

Ανάλυση Fourier στο πεδίο του συνεχούς χρόνου (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Ανάπτυγμα Fourier

Ορισμός του αναπτύγματος Fourier

Αποδεικνύεται πως κάθε **περιοδικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο $L = 2T$ που ικανοποιεί τις **συνθήκες του Dirichlet**, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία **συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά απείρων όρων ημιτόνων και συνημιτόνων** της μορφής

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{n\pi t}{T} \right)$$

η οποία είναι γνωστή ως **σειρά** ή **ανάπτυγμα Fourier**, με τους συντελεστές A_n και B_n να είναι γνωστοί ως **συντελεστές Fourier**. Θέτοντας για λόγους απλότητας $T = \pi$, το σήμα ορίζεται στο διάστημα $(0, 2\pi)$ ή $(-\pi, \pi)$ και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) \right)$$

με τους συντελεστές A_n και B_n να δίδονται από τις σχέσεις

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt \quad \text{και} \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt$$

Ανάπτυγμα Fourier

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις, εκθετικό ανάπτυγμα

Εάν το συνεχές σήμα $x(t)$ αποτελεί **άρτια** ή **περιττή** συνάρτηση, το ανάπτυγμα Fourier θα περιέχει **μόνο όρους ημιτόνων** ή **συνημιτόνων**. Πιο συγκεκριμένα, εάν το σήμα είναι **άρτιο** αποδεικνύεται ότι $B_n = 0$ και θα είναι

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \quad \text{όπου} \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \cos(nt) dt$$

ενώ εάν το σήμα είναι **περιττό**, αποδεικνύεται ότι $A_n = 0$ και αντίστοιχα θα είναι

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nt) \quad \text{όπου} \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \sin(nt) dt$$

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι και η εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier. Ορίζοντας τις παραμέτρους $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ και $\varphi_n = \tan^{-1}(B_n/A_n)$ αποδεικνύεται ότι

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jnt}$$

$$\text{όπου} \quad \alpha_n = \frac{1}{2} C_n e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (A_n - jB_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jnt} dt$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ορθογώνιες εκθετικές συναρτήσεις

Αποδεικνύεται πως το σύνολο των **εκθετικών συναρτήσεων** $x_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) αποτελεί **ορθογώνια βάση** επί οποιουδήποτε διαστήματος χρονικής διάρκειας $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Πράγματι από την εξίσωση του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x_m(t), x_k(t) \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} x_m(t)x_k^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}(e^{jk\omega_0 t})^* dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(m-k)\omega_0} \left[e^{j(m-k)\omega_0 t} \right]_{t_0}^{t_0+T_0} \\ &= \frac{1}{j(m-k)\omega_0} \left[e^{j(m-k)\omega_0(t_0+T_0)} - e^{j(m-k)\omega_0 t_0} \right] \\ &= \frac{T_0}{2\pi j(m-k)} \left[e^{j(m-k)(2\pi+\omega_0 t_0)} - e^{j(m-k)\omega_0 t_0} \right] \\ &= \frac{T_0 e^{j(m-k)\omega_0 t_0}}{2\pi j(m-k)} \left[e^{2\pi j(m-k)} - 1 \right]\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μηδενίζεται για $m \neq k$ ενώ για $m = k$ λαμβάνει την απροσδιόριστη μορφή 0/0. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Del' Hospital διαπιστώνουμε εύκολα ότι $\langle x_m(t), x_k(t) \rangle = T_0$. Θα είναι λοιπόν $\langle x_m(t), x_k(t) \rangle = T_0 \delta_{mn}$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Ανάπτυγμα Fourier

Γραμμικά φάσματα

Ειδικά διαγράμματα που αναδεικνύουν το **συχνοτικό περιεχόμενο** του σήματος.

Διατυπώνοντας τους συντελεστές Fourier στη μορφή $\alpha_n = |\alpha_n|e^{j\varphi_n}$ ορίζουμε:

- **Φάσμα πλάτους:** γραφική παράσταση της μεταβολής της συνάρτησης $|\alpha_n|$ για τιμές συχνοτήτων $\omega_n = n\omega_0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$)
- **Φάσμα φάσης:** γραφική παράσταση της μεταβολής της συνάρτησης φ_n για τιμές συχνοτήτων $\omega_n = n\omega_0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Χαρακτηρίζονται ως **διακριτά συχνοτικά φάσματα** ή **γραμμικά φάσματα** αφού αποτελούνται από ένα σύνολο κατακόρυφων γραμμών η τομή των οποίων με τον οριζόντιο άξονα αντιστοιχεί στις θέσεις $\omega_n = n\omega_0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Παρατηρώντας ότι $|\alpha_n| = C_n/2$, το **φάσμα πλάτους** είναι η διαγραμματική απεικόνιση της ποσότητας $C_n/2$ στις θέσεις των διακριτών συχνοτήτων $\omega_n = n\omega_0 = 2\pi n/T$.

