# ΕΝΟΤΗΤΑ 7

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

### 7.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό ότι μία *συνήθης δ.ε. (Σ.Δ.Ε.) n–τάξης* είναι μία εξίσωση της μορφής $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ ($x \to$ ανεξάρτητη μεταβλητή, $y \to$ εξαρτημένη μεταβλητή με παραγώγους μέχρι και n–τάξης, $n \in N$). Θα ασχοληθούμε με την επίλυση ΣΔΕ (π.χ. $y^{(3)} - 2y^{(2)} - 5y = 0 \to$ ΣΔΕ 3ης τάξης).

Στην πράξη η εύρεση ακριβούς λύσης μιας δ.ε. είναι δύσκολο πρόβλημα. Και αυτό γιατί: **(i)** η δ.ε. είναι μη γραμμική, **(ii)** η δ.ε. έχει μεταβλητούς συντελεστές, **(iii)** η τάξη της δ.ε. είναι συνήθως αρκετά μεγάλη, **(iv)** απαιτείται η επίλυση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με την επίλυση γραμμικών ΣΔΕ και κυρίως με την επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών για γραμμικές ΣΔΕ μέσω μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης (προσεγγιστικές μέθοδοι). Η επιλογή αυτών των δύο περιπτώσεων συνθηκών (αρχικές και συνοριακές τιμές) οφείλεται στο γεγονός ότι η μοναδικότητα της λύσης μιας γραμμικής ΣΔΕ n–τάξης συνδέεται άμεσα με τις παραπάνω ομάδες συνθηκών με αποτέλεσμα τη δημιουργία δύο κατηγοριών προβλημάτων: **(i)** *προβλήματα αρχικών τιμών* (initial value problems), **(ii)** *προβλήματα οριακών ή συνοριακών τιμών* (boundary value problems). Ειδικότερα

**(i)** ***Πρόβλημα αρχικών τιμών***

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : [\alpha, b] \times R \to R$, $[\alpha, b] \subset R$, $y_0 \in R$. Ζητείται συνάρτηση

$$y : [\alpha, b] \to R : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \ \alpha \le x \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Κάθε συνάρτηση $y \in C^1([\alpha, b])$ που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις καλείται *λύση* του τυπικού προβλήματος αρχικών τιμών (1). Η μελέτη του τυπικού προβλήματος αρχικών τιμών συνδέεται με συνθήκες για την f που εξασφαλίζουν ύπαρξη ή/και μοναδικότητα της λύσης, ενώ εξετάζει αν η λύση *εξαρτάται συνεχώς* από τα αρχικά δεδομένα. (Η έννοια της *συνεχούς εξάρτησης* εκφράζει ότι: Αν $y_0$ η λύση του (1) και $\tilde{y}$ η λύση του (1) με αρχική τιμή $\tilde{y}_0$, τότε όταν η διαφορά $|y_0 - \tilde{y}_0|$ είναι μικρή και η διαφορά των λύσεων $\|y - \tilde{y}\|$ είναι μικρή. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η επιλογή της νόρμας συναρτήσεων στο $[\alpha, b]$ μέσω της οποίας διερευνάται η διαφορά).

**Παρατηρήσεις**

**(1)** Έστω f πολυώνυμο 1ου βαθμού ως προς y. Τότε η ΣΔΕ καλείται *γραμμική* και το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$\begin{cases} y'(x) = p(x)y(x) + q(x), \ \alpha \le x \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases} , \tag{2}$$

όπου $p, q \in C([\alpha, b])$. Τότε το πρόβλημα (2) έχει ακριβώς μια λύση της μορφής

$$y(x) = e^{\int_\alpha^x p(s)\,ds}\left[y_0 + \int_\alpha^x q(s)\, e^{-\int_\alpha^s p(\tau)\,d\tau} ds\right], \ \alpha \le x \le b .$$

**(2)** Η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (1) δίνεται από το ακόλουθο

**Θεώρημα.** *Για κάθε συνάρτηση $f \in C([\alpha, b] \times R)$, η οποία πληροί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς x*

$$\left(\exists L \ge 0,\ \forall x \in [\alpha, b] : \forall y_1, y_2 \in \mathrm{R} \to \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|\right)$$

*το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση σ' όλο το διάστημα [α, b].*

