ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

5.1. Εισαγωγή

Θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση συνάρτησης f για την οποία είναι γνωστό ένα σύνολο τιμών της $f(x_i)$ σ’ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_i\}$, i = 0, 1, 2, ..., n, μέσω κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων και τον προσδιορισμό στη συνέχεια της ζητούμενης άγνωστης τιμής της f σε ένα σημείο x^* έχοντας ως γνωστές διάφορες γειτονικές τιμές της $f(x^*)$. Προς την κατεύθυνση αυτή καλούμαστε να προσεγγίσουμε την f με μία άλλη συνάρτηση, για την οποία είναι εύκολος ο υπολογισμός των τιμών της για κάθε x. Ισοδύναμα δοθέντος ενός συνόλου (n+1) σε πλήθος σημείων του επιπέδου (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, ..., n (που αντιστοιχούν σε (n+1) σε πλήθος μετρήσεις της μεταβλητής y που εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή x στα σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n) ζητείται να βρεθεί κατάλληλη προσέγγιση των (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, .., n από μία απλή συνάρτηση y = f(x), της οποία η γραφική παράσταση στο επίπεδο xOy είναι γειτονική των σημείων (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, ..., n. Η αριθμητική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων προσέγγισης αυτού του τύπου καλείται *παρεμβολή*.

Άρα το πρόβλημα προσέγγισης συνάρτησης f μέσω παρεμβολής ανάγεται στο ακόλουθο:

Θεωρώντας μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής f και (n+1) σε πλήθος διαφορετικά ανά δύο σημεία $x_0, x_1, ..., x_n$ για τα οποία είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$, i=0, 1, 2, …, n, καλούμαστε να προσδιορίσουμε συνάρτηση h, η οποία να παρεμβάλει την f στα σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n, δηλαδή να πληροί τις σχέσεις $h(x_i) = f(x_i)$, i =0, 1, 2, ..., n. Η συνάρτηση h θα αποτελεί την κατάλληλη προσέγγιση της f.

Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση συναρτήσεων μέσω παρεμβολής με *πολυωνυμικές* καθώς και με *τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις*. Και αυτό γιατί τα πολυώνυμα αποτελούν πολύ καλές προσεγγίσεις συναρτήσεων δεδομένου ότι είναι εύκολος ο υπολογισμός των τιμών τους, η παραγώγιση και η ολοκλήρωσή τους, ενώ έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass με βάση το οποίο ισχύει ότι αν $f \in C[\alpha, b]$ και $\in > 0$, τότε υπάρχει πολυώνυμο p(x) τέτοιο, ώστε $\max\limits_{x \in [\alpha, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$. Επιπλέον αν και τα πολυώνυμα αποτελούν καλές προσεγγίσεις συναρτήσεων εντούτοις αυτό δεν συμβαίνει για πολυώνυμα μεγάλου βαθμού. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις προκειμένου να εξασφαλιστεί μεγάλη ακρίβεια προσέγγισης.

5.2. Πολυωνυμική παρεμβολή

Πρόκειται για την πιο απλή περίπτωση παρεμβολής, η οποία πραγματοποιείται με χρήση απλών πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Ύπαρξη – Μοναδικότητα πολυωνύμου παρεμβολής

Έστω $x_0, x_1, ..., x_n$ (n+1) σε πλήθος διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους σημεία και $y_i \in R$, i=0, 1, 2, ..., n. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n έτσι, ώστε να ισχύει $p(x_i) = y_i$, i = 0, 1, 2, ..., n.

Απόδειξη

Έστω $p(x)=\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_n \cdot x^n$, το ζητούμενο πολυώνυμο, όπου οι άγνωστοι συντελεστές $\alpha_i \in R$, i = 0, 1, 2, ..., n, (n+1) σε πλήθος, προσδιορίζονται από τις (n+1) σε πλήθος σχέσεις $p(x_i) = y_i$, i = 0, 1, 2, ..., n. Επομένως

για $x = x_0$ έχουμε $p(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_n \cdot x_0^n = y_0$

για $x = x_1$ έχουμε $p(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_1^n = y_1$

$$\vdots$$

για $x = x_n$ έχουμε $p(x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_n + \cdots + \alpha_n \cdot x_n^n = y_n$

Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα γραμμικό σύστημα (n+1) εξισώσεων με (n+1) αγνώστους το οποίο μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A \cdot X = Y \text{ , όπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$ ο πίνακας του συστήματος, $$X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$ ο πίνακας των

αγνώστων του συστήματος και $$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ ο πίνακας των σταθερών όρων του συστήματος.

Ο πίνακας A καλείται πίνακας Vandermonde και έχει ορίζουσα

$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$ (ορίζουσα Vandermonde), διότι όλα τα σημεία x_j, j = 0, 1, 2, ..., n, είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Άρα το παραπάνω γραμμικό σύστημα (n+1) x (n+1) έχει μία και μοναδική λύση την $X = A^{-1} \cdot Y$ σύμφωνα με τον κανόνα Cramer. Συνεπώς το πρόβλημα πολυωνυμικής παρεμβολής λύνεται μοναδικά.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν f πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής και p πολυώνυμο βαθμού το πολύ n έτσι, ώστε $p(x_i) = f(x_i)$, i = 0, 1, 2, ..., n, θα λέμε ότι το p παρεμβάλλεται στην f στα σημεία x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, και θα καλείται *πολυώνυμο παρεμβολής* της f στα σημεία x_i, $i = 0, 1,2, ..., n$.

Ακολουθεί μια παράσταση του σφάλματος $f(x) - p(x)$, f ομαλή συνάρτηση, καθώς και μία εκτίμηση του σφάλματος.

Σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής

Αν $n \in N$, $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$, $x_i \in [\alpha, b]$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους σημεία και p πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, τότε για κάθε $x \in [\alpha, b]$, υπάρχει $\xi \in [\alpha, b]$ έτσι, ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) , \tag{1}$$

$$\|f - p\|_\infty \leq \max_{x \in [\alpha, b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \tag{2}$$

(Είναι γνωστή η νόρμα $\|h\|_\infty = \max_{x \in [\alpha, b]} |g(x)|$).

Παρατήρηση

Έστω $f \in C^2[\alpha, b]$ και p_1 το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής που παρεμβάλει την f σε δύο σημεία του πεδίου ορισμού της $x_0 = \alpha$, $x_1 = b$ έτσι, ώστε να ισχύει $p_1(\alpha) = f(\alpha)$ και $p_1(b) = f(b)$ της μορφής

$$p_1(x) = \frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha} \cdot (x - \alpha) + f(\alpha).$$

Τότε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα του παραπάνω γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής είναι της μορφής (σύμφωνα με τη (2) για n=1)

$$\max_{x \in [\alpha, b]} |p_1(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2!} \max_{x \in [\alpha, b]} |(x - \alpha)(x - b)| \cdot \max_{x \in [\alpha, b]} |f''(x)|$$

$$= \frac{(b - \alpha)^2}{8} \max_{x \in [\alpha, b]} |f''(x)|.$$

5.3. Παράσταση και εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

5.3.1. Άμεση μέθοδος

Βασίζεται στην άμεση επίλυση του γραμμικού συστήματος (n+1) x (n+1) $A \cdot X = Y$ μέσω κλασικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων (π.χ. μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση) για την εύρεση του πίνακα X, που περιέχει ως στοιχεία τους άγνωστους συντελεστές του ζητούμενου πολυωνύμου παρεμβολής.