Το φάσμα μπορεί να επεκταθεί και στην περιοχή των αρνητικών συχνοτήτων και λόγω της ιδιότητας $|\alpha_{-n}| = |\alpha_n^*| = |\alpha_n|$ **το ύψος των γραμμών στις θέσεις των αρνητικών συχνοτήτων είναι το ίδιο με εκείνο των γραμμών που σχετίζονται με τις αντίστοιχες θετικές συχνότητες.**

Ανάπτυγμα Fourier

Οι συνθήκες σύγκλισης του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αναγκαία προϋπόθεση για τη σύγκλιση του αναπτύγματος Fourier στην τιμή του σήματος $x(t)$ είναι οι **συνθήκες του Dirichlet** οι οποίες διατυπώνονται ως εξής:

- Η συνάρτηση $x(t)$ είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** επί οποιουδήποτε χρονικού διαστήματος διάρκειας μιας περιόδου, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_T |f(t)| dt < \infty$$

Αυτή η συνθήκη διασφαλίζει πως οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier θα είναι **πεπερασμένοι** αφού θα είναι

$$|\alpha_n| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{-jn\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt < \infty$$

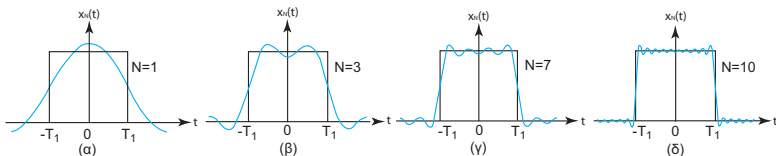
- Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, το σήμα $x(t)$ θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από **φραγμένη μεταβολή**, δηλαδή θα πρέπει να διαθέτει πεπερασμένο πλήθος μεγίστων και ελαχίστων σε χρονικό διάστημα διάρκειας μιας περιόδου.
- Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα το σήμα $x(t)$ θα πρέπει να διαθέτει **πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας με πεπερασμένη τιμή**.

Ανάπτυγμα Fourier

Το φαινόμενο Gibbs

Θεωρώντας ένα ορθογώνιο σήμα που χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη **ασυνεχειών**, το **φαινόμενο Gibbs** περιγράφεται ως

η εμφάνιση κυματισμών στην προσέγγιση του σήματος από το ανάπτυγμά του κατά Fourier το πλάτος των οποίων αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε προς τα σημεία της ασυνέχειας.



Μαύρη καμπύλη: ορθογώνιο σήμα $x(t)$ περιόδου $T = 4T_1$.

Μπλε καμπύλη: προσέγγιση του $x(t)$ από το ανάπτυγμά του κατά Fourier $x_N(t)$.

Παρατηρείται πως **το μέγιστο πλάτος των κυματισμών παραμένει σταθερό** και δεν ελαττώνεται με την αύξηση του πλήθους των όρων N . Το σήμα προσεγγίζεται με μηδενικό σφάλμα στο όριο $N \rightarrow \infty$.

Ανάπτυγμα Fourier

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ομογένεια: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = \alpha x(t)$ είναι οι

$$y_n = \alpha x_n$$

Πρόσθεση: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = x(t) + y(t)$ θα είναι οι

$$z_n = x_n + y_n$$

Γραμμικότητα: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ θα είναι οι

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n$$

Πολλαπλασιασμός: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ θα δίδονται από την εξίσωση της διακριτής συνέλιξης

$$z_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k}$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Συνέλιξη: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier της συνάρτησης

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_T x(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad \text{θα είναι οι} \quad z_n = x_n y_n$$

Μετατόπιση στο χρόνο: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = x(t - \tau)$ θα είναι οι

$$y_n = e^{-jn\omega_0\tau} x_n$$

Μετατόπιση στη συχνότητα: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = e^{j\omega_0 m t} x(t)$ θα είναι οι

$$y_n = x_{n-m}$$

Αντιστροφή χρόνου: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = x(-t)$ θα δίδονται από τη σχέση

$$y_n = x_{-n}$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Μιγαδική συζυγία: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = x^*(t)$ είναι

$$y_n = x_{-n}^*$$

όπου το σύμβολο $*$ αναφέρεται στην πράξη της μιγαδικής συζυγίας.

Χρονική κλιμάκωση: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = x(\alpha t)$ με περίοδο $T' = T/\alpha$ παραμένουν αμετάβλητοι, αφού αποδεικνύεται ότι

$$y_n = x_n$$

Διαφόριση: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y(t) = x'(t)$ θα δίδονται από τη σχέση

$$y_n = jn\omega_0 x_n$$

Ολοκλήρωση: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ είναι οι x_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

δίδονται από τη σχέση $y_n = x_n/jn\omega_0$.

Ανάπτυγμα Fourier

Συγκεντρωτικός πίνακας ιδιοτήτων του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ιδιότητα	Σήμα $x(t)$	Συντελεστές Fourier
Ομογένεια Πρόσθεση Γραμμικότητα	$\alpha x(t)$ $x(t) + y(t)$ $\alpha x(t) + \beta y(t)$	αx_n $x_n + y_n$ $\alpha x_n + \beta y_n$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$
Συνέλιξη	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t-\tau)y(\tau)d\tau$	$x_n y_n$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-\tau)$	$\exp\left(\frac{-2j\pi n\tau}{T}\right) x_n$
Συχνотική μετατόπιση	$\exp\left(\frac{2j\pi mt}{T}\right) x(t)$	x_{n-m}
Χρονική αντιστροφή	$x(-t)$	x_{-n}
Μιγαδική συζυγία	$x^*(t)$	x_{-n}^*
Χρονική κλιμάκωση	$x(\alpha t)$	x_n
Διαφόριση	$x'(t)$	$j n \omega_0 x_n$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{x_n}{j n \omega_0}$

Ανάπτυγμα Fourier

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier - Παράδειγμα 1

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Γραμμικότητα: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ θα είναι οι $z_n = \alpha x_n + \beta y_n$.