**(3)** Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (1) όταν δεν ισχύει η (ολική) συνθήκη Lipschitz (που ισχύει $\forall y_1, y_2 \in R$) αλλά μία *τοπική* συνθήκη Lipschitz (που ικανοποιούν περισσότερες συναρτήσεις), δεν ισχύει στο διάστημα [α, b] αλλά σ' ένα υποδιάστημα του $[\alpha, b']$ με κατάλληλο $b'$ σύμφωνα με το ακόλουθο

***Θεώρημα.*** *Για κάθε συνάρτηση $f \in C([\alpha, b] \times [y_0 - c, y_0 + c])$, $c > 0$, η οποία πληροί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t στο $[\alpha, b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$*

$$\left(\exists L \ge 0,\ \forall x \in [\alpha\alpha b] : \forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c] \to \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|\right)$$

*το τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση τουλάχιστον στο διάστημα $[\alpha, b']$, όπου $b' = min\left(b, \alpha + \dfrac{c}{A}\right)$ με $A = max\,|f(t, y)|$ ως προς x με $\alpha \le x \le b$ και ως προς y με $y_0 - c \le y \le y_0 + c$*

**(4)** Η συνθήκη της συνέχειας της f ($f \in C([\alpha, b] \times R)$ εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης του τυπικού προβλήματος αρχικών τιμών (1) σε κάποιο διάστημα της μορφής [α, c], c > 0, η οποία δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

**(ii)** ***Πρόβλημα οριακών ή συνοριακών τιμών***

Σε αντίθεση με το πρόβλημα αρχικών τιμών όπου σε κάποια δεδομένη στιγμή είναι γνωστή η τιμή της συνάρτησης και των παραγώγων της μέχρι και (n–1) - τάξης στο πρόβλημα αυτό υπάρχουν γνωστές πληροφορίες όχι για το ίδιο σημείο αλλά για δύο διαφορετικά σημεία.

Θα ασχοληθούμε με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση γραμμικών ΣΔΕ 1ης τάξης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι μία ΣΔΕ n–τάξης αποτελείται από n σε πλήθος ΣΔΕ 1ης τάξης οι συγκεκριμένες μέθοδοι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση γραμμικών ΣΔΕ n–τάξης γενικά.

## 7.2. Σφάλματα

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση y(x) ορίζεται στο διάστημα $[x_\alpha, x_b]$ θα υπολογιστούν οι τιμές της σε συγκεκριμένα σημεία $x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, που περιέχονται στο διάστημα $[x_\alpha, x_b]$ (τα οποία είναι συνήθως ισαπέχοντα). Έστω $y_k$ οι αντίστοιχες τιμές σ' αυτά τα σημεία. Τότε το

**(i)** ***Τοπικό σφάλμα (local error)*** ορίζεται ως

$$E_{τοπ.} = y_k - y(x_k),$$

$y_k$ $\rightarrow$ η τιμή που υπολογίζουμε μέσω της μεθόδου αριθμητικής ανάλυσης στο σημείο $x_k$,

$y(x_k)$ $\rightarrow$ η πραγματική τιμή της συνάρτησης στο σημείο $x_k$.

**(ii)** ***Ολικό σφάλμα (global error)*** ορίζεται ως το συνολικό σφάλμα μετά από μία σειρά επαναλήψεων, το οποίο δημιουργείται λόγω της συσσώρευσης και διάδοσης των σφαλμάτων σε διαδοχικούς υπολογισμούς.

**Παρατήρηση**

Γενικά η (k+1)-τιμή που υπολογίζουμε μέσω της αριθμητικής μεθόδου στο σημείο $x_{k+1}$ δίνεται από τη σχέση

$$y_{k+1} = \quad y_k + y'_k \cdot h + \frac{y''_k}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_k^{(n)}}{n!} h^n + R_n \ ,$$

όπου

$$R_n = \frac{y_k^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \ , \quad \xi \in [x_k, x_{k+1}] \ (\rightarrow \text{ τοπικό σφάλμα αποκοπής}).$$

## 7.3. Μέθοδος Euler (για ΣΔΕ 1ης τάξης)

Πρόκειται για την απλούστερη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών. Καλείται επίσης και *πολυγωνική μέθοδος του Cauchy* (ή μέθοδος Taylor 1ης τάξης). Έτσι αν

$$y' = f(x, y), \ \ y(x_0) = y_0 \qquad (3)$$

είναι ένα πρόβλημα δ.ε. αρχικών τιμών, τότε δεδομένου ότι η μέθοδος αυτή βασίζεται σ’ ένα ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης στο σημείο $x_0$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + Rn$$

λαμβάνοντας υπόψη τους όρους 1ης τάξης έχουμε

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

ή $\quad y(x) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0) \cdot h$

Άρα

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h$$

η προσέγγιση της πραγματικής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών στο k–στό βήμα της μεθόδου Euler.

