Σήματα Συνεχούς Χρόνου

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

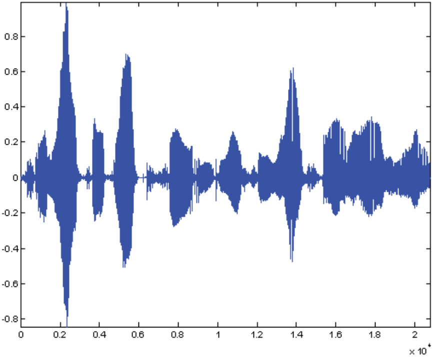
Τι είναι ένα σήμα

Ορισμός της έννοιας του σήματος

Στην θεωρία των σημάτων και συστημάτων ένα σήμα ορίζεται ως ένα οποιοδήποτε μέγεθος που μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο ή γενικότερα, σε συνάρτηση με οποιαδήποτε άλλη φυσική ποσότητα. Τυπικά παραδείγματα σημάτων περιλαμβάνουν:

- Τα ρεύματα και τις τάσεις των ηλεκτρικών κυκλωμάτων
- Την θέση ενός σώματος που κινείται στον χώρο
- Τα σήματα φωνής που καταγράφονται με την βοήθεια διατάξεων ηχογράφησης
- Τα ηλεκτροκαρδιογραφήματα και τα εγκεφαλογραφήματα
- Τα σεισμικά σήματα που εμφανίζονται στις οθόνες των σεισμογράφων
- Τις ψηφιακές εικόνες (που θεωρούνται δισδιάστατα χωρικά σήματα)

Παράδειγμα φωνητικού σήματος
Τα σήματα φωνής μελετώνται στο πεδίο του διακριτού χρόνου



Οι πιο σημαντικοί κλάδοι της επεξεργασίας φωνητικών σημάτων είναι η ανάλυση, η σύνθεση, η κωδικοποίηση, η συμπίεση και η αναγνώριση της ανθρώπινης φωνής.

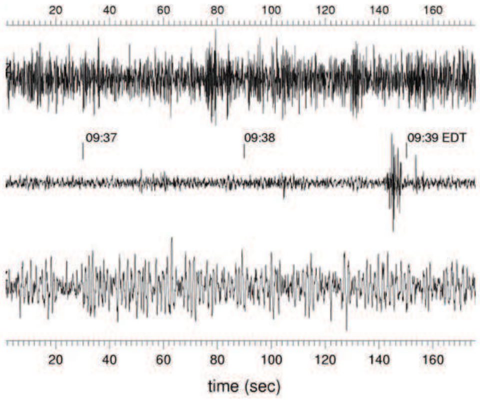
Παράδειγμα ηλεκτρικού σήματος

Απεικόνιση ηλεκτρικών σημάτων στην οθόνη παλμογράφου

Τα ηλεκτρικά σήματα δεν είναι παρά σήματα τάσης και ρεύματος που περιγράφονται από συνεχείς και εναλλασσόμενες κυματομορφές.

Τυπική έξοδος σεισμογράφου

Ο σεισμογράφος αποτελεί συσκευή καταγραφής σεισμικών κυμάτων



Τα σεισμικά κύματα αποτελούν κύματα ενέργειας που παράγονται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού και η μελέτη τους επιτρέπει τον προσδιορισμό της θέσης και του μεγέθους του σεισμικού φαινομένου.

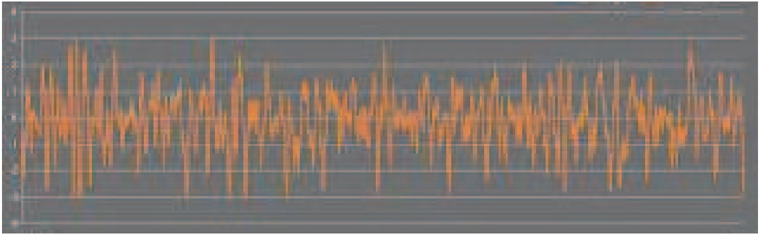
Καρδιογράφημα

Καταγράφεται με τη βοήθεια ειδικής διάταξης που λέγεται καρδιογράφος

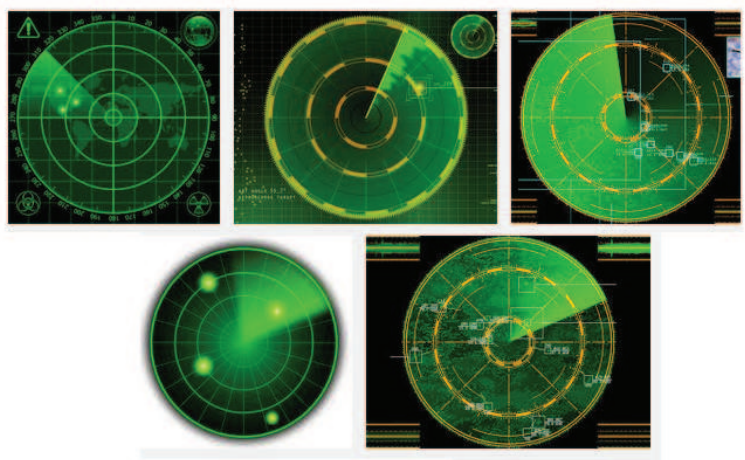
Το καρδιογράφημα καταγράφεται με την βοήθεια ηλεκτροδίων και μεταλλικών πλακών και σχετίζεται με ηλεκτρικά δυναμικά που φθάνουν στην επιφάνεια του σώματος προερχόμενα από την καρδιά.

Εφαρμογές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων
στην επιστήμη και την τεχνολογία

- Σήματα radar που καταγράφουν θέσεις αντικειμένων
- Σήματα sonar που εντοπίζουν αντικείμενα που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας
- Τηλεπικοινωνιακά συστήματα που μεταδίδουν κατάλληλα κωδικοποιημένα αναλογικά και ψηφιακά σήματα
- Συστήματα GPS που επιτρέπουν τον εντοπισμό της θέσης αντικειμένων με την βοήθεια δορυφόρων



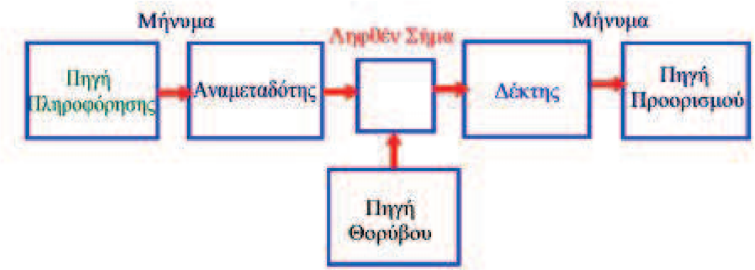
Εφαρμογές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων
Οθόνες radar



Εφαρμογές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων

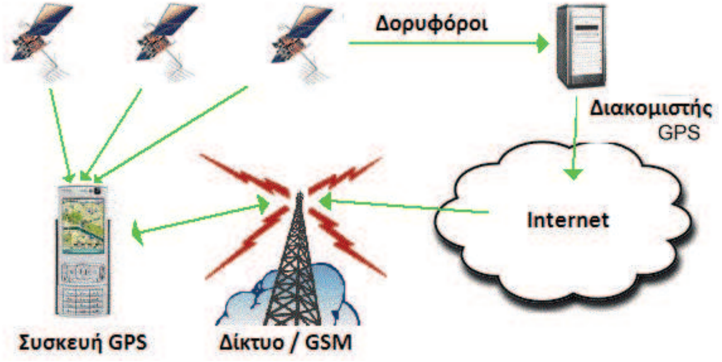
Τυπική συσκευή sonar

Εφαρμογές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων
Δομή τηλεπικοινωνιακού συστήματος



Η επικοινωνία δεδομένων ανάμεσα σε μία πηγή και έναν προορισμό περιλαμβάνει την χρήση ενός πομπού και ενός δέκτη και πραγματοποιείται δια μέσου ενός καναλιού το οποίο αποτελεί πηγή θορύβου που προστίθεται στο σήμα.

