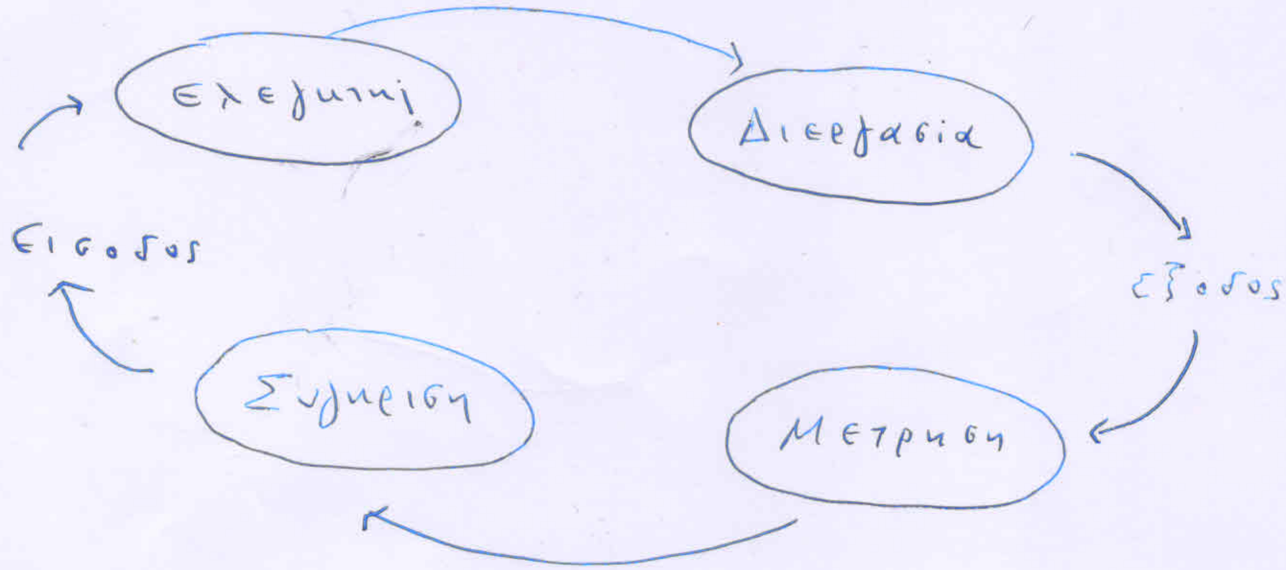
Χαρακτηριστικά συστημάτων ελέγχου με ανάδραση

