Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$
(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ εφαρμόζεται επί μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ και ορίζεται ως

$$\mathcal{X}(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

δηλαδή ως μια δυναμοσειρά απείρων όρων της μιγαδικής ποσότητας z.

Ο συμβολισμός $x[n] \leftrightarrows \mathcal{X}(z)$ υποδηλώνει πως ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του διακριτού σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $\mathcal{X}(z)$ είναι το σήμα $x[n]$.

Εάν συγκρίνουμε τις εξισώσεις ορισμού των μετασχηματισμών Laplace και $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad \text{και} \quad \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως

ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ αποτελεί το ισοδύναμο του μετασχηματισμού Laplace στο πεδίο του διακριτού χρόνου

και στην πραγματικότητα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ από το μετασχηματισμό Laplace ως εξής:

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Οι βασικές εξισώσεις

- Αντικαθιστούμε το συνεχή χρόνο t με το διακριτό χρόνο n και το σύμβολο του ολοκληρώματος με το σύμβολο του αθροίσματος οπότε θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-\sigma n} e^{-j\omega n}$$

- Ορίζουμε τη βοηθητική μεταβλητή $\sigma = \ln(r)$ οπότε θα είναι

$$e^{-\sigma n} = e^{-n\ln(r)} = [e^{\ln(r)}]^{-n} = r^{-n}$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{X}(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$$

- Ορίζουμε τη μιγαδική μεταβλητή $z = re^{j\omega}$ καταλήγοντας στην έκφραση

$$\mathcal{X}(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η περιοχή σύγκλισης

Η βασική συνέπεια της παραπάνω μετατροπής του ενός μετασχηματισμού στον άλλο, είναι το σχήμα της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

Στο μετασχηματισμό Laplace η μιγαδική μεταβλητή s ορίζεται ως $s = \sigma + j\omega$ και η περιοχή σύγκλισης αποτελείται από κατακόρυφες περιοχές του μιγαδικού επιπέδου.

Στο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$, η μιγαδική μεταβλητή $z = re^{-j\omega}$ είναι εκπεφρασμένη σε πολική μορφή και η περιοχή σύγκλισης έχει τη μορφή περιφέρειας κύκλου.

Παρατηρώντας ότι $\sigma = -\ln(r)$, η τιμή $\sigma = 0$ αντιστοιχεί στην τιμή $r = 1$ και επομένως

ο μοναδιαίος κύκλος έχει για το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ τον ίδιο ρόλο που έχει ο κατακόρυφος άξονας του μιγαδικού επιπέδου για το μετασχηματισμό Laplace

Ομοίως οι κατακόρυφες γραμμές που στο μετασχηματισμό Laplace ανήκουν στο αριστερό ή δεξιό ημιεπίπεδο, στο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ αντιστοιχούν σε περιφέρειες που βρίσκονται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου αντίστοιχα.

Τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν άμεσα και από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού.

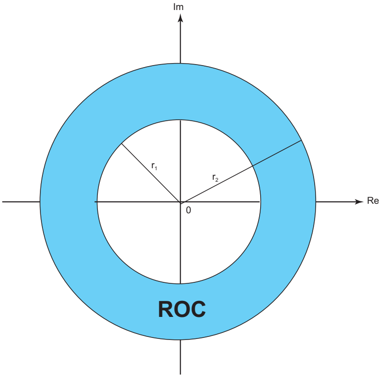
Γνωρίζουμε πως η σύγκλιση μιας δυναμοσειράς προϋποθέτει το χαρακτηρισμό της ως απολύτως αθροίσιμη δηλαδή

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \sum_{n-\infty}^{\infty} |x(n)||z|^{-n} < \infty$$

Εάν υπάρχει κάποιο $z = z_1$ για το οποίο η δυναμοσειρά συγκλίνει, τότε, αυτή η σύγκλιση θα επιτυγχάνεται και για όλα τα z τέτοια ώστε $z = |z_1|$. Αλλά η τελευταία σχέση περιγράφει κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, με ακτίνα $r = |z_1|$.

Γενικεύοντας,

η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $x[n]$ θα είναι πάντοτε ένας δακτύλιος ορισμένος επί του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την αρχή $z = 0$ και ακτίνες $r_1 = |z_1|$ για τον εσωτερικό κύκλο και $r_2 = |z_2|$ για τον εξωτερικό κύκλο



Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $x[n]$ είναι ένας δακτύλιος του μιγαδικού επιπέδου με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική ακτίνα r_2.

ROC==>Region of Convergence

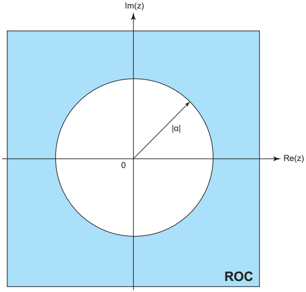
Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$
Παράδειγμα

Θεωρώντας το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] = \alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 0z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$



Η ακολουθία συγκλίνει για τιμές

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \quad \text{ή} \quad |z| > |\alpha|$$

και η περιοχή

σύγκλισης απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Πόλοι και μηδενικές τιμές
Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Οι μηδενικές τιμές του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(z)$ είναι οι τιμές του z που ικανοποιούν την εξίσωση $\mathcal{X}(z) = 0$.

Οι πόλοι
του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(z)$ είναι οι τιμές του z στις οποίες απειρίζεται η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$.

Διατυπώνοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ ως

$$\mathcal{X}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_M z^{-M}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_N z^{-N}} = \left\{ \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} \right\} \Big/ \left\{ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\}$$

και υποθέτοντας ότι $\alpha_0 \neq 0$ και $\beta_0 \neq 0$, μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τις μηδενικές τιμές γράφοντας την παραπάνω σχέση ως

$$\mathcal{X}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 z^{-M}}{\alpha_0 z^{-N}} \left\{ \frac{z^M + \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right) z^{M-1} + \left(\frac{\beta_2}{\beta_0}\right) z^{M-2} + \cdots + \left(\frac{\beta_M}{\beta_0}\right)}{z^N + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) z^{N-1} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right) z^{N-2} + \cdots + \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)} \right\}$$

ή ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \frac{\beta_0}{\alpha_0}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)}z^{-M+N}\\ &= G\times\left\{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)\right\}\Big/\left\{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)\right\}\times z^{N-M}\end{aligned}$$

$(G=\beta_0/\alpha_0)$. Επομένως ο μετασχηματισμός $\mathcal{X}(z)$ διαθέτει

- M πεπερασμένες μηδενικές τιμές στις θέσεις $z=z_1,z_2,\ldots,z_M$
- N πεπερασμένους πόλους στις θέσεις $z=p_1,p_2,\ldots,p_N$
- $|N-M|$ μηδενικές τιμές (εάν $N>M$) ή πόλους (εάν $N<M$) στην αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z=0$.

Οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές μπορούν επίσης να εμφανιστούν και για $z\to\infty$

- εάν για την τιμή $z\to\infty$ ισχύει η σχέση $X(\infty)=0$ η τιμή αντιστοιχεί σε μηδενικό
- εάν για την τιμή αυτή είναι $X(\infty)\to\infty$, η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε πόλο.

Πόλοι και μηδενικές τιμές

Παράδειγμα υπολογισμού

Άσκηση

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ του

$$x[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \textit{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1-(\alpha z^{-1})^M}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z^M - \alpha^n}{z^{M-1}(z-\alpha)}$$

Θεωρώντας ότι $\alpha > 0$, η εξίσωση $z^M = \alpha^M$ έχει M ρίζες στις θέσεις

$$z_k = \alpha \exp\left(\frac{j2\pi k}{M}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, M-1)$$

Παρατηρούμε πως η ρίζα που αντιστοιχεί στην τιμή $k = 0$ είναι η $z_0 = \alpha$.

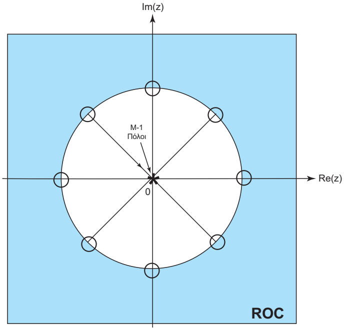
Η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ διαθέτει επίσης ένα πόλο στην ίδια θέση που θα εξουδετερώσει την παραπάνω μηδενική τιμή.

Πόλοι και μηδενικές τιμές
Παράδειγμα υπολογισμού

Επομένως ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{M-1})}{z^{M-1}}$$

και διαθέτει ένα πόλο πολλαπλότητας $q = M - 1$ στη θέση $z = 0$ και $M - 1$ μηδενικές τιμές, οι θέσεις των οποίων για $M = 8$ απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα.



Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του διακριτού σήματος $x[n] = (1+n)u[n]$.

Ο μετασχηματισμός Z του σήματος δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n)\, u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n}$$

Τα δύο αθροίσματα διαθέτουν κοινή περιοχή σύγκλισης $|z| > 1$, και υπολογίζονται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{z}{z-1}$$

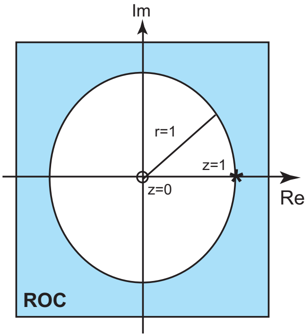
$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1/z}{[1-(1/z)]^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ διαθέτει μία διπλή μηδενική τιμή στη θέση $z = 0$ και ένα διπλό πόλο στη θέση $p = 1$.

Η περιοχή σύγκλισης και το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών απεικονίζονται στη συνέχεια.



Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών του διακριτού σήματος $x[n] = n\alpha^n \sin(\omega n) u[n]$.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\alpha^n \sin(\omega n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n \sin(\omega n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n \left[\frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} \right] z^{-n} = \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{j\omega n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{-j\omega n} z^{-n} \right]
\end{aligned}
$$

Το πρώτο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$
\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\alpha}{z} e^{j\omega} \right)^n = \frac{\alpha e^{j\omega}/z}{\left(1 - \frac{\alpha}{z} e^{j\omega}\right)^2} = \frac{\alpha e^{j\omega}/z}{\frac{(z - \alpha e^{j\omega})^2}{z^2}} = \frac{\alpha z e^{j\omega}}{(z - \alpha e^{j\omega})^2}
$$

με τη σειρά να συγκλίνει για τιμές $|z| > |\alpha|$, ενώ για το δεύτερο άθροισμα θα έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n e^{-j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\alpha}{z}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{\alpha e^{-j\omega}/z}{\left(1-\frac{\alpha}{z}e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}/z}{\frac{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}{z^2}} \frac{\alpha z e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

με την ίδια περιοχή σύγκλισης. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{\alpha z e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{\alpha z e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}\right] = \frac{\alpha z}{2j}\left[\frac{e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2}\right]$$

με την παράσταση εντός των αγκυλών να υπολογίζεται ως (ανατρέξτε στη σελίδα 466)

$$A = \frac{e^{j\omega}}{(z-\alpha e^{j\omega})^2} - \frac{e^{-j\omega}}{(z-\alpha e^{-j\omega})^2} = \cdots\cdots\cdots = \frac{(z^2-\alpha^2)2j\sin(\omega)}{[z^2-2\alpha z\cos(\omega)+\alpha^2]^2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(z)$ θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(z) = \frac{\alpha z}{2j}\frac{(z^2-\alpha^2)2j\sin(\omega)}{[z^2-2\alpha z\cos(\omega)+\alpha^2]^2} = \frac{\alpha z(z^2-\alpha^2)\sin(\omega)}{[z^2-2\alpha z\cos(\omega)+\alpha^2]^2}$$

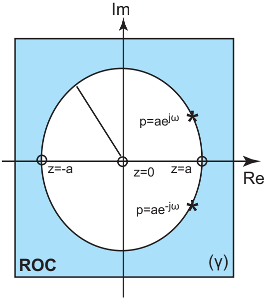
με περιοχή σύγκλισης $|z| > |\alpha|$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ διαθέτει τρεις μηδενικές τιμές στις θέσεις $z_1 = 0$ και $z_{2,3} = \pm\alpha$ ενώ οι πόλοι της αποτελούν ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 - 2\alpha z \cos(\omega) + \alpha^2 = 0$$

που είναι μια δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς z με διακρίνουσα $\Delta = -4\alpha^2 \sin^2(\omega)$ και ρίζες $p_1 = \alpha e^{i\omega}$ και $p_2 = \alpha e^{-i\omega}$.

Παρατηρώντας πως αυτή η έκφραση του παρονομαστή είναι υψωμένη εις το τετράγωνο, οι πόλοι $p_{1,2}$ έχουν πολλαπλότητα $m = 2$.



Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του διακριτού σήματος $x[n] = Ar^n \cos(\omega n + \varphi)u[n]$ (για την περιοχή τιμών $0 < r < 1$).

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού έχουμε (ανατρέξτε στη σελίδα 467)

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ar^n \cos(\omega n + \varphi)u[n]z^{-n} = A\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[\frac{e^{j(\omega n+\varphi)} + e^{-j(\omega n+\varphi)}}{2}\right] z^{-n}$$

$$= \frac{A}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{j\omega n} e^{j\varphi} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-j\omega n} e^{-j\varphi} z^{-n}\right\}$$

με τα δύο αθροίσματα (μετά από απλές πράξεις) να υπολογίζονται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{+j\omega n} e^{+j\varphi} z^{-n} = \frac{ze^{j\varphi}}{z - re^{j\omega}} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-j\omega n} e^{-j\varphi} z^{-n} = \frac{ze^{-j\varphi}}{z - re^{-j\omega}}$$

Τα αθροίσματα διαθέτουν την ίδια περιοχή σύγκλισης $\mid z \mid > r$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\mathcal{X}(z) = \frac{A}{2}\left(\frac{ze^{j\varphi}}{z - re^{j\omega}} + \frac{ze^{-j\varphi}}{z - re^{-j\omega}}\right) = \frac{Az}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{z - re^{j\omega}} + \frac{e^{-j\varphi}}{z - re^{-j\omega}}\right)$$

με την παράσταση εντός των παρενθέσεων να υπολογίζεται ως (σελίδα 467)

$$A = \frac{e^{j\varphi}}{z - re^{j\omega}} + \frac{e^{-j\varphi}}{z - re^{-j\omega}} = \cdots\cdots = \frac{2z\cos(\varphi) - 2r\cos(\omega - \varphi)}{z^2 - 2rz\cos(\omega) + r^2}$$

Επομένως, η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ για το διακριτό σήμα $x[n]$ θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(z) = \frac{Az}{2}\left\{\frac{2z\cos(\varphi) - 2r\cos(\omega - \varphi)}{z^2 - 2rz\cos(\omega) + r^2}\right\} = \frac{Az[z\cos(\varphi) - r\cos(\omega - \varphi)]}{z^2 - 2rz\cos(\omega) + r^2}$$

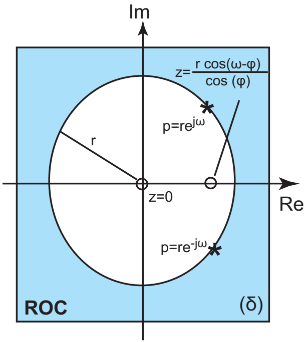
που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ διαθέτει δύο απλές μηδενικές τιμές στις θέσεις $z = 0$ και $z = r\cos(\omega - \varphi)/\cos(\varphi)$ ενώ οι πόλοι της είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 - 2rz\cos(\omega) + r^2 = 0$$

και υπολογίζονται εύκολα ως $p_1 = re^{j\omega}$ και $p_2 = re^{-j\omega}$.

Η περιοχή σύγκλισης και το διάγραμμα πόλων-μηδενικών τιμών του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(z)$ απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα.

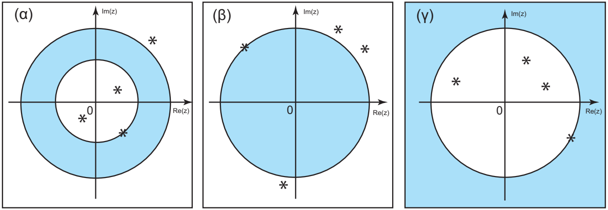


- Το σχήμα της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ εξαρτάται από το μήκος της.

  Εάν η ακολουθία έχει πεπερασμένο μήκος δηλαδή ορίζεται στο διάστημα $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, τότε η περιοχή σύγκλισης του $\mathcal{Z}$ θα εκτείνεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ενδεχομένως από τα σημεία $z = 0$ και $z = \infty$.

  Εάν η ακολουθία έχει άπειρο μήκος, το σχήμα της περιοχής σύγκλισης εξαρτάται από τη φύση και τα χαρακτηριστικά της ακολουθίας:

  - Εάν η ακολουθία είναι αμφίπλευρη η περιοχή σύγκλισης έχει σχήμα δακτυλίου με τον εσωτερικό και τον εξωτερικό κύκλο να περιορίζονται από πόλους.
  - Εάν η ακολουθία είναι ακολουθία αριστερής πλευράς τότε, η περιοχή σύγκλισης θα έχει σχήμα κύκλου με κέντρο το σημείο $z = 0$ και ακτίνα ίση με το μέτρο του μικρότερου μη μηδενικού πόλου.
  - Εάν η ακολουθία είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς τότε η περιοχή σύγκλισης θα ορίζεται ως το συμπλήρωμα επί του μιγαδικού επιπέδου ενός κύκλου με ακτίνα ίση με το μέτρο του μεγαλύτερου μη μηδενικού πόλου.



Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ για αμφίπλευρη ακολουθία και για ακολουθία αριστερής και δεξιάς πλευράς

- Ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x[n]$ συγκλίνει κατά απόλυτη τιμή, αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της εν λόγω ακολουθίας περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.
- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ δεν μπορεί να περιέχει σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν σε θέσεις πόλων.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$
Γραμμικότητα, χρονική μετατόπιση και αντιστροφή, κλιμάκωση

- Γραμμικότητα: εάν οι μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ των σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ είναι ο

$$\mathcal{X}(z) = \alpha \mathcal{X}_1(z) + \beta \mathcal{X}_2(z)$$

  για κάθε τιμή των σταθερών α και β.

- Μετατόπιση ως προς το χρόνο: εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z)$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n-k]$ θα είναι ο $z^{-k}\mathcal{X}(z)$.

- Κλιμάκωση: εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z)$ με περιοχή σύγκλισης $r_1 < |z| < r_2$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $\alpha^n x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(\alpha^{-1}z)$ με περιοχή σύγκλισης $|\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$, για κάθε πραγματική ή μιγαδική τιμή της παραμέτρου α.

- Αντιστροφή χρόνου: εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z)$ με περιοχή σύγκλισης $r_1 <| z |< r_2$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[-n]$ είναι ο $\mathcal{X}(1/z)$ με περιοχή σύγκλισης $(1/r_2) <| z |< (1/r_1)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Συζυγία, διαφόριση, συνέλιξη και συσχέτιση

- **Συζυγία:** εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z)$ με περιοχή σύγκλισης $r_1 <| z |< r_2$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x^*[-n]$ θα είναι ο $\mathcal{X}^*(z^*)$ με την ίδια περιοχή σύγκλισης

- **Διαφόριση:** εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z)$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $nx[n]$ θα είναι ο $-z[d\mathcal{X}(z)/dz]$ με την ίδια περιοχή σύγκλισης

- **Συνέλιξη:** εάν οι μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$, τότε ο μετασχηματισμός του σήματος $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(z) = \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$ με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον την τομή των περιοχών σύγκλισης των $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$.

- **Συσχέτιση:** εάν οι μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ των σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $r_{x_1x_2}[\ell]$ είναι ο $R_{x_1x_2}(z)$ όπου

$$r_{x_1x_2}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n-\ell] \quad \text{και} \quad R_{x_1x_2}(z) = \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z^{-1})$$

  Η περιοχή σύγκλισης του $\mathcal{X}(z)$, είναι τουλάχιστον η τομή των περιοχών σύγκλισης των $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$.

