

Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Κλιμακωτές Μορφές

Κλιμακωτή μορφή

Echelon Form - Row Echelon Form - REF

Ένας πίνακας βρίσκεται σε **κλιμακωτή μορφή** όταν **ισχύουν όλα** τα παρακάτω:

- Όλες οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.
- Το **πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (ηγετικό στοιχείο)** κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από αυτό της προηγούμενης γραμμής.
- Όλα τα στοιχεία **κάτω** από κάθε **ηγετικό στοιχείο** είναι μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μηδενική γραμμή/στήλη: όλα τα στοιχεία της γραμμής/στήλης είναι ίσα με μηδέν.

Μη μηδενική γραμμή/στήλη: τουλάχιστον ένα στοιχείο της γραμμής/στήλης δεν είναι ίσο με μηδέν.

Κλιμακωτή μορφή + επιπλέον συνθήκες → Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Επιπλέον συνθήκες:

- Κάθε ηγετικό στοιχείο είναι ίσο με 1.
- Κάθε ηγετικό στοιχείο είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης του.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Η λέξη **ανηγμένη** προέρχεται από το ρήμα ανάγω (= μετατρέπω σε απλούστερη/κανονική μορφή)

1. Μετασχηματισμός με **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών**

Με τη χρήση στοιχειωδών πράξεων γραμμών ένας πίνακας μπορεί να αναχθεί (μετασχηματιστεί) σε κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

2. Κλιμακωτή μορφή: **όχι μοναδική**

Ένας πίνακας μπορεί να αναχθεί σε περισσότερες από μία κλιμακωτές μορφές, ανάλογα με τη σειρά των στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

3. Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή: **μοναδική**

Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος κατά γραμμές με έναν και μόνο έναν πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Ορισμοί

- Αν ένας πίνακας A είναι ισοδύναμος κατά γραμμές με έναν πίνακα U σε κλιμακωτή μορφή, **τότε ο U ονομάζεται κλιμακωτή μορφή του A .**
- Αν ο U είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, **τότε ο U ονομάζεται ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A .**

Θέση οδηγού (Pivot position) – Στήλη οδηγού (Pivot column)

Όταν οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών σε έναν πίνακα παράγουν μια κλιμακωτή μορφή, οι επιπλέον πράξεις γραμμών που απαιτούνται για την απόκτηση της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής **δεν αλλάζουν τις θέσεις των ηγετικών στοιχείων**.

Επειδή η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι μοναδική, τα **ηγετικά στοιχεία** βρίσκονται πάντοτε στις **ίδιες θέσεις** σε **οποιαδήποτε κλιμακωτή μορφή** προκύψει από έναν συγκεκριμένο πίνακα.

Τα ηγετικά αυτά στοιχεία αντιστοιχούν στα **ηγετικά 1** της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

Ορισμοί

Μια **θέση οδηγού (pivot position)** σε έναν πίνακα A είναι μια θέση του A που αντιστοιχεί σε ένα ηγετικό 1 της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του A .

Στήλη οδηγού (pivot column) είναι μια στήλη του A που περιέχει μια θέση οδηγού.

Παράδειγμα: Μετατρέψτε τον παρακάτω πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και εντοπίστε τις στήλες οδηγού.


$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Η “κορυφή” της πιο αριστερής μη μηδενικής στήλης είναι η πρώτη θέση οδηγού. Ένα μη μηδενικό στοιχείο, ή οδηγός (pivot), πρέπει να τοποθετηθεί σε αυτή τη θέση. Μια καλή επιλογή είναι να ανταλλάξουμε τις γραμμές 1 και 4 (επειδή οι υπολογισμοί στο επόμενο βήμα δεν θα περιλαμβάνουν κλάσματα).

Εντοπισμός στηλών οδηγού

Οδηγός

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

↑
Στήλη οδηγός

Δημιουργήστε μηδενικά κάτω από τον οδηγό, 1, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Οδηγός

Στήλη οδηγός

Δημιουργήστε μηδενικά κάτω από τον οδηγό, 2, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών


$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Δεν υπάρχει τρόπος να δημιουργηθεί ένας οδηγός στη στήλη 3.