Εφαρμογές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων
Αρχή λειτουργίας συστήματος GPS

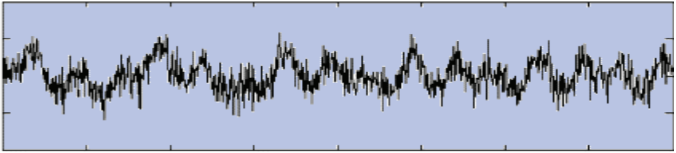


Δορυφορικό σύστημα εντοπισμού θέσης

Μία τυπική θεωρία σημάτων περιλαμβάνει

Μοντελοποίηση, ανάλυση και σχεδίαση

- Τη μοντελοποίηση που πραγματεύεται την ανάπτυξη μιας αφηρημένης εννοιολογικής περιγραφής της εξέλιξης του σήματος στο χρόνο
- Την ανάλυση που συνίσταται στην εξαγωγή χρήσιμης πληροφορίας από το περιεχόμενο του σήματος
- Τη σχεδίαση που αποτελεί το αντίστροφο της μοντελοποίησης και της ανάλυσης και συνίσταται στη σύνθεση ενός μοντέλου για τη φυσική διεργασία που δημιούργησε το σήμα



Ενέργεια και ισχύς σήματος
(α) Πεπερασμένο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$

Η συνολική ενέργεια E ενός συνεχούς σήματος $x(t)$ για το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ ορίζεται ως

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

ενώ η μέση ισχύς του - δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου - ορίζεται ως το πηλίκο της ενέργειας του σήματος προς τη διάρκεια του εν λόγω χρονικού διαστήματος, ή σε μαθηματική μορφή

$$P = \left\langle |x(t)|^2 \right\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Για ηλεκτρικά σήματα τάσης και ρεύματος η ενέργεια ορίζεται ως

$$E_v = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\, dt \quad \text{και} \quad E_\iota = R \int_{t_1}^{t_2} \iota^2(t)\, dt$$

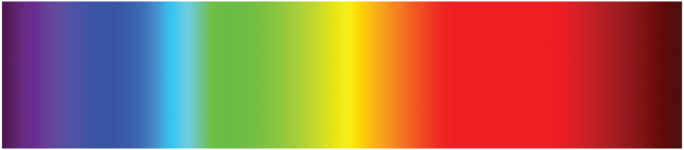
Ενέργεια και ισχύς σήματος
(β) Άπειρο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$

Οι εξισώσεις ορισμού της ενέργειας και της ισχύος για το άπειρο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δίδονται από τις εξισώσεις

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$$

Για σήματα πραγματικών τιμών είναι $|x(t)| = x(t)$ και οι παραπάνω σχέσεις προσαρμόζονται ανάλογα.



Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Ενέργεια και ισχύς σήματος
(γ) Σήματα ενέργειας και σήματα ισχύος

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες σημάτων όσον αφορά την ενέργεια και την ισχύ τους:

- Σήματα πεπερασμένης συνολικής ενέργειας ($E_\infty < 0$) τα οποία είναι γνωστά ως σήματα ενέργειας. Η μέση ισχύς αυτών των σημάτων είναι ίση με το μηδέν:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$$

- Σήματα πεπερασμένης μέσης ισχύος ($P_\infty < 0$) τα οποία είναι γνωστά ως σήματα ισχύος. Εάν η τιμή της μέσης ισχύος είναι θετική, τότε η συνολική ενέργεια αυτών των σημάτων είναι άπειρη.

- Σήματα για τα οποία η συνολική ενέργεια η μέση ισχύ έχουν άπειρη τιμή.

Παράδειγμα υπολογισμού ενέργειας σήματος

Ενέργεια σήματος εκθετικού τύπου

Άσκηση

Να προσδιορίσετε την ενέργεια του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\xi t} \quad (\xi > 0) & \textit{για } t \geq 0 \\ 0 & \textit{για } t < 0 \end{cases}$$

Από την εξίσωση ορισμού της ενέργειας του σήματος προκύπτει αμέσως ότι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2\xi t} dt = -\frac{1}{2\xi} e^{-2\xi t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\xi}$$

Παρατηρούμε πως η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη και επομένως το σήμα είναι σήμα ενέργειας.

Παράδειγμα υπολογισμού ισχύος σήματος
Ισχύς σήματος με δύο συχνοτικές συνιστώσες

Άσκηση

Να προσδιορίσετε την ισχύ του σήματος

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t + \vartheta_1) + B\cos(\omega_2 t + \vartheta_2), \quad (\omega_1 \neq \omega_2)$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της ισχύος του σήματος θα λάβουμε

$$\begin{aligned} P_\infty &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \Big[A\cos(\omega_1 t + \vartheta_1) + B\cos(\omega_2 t + \vartheta_2) \Big]^2 dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos^2(\omega_1 t + \vartheta_1)\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{B^2}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos^2(\omega_2 t + \vartheta_2)\, dt + \\ &+ \lim_{T\to\infty} \frac{AB}{T} \int_{-T}^{+T} \cos(\omega_1 t + \vartheta_1)\cos(\omega_2 t + \vartheta_2)\, dt \end{aligned}$$

Παράδειγμα υπολογισμού ισχύος σήματος

Η ισχύς υπολογίζεται απευθείας από την εξίσωση ορισμού της

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ για $x = \omega_1 t + \vartheta_1$ θα πάρουμε

$$\cos^2(\omega_1 t + \vartheta_1) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2(\omega_1 t + \vartheta_1)\right)\right]$$

και το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται με τη μορφή

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{+T} \left[1 + \cos[2(\omega_1 t + \vartheta_1)]\right] dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \left\{ \int_{-T}^{+T} dt + \int_{-T}^{+T} \cos[2(\omega_1 t + \vartheta_1)]\, dt \right\}$$

Αλλά ο δεύτερος όρος της τελευταίας σχέσης έχει μηδενική τιμή και επομένως

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{+T} \left[1 + \cos[2(\omega_1 t + \vartheta_1)]\right] dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{+T} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}(2T) = \frac{A^2}{2}$$

Παράδειγμα υπολογισμού ισχύος σήματος

Η ισχύς υπολογίζεται απευθείας από την εξίσωση ορισμού της (συνέχεια)

Με εντελώς ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{T\to\infty} \frac{B^2}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos^2(\omega_2 t + \vartheta_2)\, dt = \frac{B^2}{2}$$

Τέλος, η τιμή του ολοκληρώματος

$$\lim_{T\to\infty} \frac{AB}{T} \int_{-T}^{+T} \cos(\omega_1 t + \vartheta_1) \cos(\omega_2 t + \vartheta_2)\, dt$$

είναι ίση με το μηδέν, ιδιότητα που αποδεικνύεται εάν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_1 t+\vartheta_1)\cos(\omega_2 t+\vartheta_2) = \\ &\qquad \cos[(\omega_1+\omega_2)t+(\vartheta_1+\vartheta_2)]+\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\vartheta_1-\vartheta_2)] \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε τελικά ότι

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$$

Περιοδικά σήματα

Τα περιοδικά σήματα αποτελούν ειδική περίπτωση περιοδικού φαινομένου

Ένα συνεχές σήμα $x(t)$ ονομάζεται περιοδικό εάν υπάρχει θετικός αριθμός T που ονομάζεται περίοδος τέτοιος ώστε

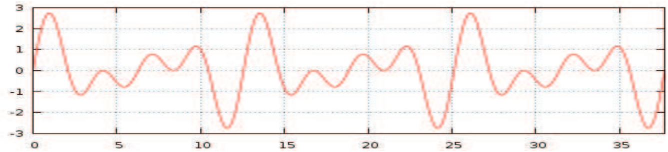
$$x(t) = x(t+T)$$

για κάθε χρονική στιγμή t. Για ένα περιοδικό σήμα είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+T) = x[(t+T)+T] = x\{[(t+T)+T]+T\} \\ &= x\Bigg(t + \underbrace{T+T+T+\cdots+T}_{m \text{ φορές}}\Bigg) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα $\quad x(t) = x(t+T) = x(x+2T) = \cdots = x(t+mT)$

όπου $m = 1, 2, \ldots$. Επομένως, το σήμα χαρακτηρίζεται από πολλές περιόδους $T' = mT$ $(m = 1, 2, \ldots)$ και εκείνη που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή του m για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση, ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος T_0.



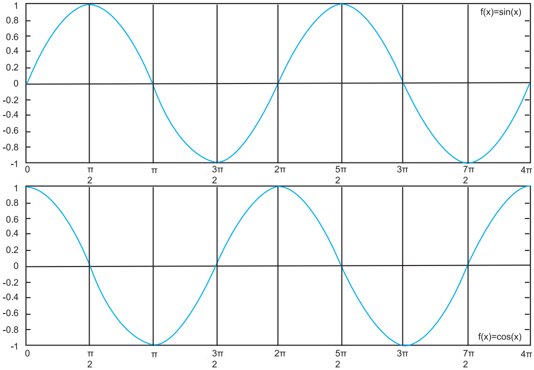
Περιοδικά σήματα

Η έννοια της απλής και της κυκλικής συχνότητας - απεριοδικά σήματα

- Το πλήθος των επαναλήψεων του σήματος στη μονάδα του χρόνου, συμβολίζεται με το γράμμα f, ονομάζεται συχνότητα και μετράται σε Hertz (Hz), μονάδα που έχει διαστάσεις αντίστροφου χρόνου (δηλαδή $\mathrm{Hz} = \mathrm{sec}^{-1}$).
- Η περίοδος και η συχνότητα ενός περιοδικού σήματος συνδέονται με μία σχέση αντιστρόφου αναλογίας, ενώ το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα ($f = 1/T$).
- Χρησιμοποιώντας την συχνότητα f μπορούμε να ορίσουμε την κυκλική ή ακτινική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ που μετράται σε ακτίνια (rads).
- Ένα σήμα που δεν είναι περιοδικό, χαρακτηρίζεται ως απεριοδικό σήμα.
- Υπάρχουν σήματα με απροσδιόριστη περίοδο όπως ένα σήμα σταθερών τιμών που χαρακτηρίζεται από οποιαδήποτε τιμή περιόδου.

Παραδείγματα περιοδικών σημάτων
Τα σήματα του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι σήματα με περίοδο 2π

Κλασσικά παραδείγματα περιοδικών σημάτων είναι οι γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημίτονου και του συνημίτονου που αμφότερες χαρακτηρίζονται από τιμή περιόδου ίση με 2π.