5.3.2. Παρεμβολή Lagrange

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αναζητούμε μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού n της μορφής

$$p(x) = f(x_0)\cdot L_0(x) + f(x_1)\cdot L_1(x) + \cdots + f(x_n)\cdot L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_i(x), \qquad (3)$$

το οποίο παρεμβάλει την f σε (n+1) σε πλήθος σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n, δηλαδή πληροί τις σχέσεις $p(x_i) = f(x_i)$, i =0, 1, 2, ..., n, όπου $L_i(x)$ τα *πολυώνυμα Lagrange* ως προς τα σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n, (γενικά μη ισαπέχοντα), που ορίζονται από τη σχέση

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \text{ i=0,1, ..., n,}$$

τα οποία πληρούν την ιδιότητα

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}, \; j = 0,1,2,...n \quad (\text{δέλτα του Kronecker}).$$

Τότε το p(x) (3) καλείται *πολυώνυμο παρεμβολής κατά Lagrange* (ή παράσταση σε μορφή *Lagrange* του πολυωνύμου παρεμβολής).

Παρατήρηση

Λόγω της απλότητας του τύπου τους τα πολυώνυμα παρεμβολής κατά Lagrange είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για θεωρητικούς σκοπούς.

5.3.3. Παρεμβολή Newton

Το βασικό μειονέκτημα της παρεμβολής Lagrange είναι ότι σε περίπτωση προσθήκης ενός ή περισσοτέρων σημείων στα ήδη υπάρχοντα σημεία παρεμβολής απαιτείται ο υπολογισμός εκ νέου όλων των πολυωνύμων Lagrange από την αρχή (ακυρώνοντας τους προηγούμενους υπολογισμούς) γεγονός που οδηγεί σε μεγάλο υπολογιστικό έργο. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τη μέθοδο παρεμβολής Newton (Isaac Newton) σύμφωνα με την οποία αν f πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής και $x_i \in R$, i = 0, 1, 2, ..., n, (n+1) σε πλήθος διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους σημεία και $y_i = f(x_i) \in R$, i = 0, 1, 2, ..., n, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο n-οστού βαθμού $p_n(x)$ της μορφής

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1\cdot(x-x_0) + \alpha_2\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \cdots + \alpha_n\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (4)$$

το οποίο παρεμβάλει την f στα σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n, δηλαδή $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i$, i = 0, 1, 2, ..., n, όπου

$$p_n(x_0) = f(x_0)(=y_0) \;\rightarrow\; \alpha_0 = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = f(x_1)(=y_1) \;\rightarrow\; \alpha_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-\alpha_0}{x_1-x_0}$$

$$p_n(x_2) = f(x_2)(=y_2) \;\rightarrow\; \alpha_2 = \left(\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-\alpha_0}{x_1-x_0}\right) / (x_2-x_1)$$

$$= \left(\frac{f(x_2)-\alpha_0}{x_2-x_0} - \alpha_1\right) / (x_2-x_1) \qquad \text{κ.λπ.}$$

Παρατηρήσεις

1. Δεδομένου ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό δεν παίζει ρόλο η μέθοδος παρεμβολής που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του, αφού ουσιαστικά όλες οι μέθοδοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα (στο ίδιο πολυώνυμο).

2. Από τη σχέση ορισμού (4) του πολυωνύμου παρεμβολής κατά Newton προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Newton βαθμού n+1, το οποίο παρεμβάλει μία συνάρτηση f σε (n+2) σε πλήθος σημεία x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} προκύπτει από το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής Newton βαθμού n αρκεί να προστεθεί σε αυτό ο όρος α_{n+1} $(x - x_0) \dots (x - x_n)$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορούμε μέσω της μεθόδου παρεμβολής Newton να κερδίσουμε σε υπολογιστικό έργο κατά τον υπολογισμό πολυωνύμων παρεμβολής που προκύπτουν αφαιρώντας ή προσθέτοντας σημεία παρεμβολής.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών α_i, i = 0, 1, 2,... , n, του πολυωνύμου παρεμβολής Newton (4) εκτός από τον τρόπο υπολογισμού που δείξαμε πιο πάνω εφαρμόζουμε τις ακόλουθες μεθόδους:

(α) *Διαιρεμένες Διαφορές* (γενικά για μη ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής)

Αν $(x_i, f(x_i))$, i = 0, 1, 2, ..., n, μη ισαπέχοντα σημεία, τότε οι διαιρεμένες διαφορές ορίζονται ως εξής:

(α_1) 0 – τάξης $\quad f[x_i] = f_i \left(\equiv f(x_i)\right)$

(α_2) 1ης – τάξης $\quad f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

(α_3) 2ης – τάξης $\quad f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

και γενικά

n – τάξης $\quad f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

σχηματίζοντας τον *ακόλουθο πίνακα διαιρεμένων διαφορών*

x_i	$f(x_i)$	1ης τάξης	2ης τάξης		n-τάξης
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f(x_2)$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
		$\vdots$	$\vdots$		
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$				
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f(x_n)$				

Τότε το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής κατά Newton θα είναι της μορφής

$$p_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)\cdot(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$(x-x_0)\cdot(x-x_1)+\cdots+(x-x_{n-1}).$$

Παρατηρήσεις

1. Η αλλαγή στη σειρά των σημείων παρεμβολής x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, δεν μεταβάλλει την τιμή μιας διαιρεμένης διαφοράς.

2. Το σφάλμα παρεμβολής θεωρώντας το πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$ στο σημείο x δίνεται από τη σχέση

$$R_{n+1}(x)=f(x)-p_n(x)=f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,x]\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

3. Από τη σχέση (1) που περιγράφει γενικά το σφάλμα παρεμβολής και την παρατήρηση (2) προκύπτει ότι αν $f\in C^{n+1}[\alpha,b]$, $x_i\in[\alpha,b]$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, και x τυχαίο σημείο του [α, b], τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha, b)$ έτσι, ώστε

$$f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

(β) *Πεπερασμένες Διαφορές* (ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής)

(β$_1$) *Προς τα εμπρός διαφορές*

- <u>**1ης – τάξης στο σημείο x_n**</u> $\Delta f_n=f(x_{n+1})-f(x_n).$
- <u>**2ης – τάξης στο σημείο x_n**</u> $\Delta^2 f_n=\Delta f_{n+1}-\Delta f_n.$

και γενικά <u>**k- τάξης**</u> στο σημείο x_n $\Delta^k f_n=\Delta(\Delta^{k-1}f_n)=\Delta^{k-1}f_{n+1}-\Delta^{k-1}f_n.$

(β$_2$) *Προς τα πίσω διαφορές*

- <u>**1ης – τάξης στο σημείο x_n**</u> $\nabla f_n=f(x_n)-f(x_{n-1}).$
- <u>**2ης – τάξης στο σημείο x_n**</u> $\nabla^2 f_n=\nabla f_n-\nabla f_{n-1}.$