Γνωρίζουμε πως ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $y[n] = n\alpha^n \sin(\omega n)u[n]$ είναι ο

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{\alpha z(z^2 - \alpha^2)\sin(\omega)}{(z^2 - 2\alpha z\cos(\omega) + \alpha^2)^2}$$

Αυτό αποδεικνύεται πολύ πιο εύκολα παρατηρώντας πως το σήμα είναι της μορφής $y[n] = nx[n]$ όπου $x[n] = \alpha^n \sin(\omega n)u[n]$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $nx[n] \leftrightarrows -z\mathcal{X}'(z)$ όπου $\mathcal{X}(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του $x[n]$. Από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\mathcal{X}(z) = \frac{\alpha z^{-1}\sin(\omega)}{1 - 2\alpha z^{-1}\cos(\omega) + \alpha^2 z^{-2}}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$\frac{d\mathcal{X}(z)}{dz} = \frac{\alpha^3 z^{-4}\sin(\omega) - \alpha z^{-2}\sin(\omega)}{(1 - 2\alpha z^{-1}\cos(\omega) + \alpha^2 z^{-2})^2} = \frac{\alpha^3\sin(\omega) - \alpha z^2\sin(\omega)}{(z^2 - 2\alpha z\cos(\omega) + \alpha^2)^2}$$

και τελικά καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα ως

$$\mathcal{Y}(z) = -z\frac{d\mathcal{X}(z)}{dz} = -z\frac{\alpha^3\sin(\omega) - \alpha z^2\sin(\omega)}{(z^2 - 2\alpha z\cos(\omega) + \alpha^2)^2} = \frac{\alpha z(z^2 - \alpha^2)\sin(\omega)}{(z^2 - 2\alpha z\cos(\omega) + \alpha^2)^2}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Θεώρημα

*Έστω ένα σήμα $x[n]$ με μετασχηματισμό $\mathcal{X}(z)$. Εάν το σήμα είναι **αιτιατό** αποδεικνύεται ότι*

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} \mathcal{X}(z)$$

*ενώ εάν το σήμα είναι **αντιαιτιατό** θα είναι*

$$x[0] = \lim_{z \to 0} \mathcal{X}(z)$$

Θεώρημα

*Έστω αιτιατό σήμα $x[n]$ με μετασχηματισμό $\mathcal{X}(z)$. Εάν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $(z-1)\mathcal{X}(z)$ περιέχει το **μοναδιαίο κύκλο** και όλοι οι πόλοι της βρίσκονται **εντός** αυτού του κύκλου - εκτός ίσως από ένα απλό πόλο που μπορεί να βρίσκεται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου και στη θέση $z = 1$ - τότε*

$$x[\infty] \equiv \lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} \left[\left(1 - \frac{1}{z} \right) \mathcal{X}(z) \right]$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μετασχηματίζει το διακριτό σήμα $x[n]$ από την αναπαράσταση επί του μιγαδικού επιπέδου στο πεδίο του διακριτού χρόνου n.

Για την κατασκευή της εξίσωσης ορισμού του πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της

$$\mathcal{X}(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

επί z^{n-1} και λαμβάνουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα - θα είναι τότε

$$\oint_C \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{n-k-1}dz$$

Η κλειστή καμπύλη C ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, περιέχει το σημείο $z = 0$ και διασχίζεται κατά την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Αλλάζοντας τη σειρά των πράξεων της άθροισης και της ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\oint_C \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_C x[k]z^{n-k-1}dz$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η βασική εξίσωση

Τέλος χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολοκλήρωσης του Cauchy

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

όπου η καμπύλη C μπορεί να είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη περιέχει την αρχή $z = 0$. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$2\pi j\, x[n] = \oint_C \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{\mathcal{X}(z)}{z}z^{n}dz}$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί και την εξίσωση ορισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος της μιγαδικής ολοκλήρωσης

Θεώρημα

Εάν C είναι ένας κλειστός δρόμος επί του μιγαδικού επιπέδου και $f(z)$ μια συνάρτηση, αναλυτική τόσο κατά μήκος του C όσο και εντός της περιοχής D που περικλείεται από αυτόν, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό απομονωμένων ανώμαλων σημείων $z_1, z_2, \ldots, z_n$ της περιοχής D, τότε

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Res[f(z_k)]$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εξίσωσης του αντίστροφου μετασχηματισμού υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος υπολοίπων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\mathcal{Y}(z) = [\mathcal{X}(z)/z]z^n$ και επιλέγοντας ως δρόμο C οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιέχει την αρχή $z = 0$ και τους πόλους της $\mathcal{Y}(z)$.

Θα είναι λοιπόν

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \mathcal{Y}(z)dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{\mathcal{X}(z)}{z}z^n dz = \sum_{k=1}^{n} Res[\mathcal{Y}(z_k)]}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος της μιγαδικής ολοκλήρωσης - Παράδειγμα

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.9)(z-1)}$$

Η μιγαδική συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{\mathcal{X}(z)}{z} z^n = \frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.9)(z-1)}$$

διαθέτει *τρεις απλούς πόλους* στα σημεία $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.9$ και $p_3 = 1$ με υπόλοιπα

$$\begin{aligned}
Res[Y(0.8)] &= \lim_{z\to 0.8}\left[(z-0.8)\frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.9)(z-1)}\right] = \frac{(0.8)^{n+1}}{(-0.1)(-0.2)} = 40(0.8)^n \\
Res[Y(0.9)] &= \lim_{z\to 0.9}\left[(z-0.9)\frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.9)(z-1)}\right] = \frac{(0.9)^{n+1}}{(0.1)(-0.1)} = -90(0.9)^n \\
Res[Y(1)] &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z^{n+1}}{(z-0.8)(z-0.9)(z-1)}\right] = \frac{(1)^{n+1}}{(0.2)(0.1)} = 50
\end{aligned}$$

Θα είναι λοιπόν

$$x[n] = \oint_C \mathcal{Y}(z)dz = 40(0.8)^n - 90(0.9)^n + 50$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ ως μία δυναμοσειρά άπειρων όρων

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

η οποία θα πρέπει να συγκλίνει εντός της περιοχής σύγκλισης και συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ έχουμε

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) - c_n]\, z^{-n} = 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μοναδικότητας σύμφωνα με το οποίο η αναπαράσταση μιας συνάρτησης από μια σειρά απείρων όρων είναι μοναδική, όλοι οι συντελεστές του z^{-n} στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι ίσοι με το μηδέν.

Θα είναι λοιπόν $x[n] - c_n = 0$ και επομένως $x[n] = c_n$ $(\forall n \in N)$, εξίσωση από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του διακριτού σήματος $x[n]$.

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \log(1 + \alpha z^{-1}) \quad (|z| > |\alpha|)$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά.

Το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης $f(x) = \log(1 + x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$ έχει τη μορφή

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Θέτοντας $x = \alpha z^{-1}$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της άσκησης γράφεται

$$\mathcal{X}(z) = \log(1 + \alpha z^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^n\right] z^{-n}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά - Παράδειγμα

Εάν συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι

- για $n \geq 1$ θα είναι $x[n] = [(-1)^{n+1}/n]\alpha^n$
- για $n < 1$ θα είναι $x[n] = 0$

Επομένως το διακριτό σήμα $x[n]$ θα δίδεται από τη σχέση

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\alpha^n & \text{για } n \geq 1 \\ 0 & \text{για } n < 1 \end{cases} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\alpha^n u[n-1]$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

Εκφράζοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\mathcal{X}(z) = \alpha_1 \mathcal{X}_1(z) + \alpha_2 \mathcal{X}_2(z) + \cdots + \alpha_k \mathcal{X}_k(z) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{X}_i(z)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $x[n]$ από τη σχέση

$$x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \cdots + \alpha_k x_k[n] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i[n]$$

με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς $x_i[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{X}_i(z)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ να υπολογίζονται εύκολα ή να ανακτώνται από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Αυτή η διαδικασία είναι αποδοτική σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ αποτελεί ρητή συνάρτηση, οπότε, ο προσδιορισμός των στοιχειωδών συναρτήσεων $\mathcal{X}_1(z), \mathcal{X}_2(z), \ldots, \mathcal{X}_k(z)$ μπορεί να πραγματοποιηθεί αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παραδείγματα στοιχειωδών μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$

Διακριτό σήμα $x[n]$	**Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$**	**Περιοχή σύγκλισης**
$\delta[n]$	1	Όλα τα z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\mid z \mid > 1$
$\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\mid z \mid > \mid \alpha \mid$
$n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\mid z \mid > \mid \alpha \mid$
$cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-z^{-1}cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\mid z \mid > 1$
$sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^{-1}sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\mid z \mid > 1$
$\alpha^n cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\alpha z^{-1}cos(\omega_0)}{1-2\alpha z^{-1}cos(\omega_0)+\alpha^2 z^{-2}}$	$\mid z \mid > \mid \alpha \mid$
$\alpha^n sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}sin(\omega_0)}{1-2\alpha z^{-1}cos(\omega_0)+\alpha^2 z^{-2}}$	$\mid z \mid > \mid \alpha \mid$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Θέτοντας $z^{-1} = y$, παρατηρώντας πως ο παρονομαστής γράφεται ως το γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων $1 + 3y + 2y^2 = (2y + 1)(y + 1)$. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}(y) = \frac{1}{1 + 3y + 2y^2} = \frac{A}{2y + 1} + \frac{B}{y + 1} = \frac{(A + 2B)y + (A + B)}{1 + 3y + 2y^2}$$

και επομένως $(A + 2B)y + (A + B) = 1$ από όπου προκύπτει ότι $A + 2B = 0$ και $A + B = 1$ με λύση $A = 2$ και $B = 1$. Κατά συνέπεια,

$$\mathcal{X}(y) = \frac{1}{1 + 3y + 2y^2} = \frac{2}{2y + 1} - \frac{1}{y + 1}$$

και επιστρέφοντας στην αρχική μας μεταβλητή,

$$\mathcal{X}(z) = 2\left\{\frac{1}{1 + 2z^{-1}}\right\} - 1\left\{\frac{1}{1 + z^{-1}}\right\}$$

Στο σημείο αυτό, έχουμε αναπτύξει το μετασχηματισμό $\mathcal{X}(z)$ ως το γραμμικό συνδυασμό

$$\mathcal{X}(z) = \alpha \mathcal{X}_1(z) + \beta \mathcal{X}_2(z)$$

για τιμές παραμέτρων $\alpha = 2$, $\beta = -1$ και για τις συναρτήσεις $\mathcal{X}_1(z) = (1 + 2z^{-1})^{-1}$ και $\mathcal{X}_2(z) = (1 + z^{-1})^{-1}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\mathcal{X}_1(z) = (1 + 2z^{-1})^{-1}$ είναι το διακριτό σήμα $x_1[n] = (-2)^n u[n]$.
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\mathcal{X}_2(z) = (1 + z^{-1})^{-1}$ είναι το διακριτό σήμα $x_1[n] = (-1)^n u[n]$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την ιδιότητα της *γραμμικότητας* βρίσκουμε

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] = 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n] = \left[2(-2)^n - (-1)^n\right] u[n]$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα - Παράδειγμα

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(z) = \left\{1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right\} \Big/ \left\{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\right\}$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά μερικών κλασμάτων.