Άρτια και περιττά σήματα
Συμμετρία (άρτια ή περιττή) συνεχούς σήματος

Ένα συνεχές σήμα $x(t)$ χαρακτηρίζεται ως άρτιο εάν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$x(-t) = x(t)$$

ενώ αντίθετα, εάν είναι

$$x(-t) = -x(t)$$

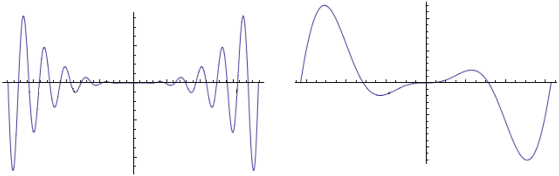
το σήμα χαρακτηρίζεται ως περιττό.

Εάν το σήμα είναι περιττό αποδεικνύεται ότι

$$x(0) = 0$$

Η γραφική παράσταση άρτιου σήματος είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα ενώ η γραφική παράσταση περιττού σήματος είναι συμμετρική ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Άρτια και περιττά σήματα
Γραφική παράσταση άρτιου και περιττού σήματος



Άρτια συνάρτηση   Περιττή συνάρτηση

Χαρακτηριστικά γραφικής παράστασης άρτιας και περιττής συνάρτησης που ισχύουν ως έχουν και για τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σημάτων συνεχούς χρόνου.

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις ο οριζόντιος άξονας αναπαριστά το χρόνο.

Ένα οποιοδήποτε συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα μιας άρτιας συνιστώσας $\mathcal{E}\mathrm{v}\{x(t)\}$ και μιας περιττής συνιστώσας $\mathcal{O}\mathrm{d}\{x(t)\}$ δηλαδή ως

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \mathcal{E}\mathrm{v}(t) + \mathcal{O}\mathrm{d}(t)}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathrm{v}(-t) &= \frac{1}{2}[x(-t) + x[-(-t)] = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = \mathcal{E}\mathrm{v}(t) \\
\mathcal{O}\mathrm{d}(-t) &= \frac{1}{2}[x(-t) - x[-(-t)] = -\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = -\mathcal{O}\mathrm{d}(t)
\end{aligned}$$

προκύπτει άμεσα το παραπάνω συμπέρασμα.

Άρτια και περιττά σήματα

Γινόμενο άρτιων και περιττών σημάτων

Το γινόμενο δύο άρτιων ή περιττών σημάτων είναι άρτιο σήμα ενώ το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος είναι ένα περιττό σήμα. Πράγματι, για δύο άρτια σήματα θα έχουμε

$$z(-t) = x(-t)y(-t) = x(t)y(t) = z(t)$$

ενώ για δύο περιττά σήματα θα έχουμε

$$z(-t) = x(-t)y(-t) = [-x(t)][-y(t)] = x(t)y(t) = z(t)$$

Εάν το σήμα $x(t)$ είναι άρτιο και το σήμα $y(t)$ είναι περιττό θα είναι

$$z(-t) = x(-t)y(-t) = x(t)[-y(t)] = -x(t)y(t) = -z(t)$$

ενώ το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία το άρτιο εκ των δύο σημάτων είναι το $y(t)$ ενώ το περιττό εκ των δύο σημάτων είναι το $x(t)$.

Άρτια και περιττά σήματα

Ο τρόπος υπολογισμού της αρτιας και της περιττής συνιστώσας

Άσκηση

Να προσδιορίσετε την άρτια και την περιττή συνιστώσα του συνεχούς σήματος

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

Από τις εξισώσεις ορισμού των συνιστωσών $\mathcal{E}\mathrm{v}(t)$ και $\mathcal{O}\mathrm{d}(t)$ και για το συνεχές σήμα $x(t) = e^{j\omega t}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathrm{v}(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t) \\
\mathcal{O}\mathrm{d}(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2} = j\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

όπου για την εξαγωγή των τελικών σχέσεων κάναμε χρήση των τύπων του Euler.

Εκθετικά σήματα

Σήματα συνεχούς χρόνου που χαρακτηρίζονται από εκθετική μεταβολή

Η πιο γενική μορφή ενός εκθετικού σήματος συνεχούς χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$

στην οποία τόσο το πλάτος C όσο και η παράμετρος του εκθέτη α είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Ανάλογα λοιπόν με τη φύση και την τιμή αυτών των παραμέτρων, υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες συνεχών εκθετικών σημάτων:

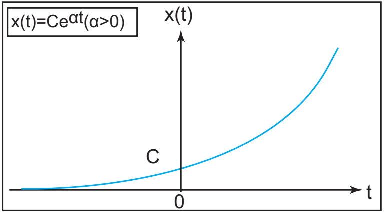
- Πραγματικά εκθετικά σήματα
- Φανταστικά εκθετικά σήματα
- Μιγαδικά εκθετικά σήματα

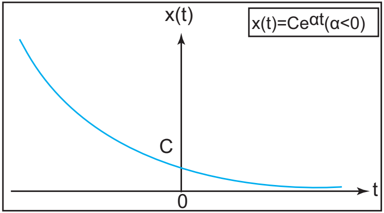
Πραγματικά Εκθετικά σήματα

Χαρακτηρίζονται από πραγματικές τιμές των παραμέτρων που τα περιγράφουν

Στα σήματα αυτού του είδους οι παράμετροι C και α είναι πραγματικοί αριθμοί. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Εάν είναι $\alpha > 0$, το πλάτος του σήματος αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο (παραδείγματα: αλυσιδωτές αντιδράσεις στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, πολύπλοκες χημικές αντιδράσεις).
- Εάν είναι $\alpha < 0$, το πλάτος του σήματος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (παραδείγματα: ραδιενεργός διάσπαση, διαδικασία αποφόρτισης πυκνωτή)
- Εάν είναι $\alpha = 0$, τότε $x(t) = C$ για κάθε χρονική στιγμή t.





Φανταστικά Εκθετικά σήματα

Αποτελούν περιοδικά σήματα με περίοδο 2π

Εάν η παράμετρος α είναι ένας φανταστικός αριθμός της μορφής $\alpha = j\omega_0$ το εκθετικό σήμα γράφεται ως

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t}$$

και είναι πάντοτε περιοδικό με τιμή θεμελιώδους περιόδου $T = 2\pi/\omega_0$. Πράγματι, από την εξίσωση ορισμού περιοδικού σήματος θα έχουμε

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t}$$

Για να είναι το σήμα περιοδικό θα πρέπει να είναι $e^{j\omega_0 T} = 1$. Θεωρώντας ότι $\omega_0 \neq 0$ αυτό ισχύει όταν $\omega_0 T = 2\pi m$. Επομένως

$$\boxed{T = m\frac{2\pi}{\omega_0}, \quad m = 1, 2, \ldots}$$

από όπου για $m = 1$ προκύπτει το ζητούμενο.

Φανταστικά Εκθετικά σήματα

Ορίζουν μία ορθογώνια βάση συναρτήσεων στον χώρο των σημάτων

Τα σήματα αυτά αποτελούν μία ορθογώνια βάση συναρτήσεων αφού αν θεωρήσουμε το άπειρο σύνολο αρμονικώς συσχετιζόμενων φανταστικών εκθετικών σημάτων

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = \ldots, -3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

και δύο οποιαδήποτε σήματα $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ και $\varphi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$ $(k \neq m)$, το εσωτερικό τους γινόμενο υπολογιζόμενο για χρονικό διάστημα μιας περιόδου είναι

$$P = \int_0^T \varphi_k^*(t)\varphi_m(t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{-jk\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{j(m-k)\omega_0}\left[e^{j(m-k)\omega_0(\frac{2\pi}{\omega_0})} - 1\right] = \frac{1}{j(m-k)\omega_0}\left[e^{j(m-k)2\pi} - 1\right] = 0$$

αφού για $m \neq k$ θα είναι

$$e^{j(m-k)2\pi} = \cos[2\pi(m-k)] + j\sin[2\pi(m-k)] = 1$$

Φανταστικά Εκθετικά σήματα

Αποτελούν αναπόσπαστη δομική μονάδα της ανάλυσης κατά Fourier

Επομένως κάθε συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα άπειρων εκθετικών σημάτων της μορφής

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}}$$

με τις συχνότητες αυτών των όρων να είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας ω_0.

Αυτό το συμπέρασμα αποτελεί και το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται η αναπαράσταση ενός σήματος από μία σειρά Fourier.

Φανταστικά Εκθετικά σήματα

Ενέργεια και ισχύς

Τα φανταστικά εκθετικά σήματα διαθέτουν άπειρη συνολική ενέργεια και πεπερασμένη ισχύ. Η ενέργεια ενός φανταστικού εκθετικού σήματος για χρονικό διάστημα μιας περιόδου υπολογίζεται ως

$$E_P = \int_0^T |x(t)|^2 dt = \int_0^T |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_0^T dt = T$$

και επειδή στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ υπάρχουν άπειρες περίοδοι, η ενέργεια απειρίζεται.

