Άσκηση 0.1 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος* $x[n] = \{\mathbf{2}, 1, -1, -2, -1, 1\}$ *με περίοδο* $N = 6$.

Λύση: Επομένως από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{6}kn\right) = \frac{1}{6}\Big\{x[0] + x[1]\exp\left(-i\frac{2\pi}{6}k\right) + \\ &+ x[2]\exp\left(-i\frac{4\pi}{6}k\right) + x[3]\exp\left(-i\frac{6\pi}{6}k\right) + x[4]\exp\left(-i\frac{8\pi}{6}k\right) + \\ &+ x[5]\exp\left(-i\frac{10\pi}{6}k\right)\Big\} = \frac{1}{6}\Big\{2 + \exp\left(-i\frac{\pi}{3}k\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}k\right) - \\ &- \exp(-i\pi k) - \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}k\right) + \exp\left(-i\frac{5\pi}{3}k\right)\Big\}\end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως οι εκθετικές παραστάσεις της παραπάνω σχέσης γράφονται ως $\exp(-i\pi k) = (-1)^k$, $\exp(-i4\pi k/3) = (-1)^k\exp(-i\pi k/3)$ και $\exp(-i5\pi k/3) = (-1)^k\exp(-i2\pi k/3)$ και επομένως η τελευταία έκφραση μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί στη μορφή

$$\alpha_k = \frac{1-(-1)^k}{6}\left[2 + \exp\left(-i\frac{\pi k}{3}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi k}{3}\right)\right]$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις τιμές $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ και $\alpha_1 = \alpha_5 = 1$· επομένως, το διακριτό περιοδικό σήμα $x[n]$ θα λάβει τη μορφή

$$x[n] = \sum_{k=0}^{5}\alpha_k\exp\left(i\frac{2\pi}{6}kn\right) = \exp\left(i\frac{\pi n}{3}\right) + \exp\left(i\frac{5\pi n}{3}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.2 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος*

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN] = \begin{cases} 1 & n = mN, \quad (m \in N) \\ 0 & \textit{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

με περίοδο N*, όπου* $\delta[n]$ *είναι η διακριτή κρουστική συνάρτηση.*

Λύση: Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως για την περιοχή τιμών $0 \le n \le N-1$ είναι $x[n] = \delta[n]$, η εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού των συντελεστών Fourier θα μας οδηγήσει σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = 1$$

αφού η κρουστική συνάρτηση $\delta[n]$ έχει *μη μηδενική τιμή* και ίση με τη μονάδα *μόνο* για την παράμετρο $k = 0$. Επομένως το σήμα $x[n]$ διατυπώνεται ως

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.3 *Να βρεθούν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διακριτού περιοδικού ορθογώνιου σήματος*

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$$

με το διακριτό σήμα $x[n]$ *να ορίζεται ως*

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & L < n \le N \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για $k = 0$ θα είναι

$$\alpha_0 = \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{L-1} 1 = \frac{AL}{N}$$

ενώ για την περιοχή τιμών $0 < k \leq L-1$ και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο (δείτε τον Πίνακα 6.2) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left\{\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)\right\}^n = \frac{A}{N}\left\{\frac{1-\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kL\right)}{1-\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)}\right\} = \\
&= \frac{A}{N}\frac{\exp\left(-i\frac{\pi kL}{N}\right)}{\exp\left(-i\frac{\pi k}{N}\right)}\left\{\frac{\exp\left(i\frac{\pi kL}{N}\right)-\exp\left(-i\frac{\pi kL}{N}\right)}{\exp\left(i\frac{\pi k}{N}\right)-\exp\left(-i\frac{\pi k}{N}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\alpha_k = \frac{A}{N}\exp\left[-i\frac{\pi k(L-1)}{N}\right]\frac{\sin\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.4 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας* $x[n] = \alpha^n u[n]$ *με τιμή παραμέτρου* $|\alpha| < 1$.

Λύση: Κατ' αρχήν παρατηρούμε πως η παραπάνω ακολουθία είναι *απολύτως αθροίσιμη* για την παραπάνω περιοχή τιμών της παραμέτρου α και επομένως υφίσταται ο μετασχηματισμός της κατά Fourier. Από την εξίσωση ορισμού του εν λόγω μετασχηματισμού θα έχουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο) που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Διατυπώνοντας την παραπάνω μιγαδική συνάρτηση στην καρτεσιανή της μορφή προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{(1-\alpha\cos\omega)+i\alpha\sin\omega} = \frac{1-\alpha\cos\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} - i\frac{\alpha\sin\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Επομένως το *μέτρο* και η *φάση* του μετασχηματισμού ω θα δίδονται από τις σχέσεις

$$|\mathcal{X}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}} \quad \text{και} \quad \measuredangle\mathcal{X}(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right)$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας θα έχει τη μορφή

$$S_{xx}(\omega) = |\mathcal{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Άσκηση 0.5 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτής ακολουθίας* $x[n]$ *η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \textit{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Λύση: Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως το διακριτό σήμα $x[n]$ είναι μία *ακολουθία πεπερασμένου μήκους*, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier υφίσταται και υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-i\omega n} = A\sum_{n=0}^{L-1}(e^{-i\omega})^n = \frac{A(1-e^{-i\omega L})}{1-e^{-i\omega}}$$

Εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση 9.2.6 η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{X}(\omega) = A\left\{\frac{e^{-i\omega L/2}}{e^{-i\omega/2}}\right\}\left\{\frac{e^{i\omega L/2}-e^{-i\omega L/2}}{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}\right\} = A\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\exp\left[-i\frac{\omega(L-1)}{2}\right]$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει εύκολα το συμπέρασμα πως το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $\mathcal{X}(\omega)$ υπολογίζονται ως

$$|\,\mathcal{X}(\omega)\,| = A\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \quad \text{και} \quad \measuredangle\mathcal{X}(\omega) = -\frac{\omega(L-1)}{2}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για την τιμή $\omega = 0$ είναι $|\,\mathcal{X}(\omega)\,| = AL$ και $\measuredangle\mathcal{X}(\omega) = 0$.

Άσκηση 0.6 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = \alpha^{|n|}, \quad |\,\alpha\,| < 1$$

Λύση: Ο μετασχηματισμός Fourier του παραπάνω διακριτού σήματος υφίσταται λόγω της συνθήκης $|\,\alpha\,| < 1$ και δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|}e^{-i\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-i\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(\alpha e^{i\omega})^{-n}\end{aligned}$$

όπου για την κατασκευή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της συνάρτησης της *απόλυτης τιμής*. Ανατρέχοντας στο μαθηματικό τυπολόγιο, το πρώτο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}$$

Από την άλλη πλευρά, για τον υπολογισμό του δεύτερου αθροίσματος προχωρούμε στην αλλαγή του βωβού δείκτη από n σε $m = -n$. Για $n = -\infty$ είναι $m = \infty$ ενώ για $n = -1$ είναι $m = 1$ και το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}(\alpha e^{i\omega})^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha e^{i\omega})^m = \sum_{m=0}^{\infty}(\alpha e^{i\omega})^m - (\alpha e^{i\omega})^m\Big|_{m=0} = \frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}} - 1 = \frac{\alpha e^{i\omega}}{1-\alpha e^{i\omega}}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}} + \frac{\alpha e^{i\omega}}{1-\alpha e^{i\omega}} = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

όπως προκύπτει εύκολα μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.7 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = n\alpha^n u[n], \quad |\,\alpha\,| < 1$$

Λύση: Το διακριτό σήμα $x[n]$ διαθέτει μετασχηματισμό Fourier - λόγω της ιδιότητας $|\alpha| < 1$ - ο οποίος υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\alpha^n e^{-i\omega n}u[n] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(\alpha e^{-i\omega})^n = \frac{\alpha e^{-i\omega}}{(1-\alpha e^{-i\omega})^2} = \frac{\alpha e^{i\omega}}{(e^{i\omega}-\alpha)^2} \end{aligned}$$

όπως προκύπτει μετά από απλές μαθηματικές πράξεις και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο (δείτε τον Πίνακα 6.2).

Άσκηση 0.8 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = -\alpha^n u[-(n+1)], \quad |\alpha| < 1$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-i\omega n} u[-(n+1)]$$

Από την εξίσωση ορισμού της βηματικής συνάρτησης προκύπτει εύκολα ότι

$$u[-(n+1)] = \begin{cases} 1 & n \leq -1 \\ 0 & n > -1 \end{cases}$$

και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$X(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n (e^{-i\omega})^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} (\alpha e^{-i\omega})^n$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας προχωρούμε σε αλλαγή του δείκτη του αθροίσματος από n σε $m = -n$. Για $n = -1$ θα είναι $m = 1$ ενώ για $n = -\infty$ θα είναι $m = \infty$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha e^{-i\omega})^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m - \left(\frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right)^m \Big|_{m=0} = \\ &= \frac{1}{1-(e^{i\omega}/\alpha)} - 1 = \frac{e^{i\omega}}{\alpha - e^{i\omega}} = \frac{1}{\alpha e^{-i\omega} - 1} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την εκθετική συνάρτηση του παρονομαστή σύμφωνα με τον τύπο του Euler προκύπτει αμέσως ότι

$$X(\omega) = \frac{1}{(\alpha\cos\omega - 1) - i\sin\omega}$$

και εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση 9.3.1 διαπιστώνουμε πως το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $X(\omega)$ θα έχουν τη μορφή

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}} \quad \text{και} \quad \measuredangle X(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\sin\omega}{\alpha\cos\omega - 1}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.9 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως*

$$x[n] = [\alpha^n \sin(\omega_0 n) + \beta^n]u[n], \quad |\alpha| < 1, |\beta| < 1$$