Απόδειξη: από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier έχουμε

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{T} \int_T z(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T [\alpha x(t) + \beta y(t)] e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \alpha \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \beta \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \alpha x_n + \beta y_n \end{aligned}$$

Πρόσθεση: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = x(t) + y(t)$ θα είναι οι $z_n = x_n + y_n$.

Απόδειξη: από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{T} \int_T z(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T [x(t) + y(t)] e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = x_n + y_n \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier - Παράδειγμα 2

Πολλαπλασιασμός: εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι x_n και y_n , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ θα δίδονται από την εξίσωση της διακριτής συνέλιξης

$$z_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k}$$

Απόδειξη: από την εκθετική αναπαράσταση Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ έχουμε

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{jk\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_m e^{jm\omega_0 t} = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} x_k y_m e^{j\omega_0(m+k)t}$$

Ορίζοντας το βωβό δείκτη $n = m + k$, θα είναι $m = n - k$ και η τελευταία σχέση γίνεται

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k} \right) e^{-jn\omega_0 t}$$

Το ζητούμενο προκύπτει συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{jn\omega_0 t}$$

Ανάπτυγμα Fourier

Η εξίσωση του Parseval

Η μέση ισχύς συνεχούς σήματος $x(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

Αντικαθιστώντας το σήμα $x(t)$ από την εκθετική αναπαράστασή του κατά Fourier,

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \right)^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{jm\omega_0 t} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{j(n+m)\omega_0 t} \right) dt \end{aligned}$$

Τα φανταστικά εκθετικά σήματα αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων. Το ολοκλήρωμα λοιπόν θα είναι μηδέν για όλες τις τιμές του δείκτη m εκτός από την τιμή $m = -n$ για την οποία είναι ίσο με $2T$.

Ανάπτυγμα Fourier

Η εξίσωση του Parseval

Θα είναι, λοιπόν

$$\langle x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$$

όπου θεωρήσαμε πραγματικό σήμα για το οποίο είναι $x_{-n} = x_n^*$. Η σχέση αυτή για χρονικό διάστημα μιας περιόδου διατυπώνεται ως

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$$

και είναι γνωστή ως **εξίσωση του Parseval**. Η φυσική σημασία αυτής της σχέσης είναι πως

η ισχύς του σήματος για χρονικό διάστημα ίσο με μια περίοδο ισούται με το άθροισμα των μέτρων των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$.

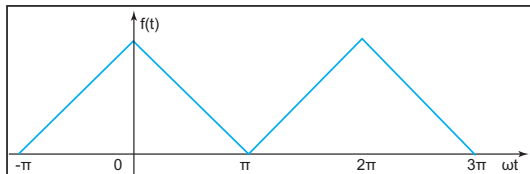
Ανάπτυγμα Fourier

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Άσκηση

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του τριγωνικού σήματος του επόμενου σχήματος που ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} E + \frac{E}{\pi}\omega t & \text{για } -\pi < \omega t < 0 \\ E - \frac{E}{\pi}\omega t & \text{για } 0 < \omega t < \pi \end{cases}$$



Ανάπτυγμα Fourier

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Η συνάρτηση σήματος $x(t)$ είναι **άρτια** στο πεδίο ορισμού της και επομένως θα είναι $B_n = 0$. Προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές A_0 και A_n ορίζουμε τη μεταβλητή $x = \omega t$. Θα είναι τότε

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(E - \frac{E}{\pi} x \right) dx = \frac{2E}{\pi} \left[x - \frac{x^2}{2\pi} \right]_0^{\pi} = E \quad \text{και}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(E - \frac{E}{\pi} x \right) \cos(nx) dx = \frac{2E}{n^2 \pi^2} \left[1 - \cos(n\pi) \right] = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4E}{n^2 \pi^2} & n = 2k + 1 \end{cases}$$

όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Επομένως, η *τριγωνομετρική μορφή* του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x(t)$ θα δίδεται από την εξίσωση

$$x(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\omega t]}{(2k+1)^2}$$

ενώ η *εκθετική μορφή* αυτού του αναπτύγματος, αποδεικνύεται πως έχει τη μορφή

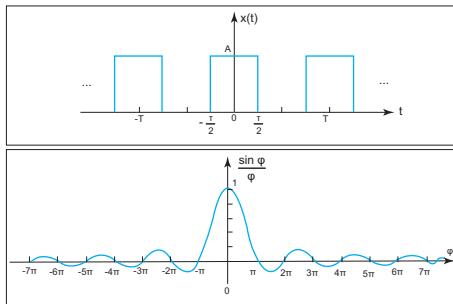
$$x(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{jn\omega t} \quad (n \neq 0)$$

Ανάπτυγμα Fourier

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η σειρά Fourier και το φάσμα της ενεργειακής πυκνότητας της ακολουθίας τετραγωνικού παλμού του επόμενου σχήματος.