Ωστόσο, η μέση ισχύς του σήματος είναι πεπερασμένη και ίση με τη μονάδα, αφού έχουμε

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$$

Μιγαδικά Εκθετικά σήματα

Αποτελούνται από μία ημιτονοειδή και μία συνημιτονοειδή συνιστώσα

Στα σήματα αυτά, τόσο το πλάτος C όσο και η παράμετρος α είναι μιγαδικοί αριθμοί. Εκφράζοντας το πλάτος του σήματος στην πολική του μορφή $C = |C|e^{j\vartheta}$ και την παράμετρο α στην καρτεσιανή της μορφή $\alpha = r + j\omega_0$ το εκθετικό σήμα $x(t)$ διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{\alpha t} = |C|e^{j\vartheta} e^{r+j\omega_0 t} = |C|e^{j\vartheta} e^{rt} e^{j\omega_0 t} = (|C|e^{rt})e^{j(\omega_0 t+\vartheta)} \\ &= (|C|e^{rt}) \Big[\cos(\omega_0 t + \vartheta) + j\sin(\omega_0 t + \vartheta) \Big] \end{aligned}$$

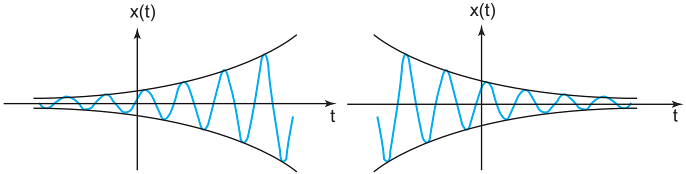
Στην περίπτωση κατά την οποία είναι $r = 0$ θα έχουμε $e^{rt} = 1$ και το σήμα θα λάβει τη μορφή

$$x(t) = |C|\cos(\omega_0 t + \vartheta) + j|C|\sin(\omega_0 t + \vartheta)$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα (για $\omega_0 \neq 0$) πως τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του σήματος είναι ημιτονοειδή σήματα.

Μιγαδικά Εκθετικά σήματα
Χαρακτηρίζονται από αύξουσα ή φθίνουσα χρονική μεταβολή

Εάν είναι $r > 0$ το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος αυξάνεται με τον χρόνο, ενώ εάν είναι $r < 0$ το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος μειώνεται με τον χρόνο.



$$x(t) = \left(|C| e^{rt}\right)\cos(\omega_0 t + \vartheta) \qquad (r > 0)$$

$$x(t) = \left(|C| e^{rt}\right)\cos(\omega_0 t + \vartheta) \qquad (r < 0)$$

Τυπικά παραδείγματα μιγαδικών εκθετικών σημάτων των οποίων τα πλάτη αυξάνονται και μειώνονται με τον χρόνο.

Ημιτονοειδή σήματα

Σχετίζονται με τα εκθετικά σήματα με τις εξισώσεις του Euler

Τα στοιχειώδη σήματα του ημιτόνου και του συνημιτόνου συνδέονται με τα φανταστικά εκθετικά σήματα δια μέσου του τύπου του Euler

$$Ae^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) + jA\sin(\omega_0 t)$$

Εάν συνδυάσουμε αυτή την εξίσωση με την σχέση

$$Ae^{-j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) - jA\sin(\omega_0 t)$$

τα δύο αυτά περιοδικά σήματα υπολογίζονται εύκολα ως

$$A\cos(\omega_0 t+\varphi) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right] = \frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}$$
$$A\sin(\omega_0 t+\varphi) = \frac{A}{2j}\left[e^{j(\omega_0 t-\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right] = \frac{A}{2j}e^{i\varphi}e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}$$

όπου έχουμε προσθέσει στις εξισώσεις και κάποια φάση προκειμένου να γίνουν πιο γενικές.

Γενικευμένες συναρτήσεις

Ορίζονται με την βοήθεια της επονομαζόμενης δοκιμαστικής συνάρτησης

Οι γενικευμένες συναρτήσεις δεν αποτελούν συναρτήσεις με την συνήθη έννοια του όρου. Αντίθετα, αποτελούν γενικεύσεις των κλασσικών συναρτήσεων, είναι γνωστές και ως κατανομές και ορίζονται από μία εξίσωση της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = N_f[\varphi(t)]$$

Με άλλα λόγια, μία γενικευμένη συνάρτηση συσχετίζει τον αριθμό $N_f[\varphi(t)]$ με μία συνάρτηση $\varphi(t)$ η οποία είναι γνωστή ως δοκιμαστική συνάρτηση και ανήκει στον διανυσματικό χώρο συναρτήσεων D.

Η δοκιμαστική συνάρτηση επιδέχεται αυθαίρετο πλήθος διαφορίσεων και χαρακτηρίζεται από μηδενική τιμή σε σημεία που βρίσκονται εκτός ενός πεπερασμένου και προσδιορισμένου διαστήματος τιμών. Τυπικό παράδειγμα δοκιμαστικής συνάρτησης είναι

$$\varphi(t,\alpha) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 - t^2}\right) & |\, t \,| < \alpha \\ 0 & |\, t \,| > \alpha \end{cases}$$

Ιδιότητες γενικευμένων συναρτήσεων

Οι γενικευμένες συναρτήσεις περιγράφονται από τις επόμενες ιδιότητες

- **Γραμμικότητα - Ομογένεια**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\Big[\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t)\Big]\,dt = \alpha_1\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi_1(t)\,dt+\alpha_2\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi_2(t)\,dt$$

- **Άθροισμα**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[g_1(t)+g_2(t)\Big]\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t)\varphi(t)\,dt$$

- **Χρονική μετατόπιση**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t_0)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t+t_0)\,dt$$

- **Κλιμάκωση** (πολλαπλασιασμός του ορίσματος επί α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)\,dt$$

- **Συμμετρία** (εφόσον η συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

Ιδιότητες γενικευμένων συναρτήσεων

Οι γενικευμένες συναρτήσεις περιγράφονται από τις επόμενες ιδιότητες

- Παραγώγιση γενικευμένης συνάρτησης. Αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg(t)}{dt} \varphi(t)\, dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt$$

όσον αφορά την πρώτη παράγωγο, ενώ για τη γενική περίπτωση της παραγώγου τάξεως n θα είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n g(t)}{dt^n}\, \varphi(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n}\, dt$$

- Γινόμενο γενικευμένης με συνήθη συνάρτηση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[g(t) f(t) \Big]\, \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \Big[f(t) \varphi(t) \Big]\, dt$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει υπό την προϋπόθεση πως η συνάρτηση $f(t)\varphi(t)$ αποτελεί μέλος του συνόλου των δοκιμαστικών συναρτήσεων.

- Συνέλιξη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau) d\tau \right] \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t-\tau) \varphi(t) \right] d\tau$$

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος
Διαθέτει μη μηδενικές τιμές στην περιοχή $t \geq 0$

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος ή μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

ή εναλλακτικά από τον τύπο του Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > 0 \\ 0.5 & \text{για } t = 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

προκειμένου να ορισθεί η συνάρτηση στη θέση $t = 0$. Σε κάποια βιβλία ωστόσο, η τιμή της συνάρτησης $u(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρείται ίση με 1.

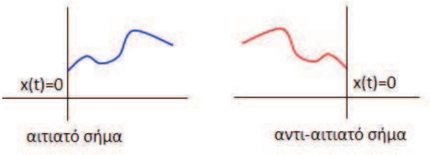
Η συνάρτηση $u(t)$ επιτρέπει τον ορισμό των αιτιατών σημάτων που ορίζονται για $t > 0$.

Η αιτιατή έκδοση $y(t)$ ενός μη αιτιατού σήματος $x(t)$ ορίζεται ως

$$y(t) = x(t)u(t) = \begin{cases} x(t) & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος

Επιτρέπει τον ορισμό των αιτιατών σημάτων



Κλιμάκωση: ορίζεται ως

$$Au(t) = \begin{cases} A & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Χρονική μετατόπιση κατά t_0: περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > t_0 \\ 0 & \text{για } t < t_0 \end{cases}$$

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος

Συσχέτιση της βηματικής συνάρτησης με την συνάρτηση προσήμου

Εάν προχωρήσουμε στην αλλαγή μεταβλητής $t \rightarrow -t$ έχουμε

$$u(-t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t < 0 \\ 0 & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

και προσθέτοντας τις συναρτήσεις $u(t)$ και $u(-t)$ λαμβάνουμε

$$u(t) - u(-t) = \begin{cases} +1 & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t = 0 \\ -1 & \text{για } t < 0 \end{cases} = \mathrm{sgn}(\mathrm{t})$$

όπου sgn(t) η συνάρτηση προσήμου η οποία δέχεται σαν όρισμα κάποια αριθμητική τιμή και επιστρέφει κάποια από τις τιμές +1, -1 και 0 ανάλογα με το εάν αυτή η τιμή είναι θετική, αρνητική ή μηδέν αντίστοιχα.

