Γεωμετρικός υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{e=1}^{n}(s+p_e)}$$

με m μηδενικά

$$-\vec{z}_i = (\kappa_i, \lambda_i) = \kappa_i + j\lambda_i \quad (i=1,2,\dots,m)$$

και n πόλους

$$-\vec{p}_e = (\gamma_e, \nu_e) = \gamma_e + j\nu_e \quad (l=1,2,\dots,n)$$

Κατά συνέπεια για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε κάποιο σημείο $\vec{s} = \sigma + j\omega$ του μιγαδικού επιπέδου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική μορφή

$$\vec{x}_i = \vec{s} + \vec{z}_i = r_i e^{j\theta_i} \quad (i=1,2,\dots,m)$$

και τα διανύσματα της μορφής

$$\vec{y}_e = \vec{s} + \vec{p}_e = q_e e^{j\varphi_e} \quad (l=1,2,3,\dots,n)$$

όπου

$$r_i = |\vec{x}_i| = |\vec{s} + \vec{z}_i| = \sqrt{(\sigma+\kappa_i)^2 + (\omega+\lambda_i)^2}$$

$$\theta_i = \angle \vec{x}_i = \angle|\vec{s} + \vec{z}_i| = \tan^{-1}\frac{\omega+\lambda_i}{\sigma+\kappa_i}$$

$$q_e = |\vec{y}_e| = |\vec{s} + \vec{p}_e| = \sqrt{(\sigma+\gamma_e)^2 + (\omega+\nu_e)^2}$$

$$\varphi_e = \angle \vec{y}_e = \angle|\vec{s} + \vec{p}_e| = \tan^{-1}\frac{\omega+\nu_e}{\sigma+\gamma_e}$$

$i=1,2,\dots,m$
$e=1,2,\dots,n$

② Θα είναι λοιπόν

$$H(s) = K\,\frac{r_1 e^{j\Theta_1}\, r_2 e^{j\Theta_2} \cdots r_m e^{j\Theta_m}}{q_1 e^{j\varphi_1}\, q_2 e^{j\varphi_2} \cdots q_n e^{j\varphi_n}} =$$

$$= K\,\frac{(r_1 r_2 \cdots r_m)\, e^{j(\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_m)}}{(q_1 q_2 \cdots q_n)\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}} =$$

$$= K\,\frac{\prod_{i=1}^{m} r_i}{\prod_{j=1}^{n} q_j}\exp\left[j\left(\sum_{i=1}^{m}\Theta_i - \sum_{j=1}^{n}\varphi_j\right)\right]$$

ή ισοδύναμα

$$|H(s)| = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}\sqrt{(\sigma+\kappa_i)^2+(\omega+\lambda_i)^2}}{\prod_{\ell=1}^{n}\sqrt{(\sigma+\gamma_\ell)^2+(\omega+\nu_\ell)^2}} \quad \text{και}$$

$$\angle H(s) = \sum_{i=1}^{m}\left(\tan^{-1}\frac{\omega+\lambda_i}{\sigma+\kappa_i}\right) - \sum_{\ell=1}^{n}\left(\tan^{-1}\frac{\omega+\nu_\ell}{\sigma+\gamma_\ell}\right)$$

Παράδειγμα $\quad H(s) = \dfrac{s^2-s-6}{s^3+8s^2+29s+52}$

Υπολογισμός στη θέση

$s_1 = 5+3j$

Τρεις πόλους $p_{1,2} = -2 \pm 3j$, $p_3 = -4$

Δυο μηδενικές τιμές $z_1 = -2$, $z_2 = 3$

Για τις μηδενικές τιμές είναι

$r_1 = 5\sqrt{2}$, $\Theta_1 = 45°$

$r_2 = 5$, $\Theta_2 = 90°$

Για τους πόλους είναι

$q_1 = \sqrt{29}$, $\varphi_1 = 21{,}8°$

$q_2 = \sqrt{89}$, $\varphi_2 = 57.9°$

$q_3 = \sqrt{74}$, $\varphi_3 = 35.5°$

Άρα

$$H(s_1) = \frac{r_1 r_2}{q_1 q_2 q_3}\, e^{j(\Theta_1+\Theta_2-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)} = 0.08\, e^{j19{,}666°}$$

Διαγράμματα Bode

Είναι γραφήματα που απεικονίζουν την απόκριση σταθερής κατάστασης ενός ευσταθούς συστήματος LTI όταν δέχεται είσοδο συχνότητας ω_0.