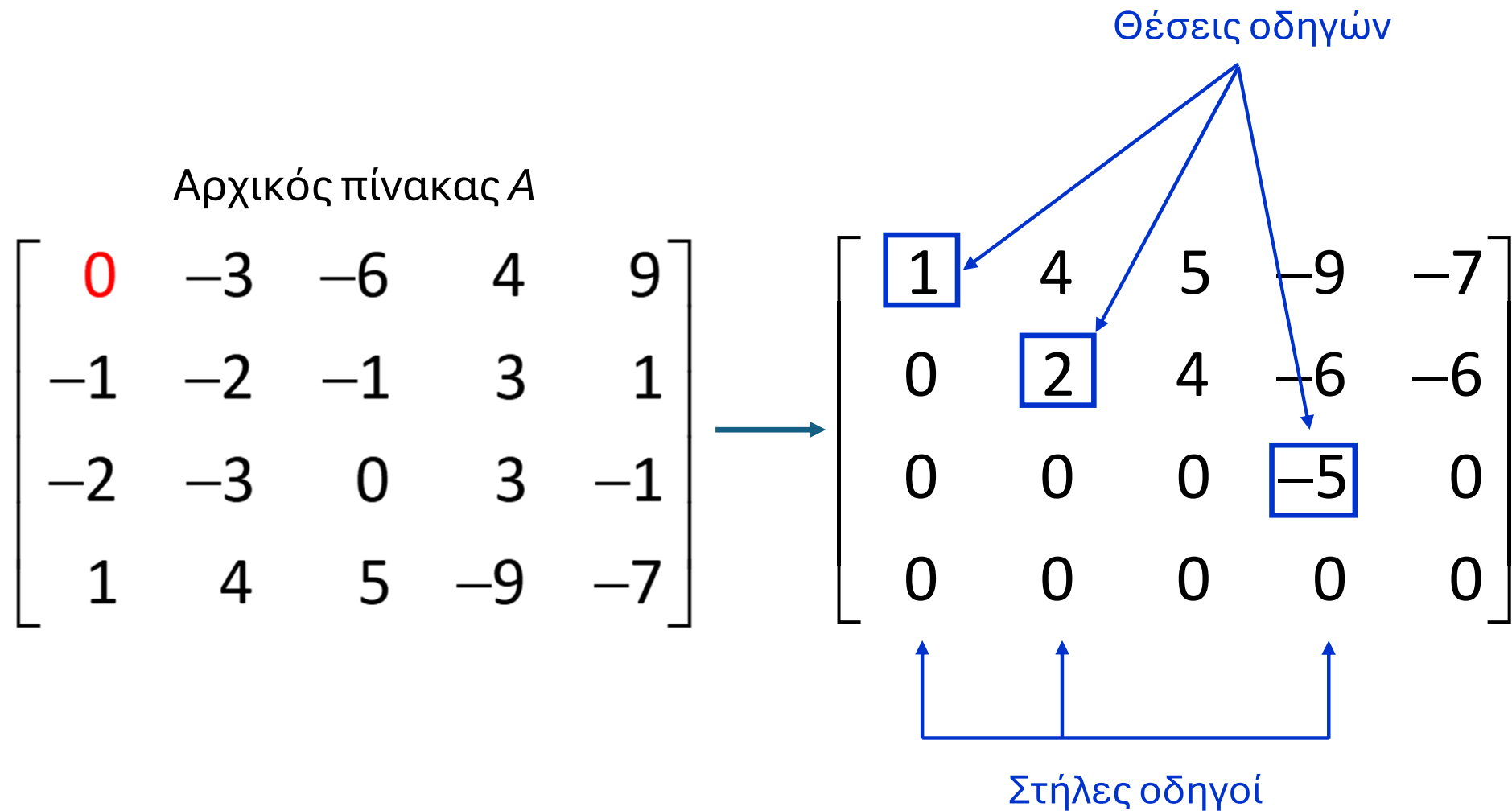
Εναλλάσσουμε τις γραμμές 3 και 4, για να δημιουργήσουμε έναν οδηγό στη στήλη 4.