Θέτοντας $y = z^{-1}$ θα έχουμε

$$\mathcal{X}(y) = \frac{1 + (y/4)}{[1 - (y/2)]^2} = \frac{A}{1 - (y/2)} + \frac{B}{[1 - (y/2)]^2} = \frac{-(A/2)y + (A + B)}{[1 - (y/2)]^2}$$

Θα είναι λοιπόν

$$-(A/2)y + (A + B) = (1/4)y + 1$$

από όπου προκύπτει το σύστημα $-(A/2) = (1/4)$ και $A + B = 1$ με λύση $A = -1/2$ και $B = 3/2$. Επομένως,

$$\mathcal{X}(y) = -\frac{1}{2[1 - (y/2)]} + \frac{3}{2[1 - (y/2)]^2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Η μέθοδος του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα - Παράδειγμα

Από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$x_1[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{X}_1(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Για την αντιστροφή της $\mathcal{X}_2(z)$ τη διατυπώνουμε ως

$$\mathcal{X}_2(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})^2} = \mathcal{X}_{2\alpha}(z) + \mathcal{X}_{2\beta}(z) = \frac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

οπότε τώρα έχουμε

$$x_{2\alpha}[n] = n(1/2)^n u[n] \quad \text{και} \quad x_{2\beta}[n] = (1/2)^n u(n)$$

Θα είναι λοιπόν $x_2[n] = (n+1)(1/2)^n u[n]$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $\mathcal{X}(z)$ είναι η διακριτή ακολουθία

$$x[n] = \Big[3(n+1) - 1\Big]\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]$$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Μετασχηματισμός γινομένου / ταυτότητα του Parseval

Θεώρημα

Εάν οι μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ των ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι $\mathcal{X}_1(z)$ και $\mathcal{X}_2(z)$, τότε ο μετασχηματισμός Z του διακριτού σήματος $x[n] = x_1[n]x_2[n]$ θα δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \mathcal{X}_1(\upsilon)\mathcal{X}_2\left(\frac{z}{\upsilon}\right)\upsilon^{-1}d\upsilon$$

με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα να υπολογίζεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C που βρίσκεται στην τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $\mathcal{X}_1(\upsilon)$ και $\mathcal{X}_2(1/\upsilon)$ και περιέχει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z = 0$.

Σύμφωνα με την ταυτότητα του Parseval εάν $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι δύο ακολουθίες μιγαδικών τιμών, τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \mathcal{X}_1(\upsilon)\mathcal{X}_2^*\left(\frac{1}{\upsilon^*}\right)\upsilon^{-1}d\upsilon$$

(για τις αποδείξεις ανατρέξτε στις σελίδες 486-487).

Ο μονομερής μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{X}^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

και τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του είναι τα εξής

- Δεν περιέχει πληροφορίες για τις τιμές του διακριτού σήματος $x[n]$ που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του διακριτού χρόνου n.
- Είναι μοναδικός μόνο για τα αιτιατά σήματα, διότι μόνο για αυτά τα σήματα είναι $x[n] = 0$ για $n < 0$.
- Είναι ταυτόσημος με το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ του σήματος $x[n]u[n]$. Επειδή το σήμα αυτό είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}^{+}$ του σήματος $x[n]$, είναι πάντοτε το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}^{+}$ είναι ίδιες με εκείνες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ εκτός από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης η οποία διατυπώνεται *διαφορετικά*.

Αυτή η ιδιότητα αναλύεται στην ιδιότητα της χρονικής υστέρησης που διατυπώνεται ως

$$\mathcal{Z}^{+}\{x[n-k]\} = z^{-k}\left[\mathcal{X}^{+}(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n}\right] \quad (k>0)$$

και στην ιδιότητα της χρονικής προώθησης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{Z}^{+}\{x[n+k]\} = z^{k}\left[\mathcal{X}^{+}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}\right] \quad (k>0)$$

όπου $\mathcal{X}^{+}(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}^{+}$ του σήματος $x[n]$.

(για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων ανατρέξτε στη σελίδα 488 του βιβλίου).

Ο μονομερής μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση εξισώσεων διαφορών που περιγράφουν αιτιατά διακριτά αναδρομικά συστήματα.

(δείτε το παράδειγμα στη σελίδα 489 του βιβλίου).

Η απόκριση $y[n]$ ενός συστήματος LTI με κρουστική απόκριση $h[n]$ στην είσοδο $x[n]$, είναι

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Υποθέτοντας ότι $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$, $\mathcal{H}(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ και $\mathcal{X}(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ θα έχουμε

$$\boxed{\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z)}$$

- Εάν γνωρίζουμε τα $h[n]$ και $x[n]$, υπολογίζουμε τις $\mathcal{H}(z)$ και $\mathcal{X}(z)$ και από αυτές την έξοδο $y[n]$ ως τον αντίστροφο του μετασχηματισμού $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z)$.

- Εάν γνωρίζουμε τα $x[n]$ και $y[n]$ μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση $h[n]$ ως τον αντίστροφο του μετασχηματισμού

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{Y}(z)/\mathcal{X}(z)$$

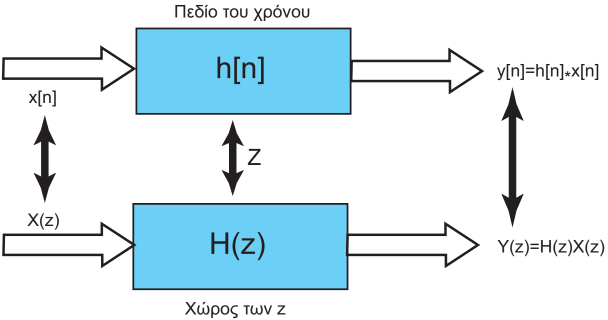
  που ορίζεται ως ο λόγος $\mathcal{Y}(z)$ και $\mathcal{X}(z)$ και έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(z)$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς.

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Η συνάρτηση μεταφοράς των διακριτών συστημάτων



Η συσχέτιση ανάμεσα στην κρουστική απόκριση $h[n]$ και στη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$ ενός γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου διακριτού συστήματος.

Άσκηση

Θεωρώντας ένα διακριτό σύστημα LTI με συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

να προσδιορίσετε την κρουστική του απόκριση $h[n]$.

Το ανάπτυγμα της $\mathcal{H}(y)$ σε μερικά κλάσματα υπολογίζεται εύκολα ως

$$\mathcal{H}(z) = -2 \cdot (1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \delta[n], \quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\} = u[n]$$

και επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $\mathcal{H}(z)$ θα έχει τη μορφή

$$h[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{8}{3}u[n]$$

που είναι και η ζητούμενη κρουστική απόκριση.

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Παράδειγμα υπολογισμού εξόδου

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ να υπολογίσετε την έξοδο του διακριτού συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n] = (1/3)^n u[n]$, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το σήμα $x[n] = (1/2)^n \cos(\pi n/3) u[n]$.

Λύση: Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος υπολογίζεται ως

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

ενώ ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1 - (1/4)z^{-1}}{1 - (1/2)z^{-1} + (1/4)z^{-2}}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την ιδιότητα της συνέλιξης,

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) = \frac{1 - (1/4)z^{-1}}{(1 - (1/3)z^{-1})[1 - (1/2)z^{-1} + (1/4)z^{-2}]}$$

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Παράδειγμα υπολογισμού εξόδου

Αναπτύσσοντας την παραπάνω παράσταση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων,

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1/7}{1-(1/3)z^{-1}} + \frac{(3/28)z^{-1}+(6/7)}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1/7}{1-(1/3)z^{-1}}\right\} = \frac{1}{7}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-(1/3)z^{-1}}\right\} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Διατυπώνοντας το δεύτερο όρο της τελικής σχέσης ως

$$\frac{(3/28)z^{-1}+(6/7)}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}} = \frac{6}{7}\frac{1-(1/4)z^{-1}}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\frac{(\sqrt{3}/4)z^{-1}}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}}$$

από τους πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών θα λάβουμε

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1-(1/4)z^{-1}}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{3}/4)z^{-1}}{1-(1/2)z^{-1}+(1/4)z^{-2}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$$

και συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βρίσκουμε

$$y[n] = \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right] u[n]$$

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Παράδειγμα υπολογισμού συνάρτησης μεταφοράς

Άσκηση

Έστω ένα αιτιατό διακριτό σύστημα LTI που δέχεται στην είσοδό του το διακριτό σήμα

$$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου του συστήματος έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$$

να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $\mathcal{H}(z)$.

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{X}(z)$ του σήματος $x[n]$ είναι

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n-1]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}$$

με τις βηματικές συναρτήσεις $u[n]$ και $u[-n-1]$ να ορίζονται κατά τα γνωστά ως

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z
Παράδειγμα υπολογισμού συνάρτησης μεταφοράς

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u[-n-1] = \begin{cases} 1 & \text{για } n \leq -1 \\ 0 & \text{για } n > -1 \end{cases}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα υπολογίζονται ως (ανατρέξτε στη σελίδα 493)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n-1] z^{-n} = \frac{z}{1-z} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} = \frac{2z}{2z-1}$$

με περιοχές σύγκλισης $|z| < 1$ και $|z| > 1/2$ και επομένως θα είναι

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{2z}{2z-1} = \frac{z(2z-1) + 2z(1-z)}{(1-z)(2z-1)} = \frac{z}{(1-z)(2z-1)}$$

με περιοχή σύγκλισης $(1/2) < |z| < 1$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του $\mathcal{Y}(z)$ βρίσκουμε

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = -\frac{z}{(2z-1)(z+1)} \frac{(1-z)(2z-1)}{z} = \frac{z-1}{z+1}$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1$ αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό.

Έστω αναδρομικό σύστημα LTI τάξεως N με εξίσωση

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των δύο μελών, έχουμε

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathcal{Z}\{y[n-k]\} + \sum_{k=0}^{M} \beta_k \mathcal{Z}\{x[n-k]\}$$

όπου καταφύγαμε στην *ιδιότητα της γραμμικότητας*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=\alpha}^{\beta} \xi_k x[k]\right\} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} \mathcal{Z}\{\xi_k x[k]\} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} \xi_k Z\{x[k]\}$$

Χρησιμοποιώντας τέλος την *ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης*

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}\mathcal{X}(z) \quad \text{και} \quad \mathcal{Z}\{y[n-k]\} = z^{-k}\mathcal{Y}(z)$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{Y}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathcal{Y}(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} \beta_k \mathcal{X}(z) z^{-k}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{Y}(z)(1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k}) = \mathcal{X}(z)(\sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k})$$

και τελικά

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \left\{ \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} \right\} \Big/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\}$$

Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος όταν είναι γνωστή η εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω σχέσης είναι η περίπτωση $\alpha_k = 0$ $(1 \leq k \leq N)$ οπότε

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{M-k}$$

και $\beta_k = 0$ $(1 \leq k \leq M)$ οπότε

$$\mathcal{H}(z) = \beta_0 \Big/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\} = \left\{ \beta_0 z^N \right\} \Big/ \left\{ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^{N-k} \right\} \quad (\alpha_0 = 1)$$

- Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα διαθέτει M μηδενικά και ένα πόλο τάξεως M στη θέση $z = 0$ και αποτελεί σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης
- Στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα διαθέτει N πόλους και μια μηδενική τιμή τάξεως N στη θέση $z = 0$ και αποτελεί σύστημα άπειρης κρουστικής απόκρισης.