**Παρατήρηση**

Πιο αυστηρά θεωρώντας ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) έχει μοναδική λύση τότε θεωρώντας μία διαμέριση $α = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ του διαστήματος [α, b] έτσι, ώστε

$x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \dfrac{b-\alpha}{n}$, i = 0, 1, 2, …, n, οι προσεγγίσεις $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ της μεθόδου Euler για ομοιόμορφη διαμέριση με βήμα h προσδιορίζονται από την επαναληπτική σχέση

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h \ , \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \ \text{με} \ y(x_0) = y_0 \ \text{γνωστή τιμή.}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος Euler προσεγγίζει τιμές κοντά στο αρχικό σημείο $x_0$ χωρίς τον υπολογισμό παραγώγων σε διαδοχικά βήματα χωρίζοντας το διάστημα μεταξύ του σημείου $x_0$ και του σημείου που επιθυμούμε να υπολογίσουμε σε n ισομήκη διαστήματα μήκους h.

**Παράδειγμα** (Γ.Δ. Ακριβής - Β.Α. Δουγαλής)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $\begin{cases} y' = y \quad , \qquad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

του οποίου η αναλυτική λύση είναι y(x) = $e^x$ με τη μέθοδο Euler και με ομοιόμορφο διαμερισμό h = 1/n, $x_k = k \cdot h$, k = 0, 1, 2, …, n.

**Λύση**

Η μέθοδος Euler για τον παραπάνω ομοιόμορφο διαμερισμό οδηγεί στην ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων $(y_k)_k$, $0 \le k \le n$ με

$$y_0 = 1, \ y_{k+1} = y_k + h \cdot y_k \ , \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$
$$= (1 + h) \cdot y_k \, .$$

Αν εργαστούμε διαδοχικά με βήμα h = 1, 1/2, 1/4, …, 1/64 , για n = 1, 2, …, 64 υποδιαστήματα βρίσκουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις $y_n$ της ακριβής ρίζας της δ.ε. στο σημείο x = 1 και τα αντίστοιχα σφάλματα

$$E_n = y_n - y(x_n) = y_n - y(1) = y_n - e.$$

| **h** | **$y_n$** | **$E_n$** |
|---|---|---|
| 1 | 2 | – 0.71828 |
| 1/2 | 2.25 | – 0.46828 |
| 1/4 | 2.44141 | –0.27688 |
| 1/8 | 2.56578 | – 0.15250 |
| 1/16 | 2.63793 | – 0.08035 |
| 1/32 | 2.67699 | – 0.04129 |
| 1/64 | 2.69734 | – 0.02094 |

Για παράδειγμα για h = 1/4 = 0.25 και για $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ έχουμε ότι:

**Βήμα 1ο** (k = 0)

$x_1 = 1\,h = 0.25$, $y_1 = (1 + h) \cdot y_0 = (1 + 1/4) \cdot 1 = 1.25$

**Βήμα 2ο** (k = 1)

$x_2 = 2h = 0.5$, $y_2 = (1 + h) \cdot y_1 = (1 + 1/4) \cdot (1.25) = 1.5625$

**Βήμα 3ο** (k = 2)

$x_3 = 3h=0.75, \quad y_3 = (1 + h) \cdot y_2 = (1 + 1/4) \cdot (1.5625) = 1.953125$

**Βήμα 4ο** (k = 3)

$x_4 = 4h=1, \quad y_4 = (1 + h) \cdot y_3 = (1 + 1/4) \cdot ( 1.953125) = 2.44141$

Το αντίστοιχο σφάλμα είναι:

$$|E_4| = |y_4 - y\,(1)| = |2.44141 - e| = |- 0.27688| = 0.27688.$$

Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση που παριστάνει τις πραγματικές τιμές με βάση την αναλυτική εξίσωση και τις προσεγγιστικές τιμές με τη μέθοδο Euler μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σφάλμα ελαττώνεται καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερες τιμές του x και απομακρυνόμαστε από το σημείο $x_0$=0 για το οποίο είναι γνωστή η αρχική συνθήκη $y(x_0)=y(0)=1$.

