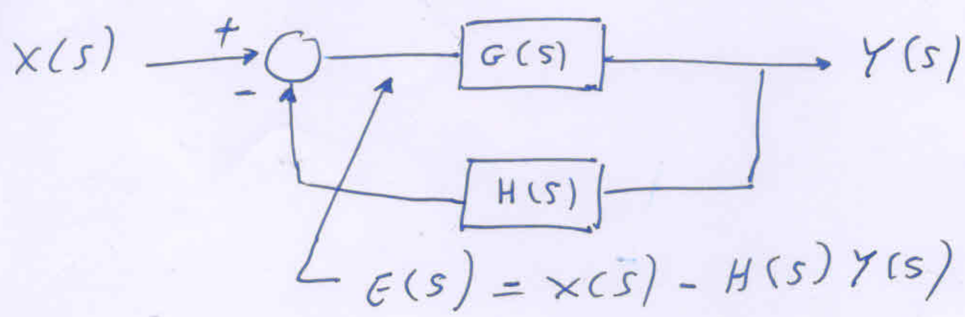
① Μέθοδος γεωμετρικού τόπου ριζών

Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου



Άρα

$$[X(s) - H(s)Y(s)]\,G(s) = Y(s) \Rightarrow$$

$$X(s)G(s) = Y(s) + H(s)G(s)Y(s) =$$

$$= Y(s)\left(1 + H(s)G(s)\right) \Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{\underline{1 + H(s)G(s)}}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος ανοικτού βρόχου.

Παραγοντοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου αυτή διατυπώνεται ως

$$G(s) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

όπου z_i $(i=1,2,\dots,m)$ τα μηδενικά της συνάρτησης

και p_j $(j=1,2,\dots,n)$ οι πόλοι της συνάρτησης $H(s)G(s)$.

② Κατά συνέπεια, η χαρακτηριστική εξίσωση της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι η

$$1 \pm G(s)H(s) = 1 \pm K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = 0 \Rightarrow$$

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) \pm K \prod_{i=1}^{m}(s+z_i) = 0$$

Για τα συστήματα ενδιαφέροντος είναι $n \geq m$ και κατά συνέπεια το πλήθος των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου ταυτίζεται με το πλήθος των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.

Για $K = 0$ τα σύνολα των πόλων ταυτίζονται

Επίδειξη της ιδέας

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου με πόλους

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)} \qquad s_1 = 0 \text{ και } s_2 = -2$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$1 + \frac{K}{s^2+2s} = \frac{s^2+2s+K}{s^2+2s} = 0 \Rightarrow s^2+2s+K = 0$$

Για $K \neq 0$ αυτή η εξίσωση έχει τη γενική μορφή

$$\boxed{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0} \qquad \text{όπου } \omega_n = \sqrt{K} \text{ και } \zeta\omega_n = 1$$

(3) με διακρίνουσα

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = 4\zeta^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$ και

ρίζα $\sqrt{\Delta} = 2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

Για $\zeta < 1$ είναι $\zeta^2 - 1 < 0$ και οι ρίζες είναι

$$s_{1,2} = \frac{-B \pm j\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm j2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2} =$$

$$= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Είναι όμως $\zeta\omega_n = 1$ με $\omega_n = \sqrt{K}$ και επομένως

$\zeta^2 = \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{K}$ Θα είναι λοιπόν

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K}\sqrt{1-\frac{1}{K}} = -1 \pm j\sqrt{K-1}$$

Για $K = 0$ είναι

$s_1 = -1 + j^2 = -1 - 1 = -2$
$s_2 = -1 - j^2 = -1 + 1 = 0$ ⟹ συμπίπτουν με τους πόλους ανοικτού βρόχου

Για $0 < K < 1$ είναι $K - 1 < 0$ ⟹

$s_{1,2} = -1 \mp \sqrt{1-K}$ δυο πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες

$-2 < s_1 < -1$ και $-1 < s_2 < 0$

Για $K = 1$ διπλή ρίζα $s_1 = s_2 = -1$

Για $K > 1$ δυο μιγαδικές συζυγείς ρίζες

πχ για $K = 4$

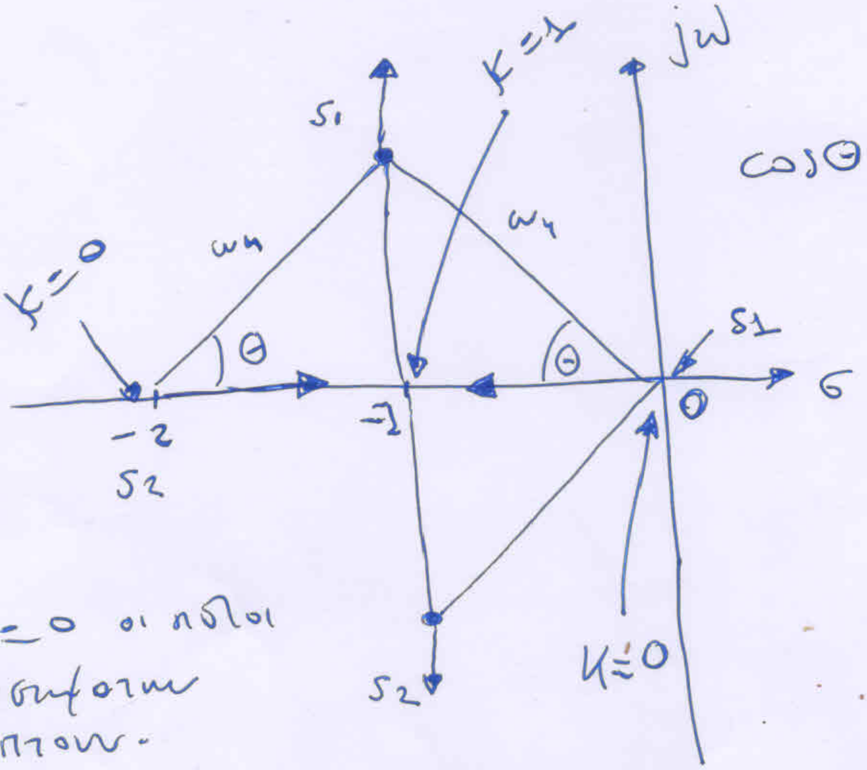
$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$

④ Το μέτρο των ριζών είναι

$$|s_{1,2}| = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} =$$

$$= \sqrt{\omega_n^2} = \omega_n = \sqrt{K}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το επόμενο διάγραμμα.



$$\cos\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \Rightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1}\zeta.$$

Για K = 0 οι πόλοι των συστημάτων συμπίπτουν.

Καθώς το K μεταβάλλεται από 0 έως 1 η s1 κινείται προς τα αριστερά και η s2 προς τα δεξιά. Για K = 1 οι δύο ρίζες συμπίπτουν στη θέση −1. Για K > 1 οι δύο ρίζες γίνονται μιγαδικές με την s1 να κινείται προς τα επάνω και την s2 προς τα κάτω.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η συνεχής μεταβολή της παραμέτρου K από 0 έως ∞ οδηγεί στη συνεχή μεταβολή της θέσεως των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς πάνω στο μιγαδικό επίπεδο

5 Ορισμός

Ορίζουμε ως γεωμετρικό τόπο των ριζών την τροχιά που διαγράφουν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς μια παράμετρος ελέγχου μεταβάλλεται από το 0 ως το άπειρο.

Αυτή η μέθοδος επιτρέπει την αξιολόγηση της ευαισθησίας του συστήματος κάτω από μεταβολές των παραμέτρων και συνήθως χρησιμοποιείται μαζί με άλλες τεχνικές όπως είναι το κριτήριο Routh - Hurwitz

Ορισμός συνθηκών

Από τη σχέση

$$1+G(s)H(s)=0$$ έχουμε $$G(s)H(s)=-1$$

Είναι όμως

$$G(s)H(s)=|G(s)H(s)|\,e^{j\measuredangle G(s)H(s)}$$ και

$$-1 = 1\cdot(-1) = 1\cdot e^{j\pi} = 1\cdot e^{j180^\circ}$$

Εξισώνοντας τα μέτρα και τις φάσεις έχουμε

$$|H(s)G(s)| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|} = 1 \qquad \boxed{-\infty<K<\infty}$$

(συνθήκη μέτρου)