Άσκηση

Θεωρώντας ένα διακριτό αναδρομικό σύστημα LTI με συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 - 0.5z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση $h[n]$ και την εξίσωση διαφορών.

Θέτοντας $y = z^{-1}$, η συνάρτηση $\mathcal{H}(y)$ αναπτύσσεται σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

$$\mathcal{H}(z) = \frac{2z^{-1} - 6}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{7}{1 - 0.25z^{-1}} = -4 \cdot (1) - 2\left(\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}\right) + 7\left(\frac{1}{1 - 0.25z^{1}}\right)$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \delta[n], \quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.25z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

και επομένως η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται ως

$$h[n] = -4\delta[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης διαφορών, από τη συνάρτηση μεταφοράς θα έχουμε

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{Y}(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) = \mathcal{X}(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

και τελικά μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις

$$\mathcal{Y}(z) - \frac{3}{4}z^{-1}\mathcal{Y}(z) + \frac{1}{8}z^{-2}\mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z) - \frac{1}{2}z^{-2}\mathcal{X}(z)$$

Εάν λάβουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης $\mathcal{Z}^{-1}\{x[n-k]\} = z^{-k}\mathcal{X}(z)$ καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα ως

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

Ένα διακριτό σύστημα LTI είναι αιτιατό (αντιαιτιατό), όταν η κρουστική του απόκριση $h[n]$ είναι αιτιατό (αντιαιτιατό) σήμα.

Ένα διακριτό σύστημα LTI είναι ευσταθές κατά BIBO αν και μόνο αν το άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων της κρουστικής απόκρισης είναι πεπερασμένο, δηλαδή εάν

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Λαμβάνοντας το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς έχουμε

$$|\mathcal{H}(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||z^{-n}|$$

Για $|z| = 1$ έχουμε

$$|\mathcal{H}(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO όταν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο (αυτή η συνθήκη εκτός από ικανή είναι και αναγκαία).

Στη γενική περίπτωση, η ισχύς της αιτιότητας δεν προϋποθέτει και την ταυτόχρονη ισχύ της ευστάθειας (και αντίστροφα) αφού:

- Ένα ευσταθές σύστημα μπορεί να είναι τόσο αιτιατό όσο και μη αιτιατό.
- Ένα αιτιατό σύστημα μπορεί να είναι τόσο ευσταθές όσο και ασταθές.

Ωστόσο, εάν ένα σύστημα είναι ταυτόχρονα τόσο αιτιατό όσο και ευσταθές, τότε, όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος θα βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Στη γενική περίπτωση η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή και επομένως οι πόλοι της θα αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή

$$\mathcal{A}_m(z) = 1 + \alpha_1^m z^{-1} + \alpha_2^m z^{-2} + \cdots + \alpha_m^m z^{-m} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^{-k} \quad (\alpha_0^m \equiv 1)$$

Το κριτήριο ευστάθειας κατά Schur-Cohn μας επιτρέπει να ελέγξουμε εάν οι ρίζες του πολυωνύμου $\mathcal{A}_N(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου (για αναδρομικό σύστημα τάξεως N).

Κριτήριο ευστάθειας Schur-Cohn:

1. Αρχικοποίηση: θέτουμε $m = N$, $\zeta_N = \alpha_N^N$ και χρησιμοποιούμε ως αρχικό πολυώνυμο το $\mathcal{A}_N(z)$.

2. Εάν είναι $m \geq 1$ τότε:

   - Προσδιορίζουμε το πολυώνυμο βαθμού $m-1$ από τη σχέση
   $$\mathcal{A}_{m-1}(z) = \frac{\mathcal{A}_m(z) - \zeta_m \mathcal{A}_m^*(z)}{1-\zeta_m^2}$$
   όπου $\mathcal{A}_m^*(z)$ είναι το αντίστροφο πολυώνυμο του $\mathcal{A}_m(z)$ που ορίζεται ως
   $$\mathcal{A}_m^*(z) = Z^{-m}\mathcal{A}_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m-k}^m z^{-k}$$
   Ο συμβολισμός α_{m-k}^m παραπέμπει σε παλινδρομικό πολυώνυμο αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου $A_m(z)$ θεωρούνται πραγματικοί αριθμοί.
   - Προσδιορίζουμε την τιμή του συντελεστή ανάκλασης ζ_m ως $\zeta_m = \alpha_m^m$.

3. Ελαττώνουμε την τιμή του m κατά μία μονάδα.

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την παραπάνω διαδικασία προσδιορίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης ζ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Εάν για κάθε συντελεστή ανάκλασης ισχύει η σχέση $|\zeta_k| < 1$, αποδεικνύεται πως όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $\mathcal{A}(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Επομένως το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής $\mathcal{B}(z)/\mathcal{A}(z)$ είναι ταυτόχρονα αιτιατό και ευσταθές.

Θεωρώντας ένα πολυώνυμο $P_n(\xi)$ με μιγαδικούς συντελεστές $P_n(\xi) = \alpha_0^n + \alpha_1^n\xi + \alpha_2^n\xi^2 + \cdots + \alpha_n^n\xi^n$ το *αντίστροφο πολυώνυμο* ορίζεται ως

$$P_n^*(\xi) = \overline{\alpha_n} + \overline{\alpha_{n-1}}\xi + \overline{\alpha_{n-2}}\xi^2 + \cdots + \overline{\alpha_2}\xi^{n-2} + \overline{\alpha_1}\xi^{n-1} + \overline{\alpha_0}\xi^n = \xi^n\overline{P(1/\overline{\xi})}$$

Εάν οι συντελεστές α_k^n $(k = 0, 1, \ldots, n)$ είναι πραγματικοί, θα εμφανίζονται στο αντίστροφο πολυώνυμο με την αντίστροφη σειρά, οπότε το πολυώνυμο λέγεται *παλινδρομικό πολυώνυμο* και δίδεται από τη σχέση

$$P_n^*(\xi) = \xi^n\overline{P(1/\overline{\xi})} = \xi^n\sum_{k=0}^{n}\overline{\alpha_{n-k}^n}\xi^k$$

Χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα $P_n(\xi)$ και $P_n^*(\xi)$ μπορούμε να ορίσουμε τους *συντελεστές ανάκλασης* ως

$$\xi P_{n-1}(\xi) = \frac{P_n(\xi) - \zeta_k P_n(\xi)}{1 - |\zeta_k|^2} \qquad (\zeta_k = \alpha_0^k)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να βρίσκονται όλες οι ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου, είναι η $|\zeta_k| < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας Schur-Cohn να ελέγξετε αν είναι αιτιατό και ευσταθές το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - (1/2)z^{-1} + (3/4)z^{-2} - z^{-3} + (1/4)z^{-4}}$$

Το πολυώνυμο του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς είναι το

$$\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_4(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4}$$

και επομένως $\zeta_4 = \alpha_4^4 = 1/4$. Παρατηρούμε πως $|\zeta_4| < 1$ και συνεχίζουμε. Το αντίστροφο πολυώνυμο του $\mathcal{A}_4(z)$ έχει τη μορφή

$$\mathcal{A}_4^*(z) = z^{-4} - \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{3}{4}z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{4}$$

Θα είναι λοιπόν (για τις λεπτομέρειες ανατρέξτε στη σελίδα 500)

$$A_3(z) = \frac{A_4(z) - \zeta_4 A_4^*(z)}{1 - (\zeta_4)^2} = 1 - \frac{4}{15}z^{-1} + \frac{9}{15}z^{-2} - \frac{14}{15}z^{-3}$$

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Ευστάθεια και αιτιότητα διακριτών συστημάτων - Παράδειγμα

Είναι $\zeta_3 = \alpha_3^3 = -14/15$ και επειδή $|\zeta_3| < 1$ συνεχίζουμε.

Το αντίστροφο πολυώνυμο της συνάρτησης $\mathcal{A}_3(z)$ δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{A}_3^*(z) = z^{-3} - \frac{4}{15} z^{-2} + \frac{9}{15} z^{-1} - \frac{14}{15}$$

και επομένως, το πολυώνυμο $\mathcal{A}_2(z)$ θα έχει τη μορφή

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - \zeta_3 A_3^*(z)}{1 - (\zeta_3)^2} = 1 + \frac{69}{29} z^{-1} + \frac{79}{29} z^{-2}$$

Θα είναι λοιπόν $\zeta_2 = \alpha_2^2 = 79/29$. Στην περίπτωση αυτή είναι $|\zeta_2| > 1$. Επομένως το σύστημα

δεν είναι αιτιατό και ευσταθές

και η μέθοδος τερματίζεται.

Άσκηση

Να μελετήσετε την ευστάθεια του αναδρομικού διακριτού συστήματος LTI

$$y[n] = -\alpha_1 y[n-1] - \alpha_2 y[n-2] + \beta_0 x[n]$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς ως

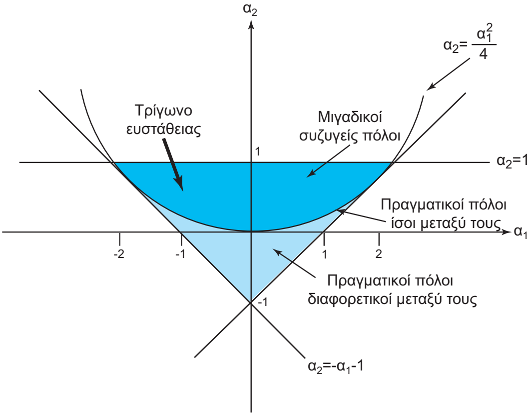
$$\mathcal{H}(z) = \frac{\beta_0}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} = \frac{\beta_0 z^2}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2} = \frac{\beta_0 z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

οι πόλοι του συστήματος p_1 και p_2 αποτελούν ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης του παρονομαστή και δίδονται από τις σχέσεις

$$p_1 = -\frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}{4}}, \quad p_2 = -\frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}{4}}$$

Επιλύοντας ως προς α_1 και α_2 λαμβάνουμε $\alpha_1 = -(p_1 + p_2)$ και $\alpha_2 = p_1 p_2$ και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες $|p_1| < 1$ και $|p_2| < 1$ οι οποίες διασφαλίζουν πως οι πόλοι p_1 και p_2 ευρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, καταλήγουμε σε συνθήκες ευστάθειας, συμβατές με αυτές που προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Schur-Cohn (ανατρέξτε στη σελίδα 501).