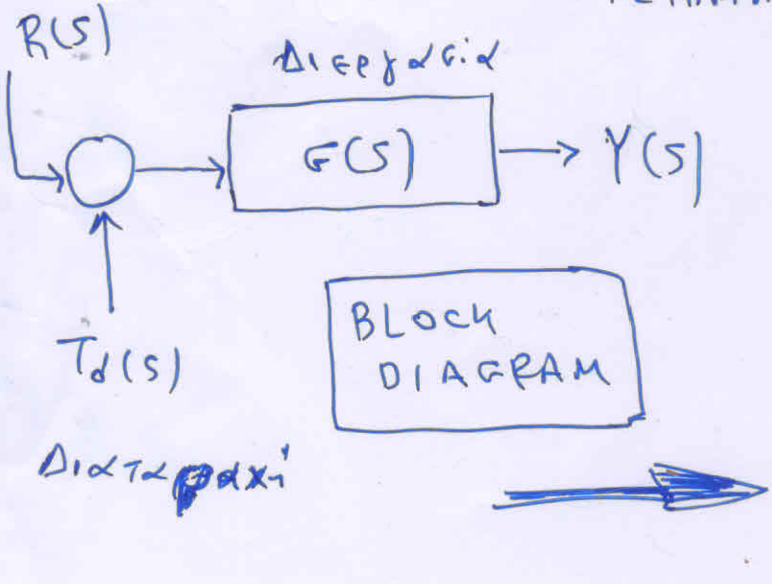
Σύστημα κλειστού βρόχου

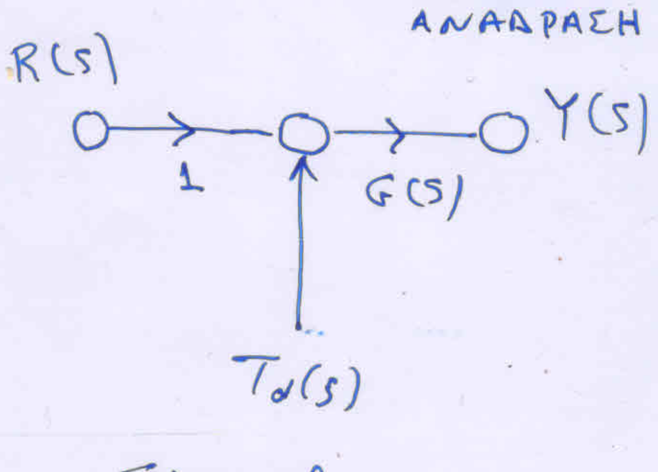


Επειδή γνωρίζουμε την επιθυμητή απόκριση, είναι δυνατή η δημιουργία ενός σήματος που να είναι ανάλογο του σφάλματος ανάμεσα στην πραγματική και στην επιθυμητή απόκριση.

Ο έλεγχος της διεργασίας με τη βοήθεια αυτού του σήματος, οδηγεί στη δημιουργία συστημάτων ελέγχου με ανάδραση (feedback control systems)

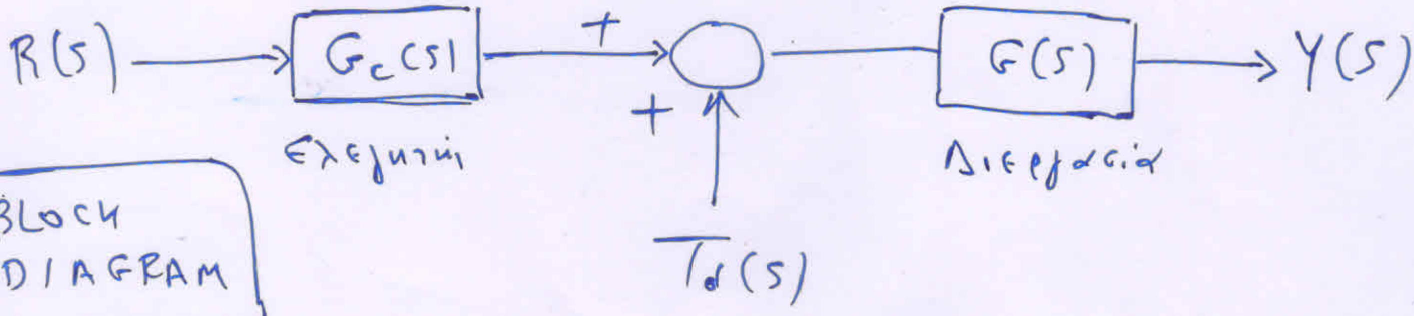
ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΔΡΑΣΗ



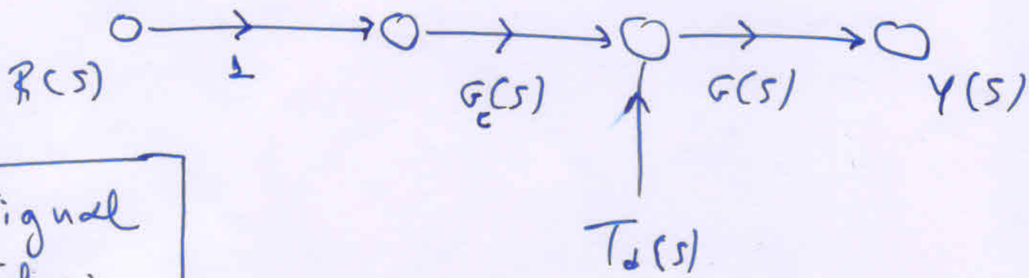


Signal Flow Graph

Εάν το σύστημα δεν δίνει καλή απόκριση, προστίθεται πριν τη διεργασία $G(s)$ ένας ελεγκτής με συνάρτηση μεταφοράς $G_c(s)$



