1) Διερεύνηση ευστάθειας γέσω συχνοτικής απόκρισης

Διαγράμματα και κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Διαγράμματα Nichols.

Περιθώριο κέρδους, περιθώριο φάσης, εύρος ζώνης

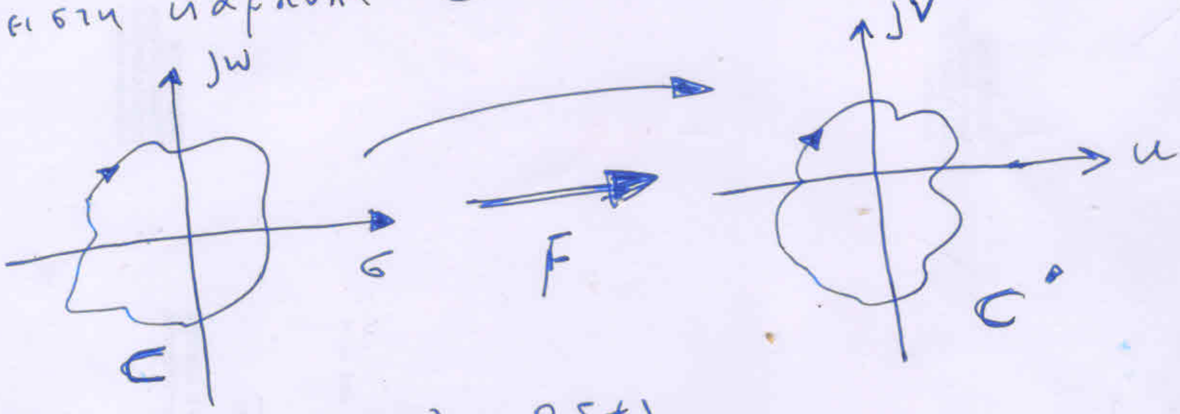
Σύμμορφες απεικονίσεις (Conformal mappings)

Έστω $s = \sigma + j\omega$ και απεικόνιση $F(s) : s \to s'$

τέτοια ώστε

$$s' = F(s) = u + jv \quad \text{όπου} \quad s = \sigma + j\omega$$

Η κλειστή καμπύλη C απεικονίζεται στην C'