**Παρατηρήσεις**

**(1)** Δεδομένου ότι η επαναληπτική σχέση της μεθόδου Euler για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών γραμμικών ΣΔΕ 1ης τάξης είναι της μορφής

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\,(x_k, y_k)$$

προκύπτει ότι το τοπικό σφάλμα της μεθόδου δίνεται από τη σχέση

$$E_{τοπ.} = \frac{f'(x_k, y_k)}{2!} h^2 + \frac{f''(x_k, y_k)}{3!} h^3 + \cdots + O\left(h^{n+1}\right),$$

που για μικρά βήματα h λαμβάνοντας υπόψη μέχρι και τους όρους τάξης $h^2$ μπορεί να γραφεί ως

$$E_{τοπ.} = \frac{f'(x_k, y_k)}{2!} h^2 + O\left(h^2\right) \to O\left(h^2\right),$$

ενώ το συνολικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$E_{συν.} \to O(h)$$

για n σε πλήθος επαναλήψεις της μεθόδου Euler. Αυτό σημαίνει ότι η ελάττωση του βήματος h οδηγεί σε ελάττωση του σφάλματος (τοπικού και συνολικού) γεγονός που οδηγεί σε μεγαλύτερο υπολογιστικό έργο (μεγαλύτερο πλήθος επαναλήψεων) για την κάλυψη του ίδιου διαστήματος πραγματικών τιμών του x.

Με βάση το ακόλουθο θεώρημα

- *Αν η παράγωγος της f (x, y) ως προς y ικανοποιεί την ανισότητα* $\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| < M$ *στο διάστημα* [$x_0$, $x_n$], *όπου M θετική σταθερά και η 2η παράγωγος της ακριβής λύσης* $y_A(x)$ *ικανοποιεί τη σχέση* $|y''_A(x)| < L$, *όπου L θετική σταθερά στο διάστημα* [$x_0$, $x_n$], *τότε το τοπικό σφάλμα αποκοπής* $E_i$ *της μεθόδου Euler στο σημείο* $x_i = x_0 + i\,h$ *δίνεται από τη σχέση*

$$|E_i| \le \frac{h \cdot L}{2M}\left[e^{(x_i - x_0)\cdot M} - 1\right].$$

Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα αποκοπής της μεθόδου Euler είναι της τάξης του O(h) ή ch, όπου c σταθερά, ενώ το σφάλμα τείνει στο μηδέν όταν το $h \to 0$.

Επιπλέον από τον τύπο Euler προκύπτει ότι με βάση τις τιμές προσέγγισης της συνάρτησης που προκύπτουν μέσω της μεθόδου ακολουθούμε εφαπτόμενες διαφόρων λύσεων της αντίστοιχης δ.ε. Επομένως η προσεγγιστική λύση της δ.ε. είναι πολυγωνική γραμμή που βρίσκεται στην κυρτή πλευρά της ακριβής λύσης. Κατά συνέπεια η μέθοδος Euler καλείται και *μέγεθος πολυγώνου*.

**(2)** Είναι γνωστό ότι μία αριθμητική λύση είναι *ασταθής* αν παρατηρείται εκθετική αύξηση των σφαλμάτων στην περίπτωση ενός προβλήματος που έχει φραγμένη λύση. Ειδικότερα στην περίπτωση δ.ε. η ευστάθεια μιας αριθμητικής λύσης συνδέεται άμεσα με τη μορφή της δ.ε., την αριθμητική μέθοδο επίλυσης της δ.ε. καθώς και το βήμα της μεθόδου επίλυσης. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι αν $E_i$ είναι το σφάλμα στο σημείο υπολογισμού $x_i$ στην περίπτωση της μεθόδου Euler, τότε

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = 1 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ισχύει ότι αν $\left\| 1 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right\| < 1$, τότε η μέθοδος είναι ευσταθής δεδομένου ότι το σφάλμα από βήμα σε βήμα δεν αυξάνεται ανεξέλεγκτα. Ειδικότερα:

(i) αν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι αρνητική υπάρχει περιοχή τιμών του h που εξασφαλίζει την ευστάθεια της μεθόδου,

(ii) αν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι θετική η μέθοδος είναι ασταθής σε κάθε περίπτωση.

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος Euler είναι ευσταθής υπό συνθήκες.

**(3)** Αν στην προηγούμενη μέθοδο Euler (ή μέθοδος Taylor 1ης τάξης) διατηρήσουμε και τους όρους 2ης τάξης, τότε το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor μπορεί να γραφεί

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

από το οποίο προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot y''_k.$$

Αλλά $y' = f(x,y)$. Επομένως $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x,y)$.

