

# Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

## Σύνολα Λύσεων Γραμμικών Συστημάτων

- Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται ότι είναι **ομογενές** αν μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

όπου  $A$  είναι ένας  $m \times n$  πίνακας και  $\mathbf{0}$  είναι το μηδενικό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^m$ .

- Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  έχει **πάντα τουλάχιστον μία λύση**, δηλαδή το  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (το μηδενικό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$ ).
- Η λύση  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ονομάζεται συνήθως **τετριμμένη λύση**.
- Η ομογενής εξίσωση  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  έχει μια **μη τετριμμένη λύση** εάν και μόνο εάν η εξίσωση έχει **τουλάχιστον μία ελεύθερη μεταβλητή**.

### Παράδειγμα

Προσδιορίστε εάν το ακόλουθο ομογενές σύστημα έχει μια μη τετριμμένη λύση. Στη συνέχεια, **περιγράψτε** το σύνολο των λύσεων.

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

### Λύση

Έστω **A** ο πίνακας συντελεστών του συστήματος. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος έχει τη μορφή

$$[A \ 0]$$

## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 1

---

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την κλιμακωτή μορφή, βλέπουμε ότι το σύστημά μας έχει 2 βασικές μεταβλητές  $x_1$ ,  $x_2$  και μία **ελεύθερη μεταβλητή**, την  $x_3$ .

Άρα το σύστημα  $Ax = \mathbf{0}$  έχει **μη-τετριμμένες λύσεις**.

## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 1

---

Αν συνεχίσουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών φτάνουμε στην **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα

$$x_1 - 4/3 x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$0 = 0$$

## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 1

---

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ως προς τις βασικές μεταβλητές μας οδηγεί στην **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου λύσεων.

$$x_1 = 4/3 x_3$$

$$x_2 = 0$$

$x_3$  ελεύθερη μεταβλητή

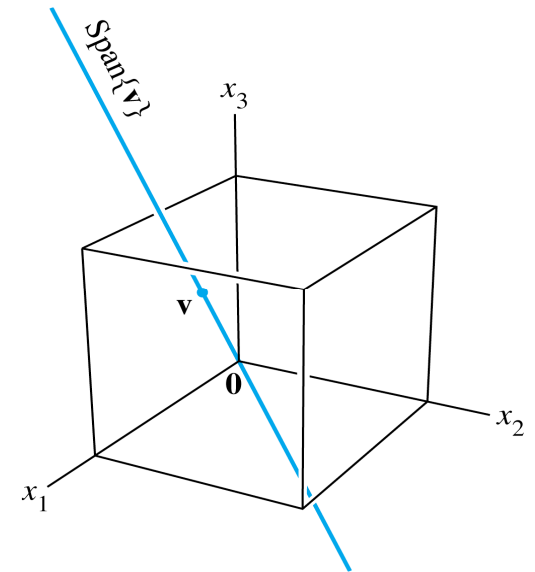
Από τις παραπάνω εκφράσεις των μεταβλητών  $x_1, x_2, x_3$  προκύπτει η γενική λύση του  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  σε **μορφή διανύσματος**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \mathbf{v}, \quad \text{όπου } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = x_3 \mathbf{v} \quad (\text{με } x_3 \text{ ελεύθερη μεταβλητή})$$

## Συμπεράσματα

- Κάθε λύση του αρχικού μας συστήματος  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του  $\mathbf{v}$ .
- Η τετριμμένη λύση λαμβάνεται επιλέγοντας  $x_3 = 0$ .
- Γεωμετρικά, το σύνολο λύσεων είναι η ευθεία που περνά από το  $\mathbf{0}$ . Δηλαδή το  $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ .



## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 2

---

### Παράδειγμα

Περιγράψτε όλες τις λύσεις του συστήματος

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

### Λύση

Μια μεμονωμένη γραμμική εξίσωση αποτελεί την απλούστερη δυνατή μορφή γραμμικού συστήματος (ένα σύστημα  $1 \times 3$ , δηλαδή  $1$  εξίσωση με  $3$  αγνώστους).

Λύνουμε ως προς τη βασική μεταβλητή  $x_1$ .

Η **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου λύσεων είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 &\text{ ελεύθερη μεταβλητή} \\ x_3 &\text{ ελεύθερη μεταβλητή} \end{aligned}$$

## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 2

Η **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου λύσεων είναι

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.3x_2 + 0.2x_3 \\x_2 &\text{ ελεύθερη μεταβλητή} \\x_3 &\text{ ελεύθερη μεταβλητή}\end{aligned}$$

Η γενική λύση του  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  σε **μορφή διανύσματος** είναι

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έστω } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

