Ευστάθεια συστημάτων

Κριτήριο Hurwitz:

Χρησιμοποιείται όταν δεν είναι εύκολη η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς και ο υπολογισμός των πόλων της.
(Κριτήριο ευστάθειας: αρνητικό πραγματικό μέρος)

Έστω το πολυώνυμο

$$p(s) = \alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Πίνακας Hurwitz διαστάσεων $N \times N$:

$$H(p) = \begin{pmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} & \alpha_N & \dots & 0 \\ \alpha_{N-5} & \alpha_{N-4} & \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \dots & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Υποπίνακες $H_k(p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ $(k = 1, 2, 3, \dots N)$
ορίζονται ξεκινώντας από το επάνω αριστερά στοιχείο

ορίζουσες Hurwitz

$$D_k = \det(H_k(p)) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$D_1 = \alpha_{N-1}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N & 0 \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} \\ \alpha_{N-5} & \alpha_{N-4} & \alpha_{N-3} \end{vmatrix}, \quad D_N = \alpha_N D_{N-1}$$

......

② Θεώρημα Hurwitz

Ένα πολυώνυμο $P(s)$ είναι πολυώνυμο Hurwitz αν και μόνο αν όλες οι ορίζουσες Hurwitz είναι θετικές.

Το σύστημα είναι ευσταθές εάν το πολυώνυμο του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς έχει θετικές ορίζουσες Hurwitz δηλαδή είναι πολυώνυμο Hurwitz.

Σε ένα πολυώνυμο Hurwitz όλες οι ρίζες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Παράδειγμα

$$P(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 12 \quad (N=5)$$

$$\alpha_5 = 1,\ \alpha_4 = 3,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = 7,\ \alpha_0 = 12$$

Άρα

$$H(P) = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Είναι:

$$D_1 = \alpha_4 = 3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

(3)

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -22 < 0$$

Είναι $D_3 < 0$ και επομένως το $p(s)$ δεν αποτελεί πολυώνυμο Hurwitz. Εάν λοιπόν αυτό το πολυώνυμο εμφανίζεται στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, τότε το σύστημα <u>ΔΕΝ</u> είναι ευσταθές

<u>Μέθοδος Routh</u>

Έστω δύο γραμμές από N αριθμούς η καθεμία της μορφής

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2N} \end{matrix}$$

Οι τιμές της 3ης γραμμής υπολογίζονται ως

$$\alpha_{3i} = -\frac{1}{\alpha_{21}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1,i+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2,i+1} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_{21} \cdot \alpha_{1,i+1} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{2,i+1}}{\alpha_2}$$

Στη συνέχεια από τα στοιχεία της γραμμής 2 και της γραμμής 3 κατασκευάζουμε τα στοιχεία της γραμμής 4, από τις γραμμές 3 και 4 κατασκευάζουμε τη γραμμή 5 κ.ο.κ.

Ο πίνακας που προκύπτει με τον τρόπο αυτό λέγεται πίνακας Routh (Routh table)

4) Εφαρμογή για την ευστάθεια πολυωνύμων

Θεώρημα

Έστω πολυώνυμο

$$P(s) = \alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Αυτή η εξίσωση ΔΕΝ διαθέτει ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη εάν

1) Όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι διάφοροι του 0
2) Όλοι οι συντελεστές της $P(s)=0$ έχουν το ίδιο πρόσημο

Ομαδοποιούμε τους συντελεστές του πολυωνύμου σε αυτούς με άρτιο δείκτη $(\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \dots)$ και σε αυτούς με περιττό δείκτη $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \dots)$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα Ρουθ θεωρώντας αντίστοιχα τις δύο ομάδες συντελεστών ως τις δύο πρώτες γραμμές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$P(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Είναι $\alpha_6 = 1$, $\alpha_5 = 4$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_0 = 4$

Πίνακας Ρουθ

s^6	1	3	1	4
s^5	4	2	4	0
s^4	5/2	0	4	0
s^3	2	-12/5	0	0
s^2	3	4	0	0
s^1	-76/15	0	0	0
s^0	4	0	0	0

(5) Αριστερά από τον πίνακα προσθέτουμε μια στήλη με φθίνουσες δυνάμεις του s που είναι χρήσιμη επειδή και πληροφορεί σχετικά με το πόσες γραμμές απομένουν να υπολογίσουν ενώ ορίζουν τις συσχετίσεις των συντελεστών με τις δυνάμεις του s.

Ο πίνακας Routh είναι στην πραγματικότητα η 1η στήλη που περιέχει το πολύ $N+1$ στοιχεία για ένα πολυώνυμο βαθμού N.

Θεώρημα Ένα πολυώνυμο της μορφής

$$p(s) = a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

είναι τύπου Hurwitz αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του πίνακα Routh είναι θετικά.

Επιπλέον εάν στον πίνακα Routh υπάρχουν εναλλαγές αντίστοιχων προσήμων. Το πλήθος αυτών των εναλλαγών αντιστοιχεί στο πλήθος των ριζών του πολυωνύμου που διαθέτουν θετικό πραγματικό μέρος.

Στο παράδειγμα παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 εναλλαγές προσήμου $3 \rightarrow -\frac{76}{15}$ και $-\frac{76}{15} \rightarrow 4$ και επομένως το πολυώνυμο διαθέτει δύο ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$

$N = 3$, $a_2 = 3$
$a_0 = 2$, $a_3 = 1$
$a_1 = 4$

s^3	1	4
s^2	3	2
s^1	10/3	0
s^0	2	0

$\Rightarrow$ stable

$p_1 = -1$

$p_{2,3} = -1 \pm i$