

Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Η εξίσωση πινάκων $Ax = b$

Ένας συμπαγής τρόπος να γράψουμε ένα γραμμικό σύστημα

Γινόμενο πίνακα με διάνυσμα – Ορισμός

Έστω A είναι ένας πίνακας $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ με στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. Το **γινόμενο του A με το $\mathbf{x}$** (συμβολίζεται $A\mathbf{x}$) είναι ο **γραμμικός συνδυασμός** των στηλών του A με βάρη τα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbf{x}$. Δηλαδή

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boxed{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}$$

Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με βάρη τα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbf{x}$.

Το $A\mathbf{x}$ ορίζεται μόνο εάν το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των στοιχείων του $\mathbf{x}$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε το $A\mathbf{x}$.

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 6 - 7 \\ 0 - 15 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω A είναι ένας πίνακας 2×3 με στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$.
Να υπολογίσετε το $A\mathbf{x}$.

Λύση

Ο πίνακας A εκφράζεται μέσω των στηλών του ως $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$
όπου κάθε στήλη $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$) είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$.

Για να οριστεί το $A\mathbf{x}$ πρέπει το **πλήθος των στηλών** του A να ισούται με το **πλήθος των στοιχείων** του $\mathbf{x}$. Άρα το διάνυσμα $\mathbf{x}$ πρέπει να έχει **3** στοιχεία (x_1, x_2, x_3) , δηλαδή να ανήκει στον $\mathbb{R}^3$.

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$$

Το $A\mathbf{x}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A . Συνεπώς είναι ένα διάνυσμα με **2** στοιχεία, δηλαδή ανήκει στον $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα: Για $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^m$ γράψτε τον γραμμικό συνδυασμό

$$3\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3$$

σαν γινόμενο πίνακα με διάνυσμα.

Λύση: Τοποθετούμε τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ως στήλες ενός πίνακα A και τα βάρη $3, -5, 7$ σε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$.

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3 = A\mathbf{x}$$

Υπενθύμιση - Παράδειγμα από τη διάλεξη: Διανυσματικές εξισώσεις

$$\text{Έστω } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ μπορεί να **κατασκευαστεί** (ή να γραφτεί) ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.

Δηλαδή, προσδιορίστε αν υπάρχουν βάρη x_1 και x_2 τέτοια ώστε

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Από την διανυσματική εξίσωση στην εξίσωση πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Δεδομένα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Το **αριστερό μέλος** της διανυσματικής εξίσωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ με βάρη τα x_1 και x_2 αντίστοιχα. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε αυτή τη διανυσματική εξίσωση ως

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

όπου $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$ και $\mathbf{x}$ το διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ με στοιχεία x_1 και x_2 .

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Γραμμικό Σύστημα – Διανυσματική Εξίσωση – Εξίσωση Πινάκων

Γραμμικό Σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3\end{aligned}$$

Προσδιορίστε το σύνολο των λύσεων.

Διανυσματική Εξίσωση

$$x_1 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Μπορεί το διάνυσμα $\mathbf{b}$ να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.

Εξίσωση Πινάκων

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να βρεθεί διάνυσμα $\mathbf{x}$ που να επαληθεύει την εξίσωση πινάκων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Όπου $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$.

Εξετάστε αν $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Ίδιο μαθηματικό πρόβλημα — Διαφορετικοί τρόποι να το βλέπουμε.

Μια* ενιαία μέθοδος επίλυσης:

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών στον **επαυξημένο πίνακα**.

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}]$$

*Όχι όμως η μοναδική!