Και

$$\measuredangle H(s)G(s) = \frac{\measuredangle\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\measuredangle\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\measuredangle(s+z_i)}{\sum_{j=1}^{n}\measuredangle(s+p_j)} =$$

$$= \begin{cases} \pm(2k+1)\pi & K>0 \text{ θετική ανάδραση} \\ \pm 2k\pi & K<0 \text{ αρνητική ανάδραση} \end{cases}$$

⑥ Τόπος ριζών

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που επαληθεύουν την χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος για αρνητική ανάδραση για $0<K<\infty$

Συμπληρωματικός τόπος ριζών

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που επαληθεύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος για θετική ανάδραση για $0<K<\infty$

(K κέρδος συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου)

Η ένωση των δύο παραπάνω τόπων ονομάζεται πλήρης τόπος ριζών

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ Η μορφή του γεωμετρικού τόπου ριζών εξαρτάται αποκλειστικά από τη συνθήκη της γωνίας.

Μετά τη σχεδίαση του τόπου, οι τιμές του K που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο προκύπτουν από τη συνθήκη του μέτρου

πχ στη θέση $s = s_1$ είναι

$$\left|\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = \frac{K}{|s_1||s_1+2|} = 1 \Rightarrow K_1 = |s_1||s_1+2|$$

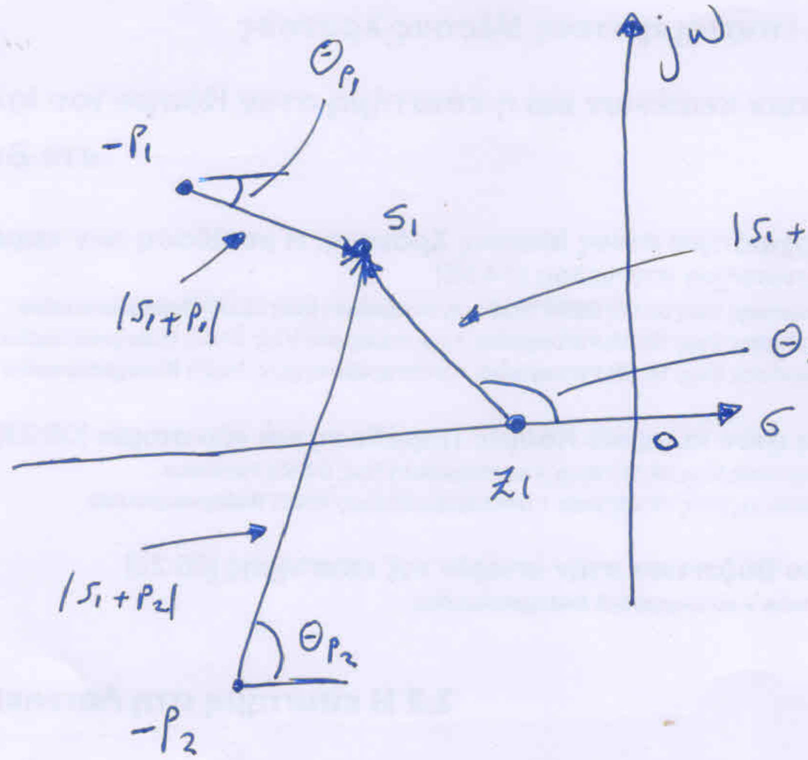
Για πολλαπλούς βρόχους χρησιμοποιούμε τη συνθήκη του Mason

$$\Delta(s) = 1+F(s) = 1 - \sum_{m=1}^{N} L_m + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k = 0$$

$\Rightarrow F(s) = -1$ και μετά συνεχίζουμε όπως πριν.

7. Εφαρμογή συνθηκών μέτρου και γωνίας.

Έστω συνάρτηση μεταφοράς με ένα μηδενικό τιμή Z_1 και δύο πόλους P_1 και P_2 που είναι όλοι μιγαδικοί αρνητικοί και βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.



Προκειμένου το σημείο s_1 να ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των ριζών θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη μέτρου

$$\frac{|s_1+z_1|}{|s_1+p_1||s_2+p_2|}=\frac{1}{K}$$

και τη συνθήκη φάσης

$$\measuredangle(s_1+z_1)-\left[\measuredangle(s_1+p_1)+\measuredangle(s_1+p_2)\right]=\begin{cases}\pm(2k+1)\pi & K>0\\ \pm 2k\pi & K<0\end{cases}$$

Πως κατασκευάζουμε τον γεωμετρικό τόπο ριζών?