Εντοπισμός στηλών οδηγού

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Οδηγός

Στήλη οδηγός



Η κλιμακωτή μορφή στην οποία καταλήξαμε **φανερώνει** ότι οι στήλες 1, 2 και 4 του **αρχικού** πίνακα A είναι στήλες οδηγοί.

Αλγόριθμος: μια σειρά από **συγκεκριμένα βήματα** που ακολουθούμε για να πετύχουμε έναν στόχο.

Αλγόριθμος αναγωγής γραμμών: μια σειρά από συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούμε για τη μετατροπή ενός πίνακα πρώτα σε κλιμακωτή μορφή και στη συνέχεια σε **ανηγμένη** κλιμακωτή μορφή.

Αλγόριθμος αναγωγής γραμμών (Row reduction algorithm)

Είσοδος: Πίνακας

ΒΗΜΑ 1: Ξεκινήστε με την πιο αριστερή μη μηδενική στήλη (pivot column).

ΒΗΜΑ 2: Επιλέξτε ένα μη μηδενικό στοιχείο σαν στοιχείο οδηγός (pivot).

ΒΗΜΑ 3: Δημιουργήστε μηδενικά **κάτω** από το pivot.

ΒΗΜΑ 4: Επαναλάβετε τη διαδικασία (Βήματα 1 έως 3) στο επόμενο τμήμα του πίνακα μέχρι να μην υπάρχουν άλλες μη μηδενικές γραμμές για τροποποίηση.

ΒΗΜΑ 5: Δημιουργήστε μηδενικά **πάνω** από κάθε pivot.

Έξοδος: Πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Είσοδος:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 1: Ξεκινήστε με την **πιο αριστερή μη μηδενική στήλη**. Αυτή είναι μια στήλη οδηγός. Το στοιχείο οδηγός πρέπει να βρίσκεται στην κορυφή της στήλης αυτής.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

↑
Στήλη οδηγός

ΒΗΜΑ 2: Επιλέξτε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη οδηγό στήλη σαν οδηγό στοιχείο. Εάν είναι απαραίτητο, εναλλάξτε γραμμές για να μετακινήσετε αυτό το στοιχείο στη οδηγό θέση.

Εναλλάσσουμε τις γραμμές 1 και 3.

(Θα μπορούσαμε να εναλλάξουμε τις γραμμές 1 και 2)

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 3: Χρησιμοποιήστε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών για να δημιουργήσετε μηδενικά σε όλες τις θέσεις κάτω από τον οδηγό.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4: Καλύψτε τη γραμμή που περιέχει το οδηγό στοιχείο και καλύψτε όλες τις σειρές, εάν υπάρχουν, πάνω από αυτήν. Εφαρμόστε τα βήματα 1–3 στον **υποπίνακα** που παραμένει. Επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να μην υπάρχουν άλλες μη μηδενικές γραμμές για τροποποίηση.

Βήμα 4 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4: Καλύψτε τη γραμμή που περιέχει το οδηγό στοιχείο και καλύψτε όλες τις σειρές, εάν υπάρχουν, πάνω από αυτήν.

Εφαρμόστε τα **βήματα 1–3** στον υποπίνακα που παραμένει.

Επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να μην υπάρχουν άλλες μη μηδενικές γραμμές για τροποποίηση.

Ο πίνακας βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 5: Ξεκινώντας από το δεξιότερο pivot και προχωρώντας προς τα πάνω και προς τα αριστερά, δημιουργήστε μηδενικά πάνω από κάθε pivot. Αν ένα pivot δεν είναι ίσο με 1, μετατρέψτε το σε 1 με μια πράξη πολλαπλασιασμού μιας γραμμής με μη μηδενικό αριθμό.