και γενικά <u>**k- τάξης**</u> στο σημείο x_n $\nabla^k f_n=\nabla(\nabla^{k-1}f_n)=\nabla^{k-1}f_n-\nabla^{k-1}f_{n-1}.$

Οι παραπάνω κατηγορίες πεπερασμένων διαφορών σχηματίζουν τους ακόλουθους πίνακες:

Α. *Πίνακας προς τα εμπρός διαφορών*

x_i	f_i	**1ης τάξης**	**2ης τάξης**	**...**	
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1			
x_2	f_2				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
x_{n-2}	f_{n-2}				
		Δf_{n-2}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$		
		Δf_{n-1}			
x_n	f_n				

Β. *Πίνακας προς τα πίσω διαφορών*

x_i	f_i	**1ης τάξης**	**2ης τάξης**	**...**	
x_{-n}	f_{-n}				
		$\nabla f_{-(n-1)}$			
$x_{-(n-1)}$	$f_{-(n-1)}$		$\nabla^2 f_{-(n-1)}$		
		$\nabla f_{-(n-2)}$			
$x_{-(n-2)}$	$f_{-(n-2)}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{-2}	f_{-2}				
		∇f_{-1}			
x_{-1}	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$		
		∇f_0			
x_0	f_0				

Παρατηρήσεις

1. Οι πεπερασμένες διαφορές n τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι σταθερές.

2. Οι πεπερασμένες διαφορές $(n+1)$ και μεγαλύτερης τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι μηδέν.

3. Τα σύμβολα Δ, ∇ καλούνται *τελεστές διαφορών* και ικανοποιούν την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Α. Αν $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, $(n+1)$ σε πλήθος ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής, τότε μία προσέγγιση της τιμής $f(x)$ της συνάρτησης f στο σημείο x δίνεται από το ακόλουθο πολυώνυμο παρεμβολής μέσω των προς τα εμπρός διαφορών

$$f(x) \approx f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_0 = p_n(x), \quad \theta = \frac{x - x_0}{h}, \quad \binom{\theta}{k} = \frac{\theta!}{k!(\theta - k)!}.$$

Β. Αν $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = -n, ..., 1, 0$ (n+1) σε πλήθος ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής (όπου x_0 είναι το τελευταίο σημείο), τότε μία προσέγγιση της τιμής f(x) της συνάρτησης f στο σημείο x δίνεται από το ακόλουθο πολυώνυμο παρεμβολής μέσω των προς τα πίσω διαφορών

$$f(x) \approx f_0 - \binom{\theta}{1}\nabla f_0 + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_0 + \cdots + (-1)^n \cdot \binom{\theta}{n}\nabla^n f_0 = p_n(x)\ ,\ \ \theta = \frac{x_0 - x}{h}.$$

Παρατηρήσεις

1. Για ισαπέχοντα σημεία κοινού πλάτους $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, ..., k$, ο τελεστής Δ των προς τα εμπρός διαφορών k-τάξης συνδέεται με την αντίστοιχη διαιρεμένη διαφορά μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\ h^k}.$$

2. Η χρήση διαιρεμένων διαφορών αποτελεί τον πιο κατάλληλο τρόπο εύρεσης ενός πολυωνύμου παρεμβολής για διάφορες τιμές του x και αυτό γιατί είναι ανεξάρτητες του x. Επιπλέον η προσθήκη επιπλέον σημείων σ' ένα πίνακα διαιρεμένων διαφορών δεν μεταβάλλει τις τιμές του πίνακα που έχουν ήδη υπολογιστεί γεγονός που εξασφαλίζει μικρότερο υπολογιστικό έργο.

5.3.4. Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n - Συνάρτηση Runge

Έχει παρατηρηθεί ότι η συμπεριφορά των πολυωνύμων παρεμβολής μιας συνάρτησης f στο [α, b] καθώς το πλήθος των σημείων παρεμβολής αυξάνει (ισοδύναμα καθώς αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής) αλλάζει με αποτέλεσμα οι κλασικές μέθοδοι παρεμβολής να μην οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα, δηλαδή ακριβείς εκτιμήσεις των τιμών των συναρτήσεων που προσεγγίζονται από πολυώνυμα παρεμβολής.

Θα περίμενε κάποιος ότι στην περίπτωση ομοιόμορφου διαμερισμού του διαστήματος [α, b] και καθώς το πλήθος των σημείων παρεμβολής αυξάνει (τείνει στο άπειρο) η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής $(p_n)_n$ μιας οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης f στο [α, b] να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Χαρακτηριστικό παράδειγμα που επιβεβαιώνει ότι τα παραπάνω δεν είναι αληθή αποτελεί η συνάρτηση του Runge, που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}\ ,\ \ x \in [-1, 1],$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο [- 1, 1] και για την οποία ισχύει $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - p_n\|_\infty = \infty$.

Θα έλεγε κανείς ότι το πρόβλημα οφείλεται στον ομοιόμορφο διαμερισμό του [-1, 1] και ότι ενδεχόμενα να μην εμφανιζόταν αν επιλέγαμε μη ομοιόμορφους διαμερισμούς πυκνώνοντας τα σημεία παρεμβολής κοντά στα άκρα του διαστήματος [- 1, 1]. Πράγματι αποδεικνύεται ότι

ότι για μεγάλο n η ποσότητα $\max\limits_{x\in[\alpha,b]}\left(\prod\limits_{i=0}^{n}\left|(x-x_i)\right|\right)$ από την οποία προκύπτει το άνω φράγμα του σφάλματος της πολυωνυμικής παρεμβολής ελαχιστοποιείται αν στη θέση των ισαπέχοντων σημείων παρεμβολής $x_i=\alpha+\frac{(b-\alpha)}{n}\cdot i$, i = 0, 1, 2, ..., n, επιλέξουμε τα *σημεία του Chebyshev* $x_i=\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{2i+1}{n+1}\right)\right]$, i = 0, 1, 2, ..., n, τα οποία βρίσκονται στο διάστημα [-1, 1], είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, συσσωρεύονται στα άκρα του διαστήματος καθώς το n αυξάνει και αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev πρώτου είδους

$$\varphi_{n+1}(x)=\cos\left[(n+1)\arccos x\right]\ ,\quad x\in[-1,1].$$

Βέβαια στην περίπτωση που το αρχικό διάστημα είναι το [α, b] θα πρέπει αρχικά να γίνει ένας γραμμικός μετασχηματισμός έτσι, ώστε η συνάρτηση μελέτης να ορίζεται στο [-1, 1].

Εντούτοις η εφαρμογή των κλασικών μεθόδων παρεμβολής έχει δείξει ότι ακόμη και στην περίπτωση που η πολυωνυμική παρεμβολή εμφανίζει μικρό σφάλμα για μεγάλο n τα προβλήματα σφαλμάτων στρογγύλευσης που εμφανίζονται κατά τον υπολογισμό πολυωνύμων παρεμβολής μεγάλου βαθμού μέσω υπολογιστή δεν επιτρέπουν τη χρήση των κλασικών τεχνικών πολυωνυμικής παρεμβολής για μεγάλο n. Στην πράξη η προσέγγιση συναρτήσεων πραγματοποιείται σχεδόν αποκλειστικά με χρήση τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων λαμβάνοντας υπόψη η πολυωνυμική παρεμβολή έχει πάρα πολλές εφαρμογές (π.χ. στον προσδιορισμό κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης και παραγώγισης).

