

Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Διανυσματικές Εξισώσεις

Μέχρι να συναντήσουμε την αυστηρή θεωρία των «Διανυσματικών Χώρων»,

η **λέξη διάνυσμα** (vector) θα σημαίνει ένα μόνο απλό πράγμα για εμάς:

μια διατεταγμένη λίστα πραγματικών αριθμών.

Διάνυσμα $\rightarrow$ διατεταγμένη λίστα πραγματικών αριθμών

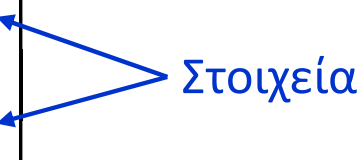
Παράδειγμα: Διατεταγμένη λίστα **2** αριθμών:

$$(3, -1)$$

Το πρώτο στοιχείο είναι το 3, το δεύτερο στοιχείο είναι το -1.

Θα συμβολίζουμε τα διανύσματα ως **πίνακα** με **μία μόνο στήλη**.

Παραδείγματα διανυσμάτων με 2 στοιχεία:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$


Στοιχεία

όπου w_1 και w_2 είναι πραγματικοί αριθμοί.

Το **σύνολο** όλων των **διανυσμάτων με 2 στοιχεία** συμβολίζεται ως $\mathbb{R}^2$ (διαβάζεται R-δυο).

Διάνυσμα $\rightarrow$ διατεταγμένη λίστα πραγματικών αριθμών

Δυο διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ είναι ίσα αν και μόνο αν τα **αντίστοιχα** στοιχεία τους είναι ίσα.

Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **δεν** είναι ίσα.

Διάνυσμα $\rightarrow$ διατεταγμένη λίστα πραγματικών αριθμών

1. Πρόσθεση διανυσμάτων (Vector Addition)

Δοσμένων δυο διανυσμάτων $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ στον $\mathbb{R}^2$ ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$), το **άθροισμά** (sum) τους $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα που προκύπτει αν **προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

$$\text{Αν } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ τότε } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 \\ -2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτό (Scalar Multiplication)

Δοσμένου ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ στον $\mathbb{R}^2$ και ενός **πραγματικού αριθμού** c , το **βαθμωτό πολλαπλάσιο** (scalar multiple) του $\mathbf{u}$ με το c είναι το διάνυσμα $c\mathbf{u}$ που προκύπτει **πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο** στο $\mathbf{u}$ με c .

$$\text{Αν } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } c = 2, \text{ τότε } c\mathbf{u} = 2 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Αν $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ υπολογίστε τα $4\mathbf{u}$, $(-3)\mathbf{v}$ και $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$.

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

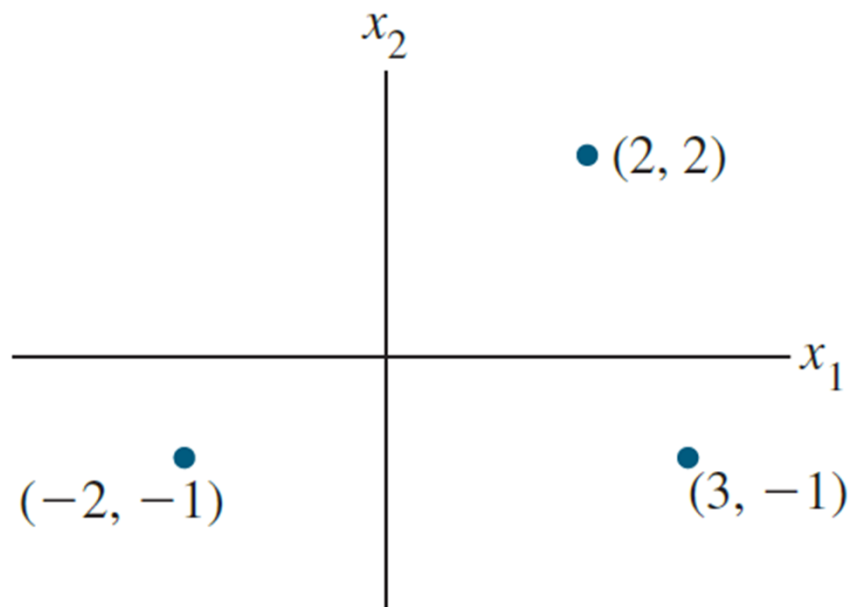
$$(-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα ως σημεία

Στο επίπεδο, ένα **σημείο** προσδιορίζεται από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** (a, b) .

