παρακάτω

- i.  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- ii.  $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$

για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  στο πεδίο ορισμού του  $T$  και για κάθε βαθμωτό  $c, d$ .

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = T(c\mathbf{u}) + T(d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

---

Ένας μετασχηματισμός που ικανοποιεί το (ii) για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  και για κάθε βαθμωτό  $c, d$  είναι γραμμικός.

- Θέτουμε  $c = d = 1$  για την πρόσθεση
- Θέτουμε  $d = 0$  για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό

Η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της σχέσης  $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$  οδηγεί στο

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_pT(\mathbf{v}_p)$$

Στη μηχανική και τη φυσική, η παραπάνω σχέση αναφέρεται ως **αρχή της υπέρθεσης** (ή αρχή της επαλληλίας).

---

**Παράδειγμα:** Θεωρήστε τα  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  ως σήματα που εισέρχονται σε ένα σύστημα και τα  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)$  ως τις αποκρίσεις του συστήματος στα αντίστοιχα σήματα.

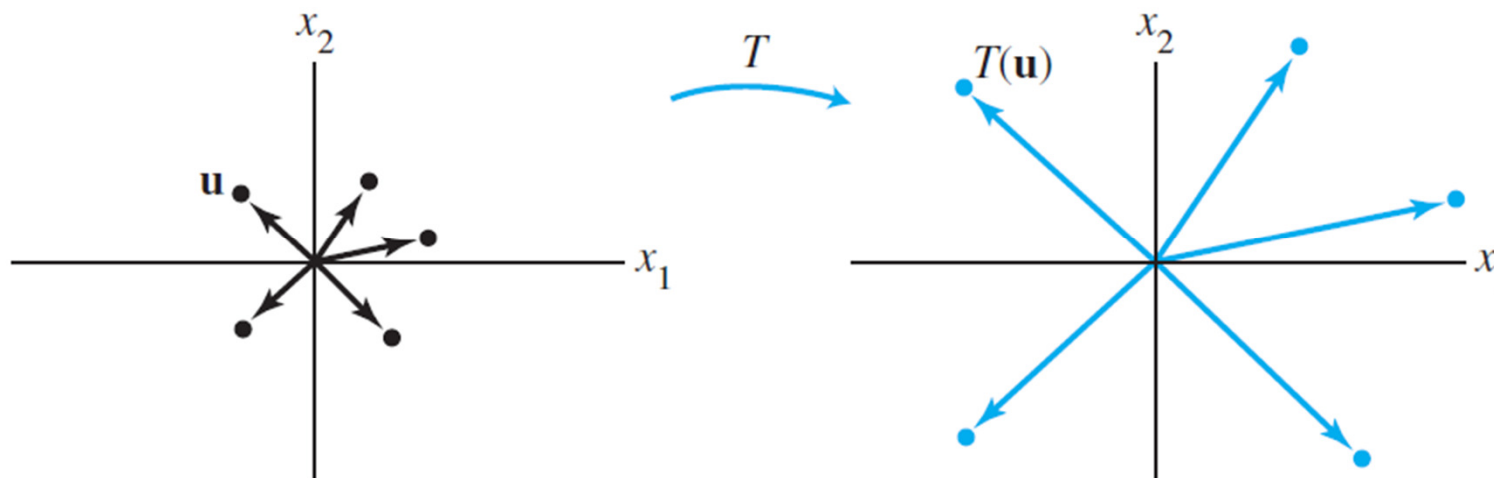
Το σύστημα ικανοποιεί την αρχή της υπέρθεσης αν, κάθε φορά που μια είσοδος εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός τέτοιων σημάτων, η απόκριση του συστήματος είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων στα επιμέρους σήματα.

## Μετασχηματισμός συστολής / διαστολής

Έστω ο μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$  με  $T(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$ .

Όταν  $0 \leq r \leq 1$  ο  $T$  ονομάζεται συστολή και όταν  $r > 1$  ονομάζεται διαστολή.

Ο μετασχηματισμός  $T$  ικανοποιεί τη σχέση  $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$ .  
Άρα ο  $T$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.



Μετασχηματισμός διαστολής