Έστω πως η συνάρτηση μεταφοράς έχει μηδενικά τα $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ και πόλους $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$

Θα είναι τότε

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j \angle H(j\omega)}$$

όπου

$$|H(j\omega)| = |K'| \frac{\prod_{i=1}^{m} \left|1 + \frac{j\omega}{z_i}\right|}{\prod_{l=1}^{m} \left|1 + \frac{j\omega}{p_l}\right|} \quad \text{όπου} \quad K' = K \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{l=1}^{m} p_l}$$

και

$$\angle H(j\omega) = \angle K' + \sum_{i=1}^{m} \angle \left(1 + \frac{j\omega}{z_i}\right) + \sum_{l=1}^{m} \angle \left(1 + \frac{j\omega}{p_l}\right)$$

Διάγραμμα πλάτους $(\omega, |H(j\omega)|)$

Διάγραμμα φάσης $(\omega, \angle H(j\omega))$

Το διάγραμμα φάσης σχεδιάζεται εύκολα επειδή περιέχει αθροίσματα οπότε σχεδιάζουμε τον κάθε φασικό όρο ξεχωριστά και προσθέτουμε τους όρους μεταξύ τους.

4. Το διάγραμμα πλάτους περιέχει γινόμενα αλλά αυτά μετατρέπονται εύκολα σε αθροίσματα λογαριθμίζοντας, αφού είναι γνωστό ότι

$$\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \log(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) =$$

$$= \log(x_1) + \log(x_2) + \dots + \log(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

Στην πραγματικότητα θεωρούμε την ποσότητα

$$20\log_{10} X$$

έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα dB.

Θα είναι τότε

$$20\log_{10}\left(H(j\omega)\right) = 20\log_{10}\left(|K'|\right) + \sum_{i=1}^{n} 20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{z_i}\right|\right) - \sum_{l=1}^{n} 20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{p_l}\right|\right)$$

Επομένως τα διαγράμματα Bode ορίζονται ως

$$\left\{\log_{10}\omega,\ 20\log_{10}|H(j\omega)|\right\}$$ Διάγραμμα πλάτους (log, log)

$$\left\{\log_{10}\omega,\ \angle H(j\omega)\right\}$$ Διάγραμμα φάσης (log-lin)

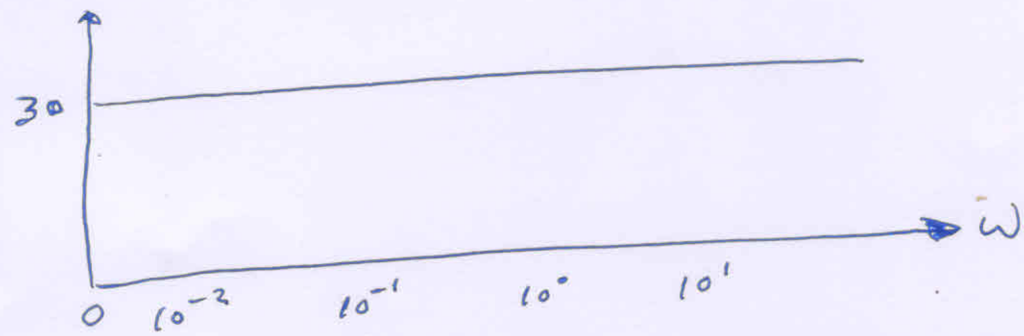
5. Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

α) Σταθερός όρος K

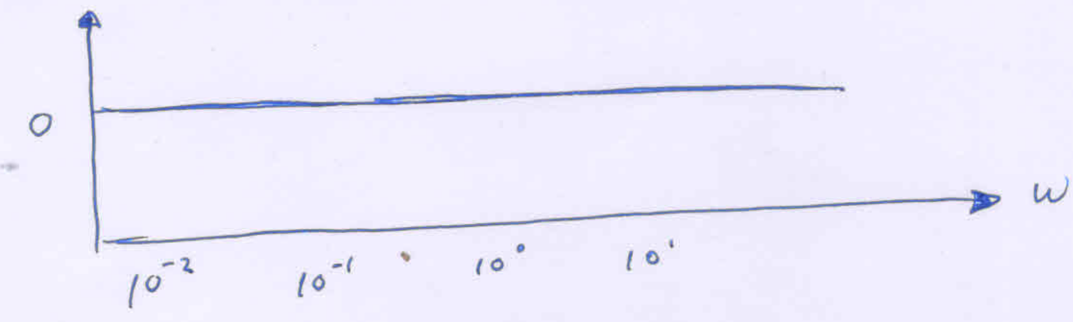
Η απόκριση πλάτους και η απόκριση φάσης είναι σταθερές και ανεξάρτητες της συχνότητας. Είναι

$$K = |K| e^{j2k\pi} \quad \text{για } K>0$$
$$K = |K| e^{j(2k+1)\pi} \quad \text{για } K<0$$