Πίνακας συντελεστών vs Επαυξημένος πίνακας

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3\end{aligned}$$

Πίνακας συντελεστών

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$$

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Η Εξίσωση Πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Θεώρημα: Αν A είναι ένας $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ πίνακας με στήλες $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ και αν $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, τότε η εξίσωση

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με την διανυσματική εξίσωση

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

η οποία με την σειρά της, έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με **το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων** του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}]$$

Δύο όψεις της εξίσωσης $Ax = b$

Πολλές φορές γράφουμε “**Σύστημα $Ax = b$** ” αντί για “**Εξίσωση πινάκων $Ax = b$** ”

Σύστημα $Ax = b$: Αυτός ο όρος χρησιμοποιείται πιο συχνά και μας δείχνει ότι πίσω από αυτή τη σύντομη γραφή κρύβεται ένα κλασικό σύστημα με γραμμικές εξισώσεις και αγνώστους.

Εξίσωση πινάκων $Ax = b$: Αυτός ο όρος τονίζει τη δομή. Μας δείχνει ότι αντιμετωπίζουμε ολόκληρο το σύστημα σαν μία και μοναδική εξίσωση, όπου τα “τούβλα” μας (A , x και b) δεν είναι απλοί αριθμοί, αλλά πίνακες (όπως ο πίνακας συντελεστών A και οι πίνακες-στήλες x και b).

Η Εξίσωση Πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – Έπαρξη λύσεων

Από τον ορισμό του $A\mathbf{x}$ προκύπτει ότι:

Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν το $\mathbf{b}$ είναι **έναν** γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A .

Τι σημαίνει η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση;

Σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ένα συγκεκριμένο διάνυσμα $\mathbf{x}$ με στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ που να επαληθεύει την ισότητα.

Τι είναι το $A\mathbf{x}$ σύμφωνα με τον ορισμό;

Το $A\mathbf{x}$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ του A με βάρη τα $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Δηλαδή

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

Συνεπώς

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Η Εξίσωση Πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – Έπαρξη λύσεων

Η εξίσωση πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν το $\mathbf{b}$ είναι **ένας** γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A .

Ερωτήσεις - Για **ένα** (συγκεκριμένο) $\mathbf{b}$

- Πότε η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση;
- Πότε το $\mathbf{b}$ είναι **ένας** γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A ;
- Πότε το $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\text{στήλες του } A\}$;
 - Για να ανήκει το $\mathbf{b}$ στο $\text{Span}\{\text{στήλες του } A\}$ πρέπει το $\mathbf{b}$ να μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A .

Η Εξίσωση Πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – Έπαρξη λύσεων

Το γινόμενο $A\mathbf{x}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A .

Δηλαδή, ένα διάνυσμα που ανήκει στο $\text{Span}\{\text{στήλες του } A\}$.

Συγκεκριμένα, αν A είναι ένας $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ πίνακας με στήλες $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ τότε

$$\text{Span}\{\text{στήλες του } A\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$



υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$

Τα $A\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Μια πιο δύσκολη ερώτηση

Πότε η εξίσωση πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση **για κάθε** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$;

Η βασική προϋπόθεση: Για να έχει λύση η εξίσωση πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, για **ένα** (συγκεκριμένο) $\mathbf{b}$ πρέπει

$$\mathbf{b} \in \text{Span}\{\text{στήλες του } A\}$$

Η απαίτηση για κάθε $\mathbf{b}$: Για να έχει λύση η εξίσωση πινάκων για *οποιοδήποτε* $\mathbf{b}$, πρέπει το $\text{Span}\{\text{στήλες του } A\}$ να μην είναι απλώς ένα “κομμάτι” του $\mathbb{R}^m$, αλλά να απλώνεται και να καλύπτει ολόκληρο τον $\mathbb{R}^m$. Με άλλα λόγια, οι στήλες του A πρέπει να μπορούν να “κατασκευάσουν” κάθε πιθανό διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή

$$\text{Span}\{\text{στήλες του } A\} = \mathbb{R}^m$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε: Οι στήλες του A παράγουν (span) τον $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα: Αν A είναι ένας $\mathbf{m} \times n$ πίνακας, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες. Δηλαδή, για έναν οποιονδήποτε πίνακα A , οι παρακάτω προτάσεις είτε είναι όλες αληθείς είτε όλες ψευδείς.