5.3.5. Παρεμβολή Hermite

Η παρεμβολή Hermite χρησιμοποιείται στην περίπτωση που για τη συνάρτηση f είναι γνωστές όχι μόνο οι τιμές της στα σημεία παρεμβολής αλλά και οι τιμές των παραγώγων της μέχρι μία ορισμένη τάξη στα σημεία αυτά. Στην περίπτωση αυτή η πολυωνυμική συνάρτηση που παρεμβάλει την f προσδιορίζεται πλήρως τόσο από τις τιμές της f στα σημεία παρεμβολής όσο από το γεγονός ότι πρέπει να έχει τις ίδιες παραγώγους με την f μέχρι μία ορισμένη τάξη στα σημεία αυτά, όπου η τάξη των παραγώγων μπορεί να είναι διαφορετική από σημείο σε σημείο, σύμφωνα με το :

Θεώρημα. Αν $k_0, k_1, ..., k_n \in N$ με $k_0 + k_1 + ... + k_n + n = L$, $M = \max(k_0, ..., k_n)$, $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ σημεία του [α, b] διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους και $f\in C^M[\alpha,b]$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής Hermite p βαθμού το πολύ L τέτοιο, ώστε

$$p^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)\ ,\quad i=0,1,...,k_0\ ,$$

$$p^{(i)}(x_1)=f^{(i)}(x_1)\ ,\quad i=0,1,...,k_1\ ,$$

$$p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), \quad i = 0, 1, ..., k_n.$$

Ειδική περίπτωση. Ζητείται πολυώνυμο παρεμβολής Hermite p βαθμού το πολύ $(2n+1)$ το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω $(2n+2)$ σε πλήθος συνθήκες παρεμβολής

$$p(x_i) = f(x_i)$$
$$p'(x_i) = f'(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, ..., n,$$

σε $(n + 1)$ σε πλήθος διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους σημεία $x_i \in [\alpha, b]$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, στα οποία είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$, $f'(x_i)$ της συνάρτησης $f \in C^1[\alpha, b]$. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό και μπορεί να έχει τη μορφή

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \cdot \varphi_i^{(1)}(x) + f'(x_i) \cdot \varphi_i^{(2)}(x) \right], \tag{5}$$

όπου $\varphi_i^{(1)}(x)$ και $\varphi_i^{(2)}(x)$ μοναδικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ $(2n + 1)$ με

$$\varphi_i^{(1)}(x) = [1 - 2(x - x_i) \cdot L_i'(x_i)] \cdot L_i^2(x),$$
$$\varphi_i^{(2)}(x) = (x - x_i) \cdot L_i^2(x)$$

έτσι, ώστε να ισχύει

$$\varphi_i^{(1)}(x_j) = \delta_{ij}, \qquad \frac{d}{dx}\varphi_i^{(1)}(x_j) = 0,$$

$$\varphi_i^{(2)}(x_j) = 0, \qquad \frac{d}{dx}\varphi_i^{(2)}(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j=0, 1, \ldots, n,$$

όπου $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, τα πολυώνυμα Lagrange.

Επιπλέον όσον αφορά στο σφάλμα παρεμβολής της ειδικής αυτής περίπτωσης ισχύει ότι:

- Αν $[\alpha, b] \subseteq R$, $x_i \in [\alpha, b]$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, διαφορετικά ανά δύο σημεία μεταξύ τους, $f \in C^{2n+2}[\alpha, b]$ και p πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που δίνεται από τη σχέση (5), τότε για κάθε $x \in [\alpha, b]$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ έτσι, ώστε το σφάλμα παρεμβολής να ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

5.3.6. Παρεμβολή με splines

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στην περίπτωση που το διάστημα ορισμού [α, b] της συνάρτησης προς προσέγγιση από ένα κατάλληλο πολυώνυμο μέσω των κλασικών μεθόδων πολυωνυμικής παρεμβολής είναι μικρό σε μήκος η πολυωνυμική παρεμβολή με πολυώνυμα σχετικά μικρού βαθμού n εμφανίζει μικρό σφάλμα. Τι συμβαίνει όμως κατά την παρεμβολή με πολυώνυμα (γενικά διαφορετικά) σε κάθε υποδιάστημα ενός αρκετά λεπτού διαμερισμού του [α, b]; Στην περίπτωση αυτή καλούμαστε να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση $S(x)$, η οποία ορίζεται από το σύνολο των σημείων $[x_i,\ s(x_i)]$, i = 0, 1, 2, ..., n, με πολυώνυμα μικρού βαθμού έτσι, ώστε κάθε πολυώνυμο να ορίζεται και να προσεγγίζει την f μόνο σε ένα περιορισμένο υποδιάστημα του συνολικού πεδίου ορισμού της. Αυτά τα πολυώνυμα μικρού βαθμού καλούνται splines. Επομένως έχουμε ότι:

Ορισμός. Αν $D = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ ένας διαμερισμός του διαστήματος [α, b] καλούμε *splines* ως προς αυτόν τον διαμερισμό γενικά συναρτήσεις, οι οποίες σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, i = 0, 1, 2, ..., n-1, έχουν μία συγκεκριμένη μορφή (πολυώνυμα βαθμού το πολύ m, τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ m κλπ.). Θα ασχοληθούμε με πολυωνυμικές splines βαθμού το πολύ m ως προς τον διαμερισμό D του διαστήματος $[\alpha, b] \subseteq R$, $m \in N$, δηλαδή με στοιχεία του συνόλου (γραμμικός χώρος)

$$S_m(D) = \{ s \in C^{n-1}[\alpha, b] \,/\, \text{η } s \text{ στο } [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, 1, 2, ..., n-1, \text{ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ } m \text{ ως προς } D\}.$$

Θα μελετήσουμε ειδικότερα τις τμηματικές γραμμικές πολυωνυμικές splines (δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου $S_1(D)$) και τις τμηματικές κυβικές πολυωνυμικές splines (δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου $S_3(D)$), διότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στις εφαρμογές.

5.3.6.1. Παρεμβολή με τμηματικές γραμμικές splines

Θεωρούμε τον διαμερισμό $D = \{\alpha = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ του διαστήματος [α, b]. Συμβολίζουμε με $S_1(D)$ τον γραμμικό χώρο όλων των γραμμικών (βαθμού 1) splines, δηλαδή των συνεχών στο [α, b] και τμηματικών ως προς D γραμμικών πολυωνυμικών συναρτήσεων. Τότε η μοναδική συνάρτηση παρεμβολής $S_1(x)$ που προκύπτει αποτελείται από n σε πλήθος *γραμμικές splines* $s_i^1(x)$, i = 1, 2, ..., n, και ορίζεται ως εξής:

$$S_1(x) = \begin{cases} s_1^1(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ s_2^1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_n^1(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \quad \text{ή} \quad S_1(x) = \begin{cases} \alpha_1 + b_1(x - x_0), & x_0 \le x \le x_1 \\ \alpha_2 + b_2(x - x_1), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n + b_n(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

(πολυώνυμα Newton 1ου βαθμού)

όπου $\alpha_i = s(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $b_i = \dfrac{s(x_i) - s(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$, i = 1, 2, ..., n, $f \in C[\alpha, b]$ συνάρτηση η οποία παρεμβάλλεται από την $S_1(x)$ στα σημεία x_i, x_{i+1}, i = 0, 1, 2, ... , n-1. (Συμβολίζουμε με $s(x_i)$ την αντίστοιχη τιμή της γραμμικής spline $s_i^1(x)$, i=1, 2, …, n στο σημείο x_i, η οποία προσδιορίζεται πλήρως μέσω του υπολογισμού των α_i και b_i).