Λύση: Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του ημιτόνου σύμφωνα με τον τύπο του Euler, το διακριτό σήμα $x[n]$ διατυπώνεται ως

$$x[n] = \left(\alpha^n \frac{e^{i\omega_0 n} - e^{-i\omega_0 n}}{2i} + \beta^n\right)u[n] = \left[\frac{1}{2i}(\alpha e^{i\omega_0})^n - \frac{1}{2i}(\alpha e^{-i\omega_0})^n + \beta^n\right]u[n]$$

και από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha e^{i\omega_0})^n e^{-i\omega n}u[n] - \frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha e^{-i\omega_0})^n e^{-i\omega n}u[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta^n u[n] = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)n}\right] - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)n}\right]^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^n \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο προκύπτει εύκολα ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)n}\right]^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)n}\right]^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-\beta e^{-i\omega}}$$

και αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση του μετασχηματισμού Fourier οδηγούμαστε στην έκφραση

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega-\omega_0)}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-i(\omega+\omega_0)}}\right\} + \frac{1}{1-\beta e^{-i\omega}} = \\ = &= \frac{1-\alpha(\sin\omega_0 + 2\cos\omega_0)e^{-i\omega} + \alpha(\alpha+\beta\sin\omega_0)e^{-2i\omega}}{(1-2\alpha\cos\omega_0 e^{-i\omega} + \alpha^2 e^{-2i\omega})(1-\beta e^{-i\omega})} \end{aligned}$$

- όπως προκύπτει εύκολα μετά από απλές μαθηματικές πράξεις - που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.10 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής συνάρτησης* $\delta[n]$ *η οποία ως γνωστόν ορίζεται ως*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier και της διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-i\omega n} = \delta[n]e^{-i\omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα πως *ο μετασχηματισμός Fourier της διακριτής κρουστικής συνάρτησης έχει μοναδιαίο πλάτος και μηδενικη φάση για όλες τις συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα* $(-\pi, +\pi)$.

Άσκηση 0.11 *Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της χρονικώς μετατοπισμένης κρουστικής συνάρτησης* $\delta[n-n_0]$ *η οποία ως γνωστόν ορίζεται ως*

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$

Λύση: Σε πλήρη αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση θα έχουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]e^{-i\omega n} = \delta[n]e^{-i\omega n}\Big|_{n=n_0} = e^{-i\omega n_0}$$

Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση *το μέτρο του μετασχηματισμού είναι όπως και πρίν ίσο με τη μονάδα, αλλά η φάση του είναι πλέον μη μηδενική και ανάλογη της συχνότητας για όλες τις συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα* $(-\pi, +\pi)$.

Άσκηση 0.12 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\mathcal{X}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Λύση: Από την εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(\omega)e^{i\omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} e^{i\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{iWn}-e^{-iWn}}{in}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi n}\frac{e^{iWn}-e^{-iWn}}{2i} = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \end{aligned}$$

Άσκηση 0.13 *Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης* $\mathcal{X}(\omega) = \cos^2\omega$.

Λύση: Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του συνημιτόνου από τον τύπο του Euler θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(\omega) = \cos^2\omega = \left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2i\omega} + \frac{1}{4}e^{-2i\omega} + \frac{1}{2}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας που επίσης χαρακτηρίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό, προκύπτει εύκολα ότι

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} = \frac{1}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{2i\omega}\} + \frac{1}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Αλλά από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης για την τιμή $n_0 = 2$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{e^{2i\omega}\} &= e^{2i\omega}\mathcal{F}\{1\} = \delta[n]\Big|_{n\to n+2} = \delta[n+2] \\ \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\} &= e^{-2i\omega}\mathcal{F}\{1\} = \delta[n]\Big|_{n\to n-2} = \delta[n-2] \end{aligned}$$

ενώ ακόμη θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2}\delta[n]$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $x[n]$ προκύπτει εύκολα ότι

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\cos^2\omega\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.14 *Να προσδιοριστεί η απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI στα στοιχειώδη τριγωνομετρικά σήματα* $x_1[n] = A\cos(\omega n)$ *και* $x_2[n] = A\sin(\omega n)$.