Αυτές οι συνθήκες ορίζουν στο επίπεδο (α_1, α_2) το επονομαζόμενο τρίγωνο ευστάθειας που ορίζεται ως το σύνολο των συντεταγμένων (α_1, α_2) οι τιμές των οποίων οδηγούν σε ευστάθεια του συστήματος.



Άσκηση

Θεωρώντας δύο συστήματα LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που θα προκύψει συνδέοντας τα συστήματα (α) σε σειρά και (β) παράλληλα.

Έστω $\mathcal{H}_1(z)$ και $\mathcal{H}_2(z)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των δύο συστημάτων με

$$\mathcal{H}_1(z) = \mathcal{Z}\{h_1[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n]z^{-n} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}_2(z) = \mathcal{Z}\{h_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]z^{-n}$$

Η κρουστική απόκριση του σύνθετου συστήματος για την εν σειρά και την παράλληλη σύνδεση είναι $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$ και $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$ και επομένως η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς θα δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \mathcal{Z}\{h_1[n] * h_2[n]\} = \mathcal{H}_1(z)\mathcal{H}_2(z)$$

για τη σύνδεση εν σειρά και

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]z^{-n} = \mathcal{H}_1(z) + \mathcal{H}_2(z)$$

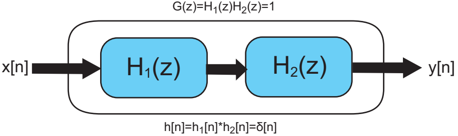
για την παράλληλη σύνδεση.

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z

Διασύνδεση συστημάτων / αντίστροφα συστήματα

Τα αντίστροφα συστήματα ικανοποιούν τη συνθήκη $\mathcal{H}_1(z)\mathcal{H}_2(z) = 1$ όπου $\mathcal{H}_1(z)$ και $\mathcal{H}_2(z)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς που τα περιγράφουν.

Συνδέοντας εν σειρά δύο αντίστροφα συστήματα κατασκευάζουμε ταυτοτικό σύστημα.



Θεωρώντας ρητή συνάρτηση της μορφής

$$\mathcal{H}_1(z) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \left\{ \prod_{k=1}^{M} (z - z_k) \right\} \Big/ \left\{ \prod_{k=1}^{N} (z - p_k) \right\} z^{N-M}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος είναι η

$$\mathcal{H}_2(z) = \frac{1}{\mathcal{H}_1(z)} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \left\{ \prod_{k=1}^{N} (z - p_k) \right\} \Big/ \left\{ \prod_{k=1}^{M} (z - z_k) \right\} z^{M-N}$$

Έστω διακριτό σύστημα LTI που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \beta_k x[n-k]$$

η οποία ως γνωστόν οδηγεί σε μία συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$\mathcal{H}(z) = \left\{ \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} \right\} \Big/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\} = \frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{A}(z)}$$

και έστω πως διαβιβάζουμε σε αυτό, το σήμα $x[n]$, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του οποίου μπορεί να γραφεί και αυτός ως $\mathcal{N}(z)/\mathcal{Q}(z)$.

Θεωρώντας ότι $y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) = \frac{\mathcal{B}(z)\mathcal{N}(z)}{\mathcal{A}(z)\mathcal{Q}(z)}$$

εφόσον (1) $p_k \neq q_m$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, $(m = 1, 2, \ldots, L)$ όπου $p_1, p_2, \ldots, p_N$ οι πόλοι της $\mathcal{H}(z)$ και $q_1, q_2, \ldots, q_L$ οι πόλοι της $\mathcal{Z}$ και (2) τα μηδενικά των πολυωνύμων $\mathcal{B}(z)$ και $\mathcal{N}(z)$ δεν συμπίπτουν με τους πόλους $\{p_k\}$ και $\{q_k\}$.

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z
Η έξοδος των συστημάτων LTI

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{Y}(z)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων παίρνουμε

$$\mathcal{Y}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

και ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = (p_k)^n u[n] \quad \text{και} \quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - q_k z^{-1}}\right\} = (q_k)^n u[n]$$

Επομένως η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται ως το άθροισμα

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n]}_{\text{φυσική απόκριση}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u[n]}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}}$$

Εάν οι αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$ δεν είναι μηδενικές, η φυσική απόκριση του συστήματος μεταβάλλεται.

Πράγματι, διαβιβάζοντας στο σύστημα τη χρονική στιγμή $n = 0$ το σήμα $x[n]$, από την εξίσωση διαφορών του συστήματος παίρνουμε

$$\mathcal{Y}^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \left[\mathcal{Y}^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n \right] + \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} \mathcal{X}^+(z)$$

Θεωρώντας ότι $x[n] = 0$ για $n < 0$ μπορούμε να υποθέσουμε πως $\mathcal{X}^+(z) \to \mathcal{X}(z)$ οπότε

$$\mathcal{Y}^+(z) = \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{M} \beta_k z^{-k} \right\} \Big/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\}}_{\text{μετασχηματισμός της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση}} \mathcal{X}(z)$$

$$- \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \left(\sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n \right) \right\} \Big/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k z^{-k} \right\}}_{\text{μετασχηματισμός της απόκρισης στη μηδενική είσοδο}} = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) + \frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{A}(z)}$$

όπου

$$\mathcal{D}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^n \right)$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου $y[n]$, αποτελεί το άθροισμα του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της απόκρισης του συστήματος στη μηδενική κατάσταση

$$\mathcal{Y}_{zs}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z)$$

και του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της απόκρισης του συστήματος στη μηδενική είσοδο

$$\mathcal{Y}_{zi}^{+}(z) = \frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{A}(z)}$$

και αντιστρέφοντας παίρνουμε

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{P}_k (p_k)^n u[n] + \sum_{k=1}^{L} \mathcal{Q}_k (q_k)^n u[n]$$

αφού ο παρονομαστής του $\mathcal{Y}_{zi}^{+}$ είναι το $\mathcal{A}(z)$, με πόλους $p_1, p_2, \ldots, p_N$ οπότε θα είναι

$$\mathcal{Y}_{zi}^{+}(z) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{C}_k (p_k)^n u[n]$$

Επομένως η ύπαρξη μη μηδενικών αρχικών συνθηκών μεταβάλλει μόνο τη φυσική απόκριση, ενώ η εξαναγκασμένη απόκριση παραμένει αμετάβλητη.

Εάν το μέτρο των πόλων $\{p_k\}$ είναι $|p_k| < 1$, η φυσική απόκριση του συστήματος τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος n τείνει στο άπειρο και χαρακτηρίζεται ως μεταβατική ή παροδική απόκριση.

Ο ρυθμός μείωσης, εξαρτάται από τη θέση των πόλων $\{p_k\}$ επί του μιγαδικού επιπέδου:

- Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται πολύ κοντά στην αρχή του μιγαδικού επιπέδου ο ρυθμός εξασθένησης του σήματος είναι πάρα πολύ μεγάλος.
- Εάν οι πόλοι βρίσκονται κοντά στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, η εξασθένηση της φυσικής απόκρισης είναι πολύ πιο αργή και αυτός ο παροδικός όρος διαρκεί για πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Η εξαναγκασμένη απόκριση είναι συνάρτηση των συντελεστών $\mathcal{Q}_k$ και των πόλων $\{q_k\}$ του σήματος εισόδου.

Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, η εξαναγκασμένη απόκριση θα τείνει στο μηδέν.

Εάν το σήμα εισόδου είναι μια ημιτονοειδής κυματομορφή, οι πόλοι του σήματος βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, και η εξαναγκασμένη απόκριση είναι επίσης ένα ημιτονοειδές κύμα που ορίζεται για τιμές χρόνου $n \geq 0$.

Στην περίπτωση αυτή η απόκριση του συστήματος είναι γνωστή με το όνομα απόκριση σταθεράς κατάστασης.

Άσκηση

Θεωρώντας το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(z) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - (3/5)z^{-1} + (2/25)z^{-2}}$$

να προσδιορίσετε

- *(α) την κρουστική απόκριση* $h[n]$
- *(β) την απόκριση μηδενικής κατάστασης στο σήμα εισόδου* $x[n] = u[n]$
- *(γ) τη βηματική απόκριση για τις αρχικές συνθήκες* $y[-1] = 1$ *και* $y[-2] = 2$

(α) Η κρουστική απόκριση προκύπτει από την αντιστροφή της συνάρτησης $\mathcal{H}(z)$. Θέτοντας $y = z^{-1}$, το πολυώνυμο του παρονομαστή γράφεται

$$f(y) = \frac{2}{25}y^2 - \frac{3}{5}y + 1 = \frac{2}{25}\left(y^2 - \frac{15}{2}y + \frac{25}{2}\right) = \frac{(y-5)(2y-5)}{25}$$

και επιστρέφοντας στις αρχικές μας μεταβλητές,

$$\mathcal{H}(z) = \frac{25(z^{-1} + 0.5z^{-2})}{(z^{-1} - 5)(2z^{-1} - 5)} = \frac{25}{2} \frac{2z + 1}{(1 - 5z)(2 - 5z)}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μιγαδικής ολοκλήρωσης, ας ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{\mathcal{H}(z)}{z} z^n = \frac{25}{2} \frac{(2z + 1)z^{n-1}}{(1 - 5z)(2 - 5z)} = z^{-1} \left\{ \frac{25}{2} \frac{(2z + 1)z^n}{(1 - 5z)(2 - 5z)} \right\} = z^{-1}\mathcal{Y}_1(z)$$

η οποία διαθέτει δύο απλούς πόλους στις θέσεις $z_1 = 1/5$ και $z_2 = 2/5$ με υπόλοιπα

$$Res[Y(1/5)] = \frac{25}{2} \lim_{z \to 1/5} \left[\left(z - \frac{1}{5}\right) \frac{(2z + 1)z^n}{5\left(\frac{1}{5} - z\right)(2 - 5z)} \right] = -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$Res[Y(2/5)] = \frac{25}{2} \lim_{z \to 2/5} \left[\left(z - \frac{2}{5}\right) \frac{(2z + 1)z^n}{5\,(1 - 5z)\left(\frac{2}{5} - z\right)} \right] = +\frac{9}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $\mathcal{Y}_1(z)$ είναι

$$h_1[n] = \left[\frac{9}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n \right] u(n)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης βρίσκουμε

$$h[n] = \left[\frac{9}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]u[n-1]$$

σχέση, που εκφράζει την κρουστική απόκριση του θεωρούμενου διακριτού συστήματος.