5.3.6.2. Παρεμβολή με τμηματικές κυβικές splines

Οι γραμμικές splines που έχουμε μελετήσει δεν έχουν συνεχείς παραγώγους 1ης τάξης στα εσωτερικά σημεία έτσι, ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή καμπή της γραμμής στους εσωτερικούς κόμβους. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται μέσω των κυβικών splines. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε την περίπτωση περιορισμού στον ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος [α, b].

Έστω $D_h=\left\{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \;/\; h = \dfrac{b-\alpha}{n},\ x_i = \alpha + ih,\ i = 0, 1, 2, ..., n\right\}$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του [α, b] με βήμα h. Συμβολίζουμε με $S_3(D)$ τον γραμμικό χώρο των συναρτήσεων οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο [α, b] και οι οποίες είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, i = 0, 1, 2, ..., n-1, του διαμερισμού D_h. Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται *κυβικές splines*. Τότε η μοναδική συνάρτηση παρεμβολής $S_3(x)$ που προκύπτει αποτελείται από n σε πλήθος κυβικές splines $s_i^3(x)$, i =0, 1, 2, ..., n-1 και ορίζεται ως εξής:

$$S_3(x) = \begin{cases} s_0^3(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ s_1^3(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ s_{n-1}^3(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

ή

$$S_3(x) = \begin{cases} \alpha_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, & x_0 \le x \le x_1 \\ \alpha_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, & x_1 \le x \le x_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots & \\ \alpha_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

(πολυώνυμα Newton 3ου βαθμού)

Για τον προσδιορισμό των κυβικών splines πρέπει να προσδιοριστούν 4n σε πλήθος συντελεστές (4 συντελεστές για κάθε μία από τις n σχέσεις $s_i^3(x)$, i = 0, 1, 2, ..., n-1). Οι πρώτες (n+1) σε πλήθος συνθήκες προκύπτουν λόγω παρεμβολής της f (δεδομένης μιας συνάρτησης $f \in C[\alpha, b]$ προς προσέγγιση) στα σημεία x_i, i = 0, 1, 2, ..., n, δηλαδή $s_i^3(x_i) = f(x_i)$, i = 0, 1, 2, ..., n. Οι επόμενες (n – 1) σε πλήθος συνθήκες προκύπτουν από την ισότητα των γειτονικών πολυωνύμων στα σημεία ένωσης (στους εσωτερικούς κόμβους), δηλαδή $s_i^3(x_{i+1}) = s_{i+1}^3(x_{i+1})$, i = 0, 1, 2, ..., n –2. Επιπλέον από την ισότητα των παραγώγων $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης των γειτονικών πολυωνύμων στους εσωτερικούς κόμβους x_{i+1}, i =0, 1, 2, ..., n – 2 προκύπτουν (2n-2) σε πλήθος συνθήκες. Οι υπόλοιπες 2 συνθήκες συνήθως είναι διαφόρων τύπων συνοριακές συνθήκες για την $S_3(x)$ στους συνοριακούς κόμβους $x_0 = \alpha$ και $x_n = b$.

Για τις συνθήκες αυτές θεωρούμε την κατασκευή δύο ειδών συναρτήσεων παρεμβολής μέσω τμηματικών κυβικών splines που αντιστοιχούν

(i) σε συνοριακές συνθήκες δεδομένων παραγώγων 1ης τάξης της f στα σημεία $x_0 = \alpha$ και $x_n = b$ της μορφής $S_3'(x_0) = f'(x_0)$, $S_3'(x_n) = f'(x_n)$,

(ii) σε συνοριακές συνθήκες δεδομένων παραγώγων 2ης τάξης της f στα σημεία $x_0 = \alpha$ και $x_n = b$ της μορφής $S_3''(x_0) = f''(x_0)$, $S_3''(x_n) = f''(x_n)$.

Ειδική περίπτωση. Η συνάρτηση παρεμβολής μέσω τμηματικών κυβικών splines S_3 για την οποία ισχύει $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$ καλείται συνάρτηση παρεμβολής μέσω *φυσικών τμηματικών κυβικών splines.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης. Με χρήση της μεθόδου παρεμβολής Lagrange να βρεθεί η εκτίμηση της f(1.5) χρησιμοποιώντας (i) n = 3 σημεία παρεμβολής (ii) όλα τα σημεία του πίνακα.

x_i	$f(x_i)$
-1	-5
0	-3
1	2
2	3

Λύση

(i) Για n = 3 σημεία παρεμβολής αναζητούμε κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 2ου βαθμού που παρεμβάλει τη συνάρτηση για την οποία είναι γνωστός ο πίνακας τιμών της στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (τα γειτονικά στο σημείο 1.5) της μορφής

$$p_2(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2).$$

Αρχικά υπολογίζουμε τα πολυώνυμα Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)\cdot(x-2),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)} = -x\cdot(x-2),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)} = \frac{1}{2}x\cdot(x-1).$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 2ου βαθμού είναι το

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)\cdot(x-2)\cdot(-3) - x\cdot(x-2)\cdot 2 + \frac{1}{2}x\cdot(x-1)\cdot 3 \cdot$$

Οπότε λόγω παρεμβολής

$$f(1.5) \approx p_2(1.5) = -\frac{3}{2}(1.5-1)\cdot(1.5-2) - 2\cdot(1.5)\cdot(1.5-2) + \frac{3}{2}(1.5)\cdot(1.5-1).$$

(ii) Χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία του πίνακα τιμών της συνάρτησης (n=4) αναζητούμε κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 3ου βαθμού που παρεμβάλει την f στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ της μορφής

$$p_3(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2) + L_3(x) \cdot f(x_3).$$

Αρχικά υπολογίζουμε τα πολυώνυμα Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(-1-0)\cdot(-1-1)\cdot(-1-2)} = -\frac{1}{6}\, x\cdot(x-1)\cdot(x-2),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} = \frac{(x-(-1))\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(0-(-1))\cdot(0-1)\cdot(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-2)}{(1-(-1))\cdot(1-0)\cdot(1-3)} = \frac{-1}{4}(x+1)\cdot x\cdot(x-2),$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-1)}{(2-(-1))\cdot(2-0)\cdot(2-1)} = \frac{1}{6}(x+1)\cdot x\cdot(x-1).$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 3ου βαθμού είναι το

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}\, x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(-5) + \frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(-3)$$

$$-\frac{1}{4}(x+1)\cdot x\cdot(x-2)\cdot 2 + \frac{1}{6}(x+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdot 3.$$

Οπότε λόγω παρεμβολής $f(1.5) \approx p_3(1.5)$.