Παράδειγμα τετραγωνικού παλμού και της αντίστοιχης σειράς Fourier

Ανάπτυγμα Fourier

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο T και αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t} \quad \text{όπου} \quad \alpha_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega t}$$

Επιλέγοντας ως διάστημα ολοκλήρωσης το $[-T/2, +T/2]$ θα έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt = \frac{AT}{T}$$

για $n = 0$, ενώ για $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται ως

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega t} = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-jn\omega t} = \frac{AT}{T} \frac{\sin(n\omega T/2)}{n\omega T/2} = \frac{AT}{T_p} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

όπου $\varphi = n\omega T/2$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin \varphi / \varphi$ δείχνει πως η συνάρτηση **τείνει στο μηδέν** στα όρια $\varphi \rightarrow \pm\infty$, ενώ έχει **μέγιστη τιμή ίση με τη μονάδα** για $\varphi = 0$ και μηδενικές τιμές στις θέσεις $\varphi = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$)

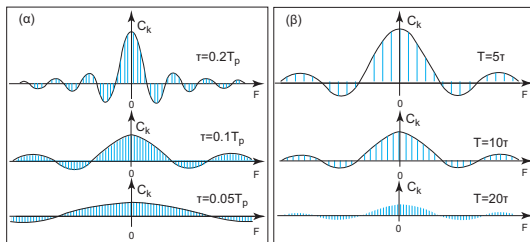
Ανάπτυγμα Fourier

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Το σήμα $x(t)$ είναι **άρτιο** και οι συντελεστές Fourier είναι **πραγματικοί αριθμοί**.

Τέλος, το **φάσμα πυκνότητας ισχύος**, δίδεται από τη σχέση

$$|\alpha_n|^2 = \begin{cases} \left(\frac{A\tau}{T}\right)^2 & n = 0 \\ \left(\frac{A\tau}{T}\right)^2 \left[\frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2}\right]^2 & n > 0 \end{cases}$$



Οι συντελεστές Fourier του τετραγωνικού παλμού για σταθερό T και μεταβλητό τ [εικόνα (α)] και για μεταβλητό T και σταθερό τ [εικόνα (β)]

Ανάπτυγμα Fourier

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI

Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T που ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet διατυπώνεται ως ένα ανάπτυγμα Fourier της μορφής

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn(2\pi/T)t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt \right) e^{jn(2\pi/T)t}$$

δηλαδή ως ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών φανταστικών εκθετικών σημάτων.

Εάν το σήμα $x(t)$ διέλθει από σύστημα LTI, τότε, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η επίδραση του συστήματος επί του σήματος εισόδου θα υπολογιστεί από το γραμμικό συνδυασμό των επιδράσεων του συστήματος σε κάθε στοιχειώδη συνιστώσα ξεχωριστά.

Γνωρίζουμε πως κάθε στοιχειώδες σήμα $x(t) = e^{st}$ ($s = \sigma + j\omega$) αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός συστήματος LTI με ιδιοτιμή τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} dt \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathcal{H}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-(\sigma + j\omega)\tau} dt$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI

η οποία για $\sigma = 0$ μετασχηματίζεται στη **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας**

$$\mathcal{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Η επίδραση ενός συστήματος LTI επί ενός σήματος εισόδου $x(t)$, είναι ο **πολλαπλασιασμός του πλάτους του σήματος με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$** .

Εάν το σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφρασθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής

$$x(t) = \sum_n \alpha_n e^{s_n t}$$

τότε, η επίδραση του συστήματος επί αυτού, είναι ο **πολλαπλασιασμός του πλάτους της κάθε ξεχωριστής συνιστώσας με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s_n)$** , δηλαδή,

$$y(t) = \sum_n \alpha_n \mathcal{H}(s_n) e^{s_n t}$$

Επομένως, η έξοδος του συστήματος θα εκφράζεται και αυτή ως ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων

Ανάπτυγμα Fourier

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα LTI με συχνοτική απόκριση

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

Να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος $y(t)$, εάν η είσοδος το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \begin{cases} +1 & \text{για } 0 \leq t < 4 \\ -1 & \text{για } 4 \leq t < 8 \end{cases} \quad \text{με περίοδο } T = 8.$$

Το σήμα $x(t)$, είναι ένα **περιττό σήμα πραγματικών τιμών** και επομένως, οι συντελεστές Fourier θα **περιττοί φανταστικοί αριθμοί**. Για την τιμή $n = 0$ είναι $\alpha_n = 0$, ενώ για $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt = \frac{1}{8} \int_0^8 x(t) e^{-jn(2\pi/8)t} dt = \frac{1}{8} \int_0^4 e^{-jn(\pi/4)t} dt - \\ &- \frac{1}{8} \int_4^8 e^{-jn(\pi/4)t} dt = \frac{1 - e^{-jn\pi}}{jn\pi} = \begin{cases} 0 & \text{για } n = \pm 2m \\ 2/(jn\pi) & \text{για } n = \pm(2m + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Fourier

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

Επομένως, το εκθετικό ανάπτυγμα Fourier του σήματος $x(t)$ θα έχει τη μορφή

$$x(t) = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j(2m+1)\pi} \exp \left[\frac{j(2m+1)\pi t}{4} \right]$$

και σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε προηγουμένως, η έξοδος του συστήματος για το δεδομένο σήμα εισόδου θα υπολογίζεται από την εξίσωση

$$y(t) = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}[j(2m+1)\pi/4]}{j(2m+1)\pi} \exp \left[\frac{j(2m+1)\pi t}{4} \right] = 0$$

αφού από την εξίσωση ορισμού της συχνотικής απόκρισης του συστήματος θα έχουμε

$$\mathcal{H}[j(2m+1)\pi/4] = 4 \frac{\sin[(2m+1)\pi]}{(2m+1)\pi} = 0$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

Κάθε συνεχές περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T = T_0$ διατυπώνεται ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn(2\pi F_0)t}$$

όπου $F_0 = 1/T_0$. Εάν σχεδιάσουμε την **ισχύ** του σήματος,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

για τις διάφορες αρμονικές συνιστώσες, θα λάβουμε το **φάσμα ισχύος** που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο **η ισχύς του σήματος κατανέμεται στις διάφορες συχνότητες**.