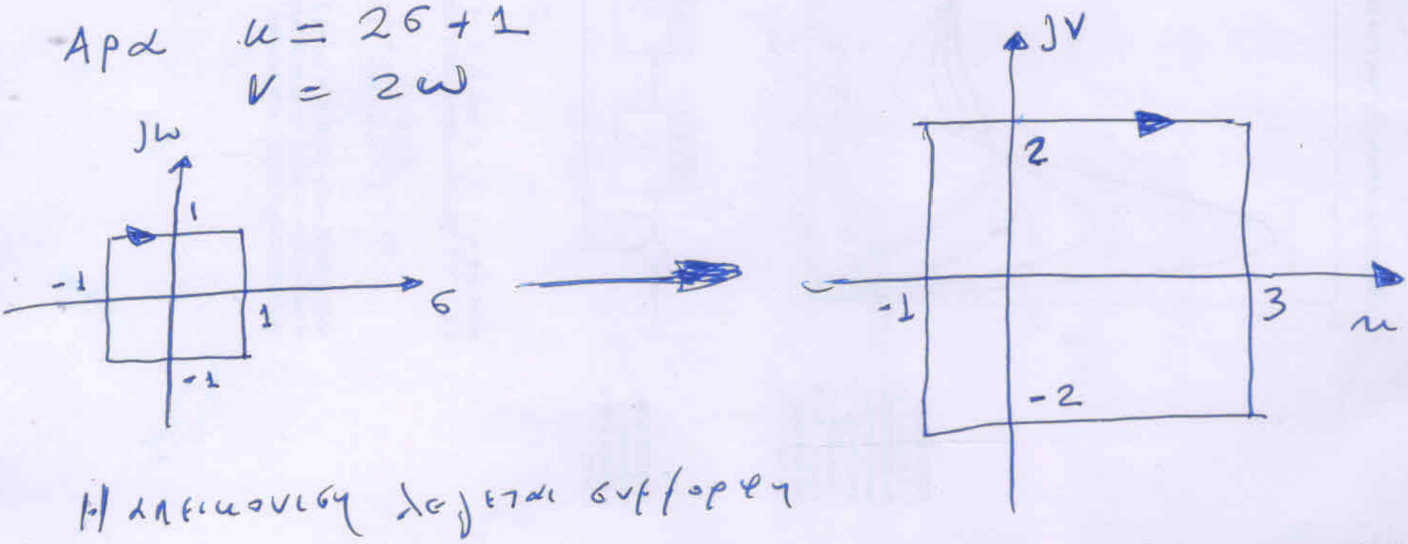
Πχ Έστω $F(s) = 2s + 1$

Θα είναι τότε

$$s' = u + jv = F(s) = 2(\sigma + j\omega) + 1 = (2\sigma + 1) + j2\omega$$

Άρα $u = 2\sigma + 1$

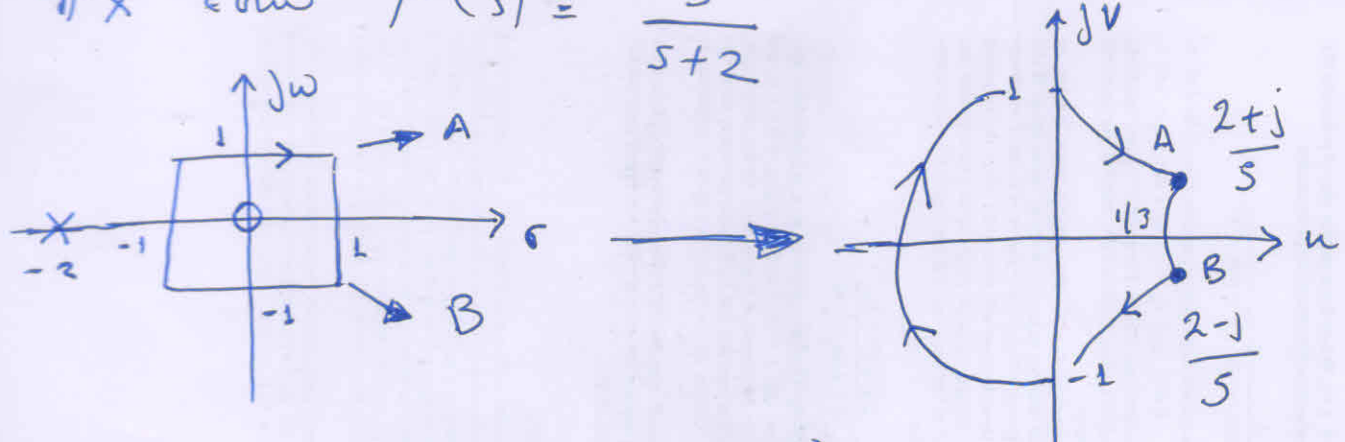
$v = 2\omega$



Η απεικόνιση λέγεται σύμμορφη όταν διατηρούνται το σχήμα και η φορά διαγραφής

② Συνήθως ενδιαφερόμαστε για ρητές απεικονίσεις $F(s)$

πχ έστω $F(s) = \dfrac{s}{s+2}$



Έστω πως η απεικόνιση $F(s)$ αποτελεί τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συστήματος απλού βρόχου της μορφής

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + G_c(s)G(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s)+N(s)}{D(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

ή της μορφής (κανόνας Mason)

$$\Delta(s) = F(s) = 1 - \sum L_n + \sum L_i L_j = 0$$

για συστήματα πολλαπλού βρόχου

Η $F(s)$ βρίσκεται στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς και επομένως το σύστημα είναι ευσταθές όταν όλα τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

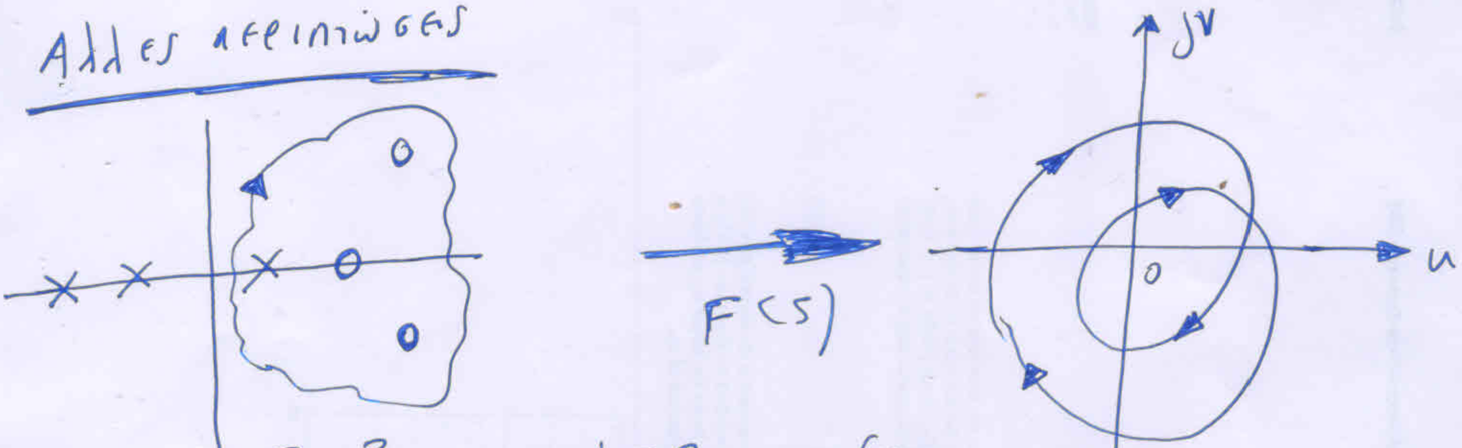
Έστω κλειστή καμπύλη C στο μιγαδικό επίπεδο που περικλείει όλους τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης / απεικόνισης $F(s)$ και $C^* = \Gamma_F$ η εικόνα της καμπύλης $C = \Gamma_s$ κάτω από την εφαρμογή της $F(s)$