2. Θεωρώντας τον πίνακα τιμών της άσκησης 1 και εφαρμόζοντας τη μέθοδο παρεμβολής Newton με διαιρεμένες διαφορές να βρεθεί η εκτίμηση της f(1.5) χρησιμοποιώντας **(i)** n=3 σημεία παρεμβολής **(ii)** όλα τα σημεία του πίνακα.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών

x_i	$f(x_i)$	1ης τάξης		3ης τάξης
$-1 = x_0$	$-5 = f(x_0)$	$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{-3-(-5)}{0-(-1)} = 2$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{5-2}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{-2-3/2}{2-(-1)} = -7/4$
$0 = x_1$	$-3 = f(x_1)$	$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2-(-3)}{1-0} = 5$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
$1 = x_2$	$2 = f(x_2)$	$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		

$2 = x_3$	$3 = f(x_3)$	$= \frac{3-2}{2-1} = 1$	$= \frac{1-5}{2-0} = -2$	

(i) Για n=3 σημεία παρεμβολής το κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Newton 2ου βαθμού με διαιρεμένες διαφορές που παρεμβάλει τη συνάρτηση για την οποία είναι γνωστός ο πίνακας τιμών της στα σημεία 0, 1, 2, (τα γειτονικά στο 1.5) είναι το

$$p_2(x) = f(0) + f[0,1]\cdot(x-0) + f[0,1,2]\cdot(x-0)\cdot(x-1) = (-3) + 5x + (-2)\cdot x(x-1).$$

Επομένως λόγω παρεμβολής $f(1.5) \approx p_2(1.5)$.

(ii) Χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία του πίνακα τιμών της συνάρτησης (n=4) το κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής Newton 3ου βαθμού με διαιρεμένες διαφορές που παρεμβάλει τη συνάρτηση στα σημεία -1, 0, 1, 2 είναι το

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(-1) + f[-1,0]\cdot(x-(-1)) + f[-1,0,1]\cdot(x-(-1))\cdot(x-0) \\ &\quad + f[-1,0,1,2]\cdot(x-(-1))\cdot(x-0)(x-1) \\ &= (-5) + 2(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)\cdot x - 7/4\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-1). \end{aligned}$$

Επομένως λόγω παρεμβολής $f(1.5) \approx p_3(1.5)$.

3. Θεωρώντας τον πίνακα τιμών της άσκησης 1 και εφαρμόζοντας τη μέθοδο παρεμβολής Newton με εμπρός διαφορές να βρεθεί η εκτίμηση της f(1.5) χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία του πίνακα.

Λύση

Τα σημεία που δίνονται στον πίνακα τιμών της συνάρτησης είναι ισαπέχοντα με h=1 οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο παρεμβολής Newton με εμπρός διαφορές. Κατασκευάζουμε τον πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών.

x_i	$f(x_i) \equiv \Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i) \equiv \Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f(x_i) \equiv \Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f(x_3) \equiv \Delta^3 f_i$
$-1 = x_0$	$-5 = f(x_0)$	$\Delta^1 f_0 = f(x_1) - f(x_0)$		
		$= -3 - (-5) = 2$	$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0$	
$0 = x_1$	$-3 = f(x_1)$		$= 5 - 2 = 3$	
		$\Delta^1 f_1 = f(x_2) - f(x_1)$		$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
$1 = x_2$	$2 = f(x_2)$	$= 2 - (-3) = 5$		$= -4 - 3 = -7$
			$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1$	
$2 = x_3$	$3 = f(x_3)$	$\Delta^1 f_2 = f(x_3) - f(x_2)$	$= 1 - 5 = -4$	
		$= 3 - 2 = 1$		

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής Newton με εμπρός διαφορές 3ου βαθμού είναι

$$p_3(x) = f(x_0) + \frac{\Delta^1 f_0}{1!\,h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

$$= -5 + \frac{2}{1}(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)\cdot x - \frac{7}{6}(x+1)\cdot x\cdot(x-1).$$

Επομένως λόγω παρεμβολής $f(1.5) \approx p_3(1.5)$.

4. Να βρεθεί το πλάτος h των σημείων παρεμβολής που απαιτούνται για την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ με γραμμική παρεμβολή και με ακρίβεια t δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

Από τον τύπο (1) του σφάλματος παρεμβολής για $n=1$ προκύπτει ότι το σφάλμα στη γραμμική παρεμβολή της f στα σημεία x_0 και x_1 δίνεται από τη σχέση

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)$$

ή

$$e^x - p(x) = \frac{e^\xi}{2}(x-x_0)\cdot(x-x_1),$$

για κάποιο ξ του διαστήματος που ορίζεται από το ελάχιστο και το μέγιστο των x_0, x_1 και x. Έστω $x_0 < x < x_1$. Τότε θα ισχύει ότι

$$\frac{(x_1-x)\cdot(x-x_0)}{2}e^{x_0} \le \left|e^x - p(x)\right| \le \frac{(x_1-x)\cdot(x-x_0)}{2}e^{x_1}$$

και

$$\max_{x_0\le x\le x_1}\frac{(x_1-x)\cdot(x-x_0)}{2} = \frac{h^2}{8}, \quad h = x_1 - x_0, \quad \text{όπου } e^{x_1} \le e \text{ στο } [0, 1].$$

Άρα $\left|e^x - p(x)\right| \le \dfrac{h^2 e}{8}$, $x \in [0, 1]$, ανεξάρτητο των x_0, x_1, x. Δεδομένου ότι η προσέγγιση πρέπει να έχει ακρίβεια t δεκαδικών ψηφίων προκύπτει ότι

$$\frac{h^2\cdot e}{8} \le \frac{1}{2}\,x\,10^{-t} \qquad ή \qquad h \le \frac{2}{\sqrt{e\cdot 10^t}}.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1/x$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που παρεμβάλει την f στα σημεία $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$. Να βρεθεί μια εκτίμηση της f(1.25) καθώς και το σφάλμα εκτίμησης.

Λύση

Έχουμε ότι $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Άρα θα ισχύει $f'(x_0) = f'(1) = -1$ και $f'(x_1) = -1/4$. Επιπλέον έχουμε ότι $f(1) = 1$, $f(2) = 1/2$. Επομένως το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής Hermite είναι

$$\left(p(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\cdot\varphi_i^{(1)}(x) + f'(x_i)\cdot\varphi_i^{(2)}(x)\right]\right)$$

$$p(x) = f(x_0)\cdot\varphi_0^{(1)}(x) + f(x_1)\cdot\varphi_1^{(1)}(x) + f'(x_0)\cdot\varphi_0^{(2)}(x) + f'(x_1)\cdot\varphi_1^{(2)}(x)$$

ή $$p(x)=\varphi_0^{(1)}(x)+\frac{1}{2}\varphi_1^{(1)}(x)-\varphi_0^{(2)}(x)-\frac{1}{4}\varphi_1^{(2)}(x).$$

Για τον υπολογισμό των $\varphi_0^{(1)}(x)$, $\varphi_1^{(1)}(x)$, $\varphi_0^{(2)}(x)$, $\varphi_1^{(2)}(x)$ υπολογίζουμε αρχικά τα πολυώνυμα Lagrange.