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο σημείο (a, b) το διάνυσμα $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^2$ ως το σύνολο όλων των σημείων στο επίπεδο.

Διανύσματα με βέλη

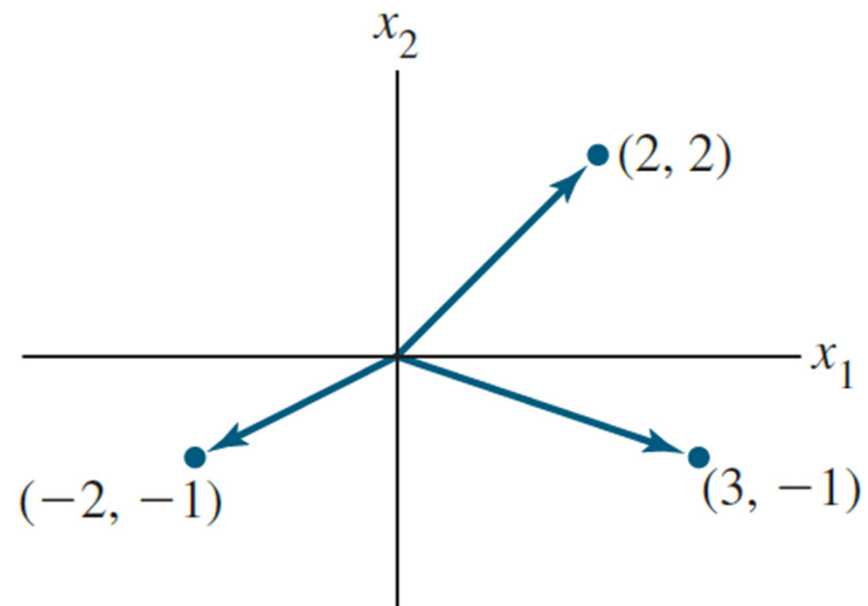
Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα διάνυσμα $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

με **ένα βέλος** που ξεκινά από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και καταλήγει στο σημείο (a, b) .