- Το φάσμα ισχύος αποτελείται από ένα σύνολο γραμμών **παράλληλων προς τον κατακόρυφο άξονα**, με το ύψος της υπ' αριθμόν k γραμμής, που αντιστοιχεί στη συχνότητα $F_k = kF_0$, να είναι ίσο με την τιμή της ποσότητας $|\alpha_k|^2$.
- Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές γραμμές του φάσματος ισχύος, είναι ίση με τη **θεμελιώδη συχνότητα** F_0 , δηλαδή μεταβάλλεται **αντιστρόφως ανάλογα** με την περίοδο του σήματος T_0 .

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

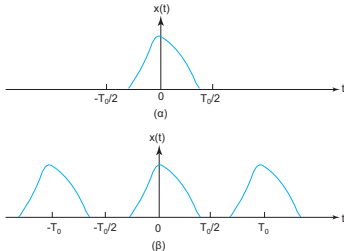
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Εάν η περίοδος λάβει **άπειρη τιμή**, η απόσταση ανάμεσα σε δύο **διαδοχικές φασματικές γραμμές θα γίνει ίση με το μηδέν**. Επομένως, το φάσμα του σήματος από **διακριτό** θα καταστεί **συνεχές**, ενώ το ίδιο το σήμα από **περιοδικό** θα γίνει **απεριοδικό**, θα χαρακτηρίζεται δηλαδή από **πλήρη απουσία περιοδικότητας**.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Ας κατασκευάσουμε ένα περιοδικό σήμα $x_p(t)$ με **διαδοχικές επαναλήψεις του απεριοδικού σήματος $x(t)$** κάθε T_0 χρονικές μονάδες. Είναι προφανές πως στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$ είναι $x_p(t) \rightarrow x(t)$.



Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

Αναπτύσσοντας το περιοδικό σήμα $x_p(t)$ σε **εκθετική σειρά Fourier**, έχουμε

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

με τους συντελεστές Fourier να υπολογίζονται από τη σχέση

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ορίζοντας τώρα τη συνάρτηση

$$\mathcal{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

η οποία είναι γνωστή ως ο **εκθετικός μετασχηματισμός Fourier** του σήματος $x(t)$, η παραπάνω σχέση γράφεται $\alpha_n = (1/T_0)\mathcal{X}(n\omega_0)$, από όπου προκύπτει ότι

$$T_0 \alpha_n = \mathcal{X}(n\omega_0) = \mathcal{X}\left(\frac{2\pi n}{T_0}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι συντελεστές Fourier α_n (πολλαπλασιασμένοι με την περίοδο T_0) αποτελούν λοιπόν **δείγματα** της συνάρτησης $\mathcal{X}(j\omega)$ στις θέσεις $\omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi/T_0$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του περιοδικού σήματος $x_p(t)$ έχουμε

$$x_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}\left(\frac{2\pi n}{T_0}\right) e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(n\Delta\omega) e^{jn(\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

και επομένως, στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$ ή ισοδύναμα στο όριο $\Delta\omega \rightarrow 0$,

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(n\Delta\omega) e^{jn(\Delta\omega)t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

σχέση, που είναι γνωστή ως ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** του σήματος $x(t)$.

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οδηγηθήκαμε λοιπόν στις σχέσεις

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

οι οποίες αποτελούν ζεύγος εξισώσεων ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού, με την πρώτη εξίσωση να είναι γνωστή ως **εξίσωση ανάλυσης** και τη δεύτερη εξίσωση να ονομάζεται **εξίσωση σύνθεσης**.

Μετασχηματισμός Fourier

Ολοκλήρωμα Fourier και τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier το συνεχές σήμα $x(t)$ διατυπώνεται ως

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi \right\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ x(\xi) e^{-j\omega(\xi-t)} d\xi \right\} d\omega$$

Χρησιμοποιώντας τον **τύπο του Euler** και γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες αποδεικνύεται ότι

$$x(t) = \int_0^{\infty} \left[\mathcal{A}(\omega) \cos(\omega t) + \mathcal{B}(\omega) \sin(\omega t) \right] d\omega$$

με τις συναρτήσεις $\mathcal{A}(\omega)$ και $\mathcal{B}(\omega)$ να ορίζονται ως

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cos(\omega\xi) d\xi$$

$$\mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \sin(\omega\xi) d\xi$$

Ο παραπάνω τρόπος γραφής του σήματος $x(t)$ είναι γνωστός ως **ολοκλήρωμα Fourier** ενώ οι συναρτήσεις $\mathcal{A}(\omega)$ και $\mathcal{B}(\omega)$ είναι γνωστές ως ο **συνημιτονοειδής** και ο **ημιτονοειδής** μετασχηματισμός Fourier αντίστοιχα .

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t)$.

