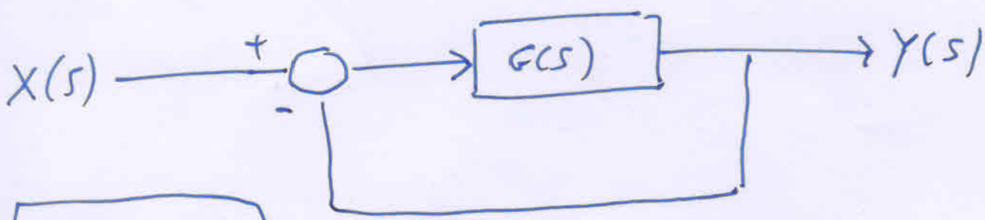
(1) Δείκτες απόδοσης

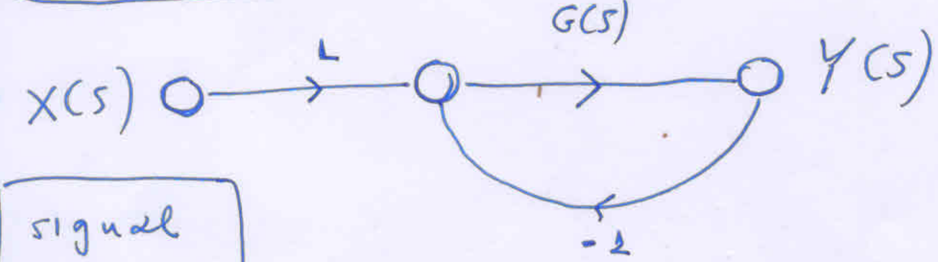
Υπολογίζονται κατασκευάζοντας την απόκριση του συστήματος σε γνωστά σήματα εισόδου όπως είναι τα $u(t)$, $x(t)=r(t)$, t^n, $\delta(t)$ κλπ.

Απόκριση συστημάτων 2ας τάξεως.

Έστω το στοιχειώδες σύστημα



BLOCK DIAGRAM



signal flow graph

όπου

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

Από το σχήμα έχουμε

$$\left(X(s)-Y(s)\right)G(s) = Y(s) \Rightarrow$$

$$X(s)\cdot G(s) = Y(s)\left(1+G(s)\right) \Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}X(s)$$

και για την παραπάνω συνάρτηση $G(s)$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

(2) Βηματική απόκριση για $X(s) = \frac{1}{s}$ $(u(t))$

Είναι

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta s \omega_n + \omega_n^2)}$$

λαμβάνοντας τον αντίστροφο Laplace έχουμε

$$y(t) = 1 - \frac{1}{B} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n B t + \Theta)$$

όπου $B = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\Theta = \cos^{-1}\zeta$ για $\boxed{0 < \zeta < 1}$

