

Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Γραμμική Ανεξαρτησία

Διανυσματική εξίσωση ομογενούς συστήματος – Παράδειγμα

Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μπορεί να μελετηθεί με διαφορετικό τρόπο, γράφοντας την ως διανυσματική εξίσωση.

Παράδειγμα

Έστω A είναι ένας πίνακας 2×3 με στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Να γραφεί η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ως διανυσματική εξίσωση.

Λύση

Ο πίνακας A εκφράζεται μέσω των στηλών του ως $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$, άρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

Διανυσματική εξίσωση ομογενούς συστήματος – Παράδειγμα

Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μπορεί να γραφεί ως διανυσματική εξίσωση γράφοντας το γινόμενο $A\mathbf{x}$ ως **γραμμικό συνδυασμό** των στηλών του πίνακα A με βάρη τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή διανυσματικής εξίσωσης ως

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Σημείωση : $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Η πιο πάνω διανυσματική εξίσωση έχει πάντα την τετριμμένη λύση, δηλαδή όταν οι **αριθμοί** x_1, x_2, x_3 είναι **όλοι μηδέν**.

Όπως στην περίπτωση της εξίσωσης $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μας ενδιαφέρει αν η τετριμμένη λύση είναι μοναδική, έτσι και εδώ ένα ισοδύναμο ερώτημα είναι:

Υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2, x_3 , **όχι όλοι μηδέν**, που να ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση;

Δηλαδή, μπορώ να βρω αριθμούς x_1, x_2, x_3 , **όχι όλοι μηδέν**, ώστε τα τρία διανύσματα να “δώσουν” το μηδενικό διάνυσμα;

Από τη διανυσματική εξίσωση στον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας

Μπορώ να βρω αριθμούς x_1, x_2, x_3 , **όχι όλοι μηδέν**, ώστε τα τρία διανύσματα να “δώσουν” το μηδενικό διάνυσμα;

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Πως βρίσκω αν υπάρχουν x_1, x_2, x_3 **όχι όλα μηδέν**;

Η διανυσματική εξίσωση έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ η λύση του γραμμικού συστήματος σε μορφή διανύσματος.

Το γραμμικό σύστημα θα έχει

- Είτε **μόνο την τετριμμένη λύση**, δηλαδή $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - Κλιμακωτή μορφή $\rightarrow$ Μόνο βασικές μεταβλητές
- Είτε την τετριμμένη λύση **και μη τετριμμένες λύσεις** ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$).
 - Κλιμακωτή μορφή $\rightarrow$ Μία ή περισσότερες ελεύθερες μεταβλητές

Γραμμική ανεξαρτησία - Ορισμός

Ένα **σύνολο** διανυσμάτων με δείκτες $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ στο $\mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι **γραμμικώς ανεξάρτητο** (linearly independent) αν η διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

έχει **μόνο την τετριμμένη λύση**.

Το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ θα λέμε ότι είναι **γραμμικώς εξαρτημένο** (linearly dependent) αν υπάρχουν βάρη $c_1, \dots, c_p$ όχι όλα μηδενικά, τέτοια ώστε

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (1)$$

- Η εξίσωση (1) θα λέμε ότι είναι μια **σχέση γραμμικής εξάρτησης** (linear dependence relation) μεταξύ των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ όταν τα βάρη δεν είναι όλα μηδέν.
- Η ιδιότητα της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας **είναι ιδιότητα του συνόλου** και όχι των μεμονωμένων διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι για τρία διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ισχύει η σχέση:

$$5\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

- **Έλεγχος Ορισμού:** Οι συντελεστές είναι $c_1 = 5, c_2 = -6, c_3 = 2$.
- **Παρατήρηση:** Οι αριθμοί αυτοί **ΔΕΝ** είναι όλοι μηδέν.
- **Συμπέρασμα:** Το **σύνολο** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι για τρία διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ισχύει η σχέση:

$$5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

- **Έλεγχος Ορισμού:** Οι συντελεστές είναι $c_1 = 5, c_2 = 3, c_3 = 0$.
- **Παρατήρηση:** Οι αριθμοί αυτοί **ΔΕΝ** είναι όλοι μηδέν.
- **Συμπέρασμα:** Το **σύνολο** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Παράδειγμα 3

Έστω ότι για τρία διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι **αδύνατον** να βρούμε έστω και έναν αριθμό x_1, x_2, x_3 διαφορετικό από το μηδέν που να επαληθεύει την ισότητα:

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Με απλά λόγια: Ο μόνος τρόπος για να δώσει ένας γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ το μηδενικό διάνυσμα είναι να πολλαπλασιάσουμε το καθένα με το μηδέν!