Με παρόμοιο τρόπο και χρησιμοποιώντας τον **τύπο του Euler** έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_0)} \right] = \frac{\alpha + j\omega}{\alpha^2 + 2j\omega\alpha + (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της κανονικής κατανομής.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + j\omega t\right)\right] dt$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $(j\omega\sigma/\sqrt{2})^2$, η παράσταση της εκθετικής συνάρτησης καθίσταται τέλειο τετράγωνο

$$\frac{t^2}{2\sigma^2} + j\omega t = \frac{t^2}{2\sigma^2} + j\omega t + \left(\frac{j\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{j\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}} + \frac{j\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\omega^2\sigma^2}{2}$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + j\omega\sigma\right)^2\right] dt$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty+j\omega\sigma^2}^{+\infty+j\omega\sigma^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi$$

όπου θέσαμε $\xi = t + j\omega\sigma^2$. Χρησιμοποιώντας το **ολοκληρωτικό θεώρημα του Cauchy** λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-x+jy}^{x+jy} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi &= - \int_{x+jy}^x e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi - \int_x^{-x} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi - \int_{-x}^{-x+jy} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi = \\ &= - \int_{-x}^{+x} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi - \int_{x+jy}^x e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi - \int_{-x}^{-x+jy} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi \end{aligned}$$

όπου $y = \omega\sigma^2$. Οι συνεισφορές των κατακόρυφων δρόμων αλληλοαναιρούνται και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα στο όριο $x \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\int_{-\infty+j\omega\sigma^2}^{+\infty+j\omega\sigma^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^{+x} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

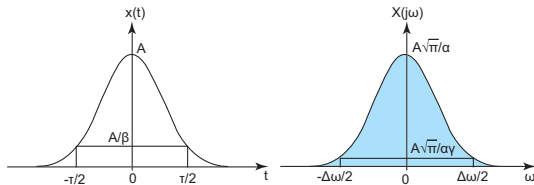
Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Αντικαθιστώντας την τιμή του ολοκληρώματος στην εξίσωση του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(j\omega)$ αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right) \sqrt{2\pi\sigma^2} = \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον αφού λέει πως ο μετασχηματισμός Fourier μιας κανονικής κατανομής αποτελεί και ο ίδιος κανονική κατανομή.



Η κανονική κατανομή $x(t)$ και το φάσμα της $\mathcal{X}(j\omega)$

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αν και η κανονική κατανομή δεν είναι αιτιατό σήμα αφού εκτείνεται στο άπειρο διάστημα χρόνου $(-\infty, +\infty)$, ορίζουμε μια χρονική διάρκεια παλμού ως $\tau = t_2 - t_1$ όπου t_1 και t_2 χρονικές στιγμές για τις οποίες είναι $x(t) = A/\beta$ όπου $A = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ η μέγιστη τιμή του σήματος $x(t)$. Ορίζοντας την παράμετρο $\alpha = \sqrt{1/2\sigma^2}$ και θέτοντας στην εξίσωση της κανονικής κατανομής $t = \tau/2$ $x(t) = A/\beta$ βρίσκουμε

$$\alpha = 2 \frac{\sqrt{\ln \beta}}{\tau}$$

Αντίστοιχα όρια ορίζονται και για τη συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$. Θεωρώντας μία παράμετρο $\gamma > 1$, ορίζουμε το εύρος του φάσματος $\Delta\omega$ ως τη συχνοτική περιοχή $\omega_2 - \omega_1$ όπου $\omega_1 = -\Delta\omega/2$ και $\omega_2 = +\Delta\omega/2$, συχνότητες, στις θέσεις των οποίων το ύψος του παλμού είναι το $1/\gamma$ της μέγιστης τιμής του. Εάν στην εξίσωση του $\mathcal{X}(j\omega)$ θέσουμε $\omega = \Delta\omega/2$ και $\mathcal{X}(j\omega) = 1/\gamma$ θα λάβουμε

$$\frac{\Delta\omega}{2} = 2\alpha \sqrt{\ln \gamma}$$

Σημειώστε, πως για $\alpha > 0$ η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ είναι πραγματική. Επομένως, το φάσμα της κατανομής ταυτίζεται με το φάσμα πλάτους ενώ το φάσμα φάσης είναι μηδενικό.

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (1)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Γραμμικότητα: Εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των συνεχών σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ θα είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Z}(j\omega) = \alpha \mathcal{X}(j\omega) + \beta \mathcal{Y}(j\omega)$$

Συμμετρία: Εάν το σήμα $x(t)$ είναι ένα σήμα πραγματικών τιμών, τότε ο μετασχηματισμός του κατά Fourier θα ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\mathcal{X}^*(\omega) = \mathcal{X}(-\omega)$$

όπου το σύμβολο $*$ αναφέρεται στην πράξη της μιγαδικής συζυγίας.

Άρτιο και περιττό μέρος: Εάν ένα συνεχές σήμα $x(t)$ διαθέτει μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας και της περιττής συνιστώσας του ορίζονται ως

$$\mathcal{F}\{\text{Ev}(t)\} = \Re\{\mathcal{X}(j\omega)\} \quad \text{και} \quad \mathcal{F}\{\text{Od}(t)\} = j\Im\{\mathcal{X}(j\omega)\}$$

Μετατόπιση στο χρόνο: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος που ορίζεται ως $y(t) = x(t - t_0)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \mathcal{X}(j\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (2)

Διαφόριση: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = x'(t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(j\omega) = j\omega\mathcal{X}(j\omega)$$

Κλιμάκωση στο χρόνο: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος που ορίζεται ως $y(t) = x(\alpha t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{X}\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Διτισμός: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\mathcal{X}(t)$ θα είναι η συνάρτηση

$$y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

Χρησιμοποιώντας την απλή συχνότητα $f = \omega/2\pi$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{X}(f) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{\mathcal{X}(t)\} = x(-f)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (3)