BLOCK DIAGRAM



Signal Flow Graph

Επομένως

- Ένα σύστημα ανοιχτού βρόχου λειτουργεί χωρίς ανάδραση και δημιουργεί απευθείας την έξοδο ως απόκριση στο σήμα εισόδου
- Ένα σύστημα κλειστού βρόχου χρησιμοποιεί μία μέτρηση του σήματος εξόδου το οποίο συγκρίνει με την επιθυμητή έξοδο για τη δημιουργία ενός σήματος σφάλματος που χρησιμοποιείται από τον ελεγκτή για την προσαρμογή του ενεργοποιητή.

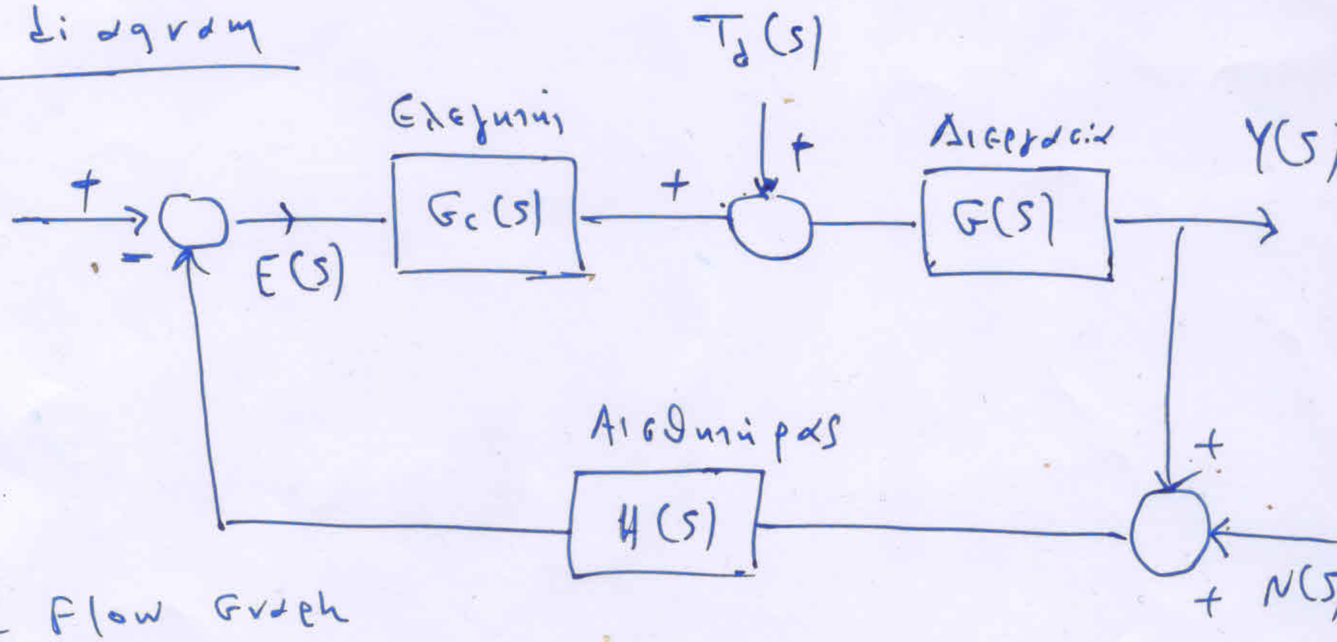
Τα closed loop systems είναι πιο ακριβά και πολύπλοκα από τα open loop systems αλλά χαρακτηρίζονται από τα επόμενα πλεονεκτήματα:

1. Μικρότερη ευαισθησία σε μεταβολές των παραμέτρων της διεργασίας
2. Μεγαλύτερη εξασθένηση του θορύβου της μέτρησης
3. Μεγαλύτερος βαθμός απόρριψης διαταραχών
4. Μεγαλύτερη εξασθένηση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης
5. Ευκολότερος έλεγχος και προσαρμογή της μεταβατικής απόκρισης.

