

Γραμμικές Εξισώσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Η καρδιά της Γραμμικής Άλγεβρας

- Επιστήμη & Μηχανική: πολλά προβλήματα οδηγούν σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- Ενδεικτικές εφαρμογές: Πρόγνωση καιρού, Ηλεκτρικά δίκτυα. Επεξεργασία σημάτων, AI, Machine Learning.
- Τα συστήματα αυτά μπορεί να έχουν χιλιάδες, εκατομμύρια ή και περισσότερες μεταβλητές.
- Για την επίλυσή τους χρησιμοποιούνται **υπολογιστές**.

Η Γραμμική Άλγεβρα παρέχει τα **εργαλεία** για την **κατανόηση** και την **επίλυσή** τους.

Μια γραμμική εξίσωση στις μεταβλητές:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

είναι μια εξίσωση που μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = b$$

όπου το b (σταθερός όρος) και οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί που είναι συνήθως γνωστοί εκ των προτέρων.

n : οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός

Στο χαρτί: $n = 2$ έως 5

Σε πραγματικά προβλήματα: $n = 100, 1\,000, 10\,000, \dots$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων (ή Γραμμικό σύστημα)

*Ένα **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων που αφορούν τις ίδιες μεταβλητές.*

Παράδειγμα ενός συστήματος **2 γραμμικών εξισώσεων** που αφορά τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 ($n=3$).

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8$$

$$x_1 - 4x_3 = -7$$

Λύσεις γραμμικού συστήματος

Μια **λύση** ενός γραμμικού συστήματος είναι μια **λίστα αριθμών** $s_1, s_2, \dots, s_n$ που, όταν αντικατασταθούν στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ κάνουν κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος αληθή.

Παράδειγμα: Η λίστα αριθμών (5, 6.5, 3) είναι μια λύση του γραμμικού συστήματος

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8$$

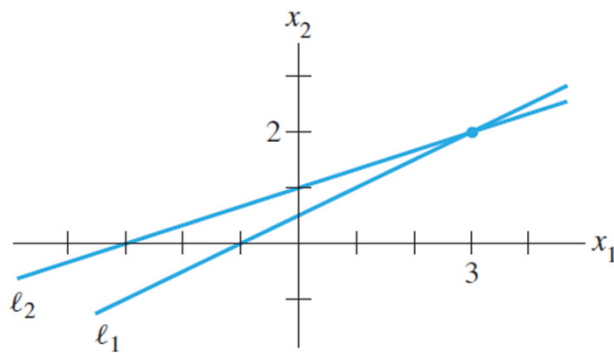
$$x_1 - 4x_3 = -7$$

Το σύνολο όλων των δυνατών λύσεων ονομάζεται **σύνολο λύσεων** του γραμμικού συστήματος.

Δύο γραμμικά συστήματα ονομάζονται **ισοδύναμα** αν έχουν το **ίδιο σύνολο λύσεων**.

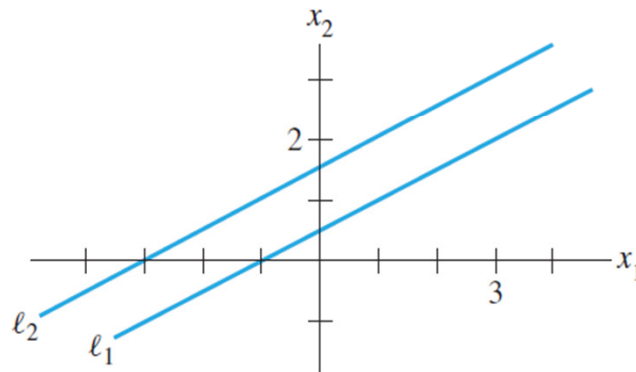
Σύνολα λύσεων – 2 εξισώσεων με 2 μεταβλητές

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3\end{aligned}$$



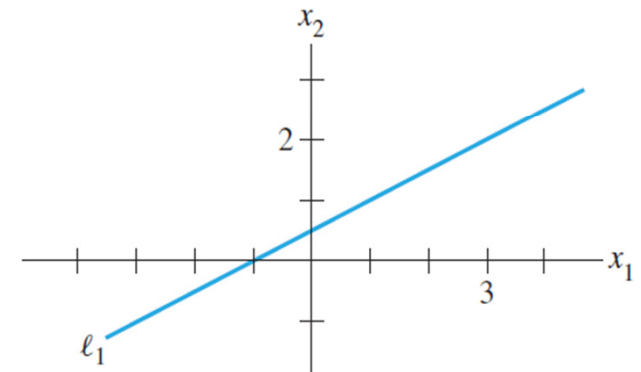
Ακριβώς μια λύση

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3\end{aligned}$$



Καμία λύση

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$$



Άπειρες λύσεις

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

1. Δεν έχει λύση, ή
2. Έχει μια μοναδική λύση, ή
3. Έχει άπειρες λύσεις.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **συνεπές** αν έχει είτε **μία λύση** είτε **άπειρες λύσεις**.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **ασυνεπές** αν δεν έχει **καμία λύση**.