(β) Η βηματική απόκριση του συστήματος δίδεται από την εξίσωση της συνέλιξης

$$y[n] = h[n] * x[n] = \frac{9}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}u[k-1]u[n-k] - \frac{7}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}u[k-1]u[n-k]$$

$$= \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} - \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$

Αλλάζοντας το βωβό δείκτη από k σε $m = k-1$, και υποθέτοντας πως το σύστημα είναι αιτιατό βρίσκουμε (ανατρέξτε στη σελίδα 511)

$$y[n] = \frac{9}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{m} - \frac{7}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{m} = \left[\frac{35}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} - \frac{15}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} + \frac{25}{8}\right]u[n]$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (σελίδα 511).

Στην παραπάνω διαδικασία δεν χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες και επομένως η $y[n]$ είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης (γ) Η συνολική απόκριση θα προκύψει από το άθροισμα της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση και της απόκρισης στη μηδενική είσοδο.

Η πρώτη απόκριση έχει ήδη υπολογιστεί. Για να υπολογίσουμε τη δεύτερη απόκριση παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - (3/5)z^{-1} + (2/25)z^{-2}}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{Y}(z)\left(1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}\right) = \mathcal{X}(z)\left(z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

και τελικά

$$\mathcal{Y}(z) - \frac{3}{5}z^{-1}\mathcal{Y}(z) + \frac{2}{25}z^{-2}\mathcal{Y}(z) = z^{-1}\mathcal{X}(z) + \frac{1}{2}z^{-2}\mathcal{X}(z)$$

Αντιστρέφοντας και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}\mathcal{X}(z)$$

(για τις τιμές $k = 1$ και $k = 2$) η εξίσωση διαφορών του συστήματος είναι

$$y[n] - \frac{3}{5}y[n-1] + \frac{2}{25}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

Θέτοντας $x[n-1] = x[n-2] = 0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μονομερούς μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}^+\{y[n-k]\} = z^{-k}\left[\mathcal{Y}^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n]z^n\right]$$

και τις αρχικές συνθήκες $y[-1] = 1$ και $y[-2] = 2$ θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^+\{y[n-1]\} &= z^{-1}(\mathcal{Y}^+(z) + y[-1]z) + z^{-1}\mathcal{Y}^+(z) + y[-1] = z^{-1}\mathcal{Y}^+(z) + 1 \\
\mathcal{Z}^+\{y[n-2]\} &= z^{-2}(\mathcal{Y}^+(z) + y[-1]z + y[-2]z^2) = z^{-2}\mathcal{Y}^+(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2] \\
&= z^{-2}\mathcal{Y}^+(z) + z^{-1} + 2
\end{aligned}$$

Επομένως η εφαρμογή του μονομερούς μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ στην ομογενή εξίσωση διαφορών του συστήματος μας δίνει

$$\mathcal{Y}^+(z) - \frac{3}{5}(z^{-1}\mathcal{Y}^+(z) + 1) + \frac{2}{25}(z^{-2}\mathcal{Y}^+(z) + z^{-1} + 2)$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{-(2/25)z^{-1} + (11/25)}{(2/25)z^{-2} - (3/5)z^{-1} + 1}$$

Κατά συνέπεια, η απόκριση μηδενικής εισόδου θα υπολογιστεί ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $\mathcal{Y}^+(z)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το αποτέλεσμα της παραγοντοποίησης του ερωτήματος (α) της άσκησης

$$\frac{1}{(2/25)z^{-2} - (3/5)z^{-1} + 1} = \frac{25}{(z^{-1} - 5)(2z^{-1} - 5)}$$

μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $\mathcal{Y}^+(z)$ με τη μορφή

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{25[-(2/25)z^{-1} + (11/25)]}{(z^{-1} - 5)(2z^{-1} - 5)} = \frac{11 - 2z^{-1}}{(z^{-1} - 5)(2z^{-1} - 5)} = \frac{(11z - 2)z}{(1 - 5z)(2 - 5z)}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μιγαδικής ολοκλήρωσης, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\mathcal{A}(z) = \frac{\mathcal{Y}^+(z)}{z} z^n = \frac{(11z - 2)z^n}{(1 - 5z)(2 - 5z)}$$

η οποία διαθέτει δύο απλούς πόλους στα σημεία $z_1 = 1/5$ και $z_2 = 2/5$ με υπόλοιπα

$$Res[\mathcal{A}(1/5)] = \lim_{z \to 1/5} \left[\left(z - \frac{1}{5}\right) \frac{(11z - 2)z^n}{5\left(\frac{1}{5} - z\right)(2 - 5z)} \right] = -\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$Res[\mathcal{A}(2/5)] = \lim_{z \to 2/5} \left[\left(z - \frac{2}{5}\right) \frac{(11z - 2)z^n}{5\left(\frac{2}{5} - z\right)(1 - 5z)} \right] = +\frac{12}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Επομένως η απόκριση μηδενικής εισόδου θα δίδεται από τη σχέση

$$y[n] = \left[-\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{12}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^n \right] u[n]$$

Τέλος, η συνολική απόκριση θα ισούται με το άθροισμα της απόκρισης μηδενικής κατάστασης που υπολογίσαμε στο ερώτημα (β) και της απόκρισης μηδενικής εισόδου που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y[n] &= \left[\left(\frac{35}{8} - \frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{12}{25} - \frac{15}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{25}{8} \right] u[n] \\ &= \left[\frac{867}{200}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{351}{50}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{25}{8} \right] u[n] \end{aligned}$$

που είναι και το τελικό αποτέλεσμα.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}^+$ των δύο μελών της καταστατικής εξίσωσης, έχουμε

$$\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{q}[n+1]\} = \mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[n]\} = \boldsymbol{A}\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{q}[n]\} + \boldsymbol{B}\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{x}[n]\}$$

Ορίζοντας τώρα τα διανύσματα

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{Q}}^+(z) &= \mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{q}[n]\}[\mathcal{Z}^+\{q_1[n]\}, \mathcal{Z}^+\{q_2[n]\}, \ldots, \mathcal{Z}^+\{q_N[n]\}]^T \\
&= [\mathcal{Q}_1(z), \mathcal{Q}_2(z), \ldots, \mathcal{Q}_N(z)]^T \quad \text{και} \\
\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z) &= \mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{x}[n]\} = [\mathcal{Z}^+\{x_1[n]\}, \mathcal{Z}^+\{x_2[n]\}, \ldots, \mathcal{Z}^+\{q_L[n]\}]^T \\
&= [\mathcal{X}_1(z), \mathcal{X}_2(z), \ldots, \mathcal{X}_L(z)]^T
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$\mathcal{Z}^+\{q[n+k]\} = z^k \left[\mathcal{X}^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} q[n]z^{-n}\right] \quad (k > 1)$$

η οποία για την τιμή $k = 1$ θα μας δώσει

$$\mathcal{Z}^+\{q_i[n+1]\} = z\left[\mathcal{Q}_i(z) - q_i[0]\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

ή σε διανυσματική γραφή,

$$\mathcal{Z}^{+}\{\boldsymbol{q}[n+1]\} = z\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}(z) - z\boldsymbol{q}[0]$$

η μετασχηματισμένη κατά $\mathcal{Z}^{+}$ καταστατική εξίσωση θα λάβει τη μορφή

$$z\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}(z) - z\boldsymbol{q}[0] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{+}(z)$$

ή ισοδύναμα

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}(z) = z\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{+}(z)$$

και τελικά

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{q}[0] + z(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{+}(z) = (\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}[0] + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{+}(z)$$

όπου $\boldsymbol{I}$ είναι ο *μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων* $N \times N$.

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε το καταστατικό διάνυσμα $\boldsymbol{q}[n]$ ως

$$\boldsymbol{q}[n] = \underbrace{(\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left[(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right]}_{\text{συνιστώσα μηδενικής εισόδου}} + \underbrace{(\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left[(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{+}(z)\right]}_{\text{συνιστώσα μηδενικής κατάστασης}}$$

Ομοίως, λαμβάνοντας το μονομερή μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της εξίσωσης εξόδου και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $\mathcal{Q}^+(z)$ από την παραπάνω σχέση, παίρνουμε

$$\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{y}[n]\} = \boldsymbol{C}\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{q}[n]\} + \boldsymbol{D}\mathcal{Z}^+\{\boldsymbol{x}[n]\} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\mathcal{Q}}^+(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{Y}}^+(z) &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{z}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}[0] + \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z) = \\ &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{z}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}[0] + \left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z)\end{aligned}$$

Από τον αντίστροφο μονομερή μετασχηματισμό της τελευταίας σχέσης, η έξοδος $\boldsymbol{y}[n]$ υπολογίζεται ως

$$\boldsymbol{y}[n] = \underbrace{(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{z}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}[0]\right]}_{\text{απόκριση μηδενικής εισόδου}} + \underbrace{(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{\mathcal{X}}^+(z)\right\}}_{\text{απόκριση μηδενικής κατάστασης}}$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ *να επιλύσετε την εξίσωση*

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n]$$

για τιμές παραμέτρων

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x[n] = u[n]$$

και διάνυσμα αρχικής κατάστασης $\boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ *και στη συνέχεια να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος εάν οι πίνακες* $\boldsymbol{C}$ *και* $\boldsymbol{D}$ *έχουν τη μορφή* $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix}$ *και* $\boldsymbol{D} = [0]$.