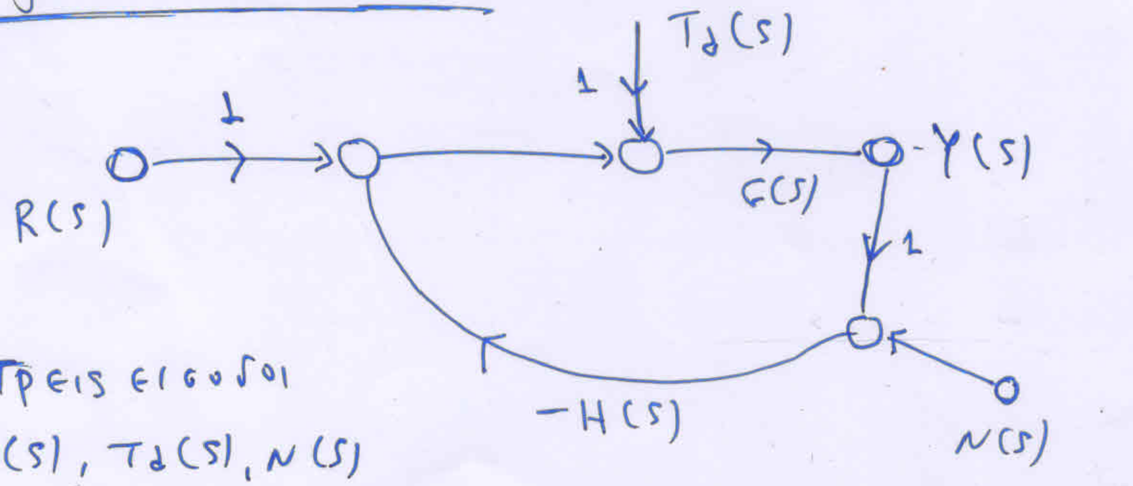
Ανάλυση συστήματος feedback control system

Ανάλυση σήματος σφάλματος.

Block diagram



Signal Flow Graph



Μια έξοδος $Y(s)$

$\boxed{H(s)=1}$

Τρεις είσοδοι $R(s)$, $T_d(s)$, $N(s)$

Ορίζουμε το σφάλμα σχεδίασης ως

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Από το σχήμα προκύπτει

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s)$$

$$- \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $E(s) = R(s) - Y(s)$ έχουμε

$$E(s) = \frac{1}{1+G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)}T_d(s)$$

$$+ \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}N(s)$$

Ορίζουμε το <u>κέρδος του βρόχου</u> (loop gain) ως

$$L(s) = G_c(s)G(s) \quad \text{οπότε}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s) +$$

$$+ \frac{L(s)}{1+L(s)}N(s)$$

Θέτουμε $F(s) = \boxed{1+L(s)}$ και ορίζουμε τη <u>συνάρτηση ευαισθησίας</u>

ως $S(s) = \dfrac{1}{F(s)} = \dfrac{1}{1+L(s)}$

καθώς και τη συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας ως

$$C(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Παρατηρούμε ότι $C(s) + S(s) = 1$

Θα είναι τότε

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + C(s)N(s)$$

Επειδή είναι $\boxed{C(s) + S(s) = 1}$ αυτές οι δύο συναρτήσεις δεν μπορούν να ελαττωθούν ταυτόχρονα και θα πρέπει να καταλήξουμε σε συμβιβασμούς.