Διάγραμμα πλάτους (για K = 30)



Διάγραμμα φάσης



β) Πραγματικός πόλος ή γνήσιος όρος α' τάξεως

$$H(s) \sim \frac{1}{1+\frac{s}{\alpha}}$$ Απλός πόλος στη θέση $s = -\alpha$

⑥ Για $s = j\omega$ είναι

$$\left|\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\alpha}}\right| = \frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{\alpha}\right|}$$

Άρα

$$f(\omega) = 20\log_{10}\left\{\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{\alpha}\right|}\right\} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}\right) dB$$

Προσεγγιστικές σχέσεις

Για $\omega \ll \alpha$ είναι $\frac{\omega}{\alpha} \approx 0 \Rightarrow f(\omega) = 0$

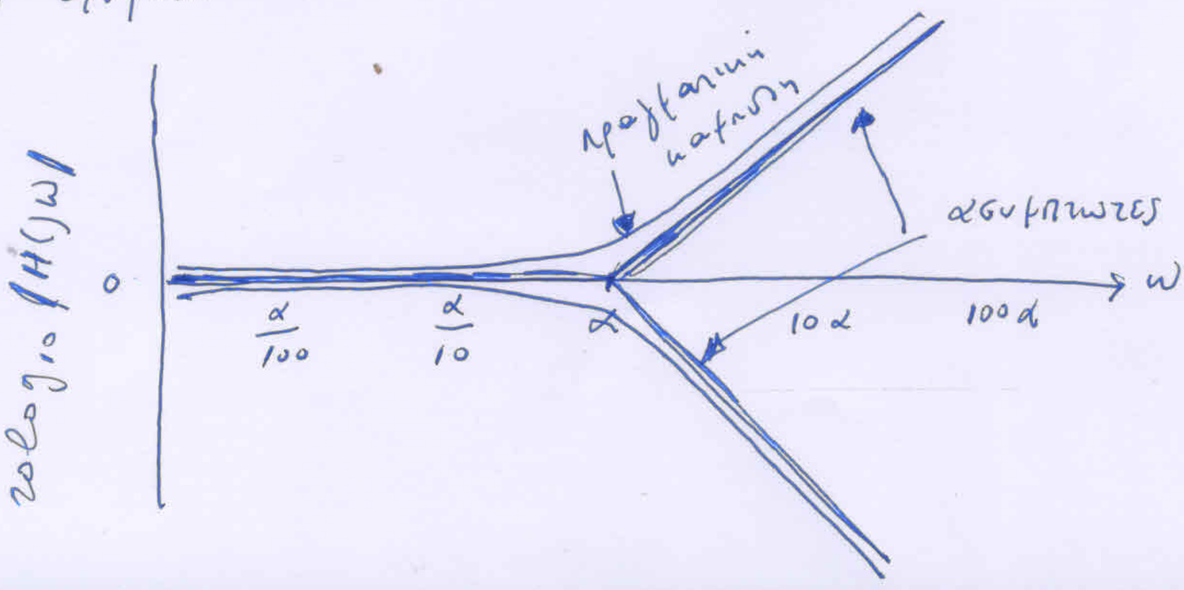
Για $\omega \gg \alpha$ είναι $\frac{\omega}{\alpha} + 1 \cong \frac{\omega}{\alpha} \Rightarrow$

$$f(\omega) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = -20\log\omega + 20\log\alpha$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι ευθεία ως προς $\log\omega$ με κλίση -20 dB/dec ή -6 dB/oct

Αυτή η ευθεία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στη θέση $\omega = \alpha$

Για τη φασική τιμή η καμπύλη είναι αντισυμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα.