Η μοναδιαία συνάρτηση ράμπας
Συσχέτιση με την συνάρτηση βήματος

Η μοναδιαία συνάρτηση ράμπας ή συνάρτηση αναρρίχησης ορίζεται από την εξίσωση

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

και αποτελεί το ολοκλήρωμα της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος αφού παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

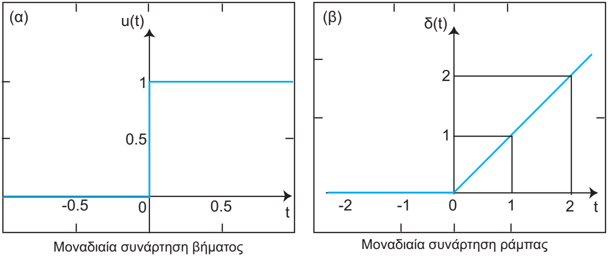
$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[tu(t)] = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Επομένως, οι συναρτήσεις $r(t)$ και $u(t)$ συνδέονται με την σχέση

$$\boxed{r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau}$$

Η μοναδιαία συνάρτηση ράμπας χαρακτηρίζεται και αυτή από τις ιδιότητες της κλιμάκωσης και της χρονικής μετατόπισης κατά t_0 οι οποίες αποδίδονται από τις σχέσεις

$$kr(t) = \begin{cases} kt & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases} \quad \& \quad r(t - t_0) = \begin{cases} t & \text{για } t > t_0 \\ 0 & \text{για } t < t_0 \end{cases}$$



Η βηματική συνάρτηση και η μοναδιαία συνάρτηση ράμπας

Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση

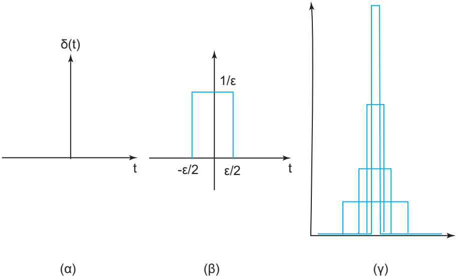
Αποτελεί θεμέλιο λίθο της θεωρίας επεξεργασίας σήματος

Επινοήθηκε από τον Άγγλο φυσικό Paul A.M. Dirac το 1930 και ορίζεται ως

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{για } t = 0 \\ 0 & \text{για } t \neq 0 \end{cases}$$

Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να προσομοιωθεί από ένα τετραγωνικό παλμό με εύρος $w = \varepsilon$ και ύψος $h = 1/\varepsilon$ έτσι ώστε στο όριο $\varepsilon \to 0$ να είναι $w \to 0$ και $h \to \infty$ με το εμβαδόν όμως που περικλείεται από αυτόν να είναι σε κάθε περίπτωση σταθερό και ίσο με τη μονάδα.

Επομένως η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι ίση με το μηδέν για $t \neq 0$ και απειρίζεται για $t = 0$.



Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση
Μαθηματικός τρόπος ορισμού της κρουστικής συνάρτησης

Η παραπάνω περιγραφή σε μαθηματική γλώσσα διατυπώνεται ως

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right]$$

όπου ο τετραγωνικός παλμός $\Pi(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |\, t \,| > 1/2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Είναι προφανές πως δεν υπάρχει καμία συνηθισμένη συνάρτηση που να χαρακτηρίζεται από τέτοιες ιδιότητες και στην πραγματικότητα, η συνάρτηση $\delta(t)$ περιγράφεται θεωρώντας τη ως γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των γενικευμένων συναρτήσεων προκύπτει εύκολα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\varphi(t) = 1$ και θέτοντας $t_0 = 0$, η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Επομένως το εμβαδόν που ορίζεται από την καμπύλη της συνάρτησης και τον οριζόντιο άξονα είναι πράγματι ίσο με την μονάδα.

Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση

Η σχέση της κρουστικής με την βηματική συνάρτηση

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της παραγώγισης των γενικευμένων συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \text{από όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε} \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Επομένως η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση αποτελεί την παράγωγο της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης η οποία με τη σειρά της αποτελεί το ολοκλήρωμα της κρουστικής συνάρτησης.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow u(t) \qquad u(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow \delta(t)$$

Διαγραμματική συσχέτιση της κρουστικής με την βηματική συνάρτηση

Τετραγωνικός και τριγωνικός παλμός

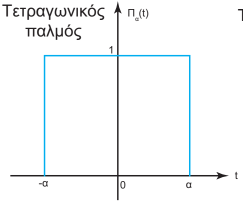
Αποτελούν σήματα συγκεκριμένου σχήματος και πεπερασμένης διάρκειας

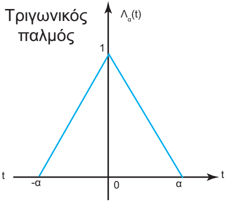
Η συνάρτηση του τετραγωνικού παλμού ορίζεται ως

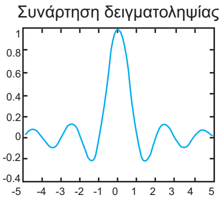
$$\Pi_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } |\, t \,| < \alpha \\ 0 & \text{για } |\, t \,| > \alpha \end{cases}$$

ενώ ο τριγωνικός παλμός περιγράφεται από την εξίσωση

$$\Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\, t \,|}{\alpha} & \text{για } |\, t \,| < \alpha \\ 0 & \text{για } |\, t \,| > \alpha \end{cases}$$







Συναρτήσεις sinc και comb
Σχετίζονται με την δειγματοληψία συνεχών σημάτων

Η συνάρτηση sinc δίδεται από την εξίσωση

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{για } t \neq 0 \\ 1 & \text{για } t = 0 \end{cases}$$

και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάλυση Fourier.

Η συνάρτηση comb ορίζεται ως μία ακολουθία χρονικά ισαπεχόντων μοναδιαίων κρουστικών αποκρίσεων της μορφής

$$\mathrm{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

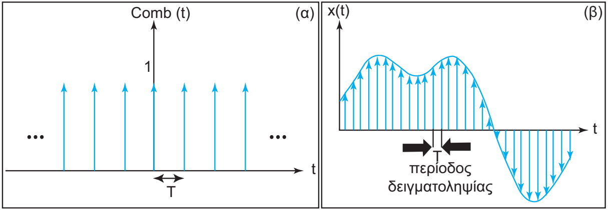
όπου $t_n = nT$ $(n = -\infty, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +\infty)$ ένα σύνολο διακεκριμένων χρονικών στιγμών οι οποίες θα πρέπει να αυξάνονται με ταχύτητα τουλάχιστον ίση με $\sqrt{|n|}$.

Δειγματοληψία με την συνάρτηση comb

Η δειγματοληψία στηρίζεται στην ομώνυμη ιδιότητα της κρουστικής συνάρτησης

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση comb μπορούμε να προχωρήσουμε στη **δειγματοληψία** οποιουδήποτε συνεχούς σήματος $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T ίση με την περίοδο της συνάρτησης comb. Το σήμα $y(t)$ που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία, έχει τη μορφή

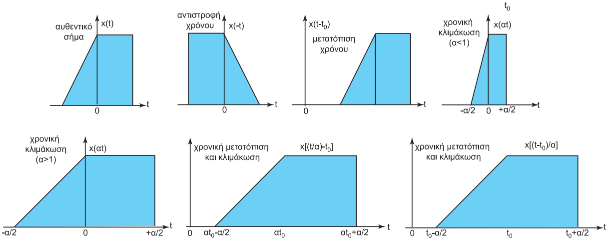
$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nT)}$$



Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί συνεχών σημάτων

Χρησιμοποιούνται σχεδόν σε όλες τις εφαρμογές επεξεργασίας σήματος

- Κλιμάκωση χρόνου: αυτός ο μετασχηματισμός οδηγεί στη δημιουργία του σήματος $y(t) = x(\alpha t)$ και συνίσταται στον πολλαπλασιασμό της ανεξάρτητης μεταβλητής t επί την τιμή μιας θετικής πραγματικής σταθεράς α.
- Αντιστροφή χρόνου: αυτός ο μετασχηματισμός οδηγεί στη δημιουργία του σήματος $y(t) = x(-t)$ το οποίο είναι αντεστραμμένο ως προς το χρόνο σε σχέση με το αρχικό σήμα.
- Μετατόπιση χρόνου: αυτός ο μετασχηματισμός συνίσταται στη μετατόπιση του σήματος κατά χρονικό διάστημα T η οποία μπορεί να είναι είτε χρονική υστέρηση εάν $T < 0$ είτε χρονική προώθηση εάν $T > 0$.



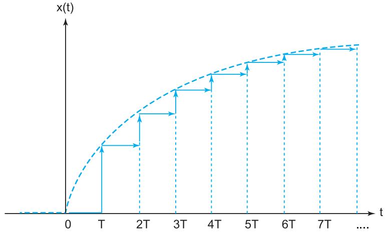
Χρήση της βηματικής συνάρτησης

Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης

Ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως άθροισμα πεπερασμένων ή άπειρων χρονικώς μετατοπισμένων βηματικών συναρτήσεων $u(t-t_0)$ δια μέσου της εξίσωσης

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\Big[u(t-nT) - u[t-(n+1)T]\Big]$$

όπου $x(nT)$ είναι η τιμή του σήματος στο υπ' αριθμόν n τμήμα του.