Παρατηρήσεις

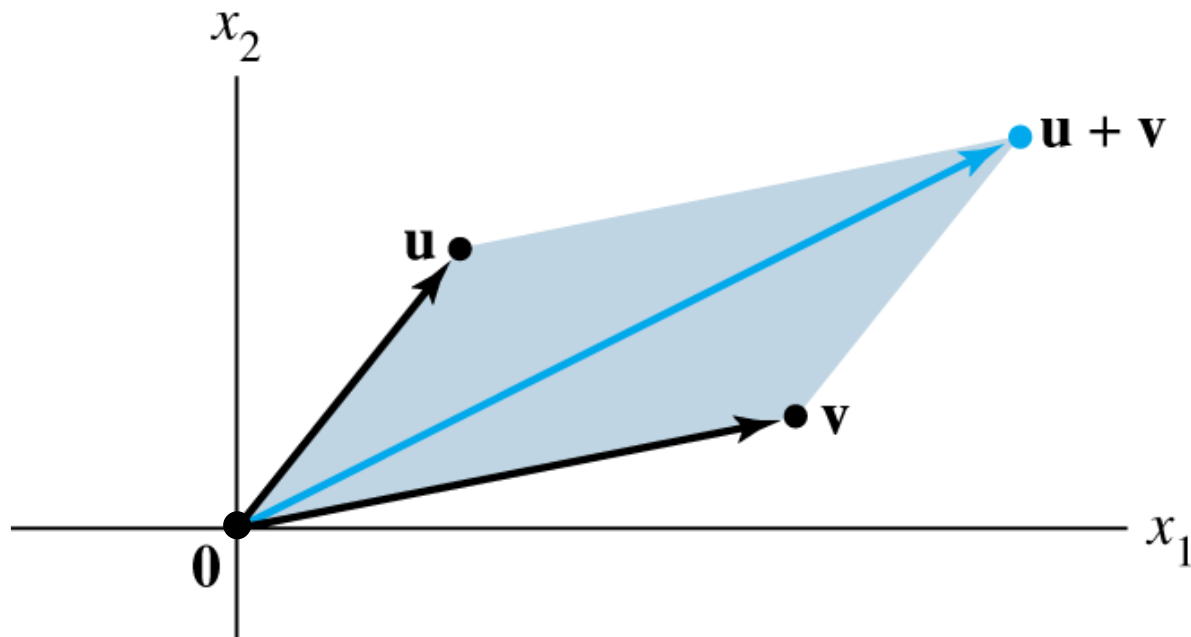
1. Τα επιμέρους σημεία πάνω στο ίδιο το βέλος δεν έχουν κάποια ιδιαίτερη σημασία.
2. Όταν «καρφώνουμε» την **αρχή** του διανύσματος στο $(0, 0)$, το **πέρασ** του αντιστοιχεί σε ένα και μοναδικό σημείο του επιπέδου.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longrightarrow \text{πέρασ } (a, b)$$



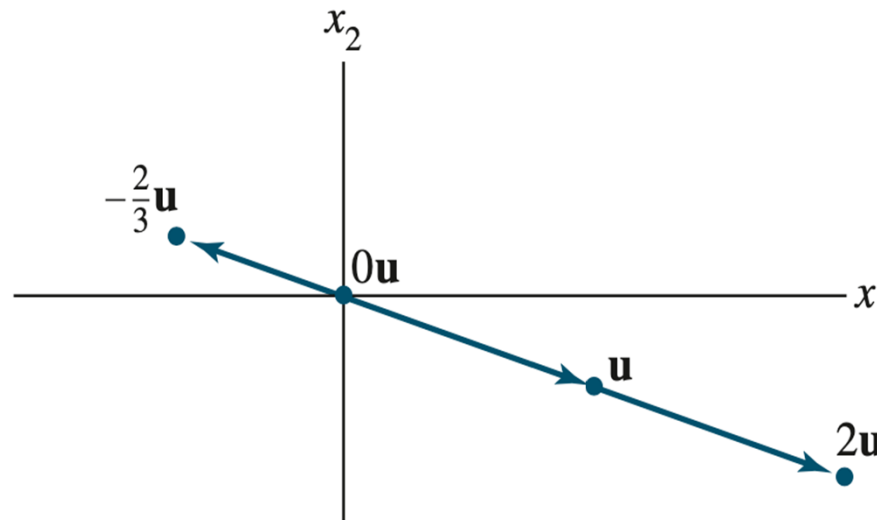
Κανόνας παραλληλογράμμου

Αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ **παριστάνονται ως σημεία** στο επίπεδο, τότε το $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ αντιστοιχεί στην τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου του οποίου οι άλλες κορυφές είναι οι $\mathbf{u}$, $\mathbf{0}$, και $\mathbf{v}$.



Βαθμωτό πολλαπλάσιο – Γεωμετρική περιγραφή

Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Παρακάτω δίνεται η γεωμετρική περιγραφή των βαθμωτών πολλαπλασίων $2\mathbf{u}$, $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$.



Το βέλος του $2\mathbf{u}$ έχει **διπλάσιο μήκος** από το βέλος του $\mathbf{u}$ και τα βέλη δείχνουν προς την **ίδια κατεύθυνση**.