Αρχικά ορίζουμε τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού.

8. Σημεία εκκίνησης $(K=0)$

Αποτελούν τους πόλους της συνάρτησης ανοικτού βρόχου αφού όπως αναγράφαμε για $K=0$ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου ταυτίζονται με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου

Σημεία τερματισμού $(K=\infty)$

Από τη συνθήκη μέτρου έχουμε για $K \to \infty$

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} |(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^{n} |(s+p_j)|} = \frac{1}{K} \longrightarrow 0$$

Επομένως τα σημεία τερματισμού των γεωμετρικών τόπων ριζών είναι τα μηδενικά σημεία της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου καθώς και τα γενικευμένα μηδενικά της $H(s)$ (δηλαδή το s του παρονομαστή που στο $s \to \infty$ είναι $H(s) \to 0$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω σύστημα με χαρακτηριστική εξίσωση

$$s(s+3)(s+5) + K(s+2)(s+4) = 0$$

Σημεία ~~τερματισμού~~ εκκίνησης: πόλοι συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου: $-p_1 = 0,\ -p_2 = -3,\ -p_3 = -8$

Σημεία τερματισμού: μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου: $-z_1 = -1,\ -z_2 = -4$ και γενικευμένο $-z_3$ αφού

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)(s+4)}{s(s+3)(s+8)} = 0 \to H(s)G(s) = \frac{K(s+1)(s+4)}{s(s+3)(s+8)}$$

9 Ιδιότητες

1) Κάθε κλάδος του γεωμετρικού τόπου εκφράζει και μια τροχιά που διαγράφει μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθώς το K μεταβάλλεται από 0 έως ∞.

2) Ο γεωμετρικός τόπος είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα αφού οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε οι ρίζες της θα είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί συζυγείς.

3) Εάν είναι $n \geq m$ οπότε υπάρχουν $n-m$ γενικευμένα μηδενικά τα οποία αποτελούν σημεία τερματισμού, ο γεωμετρικός τόπος προσεγγίζει το άπειρο $n-m$ φορές. Ειδικότερα, για μεγάλες τιμές του s, ο γεωμετρικός τόπος τείνει ασυμπτωτικά σε ευθείες γραμμές των οποίων οι γωνίες δίδονται από τις εκφράσεις

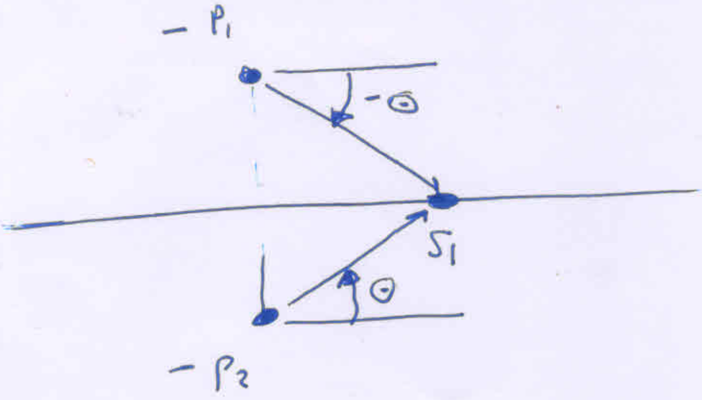
$$\theta_K = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} \qquad K = 0, 1, 2, \ldots, n-m-1$$

Οι παραπάνω ασύμπτωτες τέμνουν όλες τον πραγματικό άξονα στο ίδιο σημείο, η τετμημένη του οποίου δίνεται από τη σχέση