Προσέγγιση συνεχούς σήματος ως επαλληλία άπειρων βηματικών συναρτήσεων $u(t-t_0)$

Χρήση της βηματικής συνάρτησης
Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης

Για παράδειγμα, ένα απλό συνεχές σήμα όπως είναι το

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

γράφεται ως $x(t) = u(t-2) - u(t-4)$ ενώ το σύνθετο σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \kappa & \text{για } t \leq 1 \\ \ell & \text{για } 1 < t \leq 3 \\ \mu & \text{για } 3 < t \leq 6 \\ \nu & \text{για } t > 6 \end{cases}$$

διατυπώνεται ως ο γραμμικός συνδυασμός

$$x(t) = \kappa u(1-t) + \ell \Big[u(3-t) - u(1-t) \Big] + \mu \Big[u(6-t) - u(3-t) \Big] + \nu u(6-t)$$

Χρήση της κρουστικής συνάρτησης

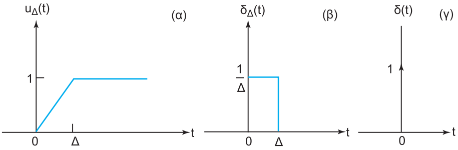
Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης

Η κρουστική συνάρτηση αποτελεί την παράγωγο της βηματικής συνάρτησης. Προσεγγίζοντας την βηματική συνάρτηση από την συνάρτηση $u_\Delta(t)$, η κρουστική συνάρτηση προσεγγίζεται ως

$$\delta_\Delta(t) = u'_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{για } 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση, η βηματική συνάρτηση $u(t)$ και η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ θα προσεγγίζονται ως

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t) \quad \text{και} \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

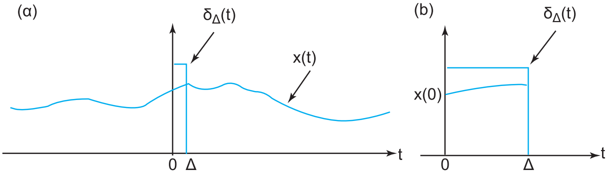


(α) Προσέγγιση της $u(t)$ από τη $u_\Delta(t)$, (β) προσέγγιση της $\delta(t)$ από τη $\delta_\Delta(t)$ και (γ) η πραγματική $\delta(t)$ και το σύμβολό της

Χρήση της κρουστικής συνάρτησης
Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης

Θεωρώντας το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t)$, αυτό θα είναι παντού ίσο με το μηδέν, εκτός από την περιοχή τιμών $0 \leq t < \Delta$.

Εάν το εύρος Δ είναι πάρα πολύ μικρό, η τιμή του σήματος $x(t)$ εντός αυτού του διαστήματος είναι προσεγγιστικά σταθερή και ίση με $x(0)$ - θα είναι λοιπόν $x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$.



(α) Τα σήματα $x(t)$ και $\delta_\Delta(t)$ σχεδιασμένα στο ίδιο διάγραμμα και (β) το μη μηδενικό τμήμα του γινομένου $x(t)\delta_\Delta(t)$ σε μεγέθυνση.

Κατά συνέπεια, ο πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με τη συνάρτηση $\delta_\Delta(t)$ αποκόπτει κάποιο τμήμα του σήματος.

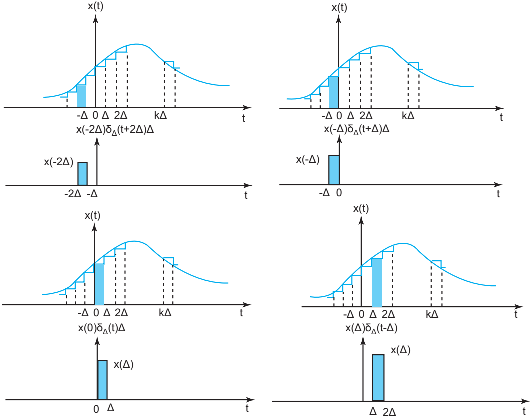
Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν πως ένα οποιοδήποτε συνεχές σήμα μπορεί να θεωρηθεί πως αποτελείται από τη συνένωση πολλών τέτοιων στοιχειωδών σημάτων, μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως κάθε αυθαίρετο συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να περιγραφεί από ένα άπειρο άθροισμα τέτοιων γινομένων της μορφής

$$\boxed{\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\delta_\Delta(t - n\Delta)\Delta}$$

Επομένως, ένα οποιοδήποτε συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να διατυπωθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων $\delta_\Delta(t)$.

Χρήση της κρουστικής συνάρτησης

Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης



Προσέγγιση αυθαίρετου σήματος $x(t)$ από γραμμικό συνδυασμό χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων $\delta_{\Delta}(t)$.

Χρήση της κρουστικής συνάρτησης

Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης

Στο όριο $\Delta \to 0$, το σήμα $\tilde{x}(t)$ προσεγγίζει το πραγματικό σήμα $x(t)$ - θα είναι λοιπόν

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\delta_\Delta(t - n\Delta)\Delta$$

ενώ το παραπάνω άθροισμα να μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.

Θέτοντας $\tau = n\Delta$, το m-ιοστό στοιχειώδες τμήμα του $x(t)$ που αντιστοιχεί στην περιοχή τιμών $t_1 < m\Delta < t_2$ όπου $t_1 = t - \Delta$ και $t_2 = t$ είναι ίσο με $x(t)\delta_\Delta(t - \tau)$.

Το εύρος του $\delta_\Delta(t - \tau)$ είναι $\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta$ και επειδή το ύψος του είναι $X(m\Delta)/\Delta$, το αντίστοιχο εμβαδόν επιφάνειας είναι $\Delta t[X(m\Delta)/\Delta] = X(m\Delta)$.

Χρήση της κρουστικής συνάρτησης

Περιγραφή συνεχούς σήματος με την βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης

Κατά συνέπεια, στο όριο $\Delta \to 0$, το σήμα $x(t)$ ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(\tau)\delta(t)$, δηλαδή με το ολοκλήρωμα αυτής της συνάρτησης με όρια από το $-\infty$ έως το $+\infty$ - θα είναι λοιπόν

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

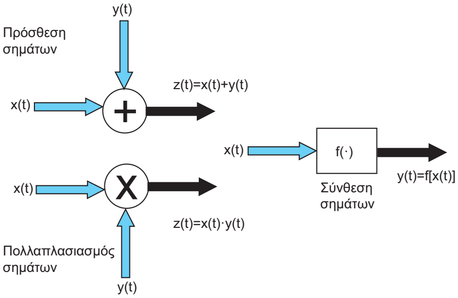
που είναι και το τελικό αποτέλεσμα.

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το οποιοδήποτε συνεχές σήμα $x(t)$ περιγράφεται με τη βοήθεια της κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$ και η πράξη που ορίζεται από αυτή είναι γνωστή ως συνέλιξη.

Θεμελιώδεις πράξεις συνεχών σημάτων
Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός και σύνθεση σημάτων

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός σημάτων συνίστανται στον υπολογισμό του αθροίσματος και του γινομένου των αντίστοιχων στιγμιαίων τιμών.

Η σύνθεση ακολουθεί τους κανόνες σύνθεσης των μαθηματικών συναρτήσεων.



Θεμελιώδεις πράξεις συνεχών σημάτων

Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

Η συνέλιξη δύο συνεχών σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$z(t) \doteq x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau$$

που είναι γνωστό ως ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

Εάν τα δύο σήματα είναι περιοδικά με κοινή περίοδο T, το παραπάνω ολοκλήρωμα απειρίζεται και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η πράξη της περιοδικής συνέλιξης που ορίζεται ως

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{0}^{T} x(t) y(t-\tau) d\tau$$

όπου T είναι η κοινή περίοδος των δύο σημάτων.

Άσκηση

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad \textit{και} \quad y(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

για τις περιπτώσεις $\alpha \neq \beta$ *και* $\alpha = \beta$.

Η συνέλιξη των δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ θα δίδεται από τη σχέση

$$z(t)=x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

όπου

$$u(\tau)=\begin{cases} 1 & \text{για } \tau>0 \\ 0 & \text{για } \tau<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\tau)=\begin{cases} 1 & \text{για } t-\tau>0 \\ 0 & \text{για } t-\tau<0 \end{cases}$$

Θεμελιώδεις πράξεις συνεχών σημάτων

Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι διάφορο του μηδενός στην περιοχή τιμών $0 < t < \tau$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = e^{-\beta t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau} d\tau = e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha} \right]_0^t \\ &= \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} \left[e^{(\beta-\alpha)t} - 1 \right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} u(t) \leftarrow \text{ (γιατί;)} \end{aligned}$$

Εάν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $\alpha = \beta$ η συνέλιξη $z(t)$ λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα του Del' Hospital βρίσκουμε ότι

$$z(t) = \lim_{\alpha\to\beta} \left\{ \frac{\dfrac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)}{\dfrac{d}{d\alpha}(\beta-\alpha)} u(t) \right\} = -\lim_{\alpha\to\beta} \left\{ -te^{-\alpha t} u(t) \right\} = te^{-\beta t} u(t)$$

$x(t)$	$y(t)$	$z(t) = x(t) * y(t)$
$e^{\alpha t}u(t)$	$e^{\beta t}u(t)$	$\dfrac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - b}\,u(t), \quad (\alpha \neq \beta)$
$t^N u(t)$	$e^{\alpha t}u(t)$	$\dfrac{N! e^{\alpha t}}{\alpha^{N+1}} u(t) - \sum_{k=0}^{N} \dfrac{N!\, t^{N-k}}{\alpha^{k+1}(N-k)!} u(t)$
$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\dfrac{M!\, N!}{(M+N+1)!}\, t^{M+N+1} u(t)$
$te^{\alpha t}u(t)$	$e^{\beta t}u(t)$	$\dfrac{e^{\beta t} - e^{\alpha t} + (\alpha - \beta)te^{\alpha t}}{(\alpha - \beta)^2}\, u(t)$
$e^{\alpha t}u(t)$	$e^{\beta t}u(-t)$	$\dfrac{e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)}{\beta - \alpha}, \quad \Re(\beta) > \Re(\alpha)$
$e^{\alpha t}u(-t)$	$e^{\beta t}u(-t)$	$\dfrac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\beta - \alpha} u(-t)$