- **Συμπέρασμα:** Το **σύνολο** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητο**.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix}$.

- α.** Προσδιορίστε εάν το **σύνολο** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- β.** Εάν είναι εφικτό, βρείτε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

Λύση

Θα πρέπει να προσδιορίσουμε αν η διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

έχει και μη τετριμμένες λύσεις.

α. Ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει δυο βασικές μεταβλητές τις x_1 και x_2 και μια ελεύθερη μεταβλητή τη x_3 . Συνεπώς έχει και μη τετριμμένες λύσεις.

Κάθε μη μηδενική τιμή της x_3 προσδιορίζει και μια μη τετριμμένη λύση. Δηλαδή μια λύση

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Επομένως το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ θα λέμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

β. Για να βρούμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και γράφουμε το σύστημα που προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε μια μη μηδενική τιμή για την ελεύθερη μεταβλητή x_3 . Έστω $x_3 = 1$. Τότε $x_1 = -5$ και $x_2 = 3$.

Αντικαθιστούμε αυτές τις τιμές στην διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

και παίρνουμε

$$-5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

δηλαδή

$$-5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Αυτή είναι μια (μεταξύ άπειρου πλήθους) πιθανή **σχέση γραμμικής εξάρτησης** μεταξύ των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών ενός πίνακα

Έστω A είναι ένας πίνακας $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ με στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Η εξίσωση πινάκων

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

μπορεί να γραφτεί (βλέπε ορισμός $A\mathbf{x}$) ως

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Υπενθύμιση: Ορισμός $A\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A
με βάρη τα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbf{x}$.

Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών ενός πίνακα

Οι στήλες ενός πίνακα είναι **γραμμικώς ανεξάρτητες** αν και μόνο αν η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την **τετριμμένη λύση**.

$$\begin{array}{c} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Updownarrow \\ [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \Updownarrow \\ x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \end{array}$$

Κάθε **σχέση γραμμικής εξάρτησης** μεταξύ των στηλών του πίνακα A αντιστοιχεί σε **μη τετριμμένη λύση** του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Παράδειγμα

Προσδιορίστε αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

Πρέπει να μελετήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Μετασχηματίζουμε τον **επαυξημένο πίνακα** του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς υπάρχουν τρεις βασικές μεταβλητές και καμία ελεύθερη μεταβλητή. Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει **μόνο την τετριμμένη λύση**. Άρα οι στήλες του πίνακα A είναι **γραμμικώς ανεξάρτητες**.

Έστω ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$



Επαυξημένος πίνακας

$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \mathbf{0}]$



Κλιμακωτή μορφή

Κλιμακωτή μορφή → Μόνο βασικές μεταβλητές → Το σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο

Κλιμακωτή μορφή → Μία ή περισσότερες ελεύθερες μεταβλητές → Το σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο → Ανηγμένη Κλιμακωτή μορφή → **Σχέση γραμμικής εξάρτησης**

Προσοχή!

Η παραπάνω διαδικασία (αλγόριθμος) **δεν πρέπει να απομνημονευτεί ως άλλη μία “συνταγή μαγειρικής”**.

Πρέπει να είστε σε θέση να εξηγήσετε **ΓΙΑΤΙ** ισχύει κάθε βήμα και ποιες είναι οι **λογικές συνδέσεις** μεταξύ των βημάτων.

Ορισμός: “Ένα **σύνολο** διανυσμάτων με δείκτες $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ στο $\mathbb{R}^n$...”