③ Θεώρημα Cauchy (χωρίς απόδειξη)

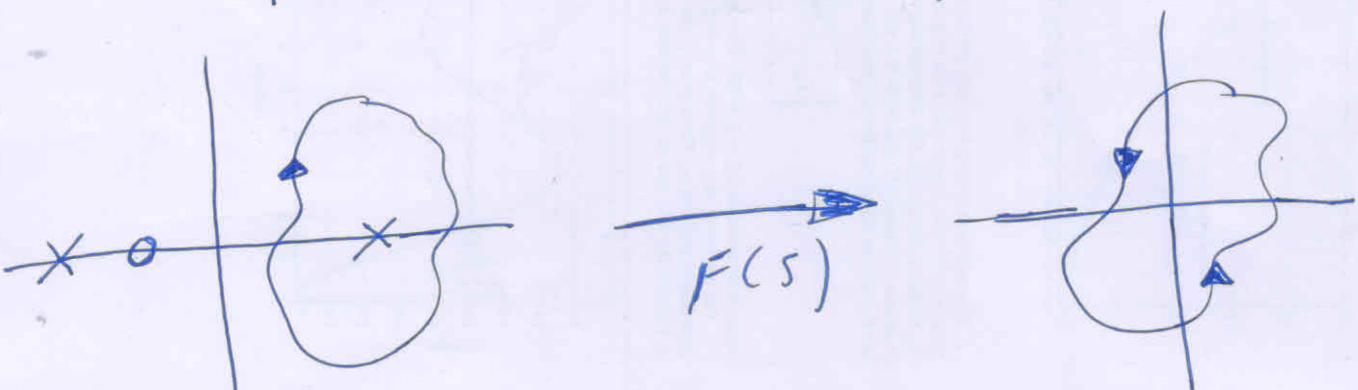
Έστω μια κλειστή καμπύλη Γ_s του μιγαδικού επιπέδου που περικλείει τις Z μηδενικές τιμές και τους P πόλους της συνάρτησης $F(s)$ χωρίς να διέρχεται από αυτά τα σημεία και η οποία διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στην περίπτωση αυτή, η εικόνα Γ_F της καμπύλης Γ_s στο επίπεδο (u, v) της $F(s)$ θα κυκλώνει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $F(s)$ $N = Z - P$ φορές κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα είναι $N = 1$ (άρα μια κύκλωση).