Ιδιότητες της συνέλιξης
Για την απόδειξη των ιδιοτήτων ανατρέξτε στην ομώνυμη ενότητα του βιβλίου

- **Ομογένεια**

$$\Big[\alpha x(t)\Big] * y(t) = \alpha\Big[x(t) * y(t)\Big] = x(t) * \Big[\alpha y(t)\Big]$$

- **Αντιμεταθετική**

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- **Προσεταιριστική**

$$[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- **Επιμεριστική**

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

- **Γραμμικότητα**

Εάν είναι $z_1(t) = x_1(t) * y(t)$, $z_2(t) = x_2(t) * y(t)$ και $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ τότε

$$z(t) = x(t) * y(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t)$$

Ιδιότητες της συνέλιξης

Για την απόδειξη των ιδιοτήτων ανατρέξτε στην ομώνυμη ενότητα του βιβλίου

- Εμβαδόν επιφάνειας: Εάν είναι $z(t) = x(t) * y(t)$, τότε το εμβαδόν της καμπύλη της $z(t)$ ισούται με το γινόμενο των εμβαδών των καμπυλών των $x(t)$ και $y(t)$.
- Εύρος: Η χρονική διάρκεια της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ των $x(t)$ και $y(t)$ με πεπερασμένες διάρκειες T_1 και T_2 είναι $T_1 + T_2$.
- Κλιμάκωση: Θεωρώντας τρία συνεχή σήματα $x(t)$, $y(t)$ και $z(t) = x(t) * y(t)$ αποδεικνύεται ότι

$$x\left(\frac{t}{\alpha}\right) * y\left(\frac{t}{\alpha}\right) = |\alpha|\, z\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

- Διαφόριση:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$$

- Ουδέτερο στοιχείο: $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$
- Χρονική αμεταβλητότητα

$$z(t - t_0) = x(t - t_0) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0) y(t - \tau) d\tau$$

- Εφαρμόζουμε πάνω στο σήμα $y(\tau)$ την πράξη της χρονικής αντιστροφής κατασκευάζοντας το σήμα $y(-\tau)$.

- Εφαρμόζουμε πάνω στο σήμα $y(-\tau)$ την πράξη της χρονικής μετατόπισης κατά χρονικό διάστημα t, κατασκευάζοντας το σήμα $y(t-\tau)$.

- Πολλαπλασιάζουμε το σήμα $y(t-\tau)$ με το σήμα $x(\tau)$ κατασκευάζοντας το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$.

- Ολοκληρώνουμε το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, υπολογίζοντας τη συνέλιξη ως

$$\boxed{z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

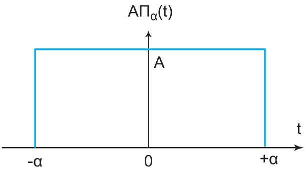
Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

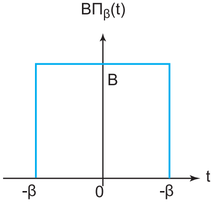
Συνέλιξη τετραγωνικών παλμών

Άσκηση

Να υπολογίσετε με γραφικό τρόπο τη συνέλιξη μεταξύ των τετραγωνικών παλμών για την περίπτωση $\alpha > \beta$ όπου

$$x(t) = A\Pi_\alpha(t) = \begin{cases} A & |\, t \,| < \alpha \\ 0 & |\, t \,| > \alpha \end{cases} \qquad y(t) = B\Pi_\beta(t) = \begin{cases} B & |\, t \,| < \beta \\ 0 & |\, t \,| > \beta \end{cases}$$

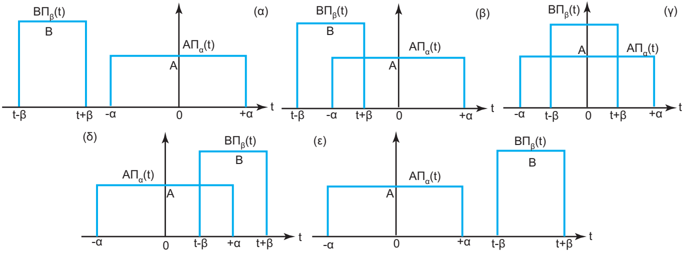




Οι τετραγωνικοί παλμοί $A\Pi_\alpha(t)$ και $B\Pi_\beta(t)$

Για τον υπολογισμό της συνέλιξης τοποθετούμε τον παλμό $B\Pi_{\beta}(t)$ στα αριστερά του $A\Pi_{\alpha}(t)$ και στη συνέχεια τον αφήνουμε να ολισθήσει επί του οριζόντιου άξονα και να προσπεράσει τον παλμό $A\Pi_{\alpha}(t)$ έτσι ώστε να βρεθεί στα δεξιά του και χωρίς επικάλυψη.

Διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις:



Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

Συνέλιξη τετραγωνικών παλμών

- Περίπτωση 1η: $t + \beta \leq -\alpha$ ή ισοδύναμα $t \leq -(\alpha+\beta)$ [εικόνα (α)]: Τα δύο σήματα δεν επικαλύπτονται και επομένως θα είναι $z(t) = 0$.

- Περίπτωση 2η: $-(\alpha+\beta) < t \leq -(\alpha-\beta)$ [εικόνα (β)]: Τα δύο σήματα επικαλύπτονται για την περιοχή τιμών $-\alpha \leq \tau \leq t+\beta$ και επομένως θα είναι

$$z(t) = \int_{-\alpha}^{t+\beta} AB d\tau = AB \int_{-\alpha}^{t+\beta} d\tau = AB(t+\alpha+\beta)$$

- Περίπτωση 3η: $-(\alpha-\beta) < t \leq (\alpha-\beta)$ [εικόνα (γ)]. Τα δύο σήματα επικαλύπτονται για την περιοχή τιμών $-\beta \leq \tau \leq +\beta$ και επομένως θα είναι

$$z(t) = \int_{-\beta}^{+\beta} AB d\tau = AB \int_{-\beta}^{+\beta} d\tau = 2\beta AB$$

Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης
Συνέλιξη τετραγωνικών παλμών

- Περίπτωση 4η: $(\alpha - \beta) < \tau \leq (\alpha + \beta)$ [εικόνα (δ)]. Οι τετραγωνικοί παλμοί επικαλύπτονται για την περιοχή τιμών $t - \beta \leq \tau < \alpha$ και επομένως

$$z(t) = \int_{t-\beta}^{\alpha} AB d\tau = AB \int_{t-\beta}^{\alpha} d\tau = AB(-t + \alpha + \beta)$$

- Περίπτωση 5η: $t > (\alpha + \beta)$ [εικόνα (ε)]. Τα δύο σήματα δεν επικαλύπτονται και επομένως θα είναι $z(t) = 0$.

Συνδυαζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα παίρνουμε

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \leq -(\alpha + \beta) \\ AB(t + \alpha + \beta) & \text{για } -(\alpha + \beta) \leq t < -(\alpha - \beta) \\ 2\beta AB & \text{για } -(\alpha - \beta) \leq t < (\alpha - \beta) \\ AB(-t + \alpha + \beta) & \text{για } (\alpha - \beta) \leq t < (\alpha + \beta) \\ 0 & \text{για } t > (\alpha + \beta) \end{cases}$$

Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

Συνέλιξη τετραγωνικών παλμών

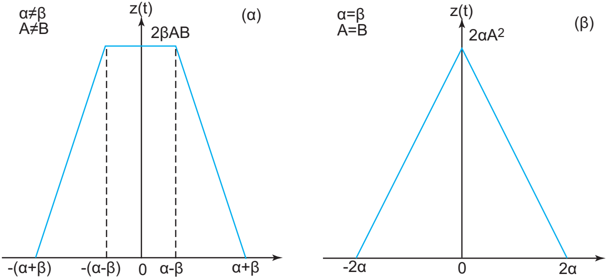
Επομένως, η συνέλιξη των τετραγωνικών παλμών $A\Pi_\alpha(t)$ και $B\Pi_\beta(t)$ είναι ένας παλμός σχήματος τραπεζίου με μεγάλη βάση που ορίζεται από τα σημεία

$$[-(\alpha+\beta), 0] \quad \text{και} \quad [(\alpha+\beta), 0]$$

μικρή βάση που ορίζεται από τα σημεία

$$[-(\alpha-\beta), 2\beta AB] \quad \text{και} \quad [(\alpha-\beta), 2\beta AB]$$

και ύψος $2\beta AB$.