Διάγραμμα φάσης

Η φασική συνεισφορά απλού πόλου είναι

$$\angle\left(\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\alpha}}\right) = \angle 1 - \angle\left(1+\frac{j\omega}{\alpha}\right) = -\angle\left(1+\frac{j\omega}{\alpha}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

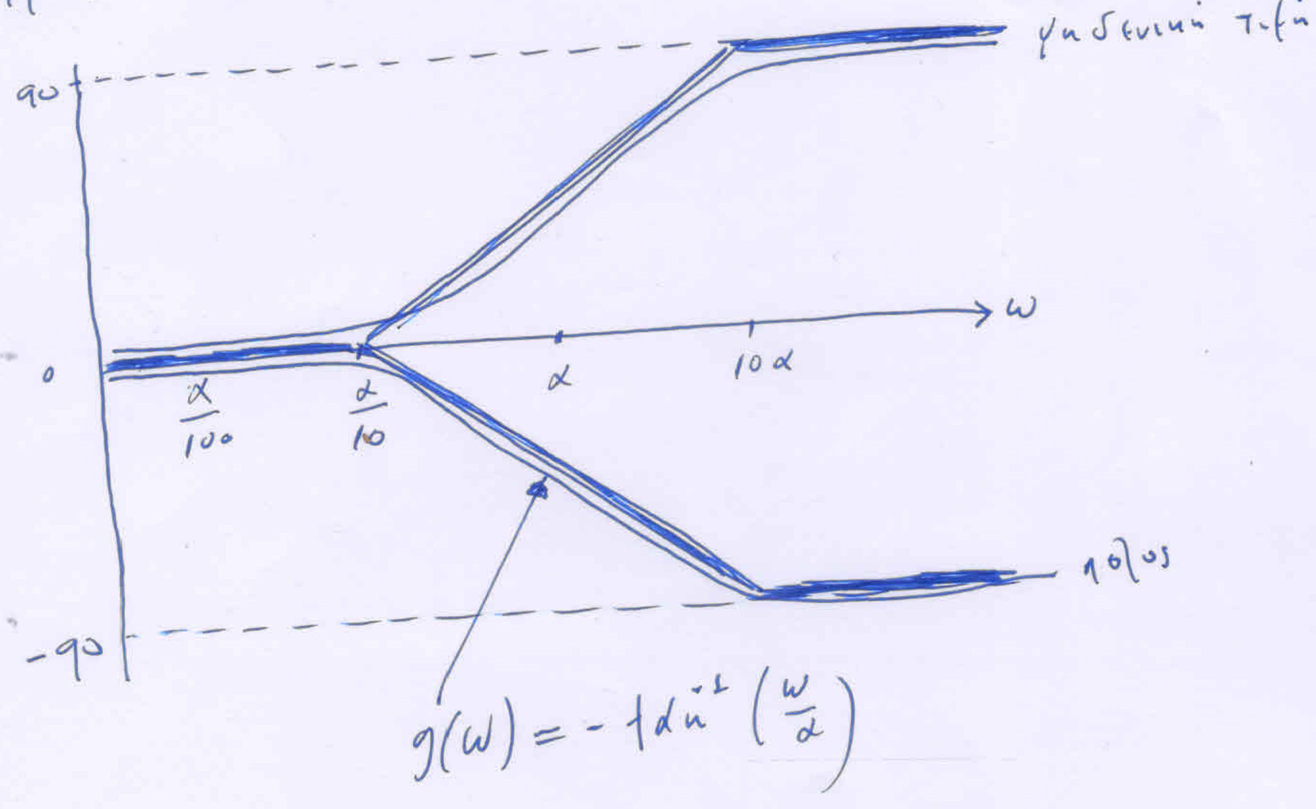
Για $\omega \ll \alpha$ είναι $g(\omega) \cong 0$

Για $\omega \gg \alpha$ είναι $\frac{\omega}{\alpha} \to \infty \Rightarrow g(\omega) \cong -\frac{\pi}{2}$ rad

Αυτές οι ευθείες είναι ασύμπτωτες του διαγράμματος φάσης παράλληλες ως προς τον οριζόντιο άξονα

Για κάποια τιμή του α η ευθεία $g(\omega) = 0$ εκτείνεται στην περιοχή $0 \le \omega \le \alpha/10$ ενώ η ευθεία $g(\omega) = -90^\circ$ εκτείνεται στην περιοχή $\omega \ge 10\alpha$

Η καμπύλη της φασικής συνεισφοράς του μηδενικού είναι συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα



(8) Συνεισφορά πόλου δεύτερης τάξεως

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τη μορφή

$$s^2 + 2\zeta \alpha s + \alpha^2 = 0$$

Τώρα είναι

$$f(\omega) = -20\log_{10}\left|1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha} + \left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)^2\right| \quad \text{και}$$

$$g(\omega) = -\angle\left[1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha} + \left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)^2\right]$$

Στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων $\omega \ll \alpha$ είναι

$$f(\omega) \cong 0.$$

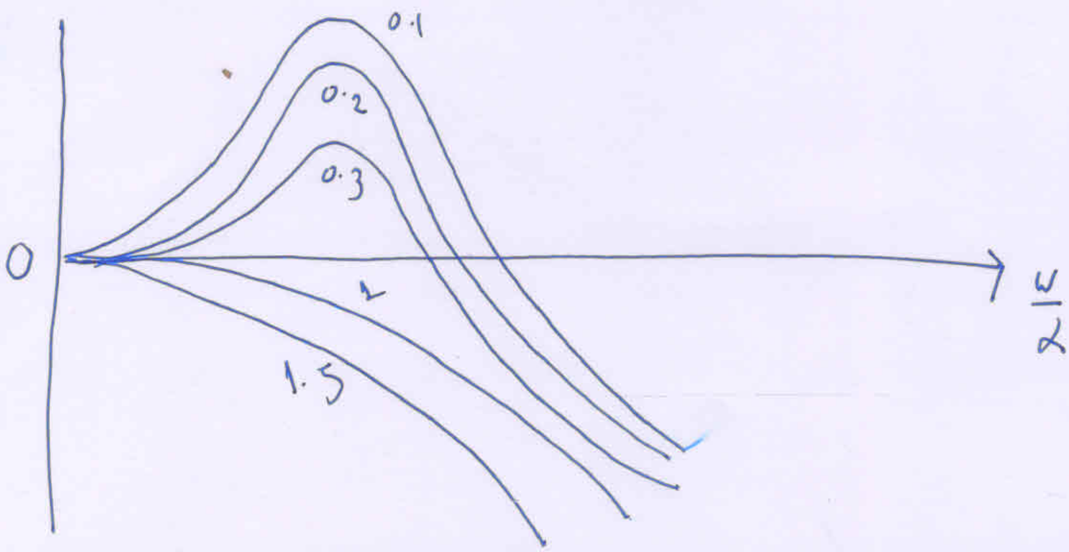
Στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων είναι

$$f(\omega) = -40\log\omega + 40\log\alpha \quad (\text{κλίση } -40db/oct$$

Η πραγματική καμπύλη του διαγράμματος πλάτους είναι η

$$f(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}$$

Το ζ συνιστά εξασθένηση παραμέτρου και για κάθε ζ έχουμε και διαφορετική καμπύλη



Η κορυφή (ακρότατο / μέγιστο) προκύπτει από τη συνθήκη

$$\frac{d\,|H(j\omega)|}{d\omega} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2\zeta^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_r = \alpha\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Η μέγιστη τιμή που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή συχνότητας είναι

$$|H(j\omega_r)| = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

Η κορυφή εμφανίζεται όταν $1-2\zeta^2 > 0 \Rightarrow$

$$\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$$

Διάγραμμα φάσης

$$g(\omega) = -\angle\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\alpha}\right)\right] = -\tan^{-1}\frac{\frac{2\zeta\omega}{\alpha}}{1-\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)}$$

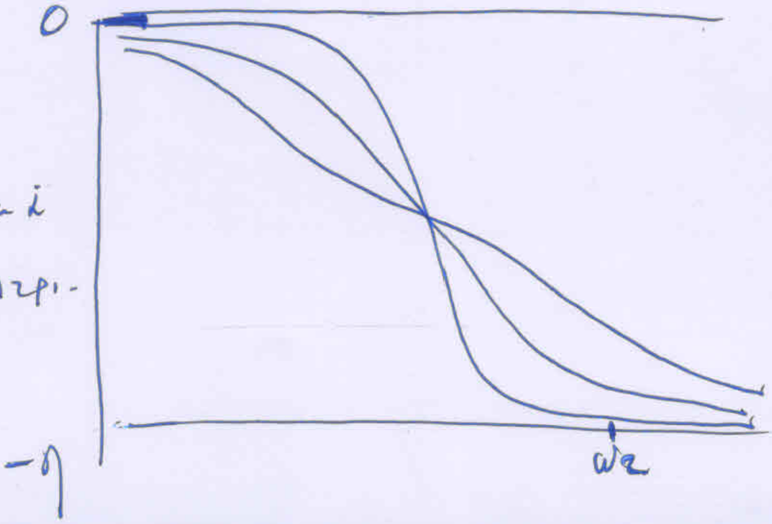
Ασύμπτωτες:

για $\omega \ll \alpha$ είναι $g(\omega) \cong 0$

για $\omega \gg \alpha$ είναι $g(\omega) \cong -180° \cong -\pi$

οι ασύμπτωτες ενώνονται στα σημεία $\omega_1 = \frac{\alpha}{2}\log_{10}(2/\zeta)$

και $\omega_2 = \frac{2\alpha}{\log_{10}(2\zeta)}$



οι καμπύλες για τα μηδενικά ζεύγη είναι οι κατοπτρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα αυτών των πόλων.

10. Διαδικασία κατασκευής διαγραμμάτων Bode

1) Μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη μορφή

$$H(s) = K' \frac{z_1 z_2 \cdots z_m}{p_1 p_2 \cdots p_N} \frac{\left(1+\frac{s}{z_1}\right)\left(1+\frac{s}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{z_m}\right)}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{p_N}\right)}$$

2) Διαχωρισμός της συνάρτησης στις δομικές της μονάδες και χαρακτηρισμός αυτών ως σταθερούς όρους ή πραγματικοί / συζυγείς μιγαδικοί πόλοι και μηδενικές τιμές.

3) Σχεδίαση των αξόνων του διαγράμματος και απεικόνιση των πόλων και των μηδενικών τιμών επί του άξονα των συχνοτήτων.

4) Διάγραμμα πλάτους

- Σχεδιάζουμε την ευθεία $f(\omega) = 0$ μέχρι το σημείο που έχουμε αλλαγή κλίσης.
- Εαν συναντήσουμε απλό πόλο (μηδενικό), ελαττώνουμε (αυξάνουμε) την κλίση κατά 20 dB/decade
- Εαν συναντήσουμε πόλο (μηδενικό) δευτέρας τάξεως, ελαττώνουμε (αυξάνουμε) την κλίση κατά 40 dB/decade
- Εξομαλύνουμε τις ασυμπτώτες χωρίς όμως να υπερβούμε τα όρια σφάλματος.
- Βαθμονομούμε τους άξονες.

5) Διάγραμμα φάσης

- Σχεδιάζουμε την ευθεία $g(\omega) = 0$ μέχρι το πρώτο σημείο αλλαγής κλίσης (εκτός εάν έχουμε πόλο (μηδενικό) για $\omega = 0$ οπότε χαράσσουμε την ευθεία $\varphi(\omega) = -90^\circ$ ($g(\omega) = +90^\circ$).

(11) • Εάν συναντούμε απλό πόλο (μηδενικό) στη θέση $\omega = \alpha$ ελαττώνουμε (αυξάνουμε) τη φάση κατά 90° στην περιοχή $[\alpha/10, 10\alpha]$. Για πόλο/μηδενικό δευτέρας τάξεως η αύξηση (μείωση) πραγματοποιείται κατά 180°.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$H(s) = \frac{100s^2 + 750s}{s^2 + 13s + 30} = 25\,\frac{s\left(1+\frac{s}{75}\right)}{\left(1+\frac{s}{3}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

Άρα έχουμε σταθερό όρο $K = 25$,
δύο απλά μηδενικά στις θέσεις $s = 0$ και $s = -75$ και
δύο απλούς πόλους στις θέσεις $s = -3$ και $s = -10$.

Άρα έχουμε 3 συχνότητες κλίσης

$$\omega_1 = 3\ \frac{rad}{sec},\quad \omega_2 = 10\ \frac{rad}{sec},\quad \omega_3 = 75\ \frac{rad}{sec}$$

Σταθερός όρος $K = 25$

$$f(\omega) = 20\log_{10}(25) = 27.958$$

$s = 0$: ευθεία κλίσης 20 db/dec που ξεκινά από το $\omega = 1$
$s = -75$ -||- -||- $\omega = 75$
$s = -3$ ευθεία κλίσης −20 db/se -||- -||- $\omega = 2$
$s = -10$ -||- -||- -||- $\omega = 10$

Οι καμπύλες προστίθενται μεταξύ τους.
Όπου έχουμε ίσες και αντίθετες κλίσεις η γραμμή είναι οριζόντια.