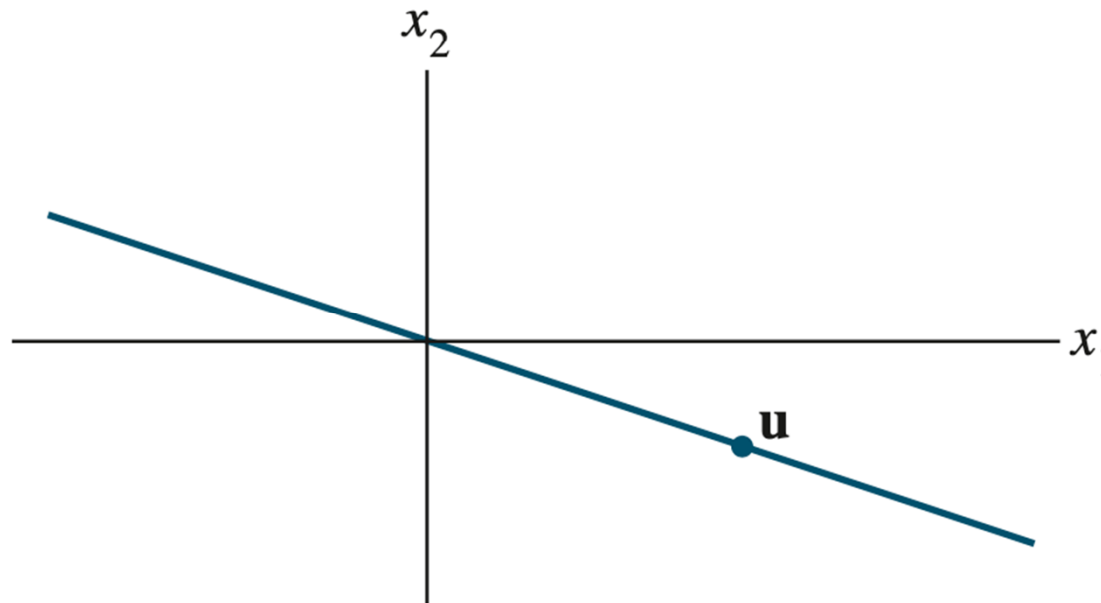
Το βέλος του $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$ έχει τα **$\frac{2}{3}$ του μήκους** του βέλους του $\mathbf{u}$ και τα βέλη δείχνουν προς **αντίθετες κατεύθυνσεις**.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad -\frac{2}{3}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad 0\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βαθμωτό πολλαπλάσιο – Γεωμετρική περιγραφή

Στο σχήμα απεικονίζεται το **σύνολο** όλων των βαθμωτών πολλαπλασίων του μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.

Δηλαδή απεικονίζονται, **όλα τα διανύσματα** της μορφής $c\mathbf{u}$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

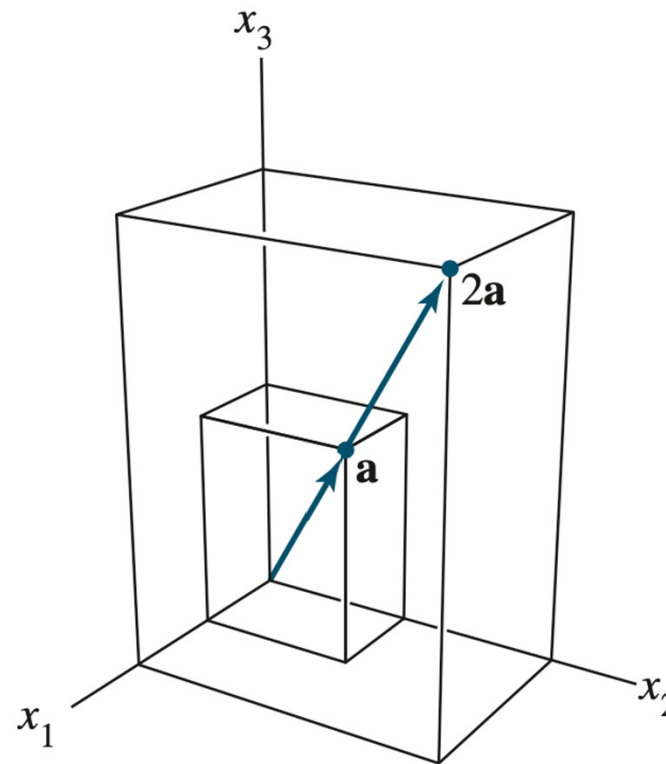


Ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$ συμβολίζεται με έναν 3×1 πίνακα και έχει 3 στοιχεία.