<u>Επομένως</u>

1) Για να ελαττώσουμε την επίδραση της $T_d(s)$ στο σφάλμα $E(s)$, το $L(s)$ πρέπει να είναι <u>μεγάλο</u> έτσι ώστε η $G(s) \cdot S(s)$ να είναι μικρή

2) Για να ελαττώσουμε την επίδραση του $N(s)$ πρέπει το $L(s)$ να είναι μικρό έτσι ώστε η συνάρτηση $C(s)$ να έχει μικρή τιμή.

Επειδή $L(s) = G_c(s)G(s)$ η σχεδίαση του $L(s)$ ανάγεται στη σχεδίαση του ελεγκτή $G_c(s)$.

<u>Επομένως</u>

Μεγάλο $G_c(s)$ οδηγεί σε μείωση διαταραχών

Μικρό $G_c(s)$ οδηγεί σε μείωση θορύβου

Επειδή ο θόρυβος χαρακτηρίζεται από μεγάλες συχνότητες και οι διαταραχές από μικρές συχνότητες σχεδιάζουμε το $L(s)$ έτσι ώστε να έχει μικρή τιμή στις μεγάλες συχνότητες και μεγάλη τιμή στις μικρές συχνότητες. 6

Το $G(s)$ αφορά το process και <u>δεν επηρεάζεται</u> εδώ

1) Ευαισθησία συστήματος ελέγχου σε μεταβολές παραμέτρων εισόδου

Λόγω αρχής επαλληλίας θέτουμε $T_d(s) = N(s) = 0$ οπότε είναι

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Εάν είναι $L(s) \gg 1$ τότε $1+L(s) \approx L(s)$ και

$$\boxed{Y(s) \approx R(s)}$$

οριακή προσέγγιση που οδηγεί σε εμφάνιση ταλαντώσεων και αστάθεια

Πάντως η αύξηση της $L(s)$ γενικά οδηγεί στη <u>μείωση</u> των επιδράσεων της $G(s)$ στην έξοδο.

Εάν η $G(s)$ γίνει $G(s) + \Delta G(s)$ το σφάλμα αντίστοιχα γίνεται $E(s) + \Delta E(s)$ και για

$T_d(s) = N(s) = 0$ έχουμε

$$E(s) + \Delta E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)\left[G(s) + \Delta G(s)\right]} R(s)$$

Αντικαθιστώντας το $E(s)$ και κάνοντας τις πράξεις,

$$\Delta E(s) = \frac{-G_c(s)\,\Delta G(s)}{\left[1+G_c(s)G(s)+G_c(s)\Delta G(s)\right]\left[1+G_c(s)G(s)\right]}\,R(s)$$

Συνήθως είναι $G_c(s)G(s) \gg G_c(s)\Delta G(s) \Rightarrow$

$$\Delta E(s) \approx \frac{-G_c(s)\,\Delta G(s)}{\left(1+L(s)\right)^2}$$

Για μεγάλες τιμές του $L(s)$ είναι $1+L(s) \approx L(s)$ κ

$$\Delta E(s) \approx \frac{1}{L(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}\,R(s).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\text{Μεγάλο } L(s) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Μικρό } \Delta E(s) \\ \text{Μικρό } S(s) \end{cases}$$

Ορισμός ευαισθησίας συστήματος

Η ευαισθησία ορίζεται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

προς την ποσοστιαία μεταβολή της συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας $G(s)$. Άρα

$$S = \frac{\Delta T(s)\,/\,T(s)}{\Delta G(s)\,/\,G(s)}$$

Στο όριο των μικρών μεταβολών είναι

$$S = \frac{\partial T / T}{\partial G / G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}$$

Η ευαισθησία των open loop systems σε μεταβολές της $G(s)$ ορίζεται ίση με 1

Για τα closed loop systems είναι

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}$$ και επομένως

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T} = \frac{G_c(s)}{(1+G_c(s)G(s))^2} \cdot \frac{G(s)}{\frac{G(s)G_c(s)}{1+G_c(s)G(s)}} =$$

$$= \frac{1}{1+G_c(s)G(s)}$$

Επομένως η αύξηση του $L(s) = G_c(s)G(s)$ οδηγεί σε <u>μείωση</u> της ευαισθησίας.