Οι βασικές πληροφορίες ενός γραμμικού συστήματος μπορούν να καταγραφούν σε μια **ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες (array)** που ονομάζεται **πίνακας**.

Για το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων,

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας συντελεστών** του συστήματος.

Ο πίνακας συντελεστών δεν είναι κάτι αφηρημένο — είναι ένας οργανωμένος τρόπος να γράφουμε τα δεδομένα ενός συστήματος.

Ο **επαυξημένος πίνακας** ενός συστήματος αποτελείται από τον πίνακα συντελεστών με μια **πρόσθετη στήλη που περιέχει τις σταθερές** από τις δεξιές πλευρές των εξισώσεων.

Ο επαυξημένος πίνακας για το σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Το μέγεθος ενός πίνακα δηλώνει πόσες γραμμές και στήλες έχει.

Αν m και n είναι θετικοί αριθμοί, ένας πίνακας $m \times n$ είναι ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες.

Ο αριθμός των γραμμών έρχεται πάντα πρώτος.

Η βασική στρατηγική για την **επίλυση ενός γραμμικού συστήματος** είναι να το αντικαταστήσουμε με ένα **ισοδύναμο σύστημα**, δηλαδή ένα σύστημα με το ίδιο σύνολο λύσεων, το οποίο όμως είναι πιο **εύκολο να λυθεί**.

Πως το πετυχαίνουμε αυτό;

Χρησιμοποιούμε μια μικρή ομάδα **επιτρεπτών μετασχηματισμών** στις εξισώσεις του συστήματος.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

$$x_1 = 29$$

$$x_2 = 16$$

$$x_3 = 3$$

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών:

1. **Αντικατάσταση**: Αντικατάσταση μιας γραμμής με το άθροισμα της ίδιας και ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής.
2. **Εναλλαγή**: Εναλλαγή δύο γραμμών.
3. **Κλιμάκωση**: Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με μια μη μηδενική σταθερά.

Δύο πίνακες ονομάζονται **ισοδύναμοι κατά γραμμές** αν υπάρχει μια **ακολουθία στοιχειωδών πράξεων γραμμών** που **μετασχηματίζει** τον ένα πίνακα στον άλλο.

Παράδειγμα 1: Λύστε το παρακάτω σύστημα.

$$(R1) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$(R2) \quad 2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$(R3) \quad -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

Λύση: Η **διαδικασία απαλοιφής** των αγνώστων παρουσιάζεται εδώ με και χωρίς συμβολισμό πινάκων και τα αποτελέσματα τοποθετούνται δίπλα-δίπλα για σύγκριση.

Επίλυση συστημάτων

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ (R2) & 2x_2 - 8x_3 = 8 & | \\ (R3) & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & | \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

- Συντελεστής του x_1 στην (R1) ίσος με 1; ✓
- Απαλοιφή του x_1 από την (R2) και (R3)

(R2) ✓

(R3) $\rightarrow$ 4(R1) + (R3)

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \\ \hline & -3x_2 + 13x_3 & = -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ (R2) & 2x_2 - 8x_3 = 8 & | \\ (R3) & -3x_2 + 13x_3 = -9 & | \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

- Συντελεστής του x_2 στην (R2) ίσος με 1;
(R2) $\rightarrow$ $1/2(R2)$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ (R2) & x_2 - 4x_3 = 4 & | \\ (R3) & -3x_2 + 13x_3 = -9 & | \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

- Απαλοιφή του x_2 από την (R3)

$$(R3) \rightarrow 3(R2) + (R3)$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 12x_3 & = & 12 \\ -3x_2 + 13x_3 & = & -9 \\ \hline x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = & 0 \\ (R2) & x_2 - 4x_3 = & 4 \\ (R3) & x_3 = & 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