Άλλες περιπτώσεις



$Z = 3$, $P = 1$ $\Rightarrow$ $N = 2$ δύο κυκλώσεις



Αντιστροφή φοράς διαγραφής

$Z = 1$, $P = 2$ $\Rightarrow$ $N = Z - P = -1$

(4) Κριτήριο Nyquist

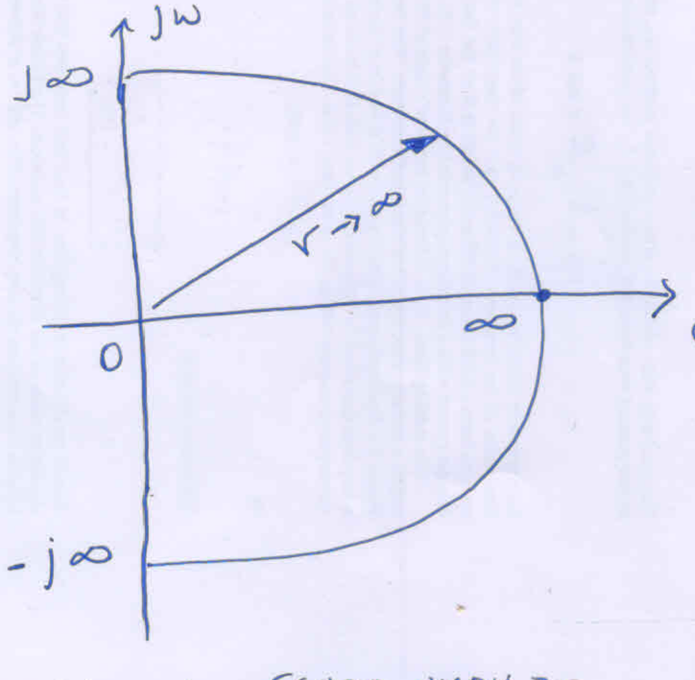
Έστω η χαρακτηριστική εξίσωση

$$F(s) = 1 + L(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s+p_j)}$$

Προκειμένου το σύστημα να είναι ευσταθές θα πρέπει όλα ανεξαιρέτως τα μηδενικά της $F(s)$ να είναι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Θεωρώντας ως απεικόνιση την $F(s)$ ας την εφαρμόσουμε σε μια καμπύλη Γ_s η οποία περικλείει όλο το δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (εάν το σύστημα είναι ευσταθές, αυτή η καμπύλη **ΔΕΝ** θα πρέπει να περιέχει μηδενικά της $F(s)$)

ως τέτοια καμπύλη επιλέγουμε ένα ημικύκλιο που έχει κέντρο την αρχή $(0,0)$ του μιγαδικού επιπέδου και άπειρη ακτίνα $R \to \infty$ (καμπύλη Nyquist)



(το σχήμα είναι ιδεατό αφού το ∞ δεν αντιστοιχεί σε σημείο)

Αυτή η καμπύλη χρησιμοποιείται πάντοτε και παντού και εκείνο που διαφοροποιείται είναι η απεικόνιση $F(s)$ που προσδιορίζει το σύστημα την ευστάθεια του οποίου επιθυμούμε να χαρακτηρίσουμε

(5) Για κάθε διαφορετικό σύστημα, δηλαδή για κάθε διαφορετική απεικόνιση $F(s)$, η καμπύλη Nyquist Γ_s απεικονίζεται και σε διαφορετική καμπύλη Γ_F στο επίπεδο $F(s)$. Η κλειστή καμπύλη $\Gamma_F = F(\Gamma_s)$ είναι γνωστή ως γράφημα Nyquist (Nyquist plot). Άρα το Nyquist plot είναι η εικόνα της καμπύλης Nyquist (Nyquist contour) κάτω από την απεικόνιση $F(s)$ η οποία προσδιορίζεται για το σύστημα προς μελέτη.

Πώς εργαζόμαστε

1) Για τη δοθείσα απεικόνιση $F(s)$ προσδιορίζουμε το Nyquist plot $\Gamma_F = F(\Gamma_s)$ όπου Γ_s το ημικύκλιο ακτίνας $r \to \infty$ που περικλείει το δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (Nyquist contour) και το σχεδιάζουμε στο επίπεδο $F(s)$.

2) Μετρούμε το πλήθος N των κυκλώσεων της αρχής $(0,0)$ του επιπέδου $F(s)$ από την καμπύλη Γ_F.

3) Από το θεώρημα του Cauchy έχουμε $Z = N + P$. Επειδή σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις είναι $P = 0$, θα είναι $Z = N$

⑥ Λαμβάνοντας υπόψη τον προσανατολισμό της καμπύλης Γ_s, η τιμή του N θα μας δίνει επομένως το πλήθος των μηδενικών της $F(s)$ στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, τα οποία αντιστοιχούν σε ασταθείς πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Εάν λοιπόν είναι $N \neq 0$ το σύστημα είναι $\boxed{\text{ασταθές}}$

Ωστόσο στην πράξη λειτουργούμε κάπως διαφορετικά

Είναι

$$F(s) = 1 + L(s) \rightarrow F'(s) = L(s) = F(s) - 1 =$$
$$= G_c(s)\,G(s)$$

Αντί για την $F(s)$ συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την $F'(s) = L(s)$ αφού αυτή παραγοντοποιείται ως $G_c(s)G(s)$

Για $F(s) = 0$ είναι $F'(s) = -1$

Επομένως το πλήθος των κυκλώσεων δεν αφορά το σημείο $(0,0)$ αλλά το $(-1,0)$. Τα υπόλοιπα είναι ίδια.