---

2) Απόρριψη διαταραχών

Θέτοντας $R(s) = N(s) = 0$ έχουμε

$$E(s) = -S(s)G(s)T_d(s) = -\frac{G(s)}{1+L(s)}T_d(s)$$

Επομένως για σταθερό $G(s)$ και δοθέν $T_d(s)$, η αύξηση του $L(s)$ προκαλεί μείωση της επίδρασης του $T_d(s)$ στο σφάλμα.

Τα σήματα των διαταραχών είναι σήματα χαμηλής συχνότητας.

3) Εξασθένηση θορύβου μέτρησης

Εδώ θέτουμε $R(s) = T_d(s) = 0$ οπότε έχουμε

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} N(s) = C(s)N(s)$$

Επομένως η ~~αύξηση~~ μείωση της $L(s)$ οδηγεί σε μείωση της επίδρασης του $N(s)$ λόγου μειώνεται η $C(s)$.

Εάν σχεδιαστεί η $G_c(s)$ έτσι ώστε $L(s) \ll 1$ τότε

$$C(s) \simeq L(s)$$

Άρα μικρή τιμή του $L(s)$ επιτρέπει μείωση της επίδρασης της $N(s)$

Κατά ευτυχή σύμπτωση ο διαχωρισμός των διαταραχών (μικρές συχνότητες) από το θόρυβο μέτρησης (μεγάλες συχνότητες) επιτρέπει την κατάλληλη σχεδίαση της $L(s)$ όπως σχολιάσαμε πιο πριν.

Εάν <u>ΔΕΝ</u> ισχύει ο διαχωρισμός η σχεδίαση περιπλέκεται και περιλαμβάνει τη χρήση <u>φίλτρων</u>.

Η επίδραση του θορύβου στην έξοδο έχει τη μορφή

$$Y(s) = \frac{-G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} N(s) \cong -N(s)$$

εάν $L(s) \gg 1$.

4) Ανάλυση μεταβατικής απόκρισης

Η <u>μεταβατική απόκριση</u> ορίζεται η έξοδος του συστήματος πριν αυτό προσεγγίσει τη σταθερή ή μόνιμη κατάσταση.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Η Διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\alpha_N y^{(N)}(t) + \alpha_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \dots + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) =$$

$$= B_M X^{(M)}(t) + B_{M-1} X^{(M-1)}(t) + \dots + B_1 X'(t) + B_0 X(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών και χρησιμοποιώντας των ιδιοτήτων της παραγώγισης (δείτε τις χειρόγραφες σελίδες 3 και 4 στο PDF του μετασχηματισμού Laplace) προκύπτει

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s^i\right) Y(s) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} \frac{d^{(i-j)} y(0)}{dt^{i-j}}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{M} B_i s^i\right) \text{ και τελικά}$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=1}^{M} B_i s^i}{\sum \alpha_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} s^{i-j} y^{(i-j)}(0)\right)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s^i}$$

$$\boxed{H(s)X(s)} + \boxed{\frac{C(s)}{D(s)}}$$

Στα LTI συστήματα με πόλους συνάρτησης μεταφοράς με αρνητικό πραγματικό μέρος, η απόκριση εξόδου αποτελείται από το άθροισμα της μεταβατικής απόκρισης και της μόνιμης απόκρισης δηλαδή

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

όπου $\lim_{t \to \infty} y_{tr}(t) = 0$ πχ

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}}_{y_{tr}(t)} + \underbrace{c_3 u(t)}_{y_{ss}(t)}$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις έχω ταλαντωτική συμπεριφορά της μεταβατικής απόκρισης.

5) Σφάλμα σταθερής κατάστασης

Ανάλυση μετά την εξάλειψη της μεταβατικής απόκρισης και σχετίζεται με την απόκριση σταθερής ή μόνιμης κατάστασης.