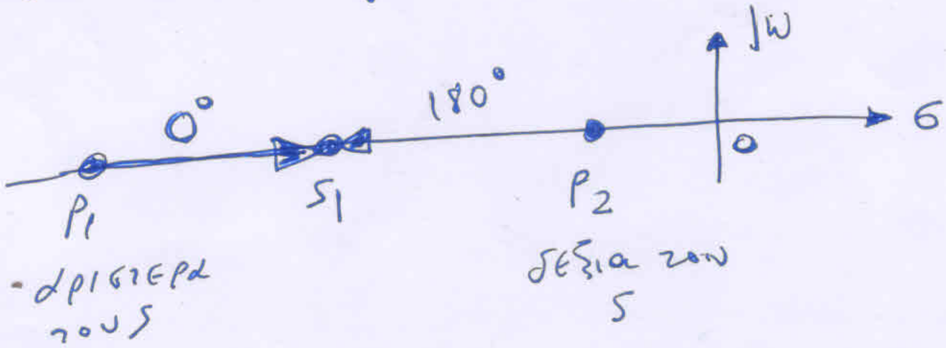
$$\sigma_\alpha = - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

4) Τα τμήματα του γεωμετρικού τόπου ριζών που κείνται στον πραγματικό άξονα υπολογίζονται από τη συνθήκη της γωνίας.

10. Η συνεισφορά των γωνιών πόλων και μηδενικών τιμών στη διατύπωση της συνθήκης της γωνίας για σημεία του πραγματικού άξονα είναι μηδενική, γιατί αυτά εξαφανίζονται με τους αντίστοιχους συζυγείς τους



Μηδενική επίσης είναι η συνεισφορά των πόλων και των μηδενικών τιμών του πραγματικού άξονα που βρίσκονται αριστερά των θεωρουμένων σημείων αφού αυτά αντιστοιχούν σε μηδενική τιμή γωνίας ενώ αντίθετα αυτά που βρίσκονται δεξιά των θεωρουμένων σημείων συνεισφέρουν στη συνθήκη γωνίας τιμή 180°.



Κριτήριο: Ένα τυχαίο σημείο του πραγματικού άξονα ανήκει στο γεωμετρικό τόπο εάν ο συνολικός αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών τιμών που βρίσκονται στα δεξιά των σημείων είναι περιττός.

8) Γωνίες αναχωρήσεως από πόλους και γωνίες άφιξης σε μηδενικές τιμές.

Προσδιορίζονται με βάση τη συνθήκη της γωνίας. Για μικρές αποστάσεις από τον πόλο ή το μηδενικό που εξετάζεται, η συνεισφορά των υπολοίπων πόλων/μηδενικών τιμών στη συνθήκη της γωνίας θεωρείται σταθερή.

Η ζητούμενη γωνία είναι ίση με την εφαπτομένη στο γεωμετρικό τόπο στο συγκεκριμένο σημείο.

Γωνία αναχωρήσεως από πόλο $-p_k$

$$\Theta_{-p_k} = -\pi + \sum_{i=1}^{m} \measuredangle(-p_k + z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \measuredangle(-p_k + p_j)$$

Γωνία άφιξης σε μηδενικό $-z_r$

$$\phi_{-z_r} = -\pi + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} (-z_r + z_i) + \sum_{j=1}^{n} \measuredangle(-z_r + p_j)$$

<u>Σημεία διακλαδώσεως από πόλους και σημεία διακλαδώσεως σε μηδενικά</u>

Αντιστοιχούν σε πολλαπλές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

② Προσδιορίζονται από τις συνθήκες

$$\frac{dK(s)}{ds} = 0 \quad \text{όπου} \quad K(s) = -\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+p_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)}$$

Αντίθετα, εάν για κάποιο σημείο είναι

$$\frac{dK(s)}{ds} \neq 0$$ από αυτό το σημείο διέρχεται ένας άλλος κλάδος.

Εάν τέλος είναι

$$\frac{d^i K(s)}{ds^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, y-1)$$

για κάποιο y, τότε από το σημείο διέρχονται y κλάδοι που σχηματίζουν γωνία

$$\Theta_y = \pm \frac{360^\circ}{y}$$

Σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα

Αρχικά βρίσκουμε την κρίσιμη συχνότητα ω_{cr} ως

$$\measuredangle G(j\omega_{cr}) H(j\omega_{cr}) = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$$

και στη συνέχεια το κρίσιμο κέρδος ως

$$K_{cr} = \sum_{i=1}^{m} (j\omega_{cr} + z_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega_{cr} + p_j|$$