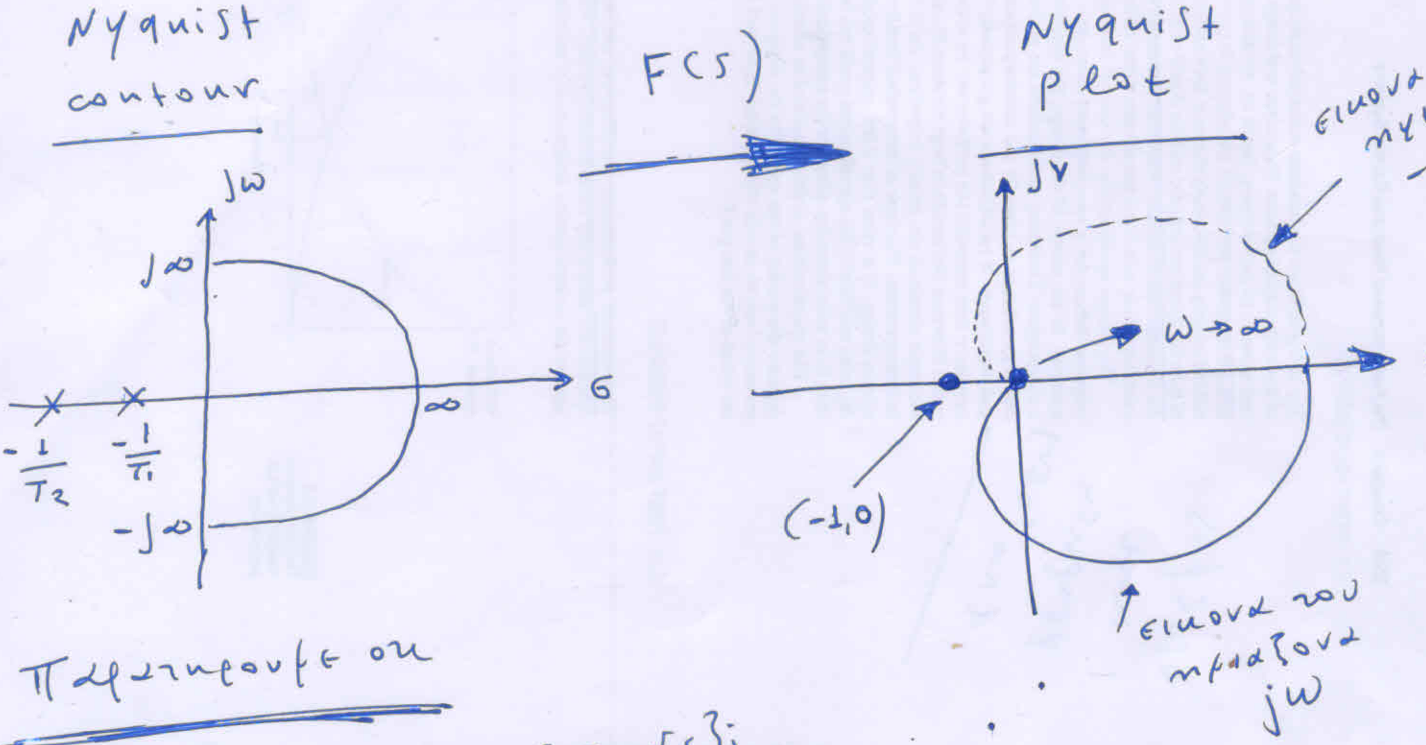
Το κριτήριο Nyquist επαναδιατυπώνεται λοιπόν ως εξής

$\boxed{\text{SOS}}$ Ένα σύστημα με ανάδραση είναι ευσταθές αν και μόνο αν η κλειστή καμπύλη Γ_L στο μιγαδικό επίπεδο ΔΕΝ περικλείει το σημείο $(-1,0)$, όταν το πλήθος των πόλων P στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι $P=0$. Εάν είναι $P \neq 0$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν η καμπύλη Γ_L περικλείει το σημείο N φορές όπου $N = P$ (αφού τότε είναι $Z = 0$)

7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $L(s) = \dfrac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ $\quad (K=1000)$

Πόλοι $\quad p_1 = -1/\tau_1 \quad p_2 = -1/\tau_2$



Παρατηρούμε ότι

Δεν υπάρχουν πόλοι στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο $(P=0)$

Το σημείο $(-1,0)$ ΔΕΝ κυκλώνεται από την καμπύλη

Άρα $Z = N = 0 \Rightarrow$ ΔΕΝ υπάρχουν μηδενικά στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο δηλαδή ασταθείς πόλοι στη συνάρτηση μεταφοράς $\rightarrow$

Το σύστημα είναι $\boxed{\text{ευσταθές}}$

Επισήμανση: Όσον αφορά στην ευστάθεια του συστήματος το σημείο $(-1,0)$ στη μελέτη του Nyquist παίζει τον ίδιο (θεμελιώδη) ρόλο με τον φανταστικό άξονα $j\omega$ του μιγαδικού επιπέδου. Γιατί?