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης θα χρησιμοποιήσουμε *την ιδιότητα των ιδιοτιμών* μαζί με την *αρχή της επαλληλίας*. Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα, οι αποκρίσεις ενός συστήματος LTI στα στοιχειώδη εκθετικά σήματα $\kappa_1[n] = Ae^{i\omega n}$ και $\kappa_2[n] = Ae^{-i\omega n}$ θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \lambda_1[n] &= \mathcal{H}(\omega)\kappa_1[n] = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} \quad \text{και} \\ \lambda_2[n] &= \mathcal{H}(\omega)\kappa_2[n] = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} \end{aligned}$$

όπου αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας από την εκθετική της μορφή και κάναμε χρήση των ιδιοτήτων συμμετρίας $|\mathcal{H}(-\omega)| = |\mathcal{H}(\omega)|$ και $\measuredangle\mathcal{H}(-\omega) = -\measuredangle\mathcal{H}(\omega)$. Χρησιμοποιώντας τώρα την *αρχή της επαλληλίας* μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό

$$x_1[n] = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{i\omega n} + \frac{1}{2}e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\kappa_1[n] + \frac{1}{2}\kappa_2[n]$$

θα είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \frac{1}{2}\lambda_1[n] + \frac{1}{2}\lambda_2[n] = \frac{1}{2}A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} + \frac{1}{2}A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} = \\ &= A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,\frac{e^{i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]} + e^{-i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}}{2} = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\cos(\omega n + \measuredangle\mathcal{H}(\omega)) \end{aligned}$$

ενώ αντίστοιχα, η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό

$$x_2[n] = \sin(\omega n) = \frac{1}{2i}e^{i\omega n} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\kappa_1[n] - \frac{1}{2}\kappa_2[n]$$

θα είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \frac{1}{2i}\lambda_1[n] - \frac{1}{2i}\lambda_2[n] = \frac{1}{2i}A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} - \frac{1}{2i}A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,e^{-i\omega n}e^{i\measuredangle\mathcal{H}(\omega)} = \\ &= A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\,\frac{e^{i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]} - e^{-i[\omega n+\measuredangle\mathcal{H}(\omega)]}}{2i} = A\,|\,\mathcal{H}(\omega)\,|\sin(\omega n + \measuredangle\mathcal{H}(\omega)) \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.15 *Να προσδιοριστεί η συχνοτική απόκριση του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών*

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Λύση: Λαμβάνοντας το *μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου* και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης θα λάβουμε

$$\mathcal{F}\{y[n]\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}\{y[n-1]\} = \mathcal{F}\{x[n]\} + 2\mathcal{F}\{x[n-1]\} + \mathcal{F}\{x[n-2]\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{Y}(\omega)$ και $\mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{X}(\omega)$ ενώ από την *ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης* του μετασχηματισμού προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{F}\{y[n-1]\} = e^{-i\omega}y[n], \quad \mathcal{F}\{x[n-1]\} = e^{-i\omega}x[n], \quad \mathcal{F}\{x[n-2]\} = e^{-2i\omega}x[n]$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην αρχική μας εξίσωση αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega) + 2e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega) + e^{-2i\omega}\mathcal{X}(\omega)$$

από όπου τελικά θα λάβουμε

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}}{1 - (1/2)e^{-i\omega}}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου, δείτε την Άσκηση 3.4.7).

Άσκηση 0.16 *Να προσδιοριστεί η συχνοτική και η κρουστική απόκριση του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών*

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Λύση: Λαμβάνοντας το *μετασχηματισμό Fourier* των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών και χρησιμοποιώντας την *ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης*, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{6}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) - \frac{1}{6}e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega)$$

και επομένως η συχνοτική απόκριση του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1}{1-(1/6)e^{-i\omega}-(1/6)e^{-2i\omega}}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την *κρουστική απόκριση* του συστήματος θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier* της παραπάνω σχέσης. Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{H}(\omega)$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \frac{1}{1-(1/6)e^{-i\omega}-(1/6)e^{-2i\omega}} = \frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}}\frac{1}{1+(1/3)e^{-2i\omega}} = \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}} + \frac{2}{5}\frac{1}{1+(1/3)e^{-i\omega}}\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω σχέσης και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, η *κρουστική απόκριση* του θεωρούμενου διακριτού συστήματος LTI υπολογίζεται ως

$$h[n] = \frac{3}{5}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\omega}}\right\} + \frac{2}{5}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+(1/3)e^{-i\omega}}\right\} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.17 *Να προσδιοριστεί η εξίσωση διαφορών του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI η συχνοτική απόκριση του οποίου δίδεται από τη σχέση*

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{1-(1/2)e^{-i\omega}+e^{-3i\omega}}{1+(1/2)e^{-i\omega}+(3/4)e^{-2i\omega}}$$

Λύση: Στην προκειμένη περίπτωση, η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι *η αντίστροφη της προηγούμενης*. Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τη μορφή

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mathcal{X}(\omega)} = \frac{1-(1/2)e^{-i\omega}+e^{-3i\omega}}{1+(1/2)e^{-i\omega}+(3/4)e^{-2i\omega}}$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{Y}(\omega) + \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega) + \frac{3}{4}e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{X}(\omega) - \frac{1}{2}e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega) + e^{-3i\omega}\mathcal{X}(\omega)$$

Λαμβάνοντας τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier* των δύο μελών της παραπάνω σχέσης αυτή γράφεται με τη μορφή

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} + \frac{3}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} = \\ &\qquad \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3i\omega}\mathcal{X}(\omega)\}\end{aligned}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\} = y[n]$ και $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(\omega)\} = x[n]$ ενώ από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} &= y[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} = y[n-2], \\ \mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega}\mathcal{X}(\omega)\} &= x[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3i\omega}\mathcal{Y}(\omega)\} = x[n-3]\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην τελευταία σχέση αυτή γράφεται ως

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση διαφορών του συστήματος (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου δείτε την Άσκηση 3.4.6).