- a. Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για **κάθε** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.
- b. **Κάθε** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A .
- c. Οι στήλες του A παράγουν (span) τον $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.
- d. Ο **πίνακας** A έχει θέση οδηγού σε κάθε γραμμή του.

Οι προτάσεις (a), (b) και (c) είναι λογικά ισοδύναμες απευθείας από τους ορισμούς του γινομένου $A\mathbf{x}$ και του Span. Περιγράφουν το ίδιο ακριβώς γεγονός με διαφορετικά λόγια. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι, για έναν οποιονδήποτε πίνακα A , οι προτάσεις (a) και (d) είναι είτε και οι δύο αληθείς είτε και οι δύο ψευδείς. Με αυτό τον τρόπο συνδέονται και οι τέσσερις προτάσεις.

Η Εξίσωση Πινάκων $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – Έπαρξη λύσεων

Έστω U μια κλιμακωτή μορφή του A . Για οποιοδήποτε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, μπορούμε να εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον επαυξημένο πίνακα $[A \ \mathbf{b}]$, ώστε να καταλήξουμε σε έναν επαυξημένο πίνακα της μορφής $[U \ \mathbf{d}]$, όπου $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$

$$[A \ \mathbf{b}] \sim \dots \sim [U \ \mathbf{d}]$$

Αν η πρόταση (d) είναι αληθής, τότε κάθε γραμμή του U περιέχει θέση οδηγού και δεν μπορεί να υπάρχει θέση οδηγού στην τελευταία, επαυξημένη στήλη. Επομένως, το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b}$, **άρα η πρόταση (a) είναι αληθής**.

Αν η πρόταση (d) είναι ψευδής, τότε η τελευταία γραμμή του U αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά. Επιλέγουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{d}$ με τελευταίο στοιχείο ίσο με 1 (και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0). Τότε ο επαυξημένος πίνακας $[U \ \mathbf{d}]$, αντιστοιχεί σε ασυνεπές σύστημα.

Επειδή οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι αντιστρέψιμες, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα $[U \ \mathbf{d}]$ στη μορφή $[A \ \mathbf{b}]$. Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι επίσης ασυνεπές, επομένως **η πρόταση (a) είναι ψευδής**.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε το $A\mathbf{x}$.

1. Μέσω του ορισμού

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 6 - 7 \\ 0 - 15 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Μέσω του κανόνα γραμμή-διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε το $A\mathbf{x}$.

1. Μέσω του ορισμού

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. Μέσω του κανόνα γραμμή-διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας με 1 στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού ονομάζεται **ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας** και συμβολίζεται με I .

Ο υπολογισμός του $I\mathbf{x}$ στο προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Συχνά τον μοναδιαίο πίνακα $n \times n$ τον συμβολίζουμε ως I_n

Για παράδειγμα αν $n = 4$ τότε

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: Αν A είναι ένας $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ πίνακας, $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ και c βαθμωτό, τότε

a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

b. $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

Απόδειξη (για την απλοποιημένη περίπτωση $\mathbf{n} = 3$):

Έστω ότι ο πίνακας A εκφράζεται μέσω των στηλών του ως $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ όπου κάθε στήλη $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$) είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Έστω επίσης οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη (για την απλοποιημένη περίπτωση **$n = 3$**)

Πρόταση (a): $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{a}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{a}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{a}_3 \\ &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3) \\ &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \end{aligned}$$

Απόδειξη (για την απλοποιημένη περίπτωση $n = 3$)

Πρόταση (b): $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \left(c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix} \\ &= (cu_1)\mathbf{a}_1 + (cu_2)\mathbf{a}_2 + (cu_3)\mathbf{a}_3 \\ &= c(u_1\mathbf{a}_1) + c(u_2\mathbf{a}_2) + c(u_3\mathbf{a}_3) \\ &= c(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) \\ &= c(A\mathbf{u}) \end{aligned}$$