

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ: ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

2^η Εργασία (Χειρόγραφο)

1. Θεωρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής μέγιστου βαθμού το οποίο παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)=\sin x$ στα σημεία $x_0=0$, $x_1=\pi/4$, $x_2=\pi/2$. Να βρεθεί το μέγιστο σφάλμα παρεμβολής με ακρίβεια 3 δ.ψ.

2. Να αποδείξετε τον τύπο μιας εκτίμησης του σφάλματος παρεμβολής

$$\|f - p\|_{\infty} \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!}.$$

(Δίνεται η νόρμα $\|h\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |h(x)|$). (Βλ. Σημειώσεις-Ενότητα5, σελ.3,

Σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής) (με χρήση Θεωρήματος Rolle).

3. Κατά τη διάρκεια μιας πυρκαγιάς ένα μετεωρολογικό μπαλόνι κατέγραψε σε διάφορα ύψη τις ακόλουθες συγκεντρώσεις καπνού

x (m)	100	200	300
y (mgr/m ³)	800	400	160

- (i) Να κατασκευάσετε κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής *Lagrange* το οποίο παρεμβάλλει τα δεδομένα του πίνακα και να προσδιορίσετε τη συγκέντρωση καπνού στα 240 m υψόμετρο.
- (ii) Να κατασκευάσετε κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής *Newton* με *διατεταγμένες διαφορές* και *πεπερασμένες διαφορές προς τα εμπρός* το οποίο παρεμβάλλει τα δεδομένα του πίνακα και να προσδιορίσετε τη συγκέντρωση καπνού στα 240 m υψόμετρο.
- (iii) Τι παρατηρείτε;
4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=0$, για $0 \leq x \leq 1$ και $f(x)=(x-1)^4$, για $1 < x \leq 2$.
- (i) Να προσεγγίσετε την f στο διάστημα $[0, 2]$ με μία τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής $p(x)=0$, για $0 \leq x \leq 1$ και $p(x)=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$, για $1 < x \leq 2$. Να προσδιορίσετε τα a , b , c , d υποθέτοντας ότι $p \in C^1([0, 2])$ και ότι $p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $p(1)=f(1)$, $p(2)=f(2)$, $p'(2)=f'(2)$.
- (ii) Να εξετάσετε αν συμπίπτει η συνάρτηση p με την κυβική φυσική *spline* s , η οποία παρεμβάλλει την f στα σημεία $\{0, 1, 2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0)=f'(0)$, $s'(2)=f'(2)$.

5. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα δεδομένα βροχόπτωσης και απορροής για 12 συμβάντα καταιγίδων. Να κατασκευάσετε την ευθεία παλινδρόμησης της απορροής συναρτήσει της βροχόπτωσης.

<i>a/a</i>	<i>Βροχόπτωση (cm)</i>	<i>Απορροή(cm)</i>
1	1.18	0.80
2	5.32	6.01
3	3.20	1.61
4	2.75	2.51
5	1.53	1.13
6	1.19	1.29
7	2.11	1.92
8	5.09	3.49
9	3.56	2.05
10	1.67	1.55
11	2.61	0.91
12	2.82	2.49

6. Να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος της μορφής $S=Te^{Wx}$ για τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα

x_i	1.2	1.5	2.2	3.0	3.5
$S(x_i)$	15	20	30	32	36

εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. (Να κατασκευάσετε αρχικά την κατάλληλη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων).

-Να απαντήσετε σε 5 από τα 6 θέματα της εργασίας.

Ημερομηνία παράδοσης: 11/1/2024 (στην αίθουσα του μαθήματος-ΔΙΑΛ-1)

-Θα είμαι στη διάθεσή σας για οποιαδήποτε απορία στην εργασία.