Άσκηση 0.18 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος* $y[n]$ *με κρουστική απόκριση της μορφής* $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$ *όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα* $x[n] = (1/3)^n u[n]$.

Λύση: Για την επίλυση της άσκησης θα προσδιορίσουμε το *μετασχηματισμό Fourier* της εξόδου του συστήματος η οποία σύμφωνα με το *θεώρημα της συνέλιξης* θα έχει τη μορφή $\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{X}(\omega)$ και στη συνέχεια τη ζητούμενη έξοδο ως τον αντίστροφο μετασχηματισμό $y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(\omega)\}$. Αρχικά ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των διακριτών σημάτων $h[n]$ και $x[n]$ οι οποίοι όπως εύκολα αποδεικνύεται έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n]e^{-i\omega n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2}e^{-i\omega}\Big)^n = \frac{5}{1+(1/2)e^{-i\omega}}\\ \mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{3}e^{-i\omega}\Big)^n = \frac{1}{1-(1/3)e^{-i\omega}}\end{aligned}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος θα δίδεται σύμφωνα με το *θεώρημα της συνέλιξης* από τη σχέση

$$\mathcal{Y}(\omega)=\mathcal{H}(\omega)\mathcal{X}(\omega)=\frac{5}{[1+(1/2)e^{-i\omega}][1-(1/3)e^{-i\omega}]}=\frac{3}{1+(1/2)e^{-i\omega}}+\frac{2}{1-(1/3)e^{-i\omega}}$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας έκφρασης αναπτύξαμε κατά τα γνωστά τη συνάρτηση $\mathcal{Y}(\omega)$ σε *σειρά μερικών κλασμάτων*. Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό της τελευταίας σχέσης καταλήγουμε στην έκφραση

$$y[n] = 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n]$$

- όπως προκύπτει εύκολα ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών - που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (για το συνεχές ανάλογο αυτής της μεθόδου δείτε την Άσκηση 3.4.3).

Άσκηση 0.19 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος* $y[n]$ *με κρουστική απόκριση της μορφής*

$$h[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big)u[n]$$

όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα $x[n] = \cos(\pi n/2)$.

Λύση: Στην προκειμένη περίπτωση, αντί να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης (κάτι το οποίο ενθαρρύνεται να πράξει ο αναγνώστης προκειμένου να επιλύσει την άσκηση με ένα διαφορετικό τρόπο), θα στηριχθούμε στο γεγονός πως *οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοτιμές ενός διακριτού συστήματος LTI.* Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε όπως και πριν, τη συχνοτική απόκριση του συστήματος. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση του συνημιτόνου από τον τύπο του Euler, η κρουστική απόκριση του συστήματος λαμβάνει τη μορφή

$$h[n] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n (e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n/2})u[n]$$

και η *συνάρτηση απόκρισης συχνότητας* υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-i\omega n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}e^{i\pi/2}e^{-i\omega}\Big)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}e^{-i\pi/2}e^{-i\omega}\Big)^n =\\ &= \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{1-(1/2)e^{i\pi/2}e^{-i\omega}}\Big\} + \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{1-(1/2)e^{-i\pi/2}e^{-i\omega}}\Big\}\end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για τη συνάρτηση του συνημιτόνου μπορούμε να διατυπώσουμε το σήμα εισόδου $x[n]$ με τη μορφή

$$x[n] = \cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) = \frac{1}{2}e^{i\pi n/2} + \frac{1}{2}e^{-i\pi n/2} = \frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{2}x_2[n]$$

δηλαδή ως ένα γραμμικό συνδυασμό των μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$x_1[n] = e^{i\omega_1 n} = e^{i\pi n/2} \quad \text{και} \quad x_2[n] = e^{i\omega_2 n} = e^{-i\pi n/2}$$

με τιμές συχνότητας $\omega_1 = \pi/2$ και $\omega_2 = -\pi/2$. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με τη θεωρία περί *ιδιοσυναρτήσεων* και *ιδιοτιμών* που παραθέσαμε συνοπτικά στην Ενότητα 9.4, οι αποκρίσεις του συστήματος στις στοιχειώδεις εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{H}(\omega_1)e^{i\omega_1 n} = \frac{4}{3}e^{i\pi n/2} \quad \text{και} \\ y_2[n] &= \mathcal{H}(\omega_2)e^{i\omega_2 n} = \frac{4}{3}e^{-i\pi n/2} \end{aligned}$$

- αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{H}(\omega_1) = \mathcal{H}(\omega_2) = 4/3$ - και σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας που χαρακτηρίζει το θεωρούμενο γραμμικό σύστημα, η έξοδός του υπολογίζεται ως

$$y[n] = \frac{1}{2}y_1[n] + \frac{1}{2}y_2[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}e^{i\pi n/2} + \frac{4}{3}e^{-i\pi n/2}\right) = \frac{4}{3}\frac{e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n/2}}{2} = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.20 *Θεωρώντας ενα συνεχές σήμα της μορφής $x(t) = 5\cos(200\pi t)$, να προσδιορίσετε το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του παραπάνω σήματος με συχνότητες $F_{s1} = 300$ Hz και $F_{s2} = 800$ Hz.*

Λύση: Εάν συγκρίνουμε την εξίσωση του συνεχούς σήματος $x(t)$ με τη γενική εξίσωση του απλού συνημιτονοειδούς σήματος

$$x(t) = A\cos(2\pi Ft + \varphi)$$

προκύπτει αμέσως ότι $A = 5$, $\varphi = 0°$ και $F = 100$ Hz. Επομένως το διακριτό σήμα που θα προκύψει από διαδικασία δειγματοληψίας με συχνότητα $F_{s1} = 300$ Hz θα έχει τη μορφή

$$x[n] = 5\cos\left(2\pi\frac{100}{300}n\right) = 5\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

ενώ το διακριτό σήμα που θα προκύψει από δειγματοληψία με συχνότητα $F_{s2} = 800$ Hz θα έχει τη μορφή

$$x[n] = 5\cos\left(2\pi\frac{100}{800}n\right) = 5\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Άσκηση 0.21 *Θεωρώντας το αναλογικό σήμα $x(t) = 3\cos(100\pi t)$ να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:*

(α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του aliasing;

(β) Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 200$ Hz να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.

(γ) Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 75$ Hz να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.

(δ) Να προσδιοριστεί η συχνότητα F $(0 < F < F_s/2)$ του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου με συχνότητα $F_s = 75$ Hz θα οδηγήσει στη δημιουργία του ίδιου διακριτού σήματος με εκείνο του αρχικού αναλογικού σήματος.

Λύση: (α) Η μαθηματική μορφή του αναλογικού σήματος εισόδου αποδίδεται από την εξίσωση $x(t) = 3\cos(2\pi Ft) = 3\cos(100\pi t)$ από όπου προκύπτει πως η συχνότητά του είναι ίση με $F = 50$ Hz. Επομένως η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να μην εμφανιστεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης, είναι $F_s^{min} = 2F = 100$ Hz.

(β) Εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 200$ Hz, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{100}{200}\pi n\right) = 3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(γ) Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 75$ Hz, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$\begin{aligned} x[n] &= 3\cos\left(\frac{100}{75}\pi n\right) = 3\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = 3\cos\left(-\frac{2n\pi}{3} + 2n\pi\right) = \\ &= 3\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(δ) Λαμβάνοντας υπ′ όψιν πως το διακριτό σήμα που προκύπτει από διαδικασία δειγματοληψίας έχει τη μορφή $x[n] = A\cos(2\pi f_0 n)$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$x[n] = 3\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{3}\right)n\right] = 3\cos(2\pi f n)$$

από όπου προκύπτει πως η σχετική ή κανονικοποιημένη συχνότητα είναι ίση με $f = F/F_s = 1/3$. Επομένως η συχνότητα F του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου θα οδηγήσει στο ίδιο διακριτό σήμα με εκείνο του αρχικού σήματος θα είναι ίση με $F = f * F_s = 75/3 = 25$ Hz ενώ η μαθηματική αναπαράσταση αυτού του σήματος θα είναι η $x(t) = 3\cos(2\pi F t) = 3\cos(50\pi t)$. Παρατηρούμε πως τα αναλογικά σήματα με συχνότητες $F_1 = 50$ Hz και $F_2 = 25$ Hz δίνουν το ίδιο ακριβώς διακριτό σήμα για συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 75$ Hz, ήτοι, το σήμα συχνότητας F_1 θεωρείται *ψευδεπίγραφο* του σήματος συχνότητας F_2.

Άσκηση 0.22 *Θεωρώντας ένα αναλογικό σήμα που περιέχει συχνότητες μέχρι* 10 *KHz να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:*

(α) Για ποια περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα διακριτά δείγματά του;

(β) Έστω πως δειγματοληπτούμε το σήμα με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 8$ KHz. Να εξηγήσετε τί θα συμβεί με τις στοιχειώδεις ημιτονοειδείς κυματομορφές συχνοτήτων $F_1 = 5$ KHz και $F_2 = 9$ KHz.