Παράδειγμα διανύσματος με 3 στοιχεία:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Στο σχήμα απεικονίζονται, τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $2\mathbf{a}$ ως σημεία και ως βέλη από την αρχή των αξόνων.



Αν n είναι θετικός ακέραιος, τότε με $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων λιστών n πραγματικών αριθμών,

Οι λίστες αυτές συνήθως γράφονται ως **$n \times 1$ πίνακες**:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Το διάνυσμα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με **$\mathbf{0}$** .
- Η ισότητα διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$, καθώς και οι πράξεις του πολλαπλασιασμού με έναν αριθμό και της πρόσθεσης διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$, ορίζονται **στοιχείο προς στοιχείο**, όπως ακριβώς στον $\mathbb{R}^2$.

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(ii) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$(iii) \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(iv) \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

όπου το $-\mathbf{u}$

συμβολίζει το $(-1)\mathbf{u}$

$$(v) \quad c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

$$(vi) \quad (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

$$(iii) \quad c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

$$(iv) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Το διάνυσμα $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ συχνά γράφεται ως $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

Γραμμικοί Συνδυασμοί (Linear Combinations)

Δίνονται τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ και τα $c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}$.

Το διάνυσμα $\mathbf{y}$ που ορίζεται ως

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ με **βάρη** τα $c_1, c_2, \dots, c_p$.

Τα βάρη σε ένα γραμμικό συνδυασμό μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, **συμπεριλαμβανομένου του μηδενός**.

Παραδείγματα γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\sqrt{3}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 \quad (= \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$$

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ μπορεί να **κατασκευαστεί** (ή να γραφτεί) ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.

Δηλαδή, προσδιορίστε αν υπάρχουν βάρη x_1 και x_2 τέτοια ώστε

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Εάν η παραπάνω **διανυσματική εξίσωση** έχει λύση, να τη βρείτε.

Λύση

Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς του πολλαπλασιασμού διανύσματος με βαθμωτό και της πρόσθεσης διανυσμάτων για να ξαναγράψετε τη διανυσματική εξίσωση, ως εξής

Δεδομένα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$x_1 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα ως εξής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Λύση (συνέχεια)

ή ως εξής

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Δεδομένα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα στην αριστερή και δεξιά πλευρά είναι ίσα αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Γραμμικό σύστημα

Λύση (συνέχεια)

Τα x_1 και x_2 κάνουν τη **διανυσματική εξίσωση**

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

αληθή αν και μόνο αν τα x_1 και x_2 ικανοποιούν
το **σύστημα γραμμικών εξισώσεων**.

$$x_1 + 2x_2 = 7$$

$$-2x_1 + 5x_2 = 4$$

$$-5x_1 + 6x_2 = -3$$

Δεδομένα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Λύση (συνέχεια)

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος χρησιμοποιείτε τον αλγόριθμο επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

$$\text{Δεδομένα}$$
$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση (συνέχεια)

Η λύση του γραμμικού συστήματος είναι $x_1 = 3$ και $x_2 = 2$.

$$\text{Δεδομένα}$$
$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Άρα το $\mathbf{b}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$, με βάρη $x_1 = 3$ και $x_2 = 2$.

$$\text{Δηλαδή} \quad 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

- Τα αρχικά διανύσματα $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ και $\mathbf{b}$ είναι οι στήλες του επαυξημένου πίνακα του γραμμικού συστήματος.

$$\begin{array}{c} \text{Δεδομένα} \\ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

- Οι στήλες καθορίζουν τον πίνακα.**

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τον παραπάνω πίνακα μέσω των στηλών του.