- **Ιδιότητα του Συνόλου*:** Η ιδιότητα της γραμμικής ανεξαρτησίας ή εξάρτησης **είναι ιδιότητα του συνόλου** (ανήκει στο **σύνολο**) και όχι στα μεμονωμένα διανύσματα.
- **“Διακόπτης” (on/off):** Οι δύο αυτές έννοιες (**ανεξαρτησία/εξάρτηση**) είναι **συμπληρωματικές** και λειτουργούν ως ένας “διακόπτης” (on/off). Ένα **σύνολο διανυσμάτων** δεν μπορεί να είναι και τα δύο ταυτόχρονα.
- **Η Λογική Ισοδυναμία:**
Ανεξάρτητο $\leftrightarrow$ Όχι εξαρτημένο
Εξαρτημένο $\leftrightarrow$ Όχι ανεξάρτητο

* Συχνά αναφέρεται ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα, εννοώντας ότι το σύνολο με δείκτες $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο ή γραμμικώς ανεξάρτητο, αντίστοιχα.

“Σχέση Γραμμικής Εξάρτησης”: Το κρυφό κλειδί του ορισμού

Έστω ότι για τρία διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ βρήκαμε τη **σχέση γραμμικής εξάρτησης**:

$$5\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Ο συντελεστής του $\mathbf{v}_1$ δεν είναι μηδέν. Επομένως, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς $\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v}_1 = 6/5\mathbf{v}_2 - 2/5\mathbf{v}_3$$

Συνεπώς, το $\mathbf{v}_1$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Εφόσον το $\mathbf{v}_1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$, κάθε φορά που εμφανίζεται το $\mathbf{v}_1$ σε έναν γραμμικό συνδυασμό των τριών διανυσμάτων, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

Τι σημαίνει αυτό για τα σύνολα $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ και $\text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$;

Σύνολα ενός διανύσματος

- Ένα **σύνολο** που περιέχει μόνο **ένα διάνυσμα**, έστω $\mathbf{v}_1$, ορίζεται ως **γραμμικώς ανεξάρτητο** αν και μόνο αν το $\mathbf{v}_1$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα ($\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$).

Αυτό συμβαίνει επειδή η διανυσματική εξίσωση $x_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση όταν $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

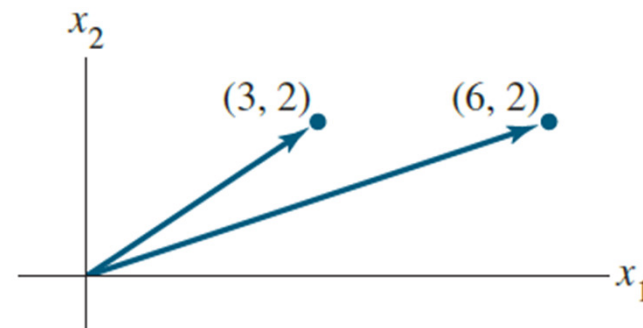
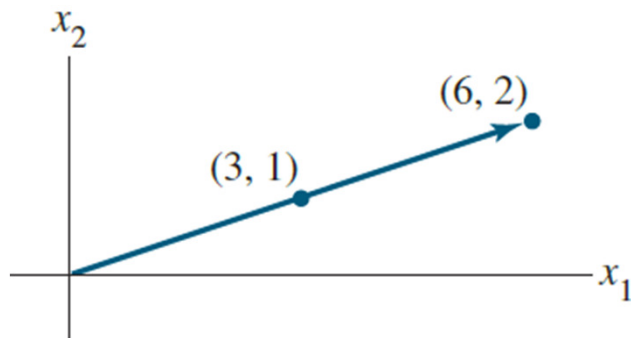
- Ένα **σύνολο** που περιέχει **μόνο το μηδενικό διάνυσμα** ορίζεται ως **γραμμικώς εξαρτημένο**.

Αυτό συμβαίνει επειδή η διανυσματική εξίσωση $x_1 \mathbf{0} = \mathbf{0}$ έχει και μη τετριμμένες λύσεις.

Σύνολα δύο διανυσμάτων

Έλεγχος “με μια ματιά”

- Ένα **σύνολο δύο διανυσμάτων** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.
- Ένα **σύνολο δύο διανυσμάτων** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν κανένα από τα διανύσματα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.



ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο παραπάνω έλεγχος ισχύει μόνο για σύνολα δυο διανυσμάτων.