- Ένας πόλος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο υποδηλώνει ευστάθεια, ενώ ένας πόλος στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο υποδηλώνει αστάθεια.
- Επομένως ο κατακόρυφος (φανταστικός) άξονας αποτελεί το όριο ανάμεσα στην ευστάθεια και στην αστάθεια: εάν ένα σύστημα διαθέτει πόλο <u>πάνω</u> στον φανταστικό άξονα πχ $p = 4j$ χαρακτηρίζεται ως οριακά ευσταθές (marginally stable).
- Θυμηθείτε πως στη μέθοδο του γεωμετρικού τόπου ριζών όπου όπως είδαμε, οι πόλοι του συστήματος μετακινούνται στο επίπεδο με τη μεταβολή του μέτρου K από 0 έως ∞ και κατά συνέπεια αποτελούν συναρτήσεις της μορφής $p_j = p_j(K)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, η μέγιστη επιτρεπτή τιμή για το K είναι εκείνη για την οποία ο πόλος προσεγγίζει τον κατακόρυφο άξονα. Εάν το K αυξηθεί περαιτέρω, ο πόλος θα περάσει στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο και το σύστημα θα γίνει <u>ασταθές</u>
- Λαμβάνοντας υπόψη πως η συνάρτηση $F(s)$ που αποτελεί την απεικόνιση στη μέθοδο του Nyquist εξαρτάται από το μέτρο K, είναι προφανές πως η μορφή του Nyquist plot εξαρτάται από την τιμή του K και καθώς το K μεταβάλλεται το Nyquist plot προσεγγίζει όλο και περισσότερο το σημείο $(-1, 0)$. Εάν το K ξεπεράσει κάποια αριθμητική τιμή, το Nyquist plot θα κυκλώσει το σημείο $(-1, 0)$ και το σύστημα θα γίνει ασταθές. Επομένως το σημείο $(-1, 0)$ αντιστοιχεί πρακτικά στον φανταστικό άξονα όσον αφορά στην ευστάθεια του συστήματος.

(9) Παράδειγμα επίλυσης (Dorf, Ενότητα 9.3)

Έστω $L(s) = G_c(s)\,G(s) = \dfrac{K}{s(sT_1+1)(sT_2+1)}$

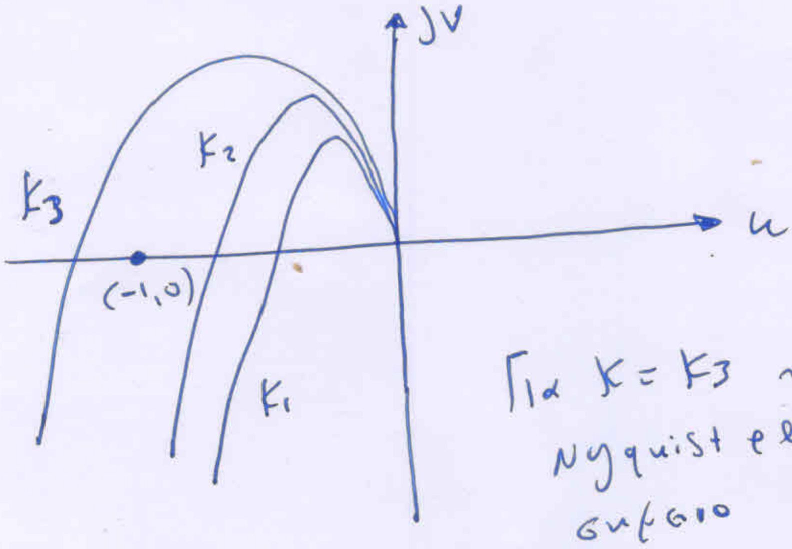
Άρα

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)} = \frac{-K(T_1+T_2) - j\frac{K}{\omega}\left(1-\omega^2 T_1T_2\right)}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4T_1^2T_2^2} =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{\omega^4(T_1+T_2)^2+\omega^2(1-\omega^2T_1T_2)^2}} \;\angle\; -\tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2) - \frac{\pi}{2}$$

(μέτρο) (φάση)

Το Nyquist plot για $K_3 > K_2 > K_1$ έχει τη μορφή



Για $K=K_3$ η καμπύλη του Nyquist plot περικλείει το σημείο $(-1,0)$

Το σημείο στο οποίο το Nyquist plot τέμνει τον πραγματικό άξονα έχει μηδενικό φανταστικό μέρος. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$V = -\frac{K\left(1/\omega\right)\left(1-\omega^2T_1T_2\right)}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4T_1^2T_2^2} = 0 \Rightarrow$$

$$1-\omega^2T_1T_2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

Για αυτή την τιμή του ω το σημείο της τομής είναι

$$u = -\frac{K(T_1+T_2)}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4 T_1^2 T_2^2}\Bigg|_{\omega^2=\frac{1}{T_1T_2}} = \frac{-KT_1T_2}{T_1+T_2}$$

Για να είναι $u=-1$ θα πρέπει να είναι

$$\boxed{K' = \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}}$$

Αυτή είναι και η οριακή τιμή του K για την οποία το σύστημα είναι (οριακά) ευσταθές. Εάν η τιμή του K αυξηθεί το σύστημα γίνεται ασταθές ενώ εάν το K μειωθεί ο βαθμός ευστάθειας του συστήματος αυξάνεται

Για κάθε τιμή του Κέρδους K το περιθώριο κέρδους (γραμμικό) ορίζεται ως ο βαθμός στον οποίο μπορεί να αυξηθεί η τιμή του K μέχρι να προσεγγίσει την τιμή K' για την οποία η καμπύλη του Nyquist plot προσεγγίζει το σημείο (-1, 0). Άρα όσο πιο κοντά είναι η τιμή του Κέρδους K στην οριακή τιμή K', τόσο πιο μικρό είναι το περιθώριο κέρδους.