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}]$$

Μια **διανυσματική εξίσωση**

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}] \quad (1)$$

Ειδικότερα το $\mathbf{b}$ μπορεί να γραφτεί ως **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ αν και μόνο αν το **γραμμικό σύστημα** που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα (1) έχει λύση.

Ορισμός

Αν $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε το **σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών** των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ συμβολίζεται με

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$$

και ονομάζεται **υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$** που παράγεται (ή δημιουργείται) από τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$.

Δηλαδή, το **$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$** είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

όπου $c_1, \dots, c_p$ είναι βαθμωτά (αριθμοί).

Περιγραφή του $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$

Έστω $\mathbf{v}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ είναι το **σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών** του $\mathbf{v}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούν να γραφτούν στη μορφή **$c\mathbf{v}$** .

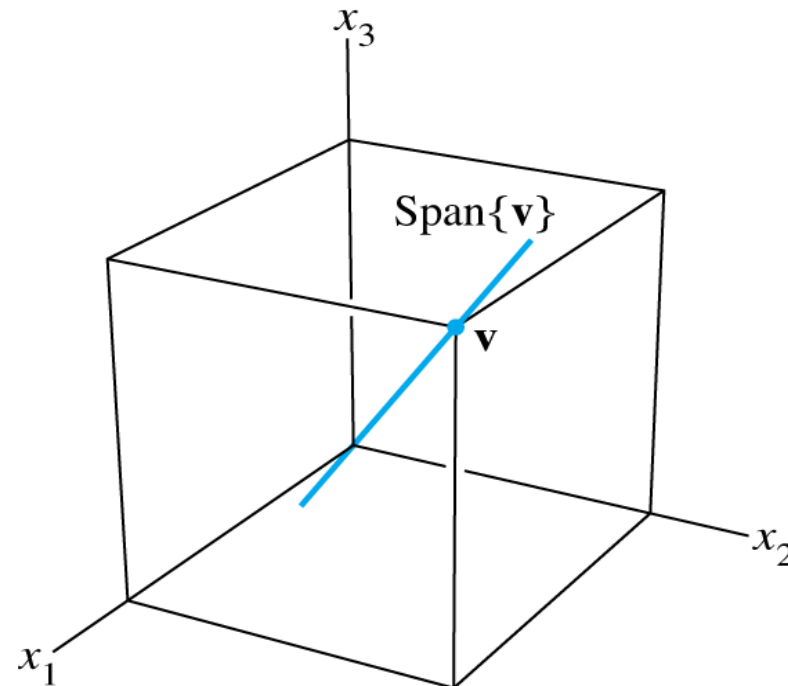
Το $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούμε να **κατασκευάσουμε** χρησιμοποιώντας **βαθμωτά πολλαπλάσια** του $\mathbf{v}$.

Γεωμετρική περιγραφή του $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$

Έστω $\mathbf{v}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούμε να **κατασκευάσουμε** χρησιμοποιώντας **βαθμωτά πολλαπλάσια** του $\mathbf{v}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ είναι το σύνολο των σημείων της ευθείας του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $\mathbf{0}$ και το $\mathbf{v}$.



Περιγραφή του $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$

Έστω $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το **σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών** του $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούν να γραφτούν στη μορφή **$c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{u}$**

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούμε να κατασκευάσουμε **συνδυάζοντας βαθμωτά πολλαπλάσια** των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}$

Γεωμετρική περιγραφή του $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$

Έστω $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και το $\mathbf{v}$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το **σύνολο όλων των διανυσμάτων** που μπορούμε να κατασκευάσουμε **συνδυάζοντας βαθμωτά πολλαπλάσια** των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, και $\mathbf{0}$.

Το $\text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τις ευθείες που διέρχονται από το $\mathbf{0}$ και τα $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ αντίστοιχα.