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=-(x-2)=2-x \quad , \qquad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=x-1 \ ,$$

$$L_0'(x)=-1 \quad , \qquad L_1'(x)=1$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\varphi_0^{(1)}(x)=[1-2\cdot(x-x_0)\cdot L_0'(x_0)]\cdot L_0^2(x)=[1-2\cdot(x-1)(-1)]\cdot(2-x)^2=(2x-1)\cdot(2-x)^2$$

$$\varphi_0^{(2)}(x)=(x-x_0)\cdot L_0^2(x)=(x-1)\cdot(2-x)^2 \ ,$$

$$\varphi_1^{(1)}(x)=[1-2\cdot(x-x_1)\cdot L_1'(x_1)]\cdot L_1^2(x)=[1-2\cdot(x-2)(-1)]\cdot(x-1)^2=(2x-3)\cdot(x-1)^2$$

$$\varphi_1^{(2)}(x)=(x-x_1)\cdot L_1^2(x)=(x-2)\cdot(x-1)^2 .$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολής τύπου Hermite θα έχει τελικά τη μορφή

$$p(x)=(2x-1)\cdot(2-x)^2+\frac{1}{2}(2x-3)\cdot(x-1)^2-(x-1)\cdot(2-x)^2-\frac{1}{4}(x-2)\cdot(x-1)^2 .$$

Επιπλέον λόγω παρεμβολής θα ισχύει ότι f (1.25) ≈ p (1.2.5) με απόλυτο σφάλμα παρεμβολής |f (1.25) – p (1.25)|.

Παρατήρηση

Για τον υπολογισμό του άνω φράγματος του σφάλματος παρεμβολής Hermite χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\|f(x)-p(x)\|_\infty \le \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\max_{x\in[1,2]}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2, \quad \xi\in(\alpha,b),$$

η οποία για n=1 γράφεται $\|f(x)-p(x)\|_\infty \le \frac{\|f^{(4)}(\xi)\|_\infty}{4!}\max_{x\in[1,2]}\left[(x-1)^2\cdot(x-2)^2\right], \xi\in(1,2)$

κ.λπ.

6. Ο ακόλουθος πίνακας περιγράφει τις μετρήσεις ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου που καταγράφηκαν ως αποτέλεσμα ενός εργαστηριακού πειράματος φυσικής που αφορούσε στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση σωμάτων. Να βρεθεί μια εκτίμηση της τιμής της ταχύτητας για χρόνο t = 0.6s προσδιορίζοντας μέσω γραμμικών splines τη συνάρτηση που προσεγγίζει την ταχύτητα των σωμάτων που εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Λύση

Η συνάρτηση παρεμβολής που προσεγγίζει την ταχύτητα των σωμάτων που εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση μέσω τμηματικών γραμμικών splines θα έχει τη μορφή:

t (s)	u (cm/s)
$0.1 = t_0$	$4.5 = u(t_0)$
$0.3 = t_1$	$15.25 = u(t_1)$
$0.5 = t_2$	$25.75 = u(t_2)$
$0.7 = t_3$	$35.5 = u(t_3)$
$0.9 = t_4$	$45.75 = u(t_4)$
$1.1 = t_5$	$54.75 = u(t_5)$
$1.3 = t_6$	$64.25 = u(t_6)$
$1.5 = t_7$	$72.75 = u(t_7)$

$$S_1(t) = \begin{cases} s_1^1(t) = \alpha_1 + b_1(t - t_0), & 0.1 \le t \le 0.3 \\ s_2^1(t) = \alpha_2 + b_2(t - t_1), & 0.3 \le t \le 0.5 \\ s_3^1(t) = \alpha_3 + b_3(t - t_2), & 0.5 \le t \le 0.7 \\ s_4^1(t) = \alpha_4 + b_4(t - t_3), & 0.7 \le t \le 0.9 \\ s_5^1(t) = \alpha_5 + b_5(t - t_4), & 0.9 \le t \le 1.1 \\ s_6^1(t) = \alpha_6 + b_6(t - t_5), & 1.1 \le t \le 1.3 \\ s_7^1(t) = \alpha_7 + b_7(t - t_6), & 1.3 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

όπου $\alpha_i = s(t_{i-1}) = u(t_{i-1})$, $b_i = \dfrac{s(t_i) - s(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \dfrac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$, i =1, 2, ..., 6, 7.

Επομένως τα γραμμικά πολυώνυμα $s_i^1(t)$, i = 1, 2, ..., 6, 7, τα οποία ενώνουν τα διάφορα σημεία δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_1^1(t) = u(t_0) + \frac{u(t_1) - u(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) = 4.5 + \frac{15.25 - 4.5}{0.3 - 0.1}(t - 0.1)$$

$$S_2^1(t) = u(t_1) + \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1) = 15.25 + \frac{25.75 - 15.25}{0.5 - 0.3}(t - 0.3)$$

$$S_3^1(t) = u(t_2) + \frac{u(t_3) - u(t_2)}{t_3 - t_2}(t - t_2) = 25.75 + \frac{35.5 - 25.75}{0.7 - 0.5}(t - 0.5)$$

$$S_4^1(t) = u(t_3) + \frac{u(t_4) - u(t_3)}{t_4 - t_3}(t - t_3) = 35.5 + \frac{45.75 - 35.5}{0.9 - 0.7}(t - 0.7)$$

$$S_5^1(t) = u(t_4) + \frac{u(t_5) - u(t_4)}{t_5 - t_4}(t - t_4) = 45.75 + \frac{54.75 - 45.75}{1.1 - 0.9}(t - 0.9)$$

$$S_6^1(t) = u(t_5) + \frac{u(t_6) - u(t_5)}{t_6 - t_5}(t - t_5) = 54.75 + \frac{64.25 - 54.75}{1.3 - 1.1}(t - 1.1)$$

$$S_7^1(t) = u(t_6) + \frac{u(t_7) - u(t_6)}{t_7 - t_6}(t - t_6) = 64.25 + \frac{72.75 - 64.25}{1.5 - 1.3}(t - 1.3).$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η ζητούμενη συνάρτηση $S_1(x)$, η οποία προσεγγίζει συνολικά την ταχύτητα των σωμάτων που εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Συνεπώς μία εκτίμηση της τιμής της ταχύτητας για χρόνο t = 0.6s είναι

$$S_1(0.6) = s_3^1(0.6) = 25.75 + \frac{35.5 - 25.75}{0.7 - 0.5}(0.6 - 0.5)\,\text{cm/s}.$$

7. Κατά τον σχεδιασμό της διαδρομής ενός οχήματος robot, το οποίο πρόκειται να κινηθεί σε ένα επίπεδο χώρο μεταξύ δύο γνωστών σημείων (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, ..., 9, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα διάφορα εμπόδια στο χώρο έτσι, ώστε να αποφεύγονται κατά τη διαδρομή του robot με στόχο τον περιορισμό της πιθανότητας ατυχήματος. Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει τις συντεταγμένες κάποιων σημείων της διαδρομής του robot. Να βρεθεί μία προσέγγιση της διαδρομής που διέρχεται από αυτά τα σημεία με χρήση splines 2ου βαθμού.