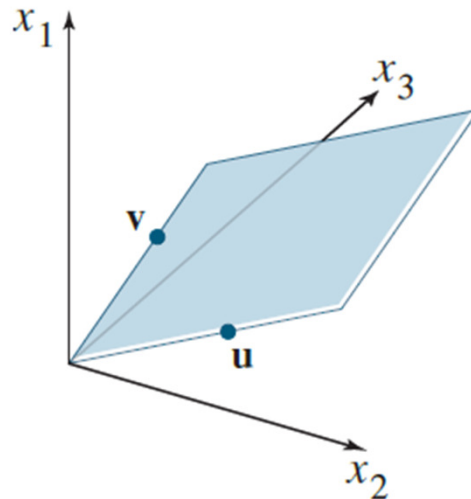
## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 2

Η γενική λύση του  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  σε **μορφή διανύσματος** είναι

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{u} + x_3 \mathbf{v} \quad (\text{με } x_2, x_3 \text{ ελεύθερες μεταβλητές})$$

Δηλαδή το σύνολο των λύσεων είναι το  $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ .

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γεωμετρική περιγραφή του συνόλου των λύσεων.



$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Γιατί το  $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  είναι επίπεδο και όχι ευθεία;*

## Ομογενή γραμμικά συστήματα – Παράδειγμα 2

---

- Η εξίσωση

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad (1)$$

είναι ένα παράδειγμα **έμμεσης (implicit) περιγραφής** του επιπέδου.

- Η εξίσωση

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{u} + x_3 \mathbf{v} \quad (\text{με } x_2, x_3 \text{ ελεύθερες μεταβλητές})$$

η οποία προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης (1) είναι ένα παράδειγμα **άμεσης (explicit) περιγραφής** του επιπέδου.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **παραμετρική διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου.

Η παραμετρική διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{u} + x_3 \mathbf{v} \quad (\text{με } x_2, x_3 \text{ ελεύθερες μεταβλητές})$$

συχνά γράφεται ως

$$\mathbf{x} = s \mathbf{u} + t \mathbf{v} \quad (s, t \text{ στο } \mathbb{R})$$

Το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- Μπορεί να εκφραστεί ως  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .
- Εάν η μόνη λύση είναι το μηδενικό διάνυσμα, μπορεί να εκφραστεί ως  $\text{Span}\{\mathbf{0}\}$ .

### Παράδειγμα

Περιγράψτε όλες τις λύσεις του  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

### Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος έχει τη μορφή

$$[A \ \mathbf{b}]$$

## Λύσεις μη-ομογενών γραμμικών συστημάτων – Παράδειγμα 3

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα καταλήγουμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, βλέπουμε ότι το σύστημά μας έχει 2 βασικές μεταβλητές  $x_1$ ,  $x_2$  και μία **ελεύθερη μεταβλητή**, την  $x_3$ .

Αυτός ο επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα

$$x_1 - \frac{4}{3}x_3 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$0 = 0$$

## Λύσεις μη-ομογενών γραμμικών συστημάτων – Παράδειγμα 3

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος ως προς τις βασικές μεταβλητές μας οδηγεί στην παραμετρική περιγραφή του συνόλου λύσεων.

$$x_1 = -1 + 4/3 x_3$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 \text{ ελεύθερη μεταβλητή}$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις των μεταβλητών  $x_1, x_2, x_3$  προκύπτει η γενική λύση του  $Ax = \mathbf{b}$  σε μορφή διανύσματος

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 4/3 x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \quad (t \text{ στο } \mathbb{R})$$

**Επαλήθευση:** Ξεκινώντας από το γινόμενο  $A\mathbf{x}$  πρέπει να καταλήξουμε στο  $\mathbf{b}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = A \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 A \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

# Λύσεις ομογενών και μη-ομογενών γραμμικών συστημάτων

Ομογενές γραμμικό σύστημα

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

Εξίσωση πινάκων  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος πίνακας  $[A \ \mathbf{b}]$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Μη-ομογενές γραμμικό σύστημα

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1$$

$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4$$

Εξίσωση πινάκων  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος πίνακας  $[A \ \mathbf{b}]$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

# Λύσεις ομογενών και μη-ομογενών γραμμικών συστημάτων

Ομογενές γραμμικό σύστημα  
Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η λύση σε παραμετρική διανυσματική μορφή

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

με  $x_3$  ελεύθερη μεταβλητή

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \quad (t \text{ στο } \mathbb{R})$$

Μη-ομογενές γραμμικό σύστημα  
Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η λύση σε παραμετρική διανυσματική μορφή