Αποδεικνύεται πως το περιθώριο κέρδους αποτελεί το αντίστροφο του μέτρου $|L(j\omega)|$ για εκείνη την τιμή της συχνότητας ω για την οποία η γωνία φάσης προσεγγίζει τις -180° (αφού τότε είναι $v=0$)

Άρα ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής:

(11) Το περιθώριο κέρδους ορίζεται ως η αύξηση στο κέρδος του συστήματος όταν η φάση είναι $\phi = -180^\circ$ για την οποία το σύστημα καθίσταται οριακά ευσταθές υπό την έννοια πως το Nyquist plot διέρχεται από το σημείο (-1,0).

Περιθώριο φάσης (phase margin)

ορίζεται ως η γωνία ως προς την οποία θα πρέπει να περιστραφεί το Nyquist plot έτσι ώστε το σημείο που αντιστοιχεί στη συνθήκη $|L(j\omega)| = 1$ να διέλθει από το σημείο $(-1, 0)$.

ή ισοδύναμα

η μετατόπιση φάσης του $L(j\omega)$ υπό καθεστώς μοναδιαίου μέτρου που θα οδηγούσε σε ένα οριακά ευσταθές σύστημα υπό την έννοια πως το Nyquist plot διέρχεται από το (-1,0)

Σε ένα διάγραμμα Bode το κρίσιμο σημείο ευστάθειας (-1,0) αντιστοιχεί σε $(0\ dB, -180^\circ)$

(12) Διαγράμματα Nichols

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $T(s)$ σχετίζεται με τη συνάρτηση $L(s) = G_c(s)\, G(s)$ ως

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{G_c(j\omega)\, G(j\omega)}{1+G_c(j\omega)\, G(j\omega)}$$

Θεωρώντας ότι $L(j\omega) = u + jv$ θα είναι

$$T(j\omega) = \frac{u+jv}{1+u+jv} = M(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}$$

όπου

$$M = M(\omega) = |T(j\omega)| = \left|\frac{u+jv}{1+u+jv}\right| = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{(1+u)^2+v^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2}}$$ Επομένως

$$M^2 = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \Rightarrow M^2 + M^2u^2 + 2M^2u + M^2v^2 = u^2+v^2 \Rightarrow$$

$$M^2 = u^2+v^2 - M^2u^2 - 2M^2u - M^2v^2 = (1-M^2)u^2 + (1-M^2)v^2 - 2M^2u$$

$$\Rightarrow u^2+v^2 - \frac{2M^2}{1-M^2}u = \frac{M^2}{1-M^2} \Rightarrow$$

$$u^2+v^2 - \frac{2M^2u}{1-M^2} + \left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 = \frac{M^2}{1-M^2} + \left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2$$

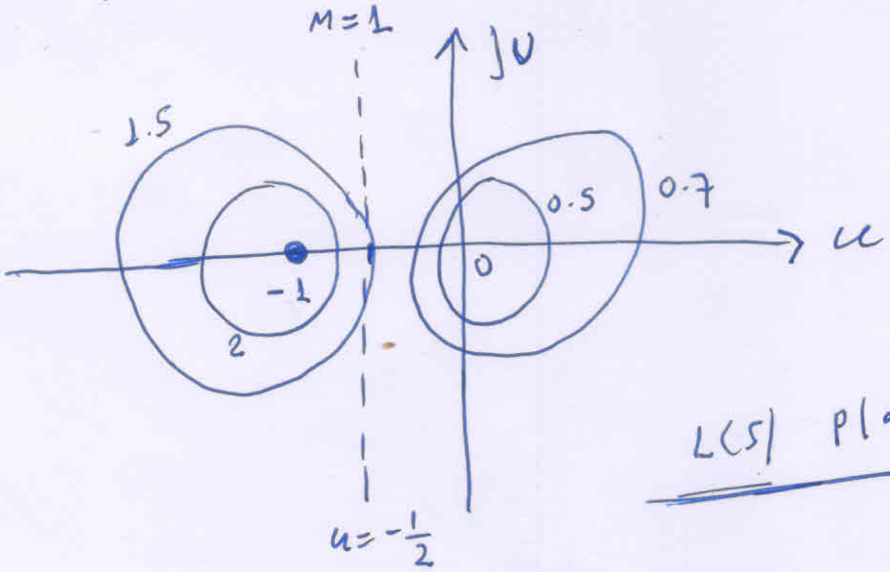
$$\Rightarrow$$

$$\left(u - \frac{M^2}{1-M^2}\right) + v^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2$$