Άρα η παραπάνω επαναληπτική σχέση μπορεί να γραφεί

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \cdot f(x_k, y_k)\right]$$

η οποία αποτελεί την επαναληπτική σχέση της ***μεθόδου Taylor 2ης τάξης*** για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών γραμμικών ΣΔΕ 1ης τάξης.

### 7.4. Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης (RK2)

Η μέθοδος αυτή αποτελεί μία βελτιωμένη μέθοδος Euler σύμφωνα με την οποία υπολογίζουμε την παράγωγο της y(x) στο σημείο $x_k$

$$y'(x)\big|_{x_k} = f\left(x_k, y_k\right) = \alpha_1$$

έτσι, ώστε να βρεθεί μία προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης στο σημείο $x_{k+1}$ από τη σχέση

$$y^*_{k+1} = y_k + \alpha_1 \cdot h \ ,$$

η οποία χρησιμεύει για τον υπολογισμό - εκτίμηση της παραγώγου της y(x) στο σημείο $x_{k+1}$

$$y'(x)\big|_{X_{k+1}} = f\left(x_{k+1}, y^*_{k+1}\right) = \alpha_2 \, .$$

Αν η κλίση είναι ο μέσος όρος των κλίσεων $\alpha_1$ και $\alpha_2$, τότε η ζητούμενη επαναληπτική σχέση της μεθόδου RK2 είναι η

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot h \quad \text{(βελτιωμένη μέθοδος Euler ή μέθοδος Heun).}$$

### 7.5. Μέθοδος Runge - Kutta 4ης τάξης (RK4)

Στη μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε τέσσερις ενδιάμεσες κλίσεις

**(i)** $\alpha_1 = f\,(x_k, y_k)$

**(ii)** $\alpha_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, \quad y_k + \frac{\alpha_1}{2} h\right)$

**(iii)** $\alpha_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, \quad y_k + \frac{\alpha_2}{2} h\right)$

**(iv)** $\alpha_4 = f\left(x_k + h, \quad y_k + \alpha_3\, h\right)$

Η τιμή της συνάρτησης στο επόμενο σημείο δίνεται από την επαναληπτική σχέση:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4\right] \ , \quad k \geq 0.$$

### Παρατηρήσεις

**(1)** Πρόκειται για την πιο γνωστή και την πιο δημοφιλή μορφή των μεθόδων Runge-Kutta.

**(2)** Στους παραπάνω τύπους το τοπικό σφάλμα αποκοπής ελαττώνεται όσο το βήμα h μικραίνει. Όταν το βήμα h γίνεται αρκετά μικρό, τότε αυξάνεται το υπολογιστικό έργο (πλήθος αριθμητικών πράξεων) με αποτέλεσμα να αυξάνεται το σφάλμα στρογγύλευσης.

**(3)** Μοναδικό μειονέκτημα των μεθόδων Runge-Kutta είναι η δυσκολία που παρουσιάζουν στη μελέτη των σφαλμάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εξέταση των τιμών των $\alpha_i$, i = 1, 2, 3, 4 ως προς το αν διαφέρουν πολύ μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή ελαττώνουμε το βήμα h.

**(4)** Από τη μέθοδο Runge-Kutta 2ης τάξης για $\alpha_1$ = h f ($x_k$ $y_k$) προκύπτει η ακόλουθη επαναληπτική σχέση

$y_{k+1} = y_k + h\, f\,(x_k + h/2,\, y_k + \alpha_1/2),\; k \geq 0$ (*Τροποποιημένη μέθοδος Euler ή μέθοδος πολυγώνου*)

**(5)** Για τη μέθοδο Runge-Kutta 2ης και 4ης τάξης το συνολικό σφάλμα είναι ανάλογο της μεθόδου, δηλαδή $O(h^2)$ και $O(h^4)$ αντίστοιχα.

**(6)** Η αριθμητική ευστάθεια των μεθόδων Runge-Kutta ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\left|1 + h\cdot\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right| < 1 \quad (\text{για τη RK2}) \quad \text{και} \quad \left|1 + h\cdot\ell + \frac{h^2\ell^2}{2} + \frac{h^3\ell^3}{6} + \frac{h^4\ell^4}{24}\right| < 1 \quad (\text{για τη RK4}),$$

όπου $\lambda$ μιγαδικός αριθμός. Ειδικότερα αν $\lambda$ πραγματικός αριθμός, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις γράφονται: $-2 < h\ell < 0$ (RK2) και $-2.785 < h\ell < 0$ (RK4), όπου στη θέση του $\lambda$ μπορούμε να θέσουμε την παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ της γραμμικοποιημένης εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \lambda y$.