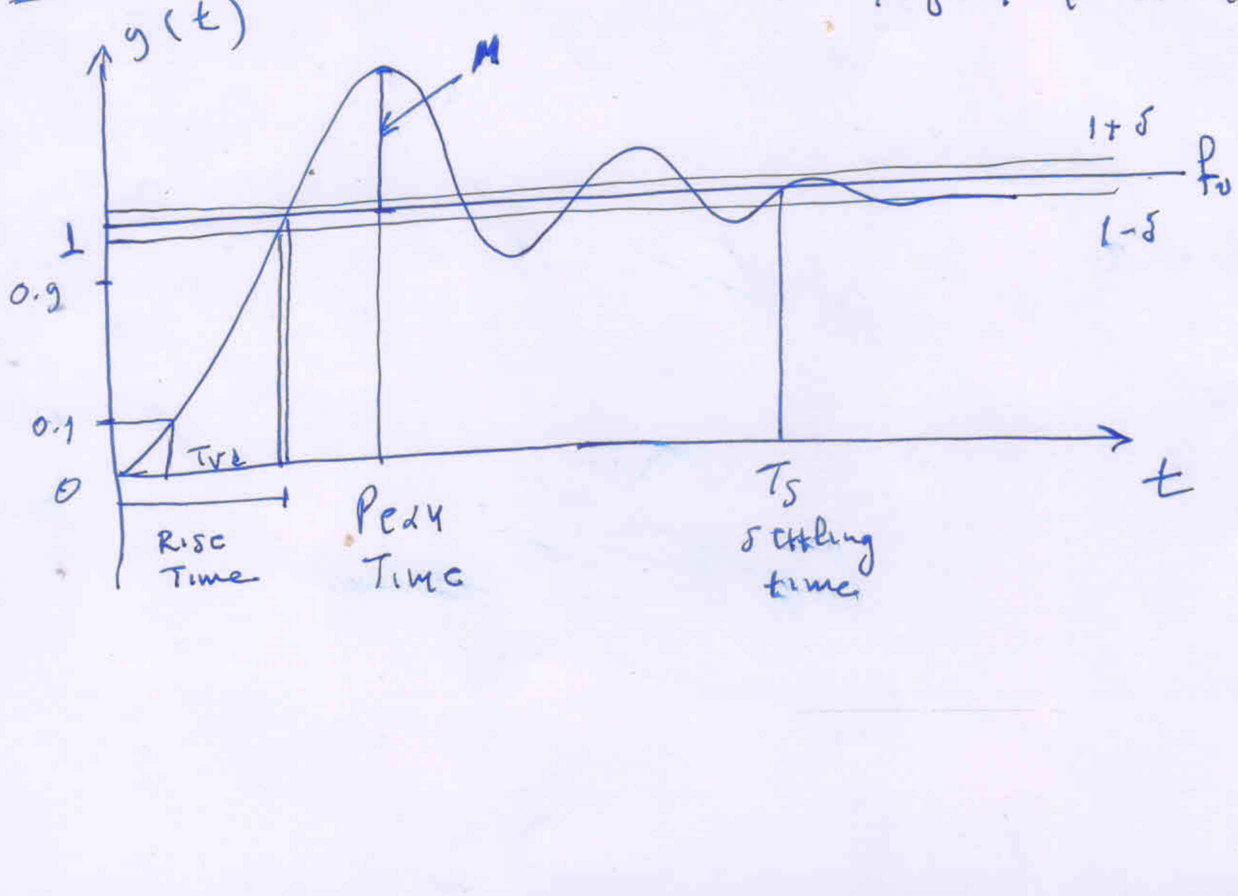
Κρουστική απόκριση για $X(s) = 1$ $(\delta(t))$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s \omega_n + \omega_n^2} \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_n}{B} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n B t)$$

Δείκτες απόδοσης

f_v: μέτρο εισόδου

M: μέγιστη τιμή απόκρισης



③ Percent overshoot

$$P.O = \frac{M_p - f_v}{f_v} \times 100\ \%$$

T_s: settling time: ο χρόνος που απαιτείται ώστε η έξοδος του συστήματος να περιορίζεται ως προς τις διακυμάνσεις σε μια ζώνη πλάτους 2δ γύρω από την έξοδο.

Χρησιμοποιείται συνήθως η ζώνη του 2% οπότε

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0.02 \Rightarrow \zeta\omega_n T_s \cong 4$$

και επομένως $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4\tau$ όπου $\tau = \zeta\omega_n$ η σταθερά χρόνου.

Η μεταβατική απόκριση περιγράφεται από δύο παράγοντες που οδηγούν σε αντιφατικές απαιτήσεις (οπότε απαιτείται συμβιβασμός)·

- την ταχύτητα ανόδου που σχετίζεται με το peak time και το rise time
- Το βαθμό προσέγγισης της επιθυμητής από την πραγματική απόκριση που προσδιορίζεται από το overshoot και το settling time

Ισχύει ότι $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ (peak time)

Overshoot $M_p = 1 + \exp\left(-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)$ Άρα