Ο έλεγχος “με μια ματιά” ισχύει μόνο για σύνολα δυο διανυσμάτων

Παράδειγμα

Έστω τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ με

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Κανένα από τα διανύσματα αυτά δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Όμως

$$2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 1\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Συνεπώς, το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Θεώρημα: Χαρακτηρισμός γραμμικώς εξαρτημένων συνόλων

- a. Ένα σύνολο διανυσμάτων με δείκτες $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ δύο ή περισσότερων διανυσμάτων είναι γραμμικώς εξαρτημένο εάν και μόνο εάν τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα στο S είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- b. Εάν το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο και $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, τότε κάποιο $\mathbf{v}_j$ (με $j > 1$) είναι γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων διανυσμάτων, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Παράδειγμα

$$\text{Δίνονται } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Περιγράψτε το σύνολο που παράγεται (span) από τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.
2. Εξηγήστε γιατί ένα διάνυσμα $\mathbf{w}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Λύση

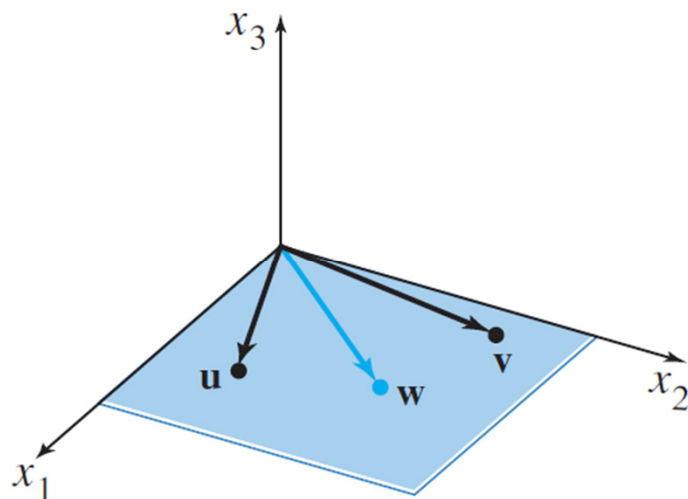
Το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, καθώς κανένα από τα δύο διανύσματα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Συνεπώς το $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

Συγκεκριμένα, το $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι το επίπεδο x_1x_2 δηλαδή το επίπεδο με εξίσωση $x_3 = 0$.

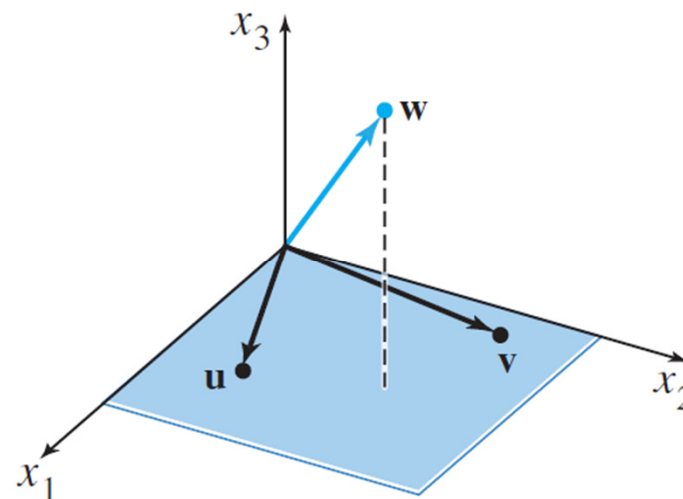
Λύση (συνέχεια)

Αν το $\mathbf{w}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ τότε το $\mathbf{w}$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Συνεπώς το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Αν το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, κάποιο διάνυσμα του συνόλου είναι γραμμικώς συνδυασμός των προηγούμενων διανυσμάτων από αυτό (καθώς $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$). Αυτό το διάνυσμα πρέπει να είναι το $\mathbf{w}$, αφού το σύνολο $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Συνεπώς το $\mathbf{w}$ ανήκει στο $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.



$$\mathbf{w} \in \text{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$



$$\mathbf{w} \notin \text{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Θεώρημα 1: Εάν ένα σύνολο περιέχει περισσότερα διανύσματα από όσα είναι τα στοιχεία του κάθε διανύσματος, τότε το σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Δηλαδή, οποιοδήποτε σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ στο $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν $p > n$.

$$\begin{matrix} & & p \\ n & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Θεώρημα 2: Αν ένα σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ στο $\mathbb{R}^n$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε το σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο.