

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

2.1. ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

2.1.1. Κανόνας Cramer

Αλγόριθμος. Πρόκειται για μία από τις απλούστερες μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων $n \times n$ $A \cdot X = B$. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο υπολογίζουμε αρχικά την ορίζουσα $\det(A)$ του πίνακα A $n \times n$ του συστήματος και αν $\det(A) \neq 0$ (για διερεύνηση του κανόνα βλ. Ενότητα 2 – αρχική), τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

όπου $\det(A_k)$ η ορίζουσα που προκύπτει από την $\det(A)$ με αντικατάσταση της k -στήλης από τη στήλη των σταθερών όρων.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση μικρών γραμμικών συστημάτων $n \times n$ και αυτό γιατί το απαιτούμενο υπολογιστικό έργο (πλήθος αριθμητικών πράξεων N) για τον υπολογισμό των οριζουσών είναι της τάξης του $O(N)$ με $N = (n+1) \cdot (n-1)!$, όπου $O(N)$ το μεγάλο όμικρον του Landau (περιγράφει την τάξη μεγέθους του N).

Άσκηση

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, που αποτελείται από τρεις κλειστούς βρόχους, 5 αντιστάσεις και μία πηγή τάσης. Σύμφωνα με τον νόμο του Kirchhoff (το άθροισμα των πτώσεων τάσης και των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων σε ένα κλειστό βρόχο ενός ηλεκτρικού κυκλώματος ισούται με μηδέν) το σύστημα 3×3 των γραμμικών εξισώσεων

$$(R_1 + R_2 + R_4) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - R_4 \cdot I_3 = 0$$

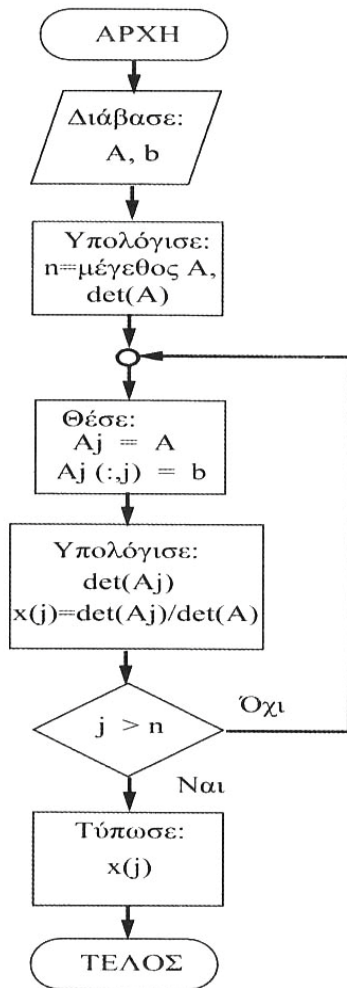
$$-R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_5) \cdot I_2 - R_5 \cdot I_3 = 0$$

$$-R_4 \cdot I_1 - R_5 \cdot I_2 + (R_4 + R_5) \cdot I_3 = V_1$$

περιγράφει τα ρεύματα I_k , $k = 1, 2, 3$, που διαπερνούν τους τρεις κλειστούς βρόχους.

Αν $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 3\Omega$, $R_5 = 4\Omega$ και $V_1 = 1.5$ V να υπολογίσετε το ρεύμα που διαπερνά κάθε βρόχο του ηλεκτρικού κυκλώματος εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer.

Διάγραμμα ροής κανόνα Cramer (βλ. “Αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές για μηχανικούς”,
 Ι. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλας, σελ. 33)



Συνάρτηση κανόνα Cramer (Matlab) (βλ. “Αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές για
 μηχανικούς”, Ι. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλας, σελ. 34)

```

function x=cramer(A,b)
% Solves Ax = b by Cramer rule
% CALL: x = cramer(A,b)

P=det(A);
[n,n]=size(A);

for j=1:n
    Q=A;
    Q(:,j)=b;
    x(j)=det(Q)/P;
end
x=x';
    
```

2.1.2. Μέθοδοι απαλοιφής

Χρησιμοποιούν για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $n \times n$ μέσω της διαδοχικής αντικατάστασης των συντελεστών των αγνώστων από εξίσωση σε εξίσωση του συστήματος με χρήση κατάλληλων στοιχειωδών μετασχηματισμών. Απαιτούν μικρότερο υπολογιστικό έργο από τις υπόλοιπες άμεσες μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

2.1.2.1. Μέθοδος απαλοιφής Gauss (χωρίς οδήγηση)

Περιλαμβάνει δύο βήματα (βλ. Ενότητα 2-αρχική)

Βήμα 1ο: Απαλοιφή

Βήμα 2ο: Προς τα πίσω αντικατάσταση (Τριγωνοποίηση)

Αλγόριθμος (για γραμμικά συστήματα $n \times n$)

Βήμα 1ο: Μηδενισμός όλων των συντελεστών των αγνώστων της k -στήλης του επαυξημένου ή του γραμμοισοδύναμου του επαυξημένου πίνακα του γραμμικού συστήματος $n \times n$ που βρίσκονται κάτω από το οδηγό στοιχείο a_{kk} .

Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} \cdot a_{kj}, \text{ για κάθε } i, j = k+1, k+2, \dots, n,$$

$$\left(m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad a_{kk} \rightarrow \text{οδηγό στοιχείο} \right)$$

$$b_i = b_i - m_{ik} \cdot b_k, \text{ για κάθε } i = k+1, k+2, \dots, n.$$

Βήμα 2ο:
$$x_n = -\frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j \right), \text{ για κάθε } k = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Παρατηρήσεις

1. Το υπολογιστικό έργο που απαιτείται για την εφαρμογή του 1ου και 2ου βήματος της μεθόδου απαλοιφής Gauss (χωρίς οδήγηση) για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $n \times n$ είναι της τάξης $O(n^3)$, $O(n^2)$ αντίστοιχα.

2. Για τη διατήρηση της ευστάθειας της μεθόδου απαλοιφής Gauss χρησιμοποιούμε την τεχνική της *οδήγησης*, η οποία περιλαμβάνει:

(i) τη *μερική οδήγηση* (η πιο συνήθης που εφαρμόζεται στην πράξη), όπου είναι δυνατές μόνο οι εναλλαγές μεταξύ της οδηγού γραμμής και των γραμμών που έπονται με στόχο τον προσδιορισμό του μέγιστου οδηγού στοιχείου.

(ii) την *πλήρη οδήγηση* (σπάνια χρήση, μεγάλο υπολογιστικό έργο), όπου είναι δυνατές οι εναλλαγές μεταξύ της οδηγού γραμμής και των υπολοίπων γραμμών που έπονται (ή όχι) με στόχο την εύρεση τόσο του μέγιστου κάτω από το τρέχον οδηγό στοιχείο όσο

και το μέγιστο όλων των στοιχείων του γραμμοϊσοδύναμου πίνακα στον οποίο εργαζόμαστε.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -x & & -w & = 3 \\ x - y & & & = 2 \\ & y + z & & = 1 \\ 4x + 2y - z + 3w & = & 0 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

Λύση

Βήμα 1ο: Απαλοιφή

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Αρχικά χρησιμοποιούμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_4$ έτσι, ώστε το οδηγό στοιχείο (4) να είναι το μέγιστο δυνατό. Προκύπτει ο ακόλουθος επαυξημένος πίνακας γραμμοϊσοδύναμος του αρχικού

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - \frac{1}{4}\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \\ \Gamma_4 - \left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/4 & -3/4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_4 - \left(\frac{1/2}{-3/2}\right)\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_4 \\ \Gamma_3 - \left(\frac{1}{-3/2}\right)\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \end{array} \sim$$

Εκτελούμε όλες τις πράξεις της απαλοιφής αντικαθιστώντας κάθε φορά το οδηγό στοιχείο με το μεγαλύτερο συντελεστή των αγνώστων της στήλης που έπεται (εναλλαγή αντίστοιχων γραμμών).

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/4 & -3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/6 & -1/2 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1/6 & -1/2 & 11/3 \end{array} \right] \Gamma_4 - \left(\frac{-1/6}{7/6}\right)\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_4 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/4 & -3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/6 & -1/2 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & -4/7 & 4 \end{array} \right]$$

Καταλήξαμε σε άνω τριγωνικό πίνακα 4x4.

Βήμα 2ο: Προς τα πίσω αντικατάσταση

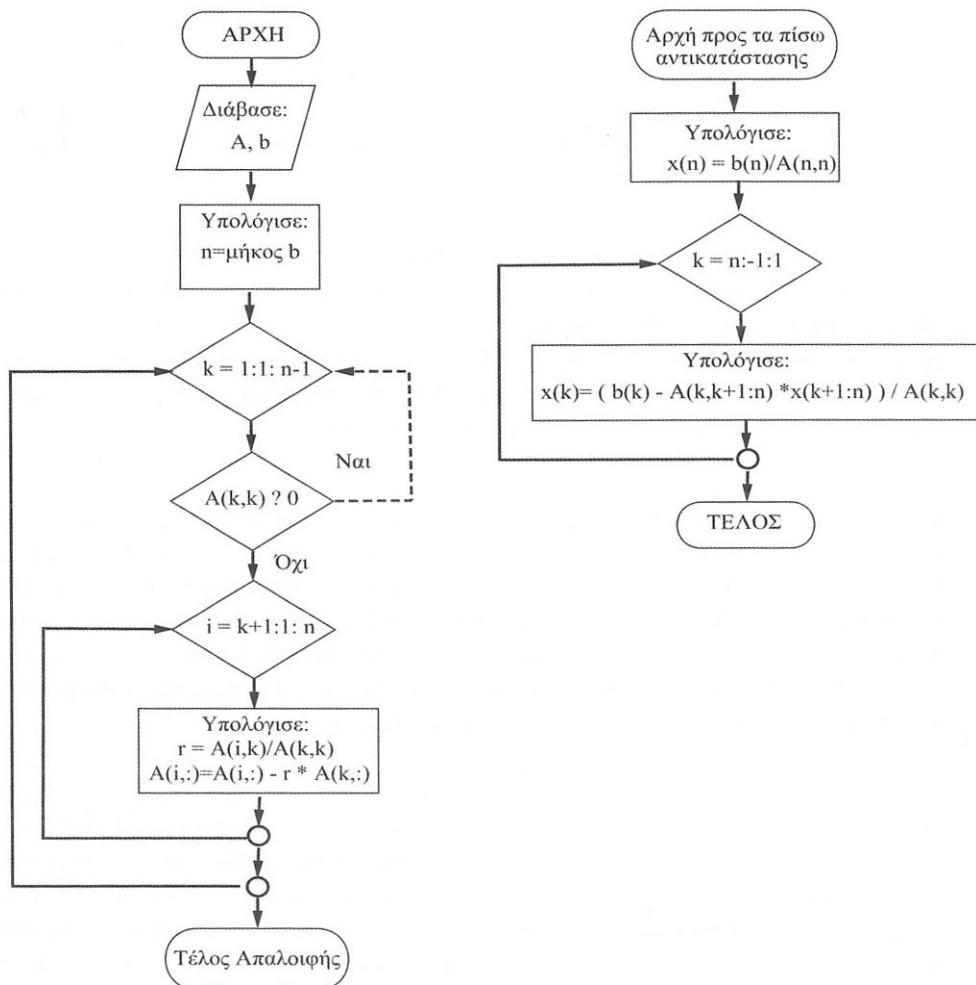
Το άνω τριγωνικό σύστημα 4x4 που αντιστοιχεί στον τελικό γραμμοϊσοδύναμο πίνακα του επαυξημένου πίνακα του αρχικού συστήματος είναι

$$4x + 2y - z + 3w = 0$$

$$\begin{aligned}
 -3/2y + 1/4z - 3/4w &= 2 \\
 7/6z - 1/2w &= 7/3 \\
 -4/7w &= 4
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης προκύπτει η μοναδική λύση του συστήματος $(x, y, z, w) = (4, 2, -1, -7)$.

Διάγραμμα ροής της μεθόδου απαλοιφής Gauss (χωρίς οδήγηση). (βλ. “Αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές για μηχανικούς”, Ι. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλας, σελ. 49)



Σχήμα 2.12.: Διάγραμμα ροής της απαλοιφής Gauss. Η διακεκομμένη γραμμή στην αρχή της απαλοιφής αναφέρεται στην περίπτωση μηδενικού ή μικρού οδηγού στοιχείου, κάτι που εξηγείται στην ενότητα 2.3.4.

Συνάρτηση απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση (MatLab) (βλ. “Αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές για μηχανικούς”, Ι. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλας, σελ. 53)

```

function [x] = gaussElim(A,b)
% Solves Ax = b by Gauss elimination
% CALL: x = gaussElim(A,b)
% check that input is legal
[n,m] = size(A);
if n ~= m
    disp('Error in gaussElim: Matrix must be square. ')
    return
end
if size(b,2)>1; b=b'; end
n=length(b);
Aug=[A b];
C=zeros(1,n+1);
% Elimination phase
for k=1:n-1,
    [pivot,j]=max(abs(Aug(k:n,k)));
    C=Aug(k,:);
    Aug(k,:)=Aug(j+k-1,:);
    Aug(j+k-1,:)=C;
    if Aug(k,k)==0
        disp('A is singular! ')
        break
    end
    for i=k+1:n,
        r = Aug(i,k)/Aug(k,k);
        Aug(i,k:n+1) = Aug(i,k:n+1) - r*Aug(k,k:n+1);
    end
end
% Back substitution phase
x = zeros(n,1);
x(n) = Aug(n,n+1)/Aug(n,n);
for k=n-1:-1:1,
    x(k) = (Aug(k,n+1)-Aug(k,k+1:n)*x(k+1:n))/Aug(k,k);
end

```

2.1.2.2. Μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο απαλοιφής στο 1ο βήμα (απαλοιφή) εφαρμογής της μεθόδου καταλήγουμε σε διαγώνιο πίνακα εφαρμόζοντας τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών και στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα (ή του γραμμοισοδύναμου πίνακα) του συστήματος που βρίσκονται πάνω από την οδηγό γραμμή.

Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan μπορεί να εφαρμοστεί και με χρήση των τεχνικών της μερικής και της πλήρους οδήγησης για τα στοιχεία κάτω από το οδηγό στοιχείο.

2. Απαιτείται υπολογιστικό έργο της τάξης του $O(N)$ με $N = \frac{n^3}{2} - n^2 - \frac{n}{2}$.

Συνάρτηση μεθόδου Gauss-Jordan (MatLab) χωρίς οδήγηση (βλ. “Αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές για μηχανικούς”, Ι. Σαρρής, Θ. Καρακασίδης, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλας, σελ. 69)

```
function [x] = gauss_jordan(A,b)
% Solves Ax = b by Gauss-Jordan elimination
% CALL: x = gauss_jordan(A,b)
% check that input is legal
[n,m] = size(A);

if n ~= m
    disp('Error in Gauss-Jordan: Matrix must be square. ')
    return
end

if size(b,2)>1; b=b'; end;
Aug=[A b];
[m,n] = size(Aug);
for k=1:m
    Aug(k,:) = Aug(k,+)/Aug(k,k);
    for i=1:m
        if i~=k
            continue
        end
        Aug(i,:) = Aug(i,:) - Aug(i,k)*Aug(k,);
    end
end
if size(A)==size(b)
    x(:, :) = Aug(:, m+1:2*m);
else
    for k=1:m,
        x(k) = Aug(k,n);
    end
end
end
```

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$x + w = -3$$

$$x - y = 2$$

$$y + z = 1$$

$$4x + 2y - z + 3w = 0$$

εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της μεθόδου απαλοιφής Gauss- Jordan χωρίς οδήγηση.

Λύση

Βήμα 1ο: Απαλοιφή

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 - \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \\ \Gamma_4 - 4\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 12 \end{array} \right] \sim (-\Gamma_2) \rightarrow \Gamma_2 \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 12 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 - \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \\ \Gamma_4 - 2\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 22 \end{array} \right] \sim \Gamma_4 + \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_4 \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 28 \end{array} \right] \begin{array}{l} (-\frac{1}{4})\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 + \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_3 \\ \Gamma_4 - \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 \\ \Gamma_4 - \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 \end{array} \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right] \begin{array}{l} (-1)\Gamma_1(\Gamma_2) \rightarrow \Gamma_1(\Gamma_2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε διαγώνιο (μοναδιαίο) πίνακα 4x4.

Βήμα 2ο: Από τη λύση του συστήματος που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο πίνακα (μοναδιαίος) του επαυξημένου πίνακα του αρχικού συστήματος του βήματος 1 προκύπτει ότι $x = 4$, $y = 2$, $z = -1$, $w = -7$.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η άσκηση της § 2.1.2.1. εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της μεθόδου απαλοιφής Gauss-Jordan (i) χωρίς οδήγηση, (ii) με μερική οδήγηση.

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_2 & \quad \quad \quad + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = -2 \\ 4x_1 - 8x_2 & \quad \quad \quad + x_4 = -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 & = 6 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας (i) τον αλγόριθμο της μεθόδου απαλοιφής Gauss-Jordan με μερική οδήγηση,

(ii) τον αλγόριθμο απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση,

(iii) τον αλγόριθμο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση,

(iv) τον κανόνα Cramer.

2.1.2.3. Αλγόριθμος TDMA

Καλείται και αλγόριθμος Thomas και χρησιμοποιείται για την επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων, δηλαδή συστημάτων της μορφής (σε μορφή πινάκων),

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_2 & \alpha_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & c_3 & \alpha_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & c_{n-1} & \alpha_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & c_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

μέσω τροποποίησης της μεθόδου απαλοιφής Gauss σε δύο βήματα ως εξής:

Βήμα 1ο: Απαλοιφή

Έχουμε

$$b_i = \begin{cases} b_1/\alpha_1 & , i=1 \\ b_i/(\alpha_i - b_{i-1} \cdot c_i) & , i=2,3,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} d_1/\alpha_1 & , i=1 \\ (d_i - d_{i-1} \cdot c_i)/(\alpha_i - b_{i-1} \cdot c_i) & , i=2,3,\dots,n-1 \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Προς τα πίσω αντικατάσταση

Η λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$x_i = \begin{cases} d_n & , i=n \\ d_i - b_i \cdot x_{i+1} & , i=n-1, n-2, \dots, 2, 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση. Το υπολογιστικό έργο που απαιτείται για την εφαρμογή του αλγορίθμου Thomas είναι της τάξης του $O(n)$.

2.1.2.4. LU Παραγοντοποίηση

Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος $n \times n$ (σε μορφή πινάκων $A \cdot X = B$) περισσότερες από μία φορές για διαφορετικούς πίνακες στήλης B σταθερών όρων. Πρόκειται γενικά για τη φάση της τριγωνοποίησης του πίνακα A ($n \times n$) του συστήματος κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss (με εναλλαγές γραμμών), η οποία μπορεί να ερμηνευτεί και ως ανάλυση του πίνακα A σε γινόμενο παραγόντων της μορφής

$$A = P^{-1} \cdot L \cdot U \quad (P \cdot A = L \cdot U),$$

όπου

- (i) $P \rightarrow$ ο πίνακας μετάθεσης που καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών που ενδεχομένως πραγματοποιήθηκαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss. (Προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών),

(ii) $L \rightarrow$ ο κάτω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία μονάδες στην κύρια διαγώνιο ενώ κάτω από την κύρια διαγώνιο περιέχει ως στοιχεία τους πολ/στές της μεθόδου απαλοιφής Gauss, δηλαδή

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ \ell_{21} & 1 & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

(iii) $U \rightarrow$ ο άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία που προκύπτουν από την τριγωνοποίηση του πίνακα A $n \times n$ του συστήματος, δηλαδή

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος

Θεωρούμε το αρχικό σύστημα (γραμμικό $n \times n$) $A \cdot X = B$. Οπότε στην περίπτωση που απαιτείται εναλλαγή (ή εναλλαγές γραμμών) έχουμε:

$$P \cdot (A \cdot X) = P \cdot B \rightarrow (P \cdot A) \cdot X = P \cdot B \rightarrow (L \cdot U) \cdot X = P \cdot B \rightarrow L \cdot (U \cdot X) = P \cdot B$$

$$\left(\text{ή } U \cdot X = L^{-1} \cdot P \cdot B \right).$$

Θέτουμε $B' = L^{-1} \cdot P \cdot B$. Οπότε: $U \cdot X = B'$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$B' = L^{-1} \cdot P \cdot B \rightarrow L \cdot B' = P \cdot B.$$

Αυτό σημαίνει ότι μέσω της LU παραγοντοποίησης του πίνακα A $n \times n$ του συστήματος $A \cdot X = B$ προέκυψαν δύο απλούστερα γραμμικά συστήματα

- (i) ένα κάτω τριγωνικό σύστημα $L \cdot B' = P \cdot B$ για τον υπολογισμό του πίνακα στήλη B' μέσω εφαρμογής της μεθόδου προς τα μπρος αντικατάστασης (forward elimination).
- (ii) ένα άνω τριγωνικό σύστημα $U \cdot X = B'$ για τον τελικό υπολογισμό τον πίνακα X των αγνώστων του συστήματος μέσω εφαρμογής της μεθόδου προς τα πίσω αντικατάστασης (backward elimination).

Παρατηρήσεις

1. Οι πίνακες L , U της LU παραγοντοποίησης είναι μοναδικοί.
2. Κατά την επίλυση γραμμικών συστημάτων $n \times n$ με τον ίδιο πίνακα A και διαφορετικούς πίνακες σταθερών όρων αρκεί να αναλύσουμε τον πίνακα $P \cdot A$ μόνο μία φορά και να λύσουμε κάθε φορά το σύστημα για το διαφορετικό δεύτερο μέλος χρησιμοποιώντας τους πίνακες P , L , U της ανάλυσης και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω.

3. Το υπολογιστικό έργο που απαιτείται για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου διακρίνεται στο έργο που απαιτείται για την εύρεση των πινάκων L, U μέσω της μεθόδου απαλοιφής Gauss καθώς και για την επίλυση του κάτω και άνω τριγωνικού συστήματος, το οποίο είναι της τάξης του $O(n^2)$.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης.

Λύση

Βήμα 1ο: Εύρεση των πινάκων P, L, U. Εργαζόμαστε ως εξής:

(i) ο πίνακας μετάθεσης P είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

διότι για την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss (για την εύρεση των πινάκων L, U) απαιτείται εναλλαγή της 1ης και 2ης γραμμής του πίνακα A του συστήματος.

(ii) Για την επίλυση του αρχικού γραμμικού συστήματος 3×3 αρκεί να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss στο σύστημα $(P \cdot A) \cdot X = P \cdot B$

$$\text{ή} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης στον πίνακα

$$A' = P \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ μέσω διαδοχικών απαλοιφών Gauss. Πράγματι έχουμε ότι:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - \frac{5}{2}\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 8\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35/2 \end{bmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \bigcirc \\ 5/2 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35/2 \end{bmatrix}$$

οι ζητούμενοι κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες της LU παραγοντοποίησης.

Βήμα 2ο: Επιλύουμε αρχικά το κάτω τριγωνικό σύστημα $L \cdot B' = P \cdot B$

$$\text{ή} \quad L \cdot B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$b'_1 = 2$$

$$b'_2 = 1$$

$$5/2 \cdot b'_1 + 8b'_2 + b'_3 = 1$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα μπρός αντικατάστασης. Οπότε έχουμε ότι:

$$b'_1 = 2$$

$$b'_2 = 1$$

$$b'_3 = 1 - 5/2 \cdot b'_1 - 8b'_2 = 1 - 5/2 \cdot 2 - 8 = 1 - 5 - 8 = -12$$

Στη συνέχεια επιλύουμε το αντίστοιχο άνω τριγωνικό σύστημα $U \cdot X = B'$

$$\text{ή} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$2x - 2y + z = 2$$

$$y + 2z = 1$$

$$-35/2 \cdot z = -12$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης.

Οπότε έχουμε

$$-35/2 \cdot z = -12 \rightarrow z = \frac{24}{35}$$

$$y = 1 - 2z = 1 - 2 \cdot \frac{24}{35} = \frac{35 - 48}{35} \rightarrow y = -\frac{13}{35}$$

$$2x = 2 + 2y - z = 2 - 2 \cdot \frac{13}{35} - \frac{24}{35} \rightarrow x = \frac{2}{7}$$

Άρα το αρχικό γραμμικό σύστημα 3×3 έχει μοναδική λύση της μορφής

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{13}{35}, \frac{24}{35} \right).$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το παρακάτω τρισδιαγώνιο σύστημα εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Thomas

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$2x_3 + x_4 = -$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης.

2.1.2.5. Ανάλυση Cholesky (για συμμετρικούς, θετικά ορισμένους πίνακες)

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $n \times n$ $A \cdot X = B$ για τα οποία ο πίνακας A του συστήματος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (δηλαδή για οποιοδήποτε μη – μηδενικό διάνυσμα x (πίνακας στήλη) ισχύει ότι $x^T \cdot A \cdot x > 0$). Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων μέσω της ανάλυσης Cholesky αρκεί να αντικαταστήσουμε τον πίνακα A του συστήματος με τον πίνακα $U^T \cdot U$, όπου U ο άνω τριγωνικός πίνακας που προκύπτει μέσω της LU παραγοντοποίησης.

Αρχικά ελέγχουμε αν ο συμμετρικός πίνακας A του συστήματος είναι θετικά ορισμένος.

Αρκεί να ικανοποιεί την ιδιότητα της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου, δηλαδή

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (\text{Ικανή συνθήκη})$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας την ανάλυση Cholesky.

Λύση

Αρχικά ελέγχουμε αν ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{bmatrix}$ του συστήματος είναι θετικά

ορισμένος. Αρκεί να ελέγξουμε αν ικανοποιεί την ιδιότητα της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου. Πράγματι έχουμε ότι:

$$|16| > |4| + |8|, \quad |15| > |4| + |6|, \quad |20| > |8| + |6|.$$

Άρα ο πίνακας A του συστήματος είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος. Επομένως εφαρμόζοντας την ανάλυση Cholesky έχουμε ότι:

$$A = U^T \cdot U \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^2 & u_{11} \cdot u_{12} & u_{11} \cdot u_{13} \\ u_{11} \cdot u_{12} & u_{12}^2 + u_{22}^2 & u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \\ u_{11} \cdot u_{13} & u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} & u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$u_{11}^2 = 16 \rightarrow u_{11} = \sqrt{16} = 4$$

$$u_{11} \cdot u_{12} = 4 \rightarrow u_{12} = \frac{4}{u_{11}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$u_{11} \cdot u_{13} = 8 \rightarrow u_{13} = \frac{8}{u_{11}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 15 \rightarrow u_{22} = \sqrt{15 - u_{12}^2} = \sqrt{15 - 1^2} = \sqrt{15 - 1} = \sqrt{14}$$

$$u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} = 6 \rightarrow 1 \cdot 2 + \sqrt{14} \cdot u_{23} = 6 \rightarrow u_{23} = \frac{6 - 2}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 20 \rightarrow (2)^2 + \left(\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)^2 + u_{33}^2 = 20$$

$$\rightarrow u_{33} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

Επομένως ο ζητούμενος άνω τριγωνικός πίνακας είναι ο

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{14} & \frac{2\sqrt{14}}{7} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{20}{7}} \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζοντας την ανάλυση Cholesky το αρχικό σύστημα $A \cdot X = B$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A \cdot X = B \rightarrow (U^T \cdot U) \cdot X = B \rightarrow U^T (U \cdot X) = B \xrightarrow{U \cdot X = Y} U^T \cdot Y = B.$$

Αρχικά επιλύουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα

$$U^T \cdot Y = B \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{14} & 0 \\ 2 & \frac{2\sqrt{14}}{7} & \sqrt{\frac{20}{7}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 4y_1 = 30$$

$$y_1 + \sqrt{14}y_2 = 3$$

$$2y_1 + \frac{2\sqrt{14}}{7}y_2 + \sqrt{\frac{20}{7}}y_3 = 5.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα μπρός αντικατάστασης έχουμε ότι

$$4y_1 = 30 \rightarrow y_1 = \frac{30}{4}$$

$$\sqrt{14}y_2 = 3 - y_1 = 3 - \frac{30}{4} = \frac{12 - 30}{4} = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2} \rightarrow y_2 = \frac{-9}{2\sqrt{14}}$$

$$\sqrt{\frac{20}{7}}y_3 = 5 - 2y_1 - \frac{2\sqrt{14}}{7}y_2 = 5 - 2 \cdot \frac{30}{4} - \frac{2\sqrt{14}}{7} \cdot \left(\frac{-9}{2\sqrt{14}}\right)$$

$$\rightarrow y_3 = \frac{-61\sqrt{7}}{14\sqrt{5}}. \quad \text{Άρα } Y = \begin{bmatrix} 30/4 \\ -9/2\sqrt{14} \\ \frac{-61\sqrt{7}}{14\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Από την επίλυση του άνω τριγωνικού συστήματος

$$U \cdot X = Y \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{14} & \frac{2\sqrt{14}}{7} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{20}{7}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/4 \\ -9/2\sqrt{14} \\ \frac{-61\sqrt{7}}{14\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ή $4x + y + 2z = 30/4$

$$\sqrt{14}y + \frac{2\sqrt{14}}{7}z = \frac{-9}{2\sqrt{14}}$$

$$\sqrt{\frac{20}{7}}z = \frac{-61\sqrt{7}}{14\sqrt{5}}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης θα προκύψει η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος.

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας την ανάλυση Cholesky.

2.2. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων $n \times n$ $A \cdot X = B$ χρησιμοποιούνται κυρίως όταν ο πίνακας A του συστήματος είναι μεγάλης τάξης και έχει μηδενικά

τα περισσότερα στοιχεία του. Απαραίτητη προϋπόθεση να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η μέθοδος συγκλίνει.

Γενικότερα οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων έχουν ως βασική αρχή την εύρεση της διαδοχικής καλύτερης προσέγγισης της λύσης $\tilde{x}^{(k+1)}$ μέσω της τιμής $\tilde{x}^{(k)}$ του προηγούμενου k-βήματος επανάληψης της μεθόδου μέσω της σχέσης

$$\tilde{x}^{(k+1)} = Q \cdot \tilde{x}^{(k)} + E, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

έχοντας ως γνωστή μία αρχική προσεγγιστική τιμή $\tilde{x}^{(0)}$ της λύσης.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν όταν

(i) $\rho(Q) < 1$ (\rightarrow φασματική ακτίνα του πίνακα Q , δηλαδή η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα Q . Ισοδύναμα η μεγαλύτερη ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(Q - \lambda \cdot I)$).

(ii) $\|Q\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n \|Q_{ij}\| < 1,$

$$\|Q\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \|Q_{ij}\| < 1.$$

(iii) ο πίνακας A του συστήματος ικανοποιεί την αρχή της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου.

Επιλογή κριτηρίων σύγκλισης: Αρχικά το (iii) $\xrightarrow{\text{OXI}}$ (ii) $\xrightarrow{\text{OXI}}$ (i).

2.2.1. Μέθοδος Jacobi

Εφαρμόζεται όταν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A $n \times n$ του συστήματος είναι μη μηδενικά.

Αλγόριθμος

Βήμα 1ο: Γράφουμε το σύστημα $A \cdot X = B$ στη μορφή

$$x_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Βήμα 2ο: Θεωρώντας μία αρχική προσέγγιση $\tilde{x}^{(0)}$ υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση $\tilde{x}^{(m+1)}$ της λύσης του συστήματος μέσω της τιμής $\tilde{x}^{(m)}$ που βρέθηκε στο m-στό βήμα επανάληψης της μεθόδου από τη σχέση

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Βήμα 3ο: Σε κάθε βήμα επανάληψης της μεθόδου ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\left\| \tilde{x}^{(m+1)} - \tilde{x}^{(m)} \right\| < \varepsilon \quad (\text{απόλυτο σφάλμα}), \quad \varepsilon \rightarrow \text{δοθείσα, γνωστή τιμή (ή η συνθήκη)}$$

$$\frac{\left\| \underset{\sim}{x}^{(m+1)} - \underset{\sim}{x}^{(m)} \right\|}{\left\| \underset{\sim}{x}^{(m+1)} \right\|} < \varepsilon \text{ (σχετικό σφάλμα)}.$$

(Σε περίπτωση που δίνεται η ακρίβεια t των δεκαδικών ψηφίων της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε βήμα επανάληψης της μεθόδου θα πρέπει να ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\frac{\left\| \underset{\sim}{x}^{(m+1)} - \underset{\sim}{x}^{(m)} \right\|}{\left\| \underset{\sim}{x}^{(m+1)} \right\|} \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-t}). \text{ Η μέθοδος θα σταματήσει όταν ικανοποιείται το κριτήριο του}$$

σφάλματος ή της ακρίβειας των δ.ψ.

2.2.2. Μέθοδος Gauss - Seidel

Απαραίτητη προϋπόθεση τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A να είναι μη μηδενικά.

Αλγόριθμος

Βήμα 1ο: (όμοια με τη μέθοδο Jacobi)

Βήμα 2ο: Για τον υπολογισμό της $x_i^{(m+1)}$ ($i > 1$) χρησιμοποιούμε τις τιμές $x_1^{(m+1)}, \dots, x_{i-1}^{(m+1)}$ αντί των τιμών $x_1^{(m)}, \dots, x_{i-1}^{(m)}$ (που χρησιμοποιήσαμε στη μέθοδο Jacobi) μέσω της επαναληπτικής σχέσης

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Βήμα 3ο: (όμοια με τη μέθοδο Jacobi).

Παρατηρήσεις

1. Αρχικά ελέγχουμε αν οι επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν εφαρμόζοντας τα παραπάνω κριτήρια σύγκλισης με τη σειρά επιλογής που έχει οριστεί.
2. Αποδεικνύεται γενικά ότι η μέθοδος Gauss - Seidel συγκλίνει πιο γρήγορα (μικρότερος αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου) από τη μέθοδο Jacobi. Ειδικότερα στην περίπτωση που ο πίνακας A του συστήματος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος απαιτεί το μισό πλήθος επαναλήψεων για να επιτύχει το ίδιο σφάλμα με τη μέθοδο Jacobi.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας

(i) τη μέθοδο Jacobi ($\epsilon = 2 \times 10^{-4}$),

(ii) τη μέθοδο Gauss - Seidel. ($\epsilon = 10^{-4}$)

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (ικανοποιεί την ιδιότητα της αυστηρά κυριαρχικής διαγωνίου).

Εφαρμόζοντας μία από τις παραπάνω άμεσες μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων προκύπτει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y, z, w) = (1, 2, -1, 1)$.

(i) Μέθοδος Jacobi

Για $m = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε ότι:

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10} (6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11} (25 + x_1^{(m)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)})$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10} (-11 - 2x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + x_4^{(m)})$$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8} (15 - 3x_2^{(m)} + x_3^{(m)})$$

Για $\tilde{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ έχουμε ότι

- για $\mathbf{m} = \mathbf{0} \rightarrow x_1^{(1)} = 0.6, x_2^{(1)} = 2.2727, x_3^{(1)} = -1.1, x_4^{(1)} = 1.875$

$$\|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\| = |0.6 - 0| > \epsilon, \|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\| > \epsilon, \|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\| > \epsilon, \|x_4^{(1)} - x_4^{(0)}\| > \epsilon$$

⋮

- για $\mathbf{m} = \mathbf{9} \rightarrow x_1^{(10)} = 1.0001, x_2^{(10)} = 1.9998, x_3^{(10)} = -0.9998, x_4^{(10)} = 0.9998$

$$\|x_1^{(10)} - x_1^{(9)}\| < \epsilon, \|x_2^{(10)} - x_2^{(9)}\| < \epsilon, \|x_3^{(10)} - x_3^{(9)}\| < \epsilon, \|x_4^{(10)} - x_4^{(9)}\| < \epsilon.$$

Για το σφάλμα της μεθόδου ισχύει ότι $\|\tilde{x}^{(10)} - \tilde{x}\|_{\infty} = 2 \times 10^{-4}$.

(ii) Μέθοδος Gauss - Seidel

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10} (6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11} (25 + x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)})$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10} (-11 - 2x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_4^{(m)})$$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8} (15 - 3x_2^{(m+1)} + x_3^{(m+1)})$$

Για $\tilde{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ έχουμε ότι

- για $\mathbf{m} = \mathbf{0} \rightarrow x_1^{(1)} = 0.6, x_2^{(1)} = 2.3272, x_3^{(1)} = -0.9873, x_4^{(1)} = 0.8789$

$$\|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\| > \epsilon, \quad \text{για } i = 1, 2, 3, 4.$$

⋮

- για $\mathbf{m} = \mathbf{4} \rightarrow x_1^{(5)} = 1.0001, x_2^{(5)} = 2, x_3^{(5)} = -1, x_4^{(5)} = 1$

$$\|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}\| < \epsilon, \quad \text{για } i = 1, 2, 3, 4$$

Για το σφάλμα της μεθόδου ισχύει ότι $\|\tilde{x}^{(5)} - \tilde{x}\|_{\infty} = 10^{-4}$.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει πιο γρήγορα (απαιτείται το μισό πλήθος βημάτων) από τη μέθοδο Jacobi. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο πίνακας του συστήματος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα

$$8x + y - z = 8$$

$$2x + y + 9z = 12$$

$$x - 7y + 2z = -4$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο Jacobi ($\epsilon = 10^{-3}$), $\left(\tilde{x}^{(0)} = (0, 0, 0)\right)$. Να εκτιμήσετε το σφάλμα της μεθόδου.

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 70 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss-Seidel ($t = 6$ δ.ψ.) $\left(\tilde{x}^{(0)} = (0, 0, 0)\right)$. Να εκτιμήσετε το σφάλμα της μεθόδου.