$$P.O = 100 \exp\left(-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

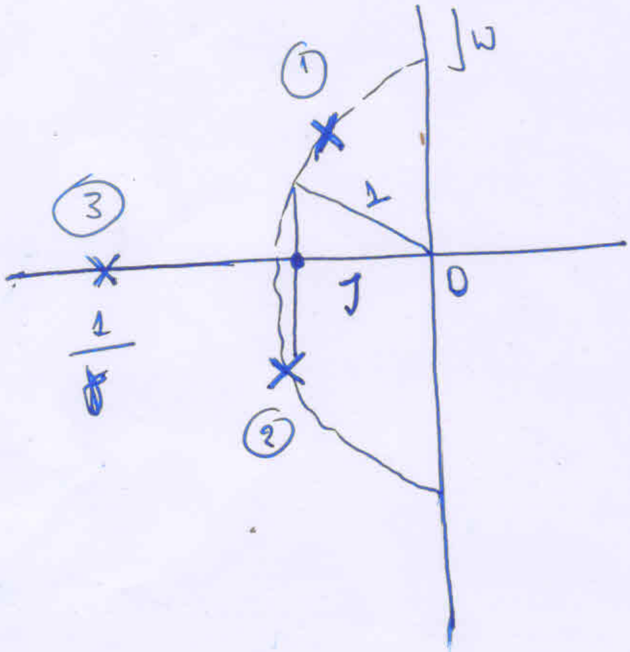
Ακόμη $T_{r1} \cong \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$ $(0.3 \leq \zeta \leq 0.8)$

Αν και τα παραπάνω ισχύουν επακριβώς μόνο για συστήματα 2ας τάξεως, ωστόσο μπορούν να περιγράψουν κατά προσέγγιση και συστήματα 3ης τάξεως εφόσον πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Θεωρώντας π.χ. το σύστημα

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+2\zeta s+1)(\gamma s+1)} \quad (\omega_n = 1).$$

η απόκριση περιγράφεται ικανοποιητικά από την απόκριση του συστήματος 2ας τάξεως εφόσον είναι

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right| \geq 10\,|j\omega_n|$$

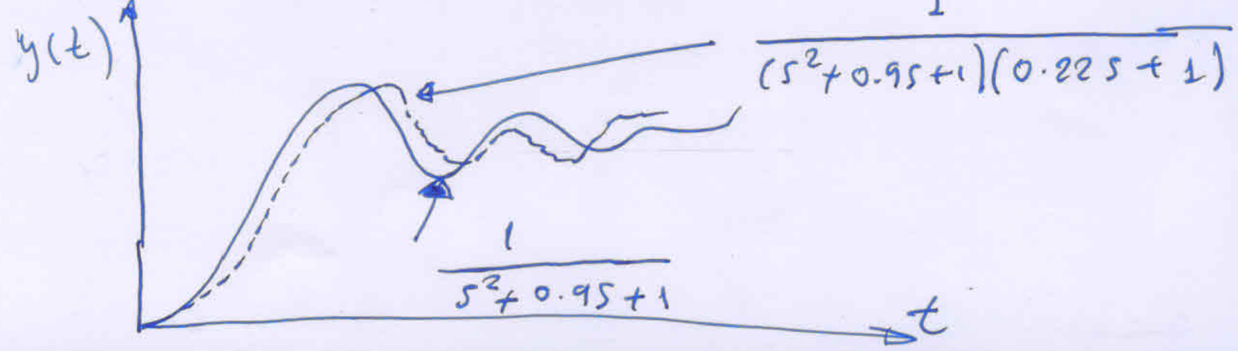


pole-zero plot

Συνθήκη

Το πραγματικό μέρος των (1) και (2) είναι μικρότερο από το 1/10 του πραγματικού μέρους του (3)

Με τον παραπάνω τρόπο αποφεύγουμε τη χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace για τον υπολογισμό του overshoot και των άλλων δεικτών απόκρισης



(5) Ωστόσο, εάν η συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει εκτός από τους δύο πόλους και μηδενικές τιμές με πεπερασμένο μέτρο τα παραπάνω <u>δεν ισχύουν</u> ειδικά εάν οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις.

<u>Μεταβατική απόκριση συστημάτων κλειστού βρόχου με αναδραση</u>

εξαρτάται από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Στη γενική περίπτωση είναι (κανόνας του Mason)

$$T(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{\Delta(s)}\sum P_i(s)\Delta_i(s)$$

όπου $\Delta(s)=0$ η χαρακτηριστική εξίσωση.

Θυμηθείτε πως οι πόλοι της $T(s)$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Η συνάρτηση $Y(s)$ για βηματική είσοδο $(x(t)=u(t))$ για την οποία $X(s)=1/s$ ως άθροισμα μερικών κλασμάτων γράφεται

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_k s+C_k}{s^2+2\alpha_k s+(\alpha_k^2+\omega_k^2)}$$

με τις ρίζες να είναι είτε πραγματικές $(i=1,2,..,M)$ είτε συζυγείς μιγαδικές της μορφής $s=\alpha_k\pm j\omega_k$ $(k=1,2,..,N)$.