Λύση: (α) Εφόσον η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα είναι η $F_{max} = 10$ KHz, η περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας για την οποία είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος είναι η $F_s \geq 2F_{max} = 20$ KHz.

(β) Για τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας $F_s = 8$ KHz, η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα διακριτά δείγματα θα είναι η $F = 4$ KHz. Επομένως οι συχνότητες $F_1 = 5$ KHz και $F_2 = 9$ KHz αποτελούν *ψευδεπίγραφα μικρότερων συχνοτήτων* που ανήκουν στο διάστημα $[0 - 4]$ KHz. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτές τις μικρότερες συχνότητες εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

(α) Για τη συχνότητα $F_1 = 5$ KHz έχουμε:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left[2\pi\left(\frac{5000}{8000}\right)n\right] = \cos\left[2\pi\left(\frac{5}{8}\right)n\right] = \cos\left(\frac{5\pi n}{4}\right) = \\ &= \cos\left(-\frac{3n\pi}{4} + 2n\pi\right) = \cos\left(-\frac{3n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_1 = 5$ KHz είναι ψευδεπίγραφο του σήματος συχνότητας $F = 3$ KHz.

Για τη συχνότητα $F_2 = 9$KHz έχουμε:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left[2\pi\left(\frac{9000}{8000}\right)n\right] = \cos\left[2\pi\left(\frac{9}{8}\right)n\right] = \cos\left(\frac{9\pi n}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_2 = 5$ KHz είναι ψευδεπίγραφο του σήματος συχνότητας $F = 1$ KHz.

Άσκηση 0.23 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της διακριτής κρουστικής συνάρτησης.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και της διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = 1$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (δείτε και την Άσκηση 1.3.7).

Άσκηση 0.24 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της χρονικώς μετατοπισμένης διακριτής κρουστικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως $x[n] = \delta[n - n_0]$ $(0 < n_0 < N)$*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και της χρονικώς μετατοπισμένης διακριτής κρουστικής συνάρτησης προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}n_0\right)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα (δείτε και την Άσκηση 1.3.8).

Άσκηση 0.25 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του ορθογώνιου διακριτού σήματος $x[n] = u[n] - u[n - N]$ όπου $u[n]$ είναι η διακριτή μοναδιαία συνάρτηση βήματος.*

Λύση: Από τον ορισμό της διακριτής συνάρτησης βήματος θα έχουμε

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u[n-N] = \begin{cases} 1 & n \geq N \\ 0 & n < N \end{cases}$$

και από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \frac{1 - e^{-i2\pi k}}{1 - \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} = 0$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για $k \neq 0$ ενώ για $k = 0$ προκύπτει εύκολα ότι $\mathcal{X}(0) = N$.

Άσκηση 0.26 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος $x[n] = \alpha^n$ $(0 \leq n \leq N - 1)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^n = \\ &= \frac{1 - \left[\alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)\right]^N}{1 - \alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}\right)} \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 0.27 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος*

$$u[n] = \begin{cases} e^{i\omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και να αποδειχθεί πως αυτός προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $\mathcal{X}(\omega)$ για τιμές συχνότητας $\omega = 2\pi k/N$.

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Άσκησης 9.2.6 προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_0 n}\exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[-i\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)n\right] = \frac{1-\exp\left[-i\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)N\right]}{1-\exp\left[-i\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)\right]} = \\
&= \exp\left[-i\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]\frac{\sin\left[\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{N}-\omega_0\right)\right]}
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του διακριτού σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_0 n}e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega-\omega_0)n} = \frac{1-e^{-i(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-i(\omega-\omega_0)}} = \\
&= \exp\left[-i(\omega-\omega_0)\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]\frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις των μετασχηματισμών $\mathcal{X}(\omega)$ και $\mathcal{X}(k)$ διαπιστώνουμε αμέσως πως η δεύτερη συνάρτηση προκύπτει από την πρώτη για τιμές συχνότητας $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$), διαπίστωση που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άσκηση 0.28 *Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος $x[n] = \exp(i2\pi k_0 n/N)$ $(0 \le n \le N-1)$.*

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp\left(-i\frac{2\pi k}{N}n\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n\right]=\frac{1-\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{1-\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\right]}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως για $k \neq k_0$ η εκθετική παράσταση του αριθμητή είναι ίση με τη μονάδα και επομένως θα είναι $\mathcal{X}(k) = 0$, ενώ για $k = k_0$ η παραπάνω σχέση λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον *κανόνα του Del' Hospital* θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \lim_{k\to k_0}\frac{d}{dk}\left\{\frac{1-\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{1-\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\right]}\right\} = \left.\frac{i2\pi\exp[-i2\pi(k-k_0)]}{\frac{i2\pi}{N}\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\right]}\right|_{k=k_0} = N$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq k_0 \\ N & k = k_0 \end{cases} = N\begin{cases} 0 & k \neq k_0 \\ 1 & k = k_0 \end{cases} = N\delta[k-k_0]$$