Η ζητούμενη λύση της καταστατικής εξίσωσης θα υπολογιστεί από τη σχέση

$$\boldsymbol{q}[n] = (\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right\} + (\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\mathcal{X}^{+}(z)\right\}$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή του πίνακα συστήματος $\boldsymbol{A}$ προκύπτει εύκολα ότι

$$\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{6z} & \dfrac{6z-5}{6z} \end{bmatrix} \quad \text{με ορίζουσα} \quad \mathrm{Det}(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A}) = \frac{6z^2-5z+1}{6z^2}$$

και επομένως ο αντίστροφος πίνακας $(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}$ υπολογίζεται ως

$$(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{6z^2-5z}{6z^2-5z+1} & \dfrac{6z}{6z^2-5z+1} \\ \dfrac{-z}{6z^2-5z+1} & \dfrac{6z^2}{6z^2-5z+1} \end{bmatrix}$$

Θα είναι λοιπόν

$$(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} \dfrac{12z^2+8z}{6z^2-5z+1} \\ \dfrac{18z^2-2z}{6z^2-5z+1} \end{bmatrix}$$

και η συνιστώσα μηδενικής εισόδου του καταστατικού διανύσματος υπολογίζεται ως

$$(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right\} = \begin{bmatrix} (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\dfrac{12z^2+8z}{6z^2-5z+1}\right\} \\ \\ (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\dfrac{18z^2-2z}{6z^2-5z+1}\right\} \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται (σελίδα 516) πως οι συναρτήσεις προς αντιστροφή διαθέτουν δύο πόλους στις θέσεις $z = 1/2$ και $z = 1/3$ και επομένως θα έχουμε:

Για την πρώτη έκφραση: η βοηθητική συνάρτηση $\mathcal{Y}(z)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{12z^2+8z}{6z^2-5z+1}z^{n-1}$$

με τιμές υπολοίπων στις θέσεις των πόλων

$$\text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/2)\right] = \lim_{z\to 1/2}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{12z^2+8z}{6\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1}\right] = +14\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/3)\right] = \lim_{z\to 1/3}\left[\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{12z^2+8z}{6\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1}\right] = -12\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Θα είναι λοιπόν

$$(\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{\frac{12z^2+8z}{6z^2-5z+1}\right\} = 14\left(\frac{1}{2}\right)^n - 12\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Για τη δεύτερη έκφραση: η βοηθητική συνάρτηση $\mathcal{Y}(z)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{18z^2-2z}{6z^2-5z+1}z^{n-1}$$

με τιμές υπολοίπων στις θέσεις των πόλων

$$\text{Res}\,[\mathcal{Y}(1/2)] = \lim_{z\to 1/2}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{18z^2-2z}{6\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1}\right] = +7\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Res}\,[\mathcal{Y}(1/3)] = \lim_{z\to 1/3}\left[\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{18z^2-2z}{6\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1}\right] = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Θα είναι λοιπόν

$$(\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{\frac{18z^2-2z}{6z^2-5z+1}\right\} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

και τελικά η συνιστώσα μηδενικής εισόδου του καταστατικού διανύσματος είναι

$$(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right\} = \begin{bmatrix} 14\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 12\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό της συνιστώσας μηδενικής κατάστασης χρειαζόμαστε το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}^+$ του σήματος $x[n] = u[n]$, ο οποίος είναι $\mathcal{X}^+(z) = z/(z-1)$. Θα είναι ακόμη

$$z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{6z-5}{6} \end{bmatrix} \quad \text{με ορίζουσα} \quad \mathrm{Det}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \frac{6z^2 - 5z + 1}{6}$$

και επομένως ο αντίστροφος πίνακας $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ υπολογίζεται ως

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{6z-5}{6z^2-5z+1} & \dfrac{6}{6z^2-5z+1} \\ \dfrac{-1}{6z^2-5z+1} & \dfrac{6z}{6z^2-5z+1} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις προκύπτει εύκολα ότι

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\mathcal{X}^{+}(z)=\begin{bmatrix} \dfrac{6z}{(6z^2-5z+1)(z-1)} \\[2ex] \dfrac{6z^2}{(6z^2-5z+1)(z-1)} \end{bmatrix}$$

και η συνιστώσα μηδενικής κατάστασης του καταστατικού διανύσματος υπολογίζεται ως

$$(\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\mathcal{X}^{+}(z)\right\}=\begin{bmatrix} (\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{\dfrac{6z}{(6z^2-5z+1)(z-1)}\right\} \\[2ex] (\mathcal{Z}^{+})^{-1}\left\{\dfrac{6z^2}{(6z^2-5z+1)(z-1)}\right\} \end{bmatrix}$$

Οι συναρτήσεις προς αντιστροφή διαθέτουν τρεις πόλους με τιμές $z_1=1/2$, $z_2=1/3$ και $z_3=1$. Ξεκινώντας από την πρώτη έκφραση, η βοηθητική συνάρτηση $\mathcal{Y}(z)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{Y}(z)=\frac{6z^n}{(6z^2-5z+1)(z-1)}$$

με τιμές υπολοίπων στις θέσεις των πόλων της ίσες με

$$\text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/2)\right] = -12\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/3)\right] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{Res}\left[\mathcal{Y}(1)\right] = 3$$

Η βοηθητική συνάρτηση για τη δεύτερη έκφραση είναι η

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{6z^{n+1}}{(6z^2-5z+1)(z-1)}$$

με τιμές υπολοίπων στις θέσεις των πόλων της

$$\text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/2)\right] = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{Res}\left[\mathcal{Y}(1/3)\right] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{Res}\left[\mathcal{Y}(1)\right] = 3$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\frac{6z}{(6z^2-5z+1)(z-1)}\right\} &= -12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \\
(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\frac{6z^2}{(6z^2-5z+1)(z-1)}\right\} &= -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3
\end{aligned}$$

και η συνιστώσα μηδενικής κατάστασης του καταστατικού διανύσματος είναι η

$$(\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\mathcal{X}^+(z)\right\} = \begin{bmatrix} 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 12\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως το καταστατικό διάνυσμα προκύπτει προσθέτοντας μεταξύ τους τη συνιστώσα μηδενικής εισόδου και τη συνιστώσα μηδενικής κατάστασης. Θα είναι λοιπόν

$$\boldsymbol{q}[n] = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \end{bmatrix}$$

Από την άλλη πλευρά, η έξοδος του συστήματος δια της εφαρμογής του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$, θα υπολογιστεί από την εξίσωση

$$y[n] = (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right\} + (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\mathcal{X}^+(z)\right\}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0] = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{12z^2+8z}{6z^2-5z+1} \\ \\ \dfrac{18z^2-2z}{6z^2-5z+1} \end{bmatrix} = \frac{78z^2-18z}{6z^2-5z+1}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μιγαδικής ολοκλήρωσης για τη βοηθητική συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{78z^2-18z}{6z^2-5z+1} z^{n-1}$$

διαπιστώνουμε εύκολα πως τα υπόλοιπα στις θέσεις των πόλων της έχουν τις τιμές

$$\text{Res}\,[\mathcal{Y}(1/2)] = 21\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{και} \quad \text{Res}\,[\mathcal{Y}(1/2)] = -8\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

και επομένως η απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος είναι

$$y_{zi}[n] = 21\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόκριση του συστήματος στη μηδενική κατάσταση.

Το όρισμα του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}^+$ του δεύτερου όρου της εξίσωσης της εξόδου $y[n]$ είναι

$$\left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\mathcal{X}^+(z)=\frac{30z^2-6z}{(6z^2-5z+1)(z-1)}$$

Εφαρμόζοντας ξανά τη μέθοδο της μιγαδικής ολοκλήρωσης για τη βοηθητική συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(z)=\frac{30z^2-6z}{(6z^2-5z+1)(z-1)}\,z^{n-1}=\frac{30z^2-6z}{6\,[z-(1/2)]\,[z-(1/3)](z-1)}\,z^{n-1}$$

διαπιστώνουμε εύκολα πως οι τιμές των υπολοίπων της στις θέσεις των πόλων της δίδονται από τις σχέσεις

$$\mathrm{Res}\,[\mathcal{Y}(1/2)]=-18\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad \mathrm{Res}\,[\mathcal{Y}(1/3)]=6\left(\frac{1}{3}\right)^n,\quad \mathrm{Res}\,[\mathcal{Y}(1)]=12$$

Επομένως η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος θα είναι η

$$y_{zs}[n] = -18\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12$$

ενώ η συνολική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12\right] u[n]$$

με τη βηματική συνάρτηση $u[n]$ να προστίθεται για να καταστήσει την έξοδο του συστήματος αιτιατό σήμα.

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε είναι το ίδιο με εκείνο που προκύπτει υπολογίζοντας την έξοδο του συστήματος με τον κλασσικό τρόπο.

Εάν συγκρίνουμε την εξίσωση της συνιστώσας μηδενικής εισόδου του καταστατικού διανύσματος

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{zi}}[n] = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{q}[0]$$

με την αντίστοιχη σχέση που προκύπτει δια της εφαρμογής της μεθόδου του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{zi}}[n] = (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left[(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]\right] = (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left[(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\right]\boldsymbol{q}[0]$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$\boxed{\boldsymbol{A}^n = (\mathcal{Z}^+)^{-1}\left[(\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\right]}$$

Η τελευταία σχέση προσφέρει μία ακόμα εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού της εκθετικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}^n$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}^+$.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Συνάρτηση μεταφοράς και δυναμικές εξισώσεις

Θεωρώντας ένα διακριτό σύστημα SISO που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{B}x[n] \quad \text{και} \quad y[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{D}x[n]$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς του από τη σχέση

$$\mathcal{H}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{C}[\mathrm{Adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})]\boldsymbol{B}}{\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} + \boldsymbol{D}$$

Αντίστροφα, εάν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε τις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος επιλέγοντας κατάλληλα τις καταστατικές μεταβλητές του προβλήματος.

Προκειμένου για παράδειγμα να κατασκευάσουμε την κανονική μορφή του ελεγκτή θα πρέπει να διατυπώσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_{N-1} z^{-N+1}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_N z^{-N}}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
Συνάρτηση μεταφοράς και δυναμικές εξισώσεις

(για $M = N - 1$) ως το γινόμενο

$$\mathcal{H}(z) = \underbrace{\left\{\frac{1}{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}+\cdots+\alpha_N z^{-N}}\right\}}_{\mathcal{H}_1(z)} \underbrace{\left\{\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}+\cdots+\beta_{N-1} z^{-N+1}\right\}}_{\mathcal{H}_2(z)}$$

και στη συνέχεια να επιλέξουμε τις καταστατικές μεταβλητές με τον τρόπο που το κάναμε στο Κεφάλαιο 7. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την κανονική μορφή του παρατηρητή

Τέλος, όσον αφορά τις επονομαζόμενες υλοποιήσεις ελάχιστης διάστασης, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Μία υλοποίηση συστήματος χαρακτηρίζεται ως υλοποίηση ελάχιστης διάστασης όταν είναι ταυτόχρονα ελέγξιμη και παρατηρήσιμη.
- Όλες οι υλοποιήσεις ελάχιστης διάστασης που περιγράφουν μία συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς σχετίζονται μεταξύ τους δια μέσου μετασχηματισμών ομοιότητας.