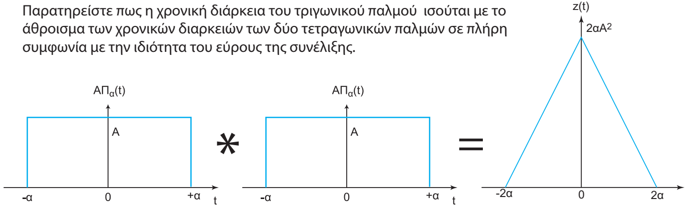
Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

Συνέλιξη ταυτόσημων τετραγωνικών παλμών

Εάν είναι $\alpha = \beta$ και $A = B$, το μήκος της μικρής βάσης του τραπεζίου μηδενίζεται και το τραπέζιο εκφυλίζεται σε τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $A(-2\alpha, 0)$, $B(2\alpha, 0)$ και $\Gamma(0, 2\alpha A^2)$. Επομένως, η συνέλιξη δύο ταυτόσημων τετραγωνικών παλμών είναι ένας τριγωνικός παλμός η εξίσωση του οποίου προκύπτει από την προηγούμενη για $\alpha = \beta$ και $A = B$ και είναι η

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \leq -2\alpha \\ A^2(2\alpha + t) & \text{για } -2\alpha < t < 0 \\ A^2(2\alpha - t) & \text{για } 0 < t < 2\alpha \\ 0 & \text{για } t \geq 2\alpha \end{cases} = \begin{cases} A^2(2\alpha - \mid t \mid) & \mid t \mid < 2\alpha \\ 0 & \mid t \mid \geq 2\alpha \end{cases}$$

Παρατηρείστε πως η χρονική διάρκεια του τριγωνικού παλμού ισούται με το άθροισμα των χρονικών διαρκειών των δύο τετραγωνικών παλμών σε πλήρη συμφωνία με την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης.



Ετεροσυσχέτιση και αυτοσυσχέτιση

Οι βασικοί ορισμοί για πραγματικά και μιγαδικά σήματα

Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται ως

$$\varphi_{xy}(t) \doteq x(t) \diamond y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

Η ετεροσυσχέτιση ενός σήματος $x(t)$ με τον εαυτό του, είναι γνωστή ως αυτοσυσχέτιση και ορίζεται ως

$$\varphi_{xx}(t) \doteq x(t) \diamond x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau$$

Οι παραπάνω εξισώσεις για μιγαδικά σήματα γράφονται

$$\varphi_{xy}(t) \doteq x(t) \diamond y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(\tau - t)d\tau$$

$$\varphi_{xx}(t) \doteq x(t) \diamond x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau - t)d\tau$$

όπου $(*)$ ο τελεστής της μιγαδικής συζυγίας.

Για $t = 0$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ταυτίζεται με την ενέργεια του σήματος αφού

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 \, d\tau = E_\infty$$

Για σήματα ισχύος που χαρακτηρίζονται από άπειρη ενέργεια η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως

$$R_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(\tau)x^*(\tau - t)d\tau$$

και για $t = 0$ ταυτίζεται με τη μέση ισχύ του σήματος, αφού θα έχουμε

$$R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(\tau)x^*(\tau)d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(\tau)|^2 \, d\tau = P_x$$

Ετεροσυσχέτιση και αυτοσυσχέτιση

Ετεροσυσχέτιση περιοδικών σημάτων - ασυσχέτιστα σήματα

Για τα περιοδικά σήματα που είναι σήματα ισχύος, το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται για χρονικό διάστημα μιας περιόδου - θα είναι λοιπόν

$$\boxed{R_{xx}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x^*(\tau - t)d\tau}$$

όπου $T = 2\pi/\omega_0$ είναι η περίοδος του σήματος.

Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων μπορεί να υπολογιστεί και με την εφαρμογή της γραφικής μεθόδου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνέλιξης και η τιμή της είναι διάφορη του μηδενός μόνο σε εκείνες τις περιοχές του άξονα του χρόνου στις οποίες τα δύο σήματα επικαλύπτονται.

Εάν η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων είναι διάφορη του μηδενός, τα σήματα

χαρακτηρίζονται ως πλήρως ασυσχέτιστα μεταξύ τους.

Θεωρώντας N συνεχή σήματα $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ που μοιράζονται κάποιες κοινές ιδιότητες, μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο σημάτων R ως το σύνολο

$$R = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots\}$$

Ιδιαίτερα σημαντικοί χώροι αναπαράστασης σημάτων είναι οι γραμμικοί χώροι που ικανοποιούν τις επόμενες ιδιότητες:

- Οι τιμές του σήματος $x(t)$ είναι όλες πραγματικές.
- Το σήμα $z(t) = x(t) + y(t)$ ανήκει στο χώρο R.
- Για κάθε σήμα $x(t) \in R$, το σήμα $y(t) = \alpha x(t)$ όπου $\alpha \in R$ ανήκει στο χώρο R.
- Υφίσταται ουδέτερο στοιχείο $\emptyset(t)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x(t) \in R$ να είναι $x(t) + \emptyset(t) = x(t)$

Χώροι αναπαράστασης σημάτων
Διανύσματα βάσης

Για κάθε γραμμικό χώρο σημάτων R, υπάρχει ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων βάσης $\{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots\}$ που επιτρέπουν την αναπαράσταση του κάθε στοιχείου $y(t) \in R$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό της μορφής

$$y(t) = \sum_i \beta_i x_i(t)$$

με τους συντελεστές β_i του γραμμικού συνδυασμού να είναι οι προβολές του σήματος $y(t)$ πάνω στα διανύσματα βάσης.

Σημειώστε, πως όλες οι ιδιότητες, έννοιες και οι τεχνικές που σχετίζονται με διανυσματικούς χώρους και είναι γνωστές από την άλγεβρα (βάση και διάσταση, ορθοκανονικοποίηση και διανυσματικοί υποχώροι) ισχύουν ως έχουν και για τον διανυσματικό χώρο των συνεχών σημάτων.

Εάν ο χώρος R είναι σταθμητός ή νορμικός θα ορίζεται επί αυτού μία συνάρτηση μέτρου με τις επόμενες ιδιότητες.

- Το μέτρο κάθε διανύσματος $x(t) \in R$ είναι μη αρνητικό δηλαδή $|x(t)| \geq 0$.
- Το μέτρο ενός διανύσματος $x(t)$ είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν είναι $x(t) = \emptyset(t)$.
- Για κάθε σήμα $x(t) \in R$ και για κάθε πραγματική σταθερά α ισχύει η σχέση $|\alpha x(t)| = |\alpha||x(t)|$.
- Τα μέτρα δύο οποιωνδήποτε συνεχών σημάτων $x(t), y(t) \in R$ ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα η οποία διατυπώνεται ως

$$\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$$

Χώροι αναπαράστασης σημάτων

Συναρτήσεις νόρμας σήματος

- Νόρμα L_1 που ορίζεται ως

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt$$

- Νόρμα L_2 που δίδεται από τη σχέση

$$\|x(t)\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} & \text{για σήμα πραγματικών τιμών} \\ \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt} & \text{για σήμα μιγαδικών τιμών} \end{cases}$$

- Νόρμα L_p που δίδεται από την εξίσωση

$$\|x(t)\|_p = \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Χώροι αναπαράστασης σημάτων
Συναρτήσεις μέτρου σήματος (συνέχεια)

- Νόρμα L_∞ που ορίζεται ως

$$\|x(t)\|_\infty = \begin{cases} \max\limits_t |x(t)| & \text{εάν το μέγιστο υπάρχει} \\ \sup\limits_t |x(t)| & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

- Νόρμα L_{rms} που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x(t)\|_{\text{rms}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt}$$

Χρησιμοποιώντας το μέτρο διανύσματος ορίζουμε τον μετρικό χώρο ως ένα γραμμικό χώρο αναπαράστασης διανυσματικών σημάτων στον οποίο για κάθε ζεύγος σημάτων $x(t), y(t) \in R$ υπάρχει ένας μη αρνητικός αριθμός $d(x,y)$ που εκφράζει την απόστασή τους και ορίζεται ως $d(x,y) \equiv \|x - y\|$.

Χώροι αναπαράστασης σημάτων

Ιδιότητες απόστασης σε μετρικό χώρο

Η απόσταση δύο διανυσμάτων οριζόμενων επί μετρικού χώρου ικανοποιεί τις επόμενες τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- Συμμετρία, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να είναι $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x(t), y(t) \in R$.
- Ιδιότητα θετικά ορισμένου, σύμφωνα με την οποία για κάθε $x(t), y(t) \in R$ θα πρέπει να είναι $d(x, y) \geq 0$ (ας σημειωθεί πως για $x(t) = y(t)$ είναι $d(x, y) = 0$).
- Τριγωνική ανισότητα, σύμφωνα με την οποία για κάθε $x(t), y(t), z(t) \in R$ θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

ή σε μία ισοδύναμη διατύπωση,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Εσωτερικό γινόμενο σημάτων

Ορίζεται με το συνήθη τρόπο όπως σε κάθε διανυσματικό χώρο

Το εσωτερικό γινόμενο δύο συνεχών και πραγματικών σημάτων ενέργειας άπειρης διάρκειας ορίζεται ως

$$< x, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt$$

και χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $< x, y >=< y, x >$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).
  Εάν τα σήματα είναι μιγαδικά τότε είναι $< x, y >=< y, x >^*$.
- $< x, y > \geq 0$
- $< x, (\alpha y + z) >= \alpha < x, y > + < x, z >$
- $| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwartz ή Cauchy-Bunyakovski)