13 Εξίσωση κύκλου με κέντρο

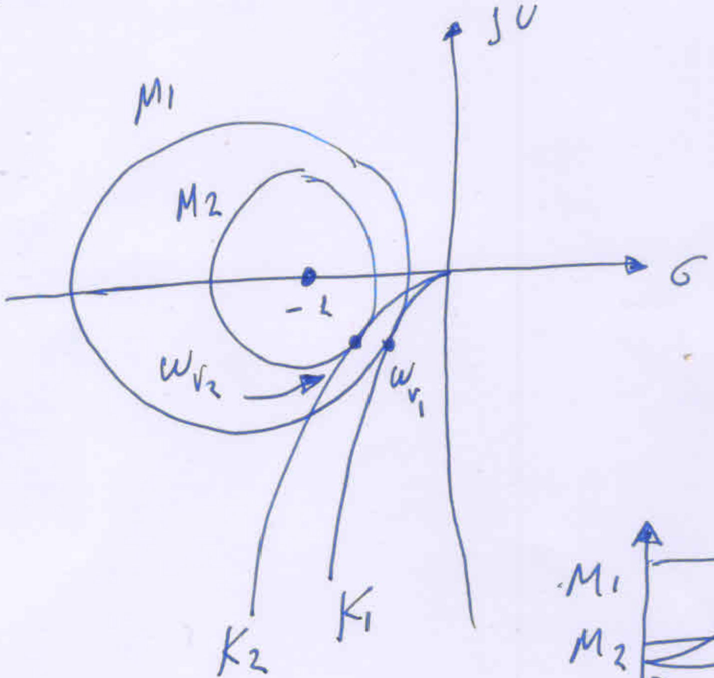
$$(u, v) = \left(\frac{M^2}{1-M^2}, 0\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \left|\frac{M}{1-M^2}\right|$$

Άρα για κάθε M έχουμε και ένα διαφορετικό κύκλο

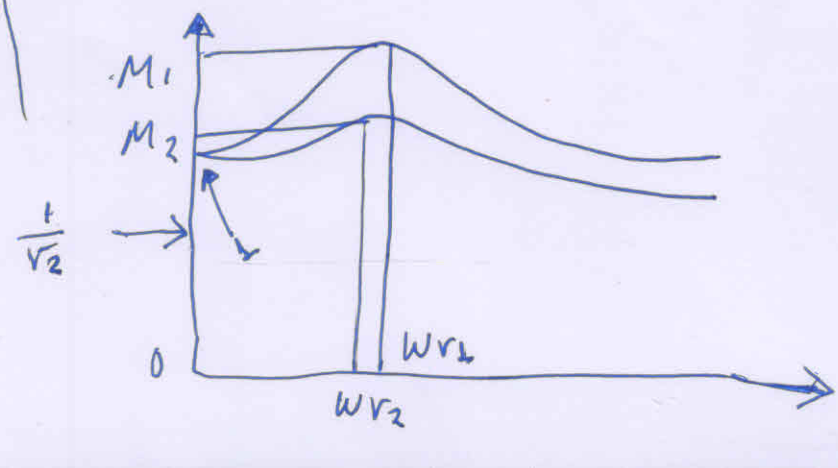


L(s) plane

Τα περνάω σε συνδυασμό με το Nyquist plot όπως σε εικόνες σαν την παρακάτω



Οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε κέρδος K1 και K2 εφάπτονται στους κύκλους που αντιστοιχούν για M1 και M2 στις συχνότητες ωr1 και ωr2



(14) Εάν κάνουμε το ίδιο με τη φάση $\varphi = \angle T(j\omega)$ έχουμε

$$\varphi = \angle T(j\omega) = \angle \frac{u+jv}{1+u+jv} = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{1+u}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = N = \frac{v}{u} - \frac{v}{1+u}$$ και δουλεύοντας όπως και πριν

Βρίσκουμε

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{N^2}\right)$$ που είναι

εξίσωση κύκλου με κέντρο

$$(u, v) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$$ και ακτίνα $$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{N^2}}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το M για το μέτρο και το N για τη φάση μπορούμε να περιγράψουμε τη συχνοτική απόκριση στο χώρο L(s) αν και η χρήση των διαγραμμάτων του Bode οδηγεί σε πιο απλή ανάλυση.

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις κύκλων εάν σχεδιαστούν σε λογαριθμική κλίμακα οδηγούν στα διαγράμματα Nichols.

(δείτε Dorf σχήματα 9-26 έως 9-28)