Μετατόπιση ως προς τη συχνότητα: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = e^{j\omega_0 t}x(t)$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)]$$

Αντιστροφή χρόνου Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος που ορίζεται ως $y(t) = x(-t)$ θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{X}(-j\omega)$$

Πολλαπλασιασμός: Εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$ αντίστοιχα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ ορίζεται ως η συνέλιξη

$$\mathcal{Z}(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{z(t)\} = \frac{1}{2\pi} \left[\mathcal{X}(j\omega) * \mathcal{Y}(j\omega) \right]$$

Συνέλιξη: Εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ των δύο σημάτων θα είναι ο

$$\mathcal{Z}(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{z(t)\} = \mathcal{X}(j\omega)\mathcal{Y}(j\omega).$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (4)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Παραγωγή στο χώρο των συχνοτήτων: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = tx(t)$ είναι ο

$$\mathcal{Y}(j\omega) = i\mathcal{X}'(j\omega)$$

Διαμόρφωση: η ιδιότητα της διαμόρφωσης δεν αποτελεί παρά μια εναλλακτική ονομασία για την ιδιότητα του γινομένου υπό την έννοια πως ο πολλαπλασιασμός δύο σημάτων έχει ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση του πλάτους του ενός σήματος με τρόπο που καθορίζεται από το περιεχόμενο του άλλου σήματος. Αυτή η ιδιότητα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [\mathcal{X}[j(\omega + \omega_0)] + \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)]]$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin(\omega_0 t)\} = \frac{j}{2} [\mathcal{X}[j(\omega + \omega_0)] - \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)]]$$

Ολοκλήρωση: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

θα είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{X}(j\omega) + \pi \mathcal{X}(0) \delta(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (5)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εξίσωση του Parseval: Εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega)\mathcal{Y}^*(j\omega) d\omega$$

Εξίσωση του Bessel: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του συνεχούς σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{X}(j\omega)|^2 d\omega$$

Συσχέτιση: Εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης συσχέτισης

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) y(t + \tau) d\tau$$

θα είναι ο $\mathcal{Z}(j\omega) = \mathcal{X}^*(\omega) \mathcal{Y}(j\omega)$. Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως το θεώρημα των Wiener-Khintchine.

Μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (6)

Αυτοσυσχέτιση: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

$$y(t) = x(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) x(t + \tau) d\tau$$

θα είναι η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας $\mathcal{Y}(j\omega) = |\mathcal{X}(j\omega)|^2$

Τα εμβαδά των καμπυλών $x(t)$ και $\mathcal{X}(j\omega)$: Εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$, τότε:

- 1 Το εμβαδόν της καμπύλης του σήματος $x(t)$ ισούται με την τιμή του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(j\omega)$ για την τιμή συχνότητας $\omega = 0$,

$$\mathcal{X}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

- 2 Το εμβαδόν της καμπύλης του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(j\omega)$, ισούται με την τιμή του σήματος $x(t)$ για τη χρονική στιγμή $t = 0$ πολλαπλασιασμένη επί $1/2\pi$,

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) d\omega$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα εφαρμογής των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{j\alpha t}$

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \alpha)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συχνοτικής μετατόπισης $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} = \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)]$ και το αποτέλεσμα $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$. Ορίζοντας τη συνάρτηση $y(t) = 1 \cdot x(t) = e^{j\alpha t} \cdot 1$ θα λάβουμε

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{F}\{e^{j\alpha t} \cdot 1\} = \mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega - \alpha} = 2\pi\delta(\omega - \alpha)$$

καταλήγοντας έτσι το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε και πιο πάνω. Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\mathcal{F}\{e^{-j\alpha t}\} = 2\pi\delta(\omega + \alpha)$.

Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα εφαρμογής των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων $x(t) = \cos(\alpha t)$ και $x(t) = \sin(\alpha t)$

Από την πρώτη εξίσωση της **διαμόρφωσης**

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(\alpha t)\} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{X}[j(\omega + \omega_0)] + \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)] \right]$$

για $x(t) = 1$ και $\omega_0 = \alpha$ χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα της **συχνοτικής μετατόπισης**,

$$\mathcal{F}\{\cos(\alpha t)\} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega + \alpha} + \mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega - \alpha} \right] = \pi \left[\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha) \right]$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, από τη δεύτερη εξίσωση της **διαμόρφωσης**

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin(\alpha t)\} = \frac{j}{2} \left[\mathcal{X}[j(\omega + \omega_0)] - \mathcal{X}[j(\omega - \omega_0)] \right]$$

καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\mathcal{F}\{\sin(\alpha t)\} = \frac{j}{2} \left[\mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega + \alpha} - \mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega - \alpha} \right] = j\pi \left[\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha) \right]$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Έστω περιοδικό σήμα περιόδου T με εκθετικό ανάπτυγμα *Fourier*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(n\omega_0 - \omega)t} dt = \left[\frac{e^{j(n\omega_0 - \omega)t}}{j(n\omega_0 - \omega)} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $e^{jn\omega_0 t}$ ο οποίος προφανώς δεν συγκλίνει.