που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 0.29 *Να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $x[n] = \{\mathbf{2}, 1, 2, 1\}$ και $y[n] = \{\mathbf{1}, 2, 3, 4\}$.*

Λύση: Παρατηρούμε πως οι διακριτές ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$ έχουν μήκος $N = 4$ δείγματα· εφαρμόζοντας λοιπόν την εξίσωση ορισμού της *κυκλικής συνέλιξης* για αυτή την τιμή του N θα λάβουμε

$$z[n] = \sum_{m=0}^{3} x[m]y[((n-m))_4], \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η μεταβλητή m παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3$, είναι προφανές πως θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα περιεχόμενα των χρονικώς μετατοπισμένων διακριτών σημάτων $y[((n-0))_4]$, $y[((n-1))_4]$, $y[((n-2))_4]$ και $y[((n-3))_4]$. Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 1.5.4 διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{array}{ll} y[((n-0))_4] = \{\mathbf{1}, 2, 3, 4\} & y[((n-1))_4] = \{\mathbf{2}, 3, 4, 1\} \\ y[((n-2))_4] = \{\mathbf{3}, 4, 1, 2\} & y[((n-3))_4] = \{\mathbf{4}, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Για τον υπολογισμό των τιμών $z[n]$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το σήμα $x[n]$ δείγμα προς δείγμα με τα τέσσερα παραπάνω διακριτά σήματα και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα. Για λόγους ευκολίας της γραφής θα υιοθετήσουμε το συμβολισμό

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \times \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε

$$\begin{array}{ll} \text{για } n = 0: & z[0] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{1, 2, 3, 4\} = 2 + 2 + 6 + 4 = 14 \\ \text{για } n = 1: & z[1] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{2, 3, 4, 1\} = 4 + 3 + 8 + 1 = 16 \\ \text{για } n = 2: & z[2] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{3, 4, 1, 2\} = 6 + 4 + 2 + 2 = 14 \\ \text{για } n = 3: & z[3] = \{2, 1, 2, 1\} \times \{4, 1, 2, 3\} = 8 + 1 + 4 + 3 = 16 \end{array}$$

Επομένως η κυκλική συνέλιξη των διακριτών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ είναι το διακριτό σήμα $z[n] = \{\mathbf{14}, 16, 14, 16\}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Είναι προφανές, πως δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε τη διαδικασία για τιμές $n > 3$, αφού θα παίρνουμε συνεχώς την ακολουθία των τεσσάρων παραπάνω αριθμών κάτι που βέβαια είναι αναμενόμενο.

Άσκηση 0.30 *Να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα που ορίζονται από τις σχέσεις*

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad \textit{και} \quad y[n] = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

Λύση: Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης θα υπολογίσουμε την *κυκλική συνέλιξη* από τη γενική εξίσωση ορισμού της, για μήκος διακριτών ακολουθιών $N = 4$. Θα είναι λοιπόν

$$z[n] = \sum_{m=0}^{3} x[m]y[((n-m))_4], \quad n = 0, 1, 2, 3$$

με τις διακριτές ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$ να έχουν τις τιμές $x[n] = \{\mathbf{1}, 0, -1, 0\}$ και $y[n] = \{\mathbf{1}, 2, 4, 8\}$ όπως προκύπτει αμέσως αντικαθιστώντας τις τιμές $n = 0, 1, 2, 3$ στις εξισώσεις ορισμού τους. Στην προκειμένη περίπτωση, οι χρονικώς μετατοπισμένες ακολουθίες υπολογίζονται ως

$$\begin{array}{ll} y[((n-0))_4] = \{\mathbf{1}, 2, 4, 8\} & y[((n-1))_4] = \{\mathbf{2}, 4, 8, 1\} \\ y[((n-2))_4] = \{\mathbf{4}, 8, 1, 2\} & y[((n-3))_4] = \{\mathbf{8}, 1, 2, 4\} \end{array}$$

και επομένως θα έχουμε

$$\begin{array}{ll} \text{για } n = 0: & z[0] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{1, 2, 4, 8\} = 1 - 4 = -3 \\ \text{για } n = 1: & z[1] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{2, 4, 8, 1\} = 2 - 8 = -6 \\ \text{για } n = 2: & z[2] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{4, 8, 1, 2\} = 4 - 1 = +3 \\ \text{για } n = 3: & z[3] = \{1, 0, -1, 0\} \times \{8, 1, 2, 4\} = 8 - 2 = +6 \end{array}$$

Επομένως η κυκλική συνέλιξη των διακριτών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ είναι το διακριτό σήμα $z[n] = \{\mathbf{-3}, -6, +3, +6\}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Η άσκηση αυτή θα επιλυθεί και στην επόμενη ενότητα δια της εφαρμογής του θεωρήματος της συνέλιξης του διακριτού μετασχηματισμού.