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

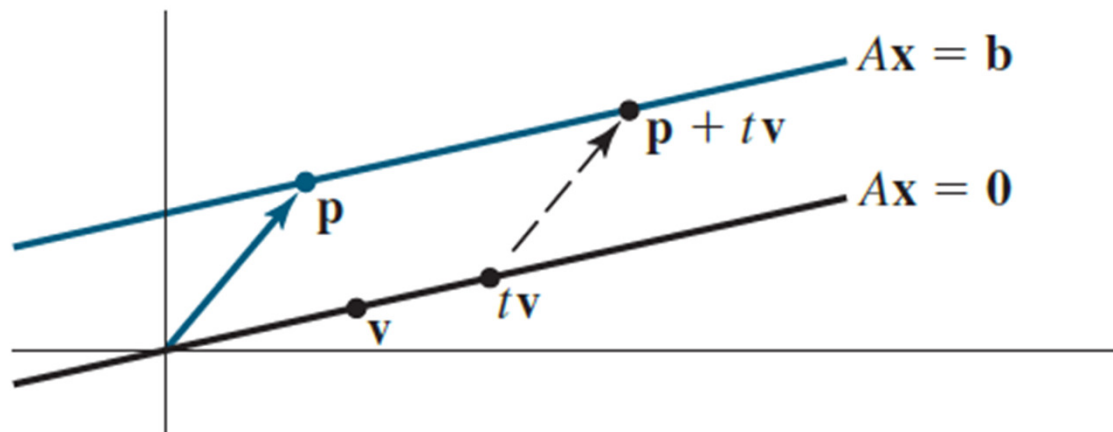
με  $x_3$  ελεύθερη μεταβλητή

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \quad (t \text{ στο } \mathbb{R})$$

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \quad (t \text{ στο } \mathbb{R})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \quad (t \text{ στο } \mathbb{R})$$

## Γεωμετρική περιγραφή



Γεωμετρικά, το σύνολο λύσεων του  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  είναι το σύνολο λύσεων του  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  το οποίο έχει **μετατοπιστεί παράλληλα** μακριά από την αρχή των αξόνων κατά το διάνυσμα  $\mathbf{p}$ .

**Θεώρημα:** Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση  $Ax = b$  είναι συνεπής για κάποιο δεδομένο  $b$  και έστω  $p$  μία λύση. Τότε το σύνολο λύσεων του  $Ax = b$  είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων της μορφής  $w = p + v_h$  όπου  $v_h$  είναι οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης  $Ax = 0$ .

1. Απόδειξη ότι το  $w$  είναι λύση

$$Aw = A(p + v_h) = Ap + Av_h = b + 0 = b$$

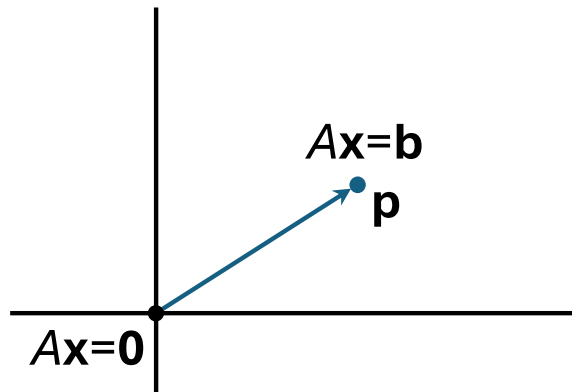
2. Απόδειξη ότι **κάθε**  $w$  έχει αυτή τη μορφή

$$\text{Αν } Aw = b, \text{ τότε } A(w - p) = Aw - Ap = b - b = 0$$

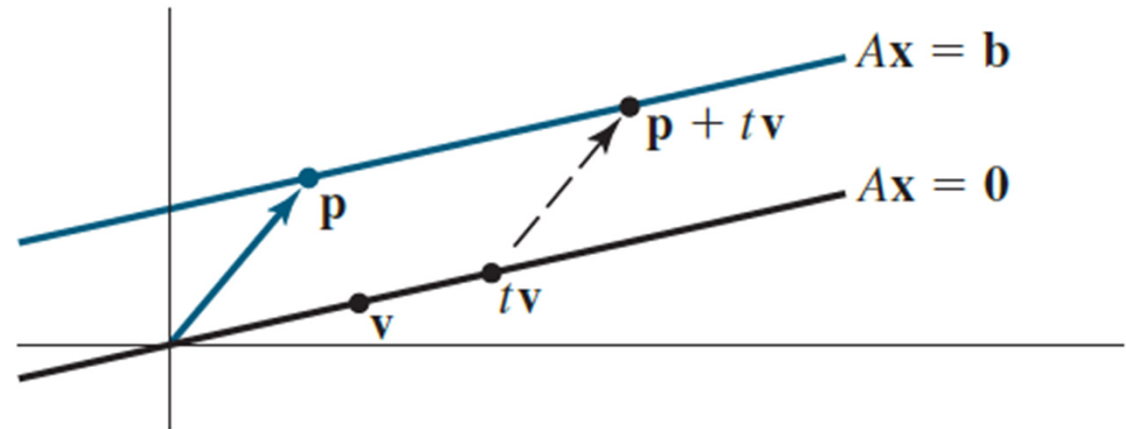
Άρα το διάνυσμα  $v_h = w - p$  είναι λύση του ομογενούς, συνεπώς  $w = p + v_h$ .

# Θεώρημα της μετατόπισης

Καμία ελεύθερη μεταβλητή



Μια ελεύθερη μεταβλητή



Δυο ελεύθερες μεταβλητές