- Συντελεστής του x_3 στην (R3) ίσος με 1; ✓
- Απαλοιφή του x_3 από την (R2)

$$(R2) \rightarrow 4(R3) + (R2)$$

$$4x_3 = 12$$

$$x_2 - 4x_3 = 4$$

$$x_2 = 16$$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \\ (R2) & x_2 = 16 & \\ (R3) & x_3 = 3 & \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

- Συντελεστής του x_3 στην (R3) ίσος με 1; ✓
- Απαλοιφή του x_3 από την (R1)

$$(R1) \rightarrow -(R3) + (R1)$$

$$\begin{array}{rcl} & -x_3 & = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ \hline x_1 - 2x_2 & = & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 & = -3 \\ (R2) & x_2 & = 16 \\ (R3) & x_3 & = 3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right.$$

- Συντελεστής του x_2 στην (R2) ίσος με 1; ✓
- Απαλοιφή του x_2 από την (R1)

$$(R1) \rightarrow 2(R2) + (R1)$$

$$2x_2 = 32$$

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$x_1 = 29$$

$$\begin{array}{rcll} (R1) & x_1 & = & 29 \\ (R2) & & x_2 & = 16 \\ (R3) & & & x_3 = 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \\ (R2) & 2x_2 - 8x_3 = 8 & \\ (R3) & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & \end{array} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \right.$$

Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

$$\begin{array}{lcl} (R1) & x_1 & = 29 \\ (R2) & x_2 & = 16 \\ (R3) & x_3 & = 3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right.$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

- Η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος είναι η **(29, 16, 3)**.
- Για να **επαληθεύσετε** ότι το (29,16,3) **είναι λύση**, και επομένως μια **λογική απάντηση**, **αντικαταστήστε** αυτές τις τιμές στην αριστερή πλευρά του **αρχικού συστήματος**.

$$(29) - 2(16) + (3) = 29 - 32 + 3 = 0$$

$$2(16) - 8(3) = 32 - 24 = 8$$

$$-4(29) + 5(16) + 9(3) = -116 + 80 + 27 = -9$$

- Τα αποτελέσματα συμφωνούν με τη δεξιά πλευρά του αρχικού συστήματος, οπότε το (29,16,3) είναι λύση του συστήματος.

- Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι αντιστρεπτές.
- Εάν οι επαυξημένοι πίνακες δύο γραμμικών συστημάτων είναι **ισοδύναμοι κατά γραμμές**, τότε τα δύο συστήματα έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.
- Δύο θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με ένα γραμμικό σύστημα είναι τα εξής:
 1. Είναι το σύστημα *συνεπές*;
Δηλαδή, υπάρχει **τουλάχιστον μία λύση**;
 2. Εάν υπάρχει λύση, είναι μοναδική;
Δηλαδή, υπάρχει **μοναδική λύση**;

Παράδειγμα 2: Είναι το παρακάτω σύστημα συνεπές;

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (R1) \\ (R2) \\ (R3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

- Εναλλαγή: $(R1) \leftrightarrow (R2)$

$$\begin{array}{l} (R1) \\ (R2) \\ (R3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης συστήματος

$$\begin{array}{l} (R1) \\ (R2) \\ (R3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

- $(R1) \rightarrow 1/2(R1)$
- $(R3) \rightarrow -5(R1) + (R3)$ ή $(R3) \rightarrow -5/2(R1) + (R3)$

$$\begin{array}{l} (R1) \\ (R2) \\ (R3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{array} \right]$$

- $(R3) \rightarrow 1/2(R2) + (R3)$

$$\begin{array}{l} (R1) \\ (R2) \\ (R3) \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array} \right]$$

ή σε συμβολισμό εξισώσεων

$$\begin{array}{rclclcl} 2 & x_1 & - & 3 & x_2 & + & 2 & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_2 & - & 4 & x_3 & = & 8 \\ & & & & & & 0 & & = & 5/2 \end{array}$$

- Η εξίσωση $0 = 5/2$ είναι μια συμπαγής μορφή της εξίσωσης

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5/2$$

- Δεν υπάρχουν τιμές των x_1, x_2, x_3 που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση επειδή η εξίσωση αυτή δεν είναι ποτέ αληθής.

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης συστήματος

Το αρχικό σύστημα

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

και το

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$0 = 5/2$$

έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων (γιατί;)

Συνεπώς το αρχικό μας σύστημα είναι ασυνεπές (δηλαδή δεν έχει λύση).