Λύση

x_i	y_i
$0.0 = x_0$	$0.0 = y_0$
$0.1 = x_1$	$0.2 = y_1$
$0.2 = x_2$	$0.8 = y_2$
$1.4 = x_3$	$0.4 = y_3$
$1.5 = x_4$	$1.1 = y_4$
$1.9 = x_5$	$1.5 = y_5$
$2.2 = x_6$	$2.1 = y_6$
$2.5 = x_7$	$2.7 = y_7$
$2.8 = x_8$	$1.8 = y_8$
$3.0 = x_9$	$1.5 = y_9$

Είναι φανερό ότι η χρήση των γραμμικών splines οδηγούν σε μη ομαλές γραμμές που ενώνουν τα σημεία των δεδομένων μας. Επιπλέον η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $S_1(x)$ είναι τετριμμένη γεγονός που δεν μας επιτρέπει να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες τμηματικές γραμμικές splines από τις οποίες αποτελείται είναι συνεχείς κατά την προσέγγιση κάθε σημείου από δεξιά και αριστερά. Τέλος η δεύτερη παράγωγος της $S_1(x)$ είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως επόμενο βήμα μία νέα συνάρτηση $S_2(x)$ μέσω τετραγωνικών splines της μορφής:

$$S_2(x)=\begin{cases} s_1^2(x)=\alpha_1+b_1\cdot(x-x_0)+c_1\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1), & x_0\le x\le x_1\\ s_2^2(x)=\alpha_2+b_2\cdot(x-x_1)+c_2\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2), & x_1\le x\le x_2\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ s_n^2(x)=\alpha_n+b_n\cdot(x-x_{n-1})+c_n\cdot(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n), & x_{n-1}\le x\le x_n \end{cases}$$

όπου $\alpha_i = s(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $i = 1, 2, ..., n$,

$$b_i=\frac{s(x_i)-s(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \quad , \ i=1,2,...,n$$

$$c_{i+1}=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i-x_{i+1}}c_i+\frac{b_i-b_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \quad , \ i=1,2,...,n-1.$$

Συνήθως υποθέτουμε ότι ο c_1 ή c_n είναι ίσος με μηδέν, γεγονός που σημαίνει ότι η 1η ή η τελευταία συνάρτηση είναι γραμμική.

Λύση

Η ζητούμενη συνάρτηση $S_2(x)$ μέσω τετραγωνικών splines για τα μη ισαπέχοντα σημεία του πίνακα δίνεται από τη σχέση:

$$S_2(t)=\begin{cases}\alpha_1+b_1\cdot(x-x_0)+c_1\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1), & x_0\le x\le x_1\\ \alpha_2+b_2\cdot(x-x_1)+c_2\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2), & x_1\le x\le x_2\\ \alpha_3+b_3\cdot(x-x_2)+c_3\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3), & x_2\le x\le x_3\\ \alpha_4+b_4\cdot(x-x_3)+c_4\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4), & x_3\le x\le x_4\\ \alpha_5+b_5\cdot(x-x_4)+c_5\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5), & x_4\le x\le x_5\\ \alpha_6+b_6\cdot(x-x_5)+c_6\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6), & x_5\le x\le x_6\\ \alpha_7+b_7\cdot(x-x_6)+c_7\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7), & x_6\le x\le x_7\\ \alpha_8+b_8\cdot(x-x_7)+c_8\cdot(x-x_7)\cdot(x-x_8), & x_5\le x\le x_8\\ \alpha_9+b_9\cdot(x-x_8)+c_9\cdot(x-x_8)\cdot(x-x_9), & x_8\le x\le x_9\end{cases}$$

όπου $\alpha_1=s(x_0)=y_0=0$ $\quad\alpha_5=s(x_4)=y_4=1.1$ $\quad\alpha_9=s(x_8)=y_8=1.8$

$\alpha_2=s(x_1)=y_1=0.2$ $\quad\alpha_6=s(x_5)=y_5=1.5$

$\alpha_3=s(x_2)=y_2=0.8$ $\quad\alpha_7=s(x_6)=y_6=2.1$

$\alpha_4=s(x_3)=y_3=0.4$ $\quad\alpha_8=s(x_7)=y_7=2.7$

$$b_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{0.2-0}{0.1-0}\qquad b_6=\frac{y_6-y_5}{x_6-x_5}=\frac{2.1-1.5}{2.2-1.9}$$

$$b_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0.8-0.2}{0.2-0.1}\qquad b_7=\frac{y_7-y_6}{x_7-x_6}=\frac{2.7-2.1}{2.5-2.2}$$

$$b_3=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{0.4-0.8}{1.4-0.2}\qquad b_8=\frac{y_8-y_7}{x_8-x_7}=\frac{1.8-2.7}{2.8-2.5}$$

$$b_4=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\frac{1.1-0.4}{1.5-1.4}\qquad b_9=\frac{y_9-y_8}{x_9-x_8}=\frac{1.5-1.8}{3.0-2.8}$$

$$b_5=\frac{y_5-y_4}{x_5-x_4}=\frac{1.5-1.1}{1.9-1.5}$$

$c_1=0$

$$c_2=\frac{x_1-x_0}{x_1-x_2}\cdot c_2+\frac{b_1-b_2}{x_1-x_2}=\frac{b_1-b_2}{0.1-0.2}\ ,$$

$$c_3=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_3}\cdot c_2+\frac{b_2-b_3}{x_2-x_3}=\frac{0.2-0.1}{0.2-1.4}\cdot c_2+\frac{b_2-b_3}{0.2-1.4}\ ,$$

$$c_4=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}\cdot c_3+\frac{b_3-b_4}{x_3-x_4}=\frac{1.4-0.2}{1.4-1.5}\cdot c_3+\frac{b_3-b_4}{1.4-1.5}$$

$$c_5=\frac{x_4-x_3}{x_4-x_5}\cdot c_4+\frac{b_4-b_5}{x_4-x_5}=\frac{1.5-1.4}{1.5-1.9}\cdot c_4+\frac{b_4-b_5}{1.5-1.9}$$

$$c_6=\frac{x_5-x_4}{x_5-x_6}\cdot c_5+\frac{b_5-b_6}{x_5-x_6}=\frac{1.9-1.5}{1.9-2.2}\cdot c_4+\frac{b_5-b_6}{1.9-2.2}$$

$$c_7=\frac{x_6-x_5}{x_6-x_7}\cdot c_6+\frac{b_6-b_7}{x_6-x_7}=\frac{2.2-1.9}{2.2-2.5}\cdot c_6+\frac{b_6-b_7}{2.2-2.5}$$

$$c_8=\frac{x_7-x_6}{x_7-x_8}\cdot c_7+\frac{b_7-b_8}{x_7-x_8}=\frac{2.5-2.2}{2.5-2.8}\cdot c_7+\frac{b_7-b_8}{2.5-2.8}$$

$$c_9 = \frac{x_8 - x_7}{x_8 - x_9} \cdot c_8 + \frac{b_8 - b_9}{x_8 - x_9} = \frac{2.8 - 2.5}{2.8 - 3.0} \cdot c_8 + \frac{b_8 - b_9}{2.8 - 3.0}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών α_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, ..., 8, 9$, που έχουμε υπολογίσει πιο πάνω, προκύπτει η ζητούμενη συνάρτηση $S_2(x)$ μέσω τετραγωνικών splines, η οποία προσεγγίζει συνολικά τη συνάρτηση που περιγράφει τη διαδρομή του robot.