Βήμα 5

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Έξοδος:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Είσοδος:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Ενδιάμεσο αποτέλεσμα
(μετά το Βήμα 4).
Ο πίνακας βρίσκεται σε
κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Έξοδος:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Λύσεις γραμμικών συστημάτων

Ας υποθέσουμε ότι ο **επαυξημένος πίνακας** ενός γραμμικού συστήματος έχει μετατραπεί στην **ισοδύναμη** ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 5x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

$$0 = 0$$

Οι μεταβλητές x_1 και x_2 που αντιστοιχούν σε στήλες οδηγούς στον πίνακα ονομάζονται **βασικές μεταβλητές**. Η μεταβλητή x_3 ονομάζεται **ελεύθερη μεταβλητή**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 5x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

$$0 = 0$$

Παρατήρηση: η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή τοποθετεί κάθε βασική μεταβλητή σε **μία και μόνο μία εξίσωση**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 5x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

$$0 = 0$$

$$x_1 = 1 + 5x_3$$

$$x_2 = 4 - x_3$$

x_3 ελεύθερη μεταβλητή

$$x_1 = 1 + 5x_3$$

$$x_2 = 4 - x_3$$

x_3 ελεύθερη μεταβλητή

Η δήλωση " x_3 είναι ελεύθερη" σημαίνει ότι είστε ελεύθεροι να επιλέξετε οποιαδήποτε τιμή για το x_3 . Μόλις γίνει αυτό, καθορίζονται και οι τιμές των x_1 και x_2 .

Για παράδειγμα,
όταν $x_3 = 0$, η λύση είναι $(1, 4, 0)$
και όταν $x_3 = 1$, η λύση είναι $(6, 3, 1)$.

Κάθε διαφορετική επιλογή του x_3 καθορίζει μία διαφορετική λύση του συστήματος. Αντίστροφα, κάθε λύση του συστήματος αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη επιλογή του x_3 .

$$x_1 = 1 + 5x_3$$

$$x_2 = 4 - x_3$$

x_3 ελεύθερη μεταβλητή

Η παραπάνω περιγραφή είναι μια *παραμετρική περιγραφή* του συνόλου λύσεων στην οποία οι *ελεύθερες μεταβλητές* δρουν ως *παράμετροι*.

Παράμετρος είναι ένας αριθμός που μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα και η επιλογή του καθορίζει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Η **επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος ισοδυναμεί με την περιγραφή του **συνόλου των λύσεών του**:

- 1) είτε βρίσκουμε τη μοναδική λύση,
- 2) είτε μια παραμετρική περιγραφή όλων των λύσεων,
- 3) είτε διαπιστώνουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις.

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Θεώρημα: (Ύπαρξη και Μοναδικότητα)

Ένα γραμμικό σύστημα **είναι συνεπές** αν και μόνο αν η **δεξιότερη στήλη του επαυξημένου πίνακα δεν είναι στήλη οδηγός**,
δηλαδή αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα **δεν συμπεριλαμβάνει γραμμή της μορφής:**

$$[0 \dots 0 \ b] \text{ όπου } b \text{ μη-μηδενικός αριθμός.}$$

Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι συνεπές, τότε το σύνολο λύσεων περιέχει είτε:

- **μια μοναδική λύση**, όταν **δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές**, είτε
- **άπειρες λύσεις**, όταν υπάρχει **τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή**.

Αλγόριθμος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος

1. Γράψτε τον **επαυξημένο πίνακα** του συστήματος.
2. Χρησιμοποιήστε τον **αλγόριθμο αναγωγής γραμμών** για να λάβετε έναν ισοδύναμο επαυξημένο πίνακα σε **κλιμακωτή μορφή**. Ελέγξτε εάν το σύστημα είναι συνεπές (**Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας**). Εάν δεν υπάρχει λύση, σταματήστε. Διαφορετικά, προχωρήστε στο επόμενο βήμα.
3. Συνεχίστε τον αλγόριθμο απαλοιφής για να αποκτήσετε τη **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.
4. Γράψτε το σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στον πίνακα που κατασκευάσατε στο βήμα 3.
5. Ξαναγράψτε κάθε μη μηδενική εξίσωση από το βήμα 4, έτσι ώστε η **βασική της μεταβλητή** να εκφράζεται ως συνάρτηση των **ελεύθερων μεταβλητών**.