(6) Λαμβάνοντας τον αντίστροφο Laplace παίρνουμε

$$g(t) = \underbrace{1}_{\text{steady state output}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t}}_{\text{exponential terms}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{M} D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \theta_k)}_{\text{dumped sinusoidal terms}}$$

Για να είναι η έξοδος ευσταθής θα πρέπει οι πόλοι να χαρακτηρίζονται από αρνητικά πραγματικά μέρη

$\boxed{\text{steady state error}}$ e_{ss}

Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για ένα σύστημα κλειστού βρόχου είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα για τα συστήματα ανοικτού βρόχου

Από τη γενική σχέση του $E(s)$ για $T_d(s) = N(s) = 0$ έχουμε

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

Από το Θεώρημα τελικής τιμής έχουμε

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} [s E(s)] =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s).$$

(7) Σφάλμα e_{ss} για τα στοιχειώδη σήματα

1) Βηματική συνάρτηση $x(t) = Au(t)$ με $X(s) = \frac{A}{s}$

Είναι

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(A/s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{A}{1+\lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)}$$

Είναι όμως (loop transfer fuction)

$$G_c(s)G(s) = \frac{K}{s^N} \frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

Εάν είναι $N>0$ τότε $\lim_{s\to 0} G_c(s)G(s) = \infty \Rightarrow e_{ss} \to 0$

Εάν είναι $N=0 \Rightarrow$

$$e_{ss} = \frac{A}{1+G_c(0)G(0)} = \frac{A}{1+K\prod_{i=1}^{M} z_i / \prod_{k=1}^{Q} p_k}$$

ορίζοντας $K_p = \lim_{s\to 0} G_c(s)G(s)$ (position constant)

Θα είναι

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$$

Γενικά για $N \geq 1$ είναι $e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{As^N}{s^N + K\prod z_i / \prod p_k}$

2) Συνάρτηση ράμπας $r(t) = At$ με $X(s) = A/s^2$

Είναι τώρα $e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(A/s^2)}{1+G_c(s)G(s)} =$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A}{s+sG_c(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{sG_c(s)G(s)}$$

8

Για $N = 0$ είναι $e_{ss} = \infty$

Για $N = 1$ είναι

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{sK\prod(s+z_i)/\prod(s+p_k)} =$$

$$= \frac{A}{K\prod z_i/\prod p_k} = \frac{A}{K_v} \text{ όπου}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G_c(s)\,G(s) \text{ (velocity error constant)}$$

Για $N \geq 2$ $e_{ss} = 0$

3) Συνάρτηση $r(t) = \frac{At^2}{2}$

Τώρα είναι

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{(A/s^3)\,s}{1 + G_c(s)\,G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{s^2 G_c(s)\,G(s)}$$

Για $N = 1 \Rightarrow e_{ss} = \infty$

Για $N = 2$ $e_{ss} = \frac{A}{K\prod z_i/\prod p_k} = \frac{A}{K_a}$ όπου

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G_c(s)\,G(s) \text{ acceleration error constant}$$

Για $N \geq 3 \Rightarrow e_{ss} = 0$.

(Το N εμφανίζεται λαυτού στην έκφραση για το $G_c(s)\,G(s)$).

9 Δείκτες απόδοσης

Ένας δείκτης απόδοσης αποτελεί ένα ποσοτικό μέτρο της απόδοσης ενός συστήματος και επιλέγεται έτσι ώστε η έμφαση να δίνεται στις σημαντικές προδιαγραφές.

$$ISE \text{ (Integral of square error)} = \int_0^T e^2(t)\,dt$$

Ως όριο T επιλέγεται συνήθως ο χρόνος T_s (settling time).

$$IAE \text{ (Integral of absolute error)} = \int_0^T |e(t)|\,dt$$

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|\,dt, \quad ITSE = \int_0^T t\,e^2(t)\,dt$$

$ITAE \rightarrow$ επιτρέπει τη μείωση των μεγάλων αρχικών σφαλμάτων.

Γενικά, αυτοί οι δείκτες έχουν τη μορφή

$$I = \int_0^T f\big(e(t), y(t), x(t)\big)\,dt$$

Σχόλια περί απλοποίησης γραμμικών συστημάτων (Dorf, section 5-8, p. 321)