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προκειμένου να παρακάμψουμε το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα $\mathcal{F}\{1\} = \delta(\omega)$ και την ιδιότητα της **συχνοτικής μετατόπισης** του μετασχηματισμού,

$$\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t} \cdot 1\} = \mathcal{F}\{1\}_{\omega \rightarrow \omega - n\omega_0} = \delta(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega - n\omega_0} = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

οδηγώντας τελικά σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi\alpha_n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει **το μετασχηματισμό Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$** και σύμφωνα με αυτή

ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος με συντελεστές Fourier α_n είναι ένας **συρμός άπειρων κρουστικών συναρτήσεων**, κάθε μία από τις οποίες σχετίζεται με κάποια από τις άπειρες συχνότητες $n\omega_0$ και διαθέτει πολλαπλασιαστικό συντελεστή με τιμή $2\pi\alpha_n$.

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων - Παράδειγμα 1

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Το σήμα $x(t)$ αποτελεί **περιοδική συνάρτηση με περίοδο T** με συντελεστές Fourier

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Από όλες τις κρουστικές συναρτήσεις του αθροίσματος, η μόνη που ανήκει στο διάστημα ολοκλήρωσης αντιστοιχεί σε τιμή δείκτη $n = 0$. Θα είναι λοιπόν

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[e^{-jn\omega_0 t} \right]_{t=0} = \frac{1}{T}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων - Παράδειγμα 1

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

για τιμές $\alpha = -\beta = T/2$ και για τη συνάρτηση $\varphi(t) = e^{-jn\omega_0 t}$. Παρατηρούμε λοιπόν πως όλοι οι συντελεστές Fourier είναι ίσοι μεταξύ τους με τιμή $1/T$ και από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier περιοδικών σημάτων θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το συμπέρασμα πως

ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού συρμού κρουστικών συναρτήσεων με περίοδο T στο πεδίο του χρόνου είναι ένας περιοδικός συρμός κρουστικών συναρτήσεων περιόδου $2\pi/T$ στο χώρο των συχνοτήτων.

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων - Παράδειγμα 2

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_x(t)$ ενός περιοδικού σήματος $x(t)$.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_x(t) = \frac{1}{T} \int_T x^*(\xi)x(\xi + t)d\xi$$

ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T , είναι **περιοδική συνάρτηση με την ίδια τιμή περιόδου** και επομένως διαθέτει **εκθετικό ανάπτυγμα Fourier**

$$R_x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ενώ ο μετασχηματισμός της κατά Fourier θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{R}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi\rho_n) \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi\rho_n) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων - Παράδειγμα 2

Υποθέτοντας πως το **εκθετικό ανάπτυγμα κατά Fourier** της συνάρτησης $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

οι συντελεστές ρ_n συναρτήσει των συντελεστών α_n εκφράζονται ως

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{T} \int_T R_x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T \left\{ \frac{1}{T} \int_T x^*(\xi) x(\xi + t) d\xi \right\} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T x^* \xi \left\{ \int_T x(\xi + t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\} d\xi \end{aligned}$$

Θέτοντας $\tau = t + \xi$ θα είναι $d\tau = dt$ και μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$\alpha_n = \int_T \frac{1}{T} x^*(\xi) \left\{ \int_T x(\tau) e^{-jn\omega_0(\tau-\xi)} \right\} d\xi = \alpha_n^* \alpha_n = |\alpha_n|^2$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$\mathcal{R}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα του εύρους ζώνης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η ενεργός διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$ και το ενεργό εύρος ζώνης $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ των συναρτήσεων $x(t)$ και $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ ορίζονται ως οι περιοχές τιμών των αξόνων του χρόνου και της συχνότητας εκτός των οποίων οι συναρτήσεις $x(t)$ και $X(j\omega)$ έχουν πολύ μικρή τιμή έτσι ώστε να θεωρούνται αμελητέες.

Σύμφωνα με το θεώρημα του εύρους ζώνης, υπάρχει μία παγκόσμια σταθερά γ τέτοια ώστε η ενεργός διάρκεια και το ενεργό εύρος ζώνης οποιουδήποτε σήματος $x(t)$ να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \gamma$$

Επομένως τα δύο αυτά μεγέθη δεν μπορούν να λάβουν ταυτόχρονα αυθαίρετα μικρή τιμή αφού το γινόμενο τους θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με την τιμή της σταθεράς γ .

Επειδή η παραπάνω σχέση διατυπώνεται με τρόπο ανάλογο με εκείνο της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg της κβαντικής μηχανικής, το θεώρημα του εύρους ζώνης χαρακτηρίζεται ως η αρχή της απροσδιοριστίας της ανάλυσης Fourier.

Μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα του εύρους ζώνης

Θεωρώντας πως ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ η εφαρμογή της ιδιότητας της παραγωγίσις στο χώρο των συχνοτήτων μας δίνει

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{-jt x(t)\} = \frac{d\mathcal{X}(j\omega)}{d\omega} = \left[\frac{d|\mathcal{X}(j\omega)|}{d\omega} + j|\mathcal{X}(j\omega)| \frac{d\angle\mathcal{X}(j\omega)}{d\omega} \right] e^{j\angle\mathcal{X}(j\omega)}$$

όπου $y(t) = -jt x(t)$. Από την εξίσωση του Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{Y}(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{όπου } |y(t)|^2 = t^2 |x(t)|^2 \text{ και } |\mathcal{Y}(j\omega)|^2 = \left[\frac{d|\mathcal{X}(j\omega)|}{d\omega} \right]^2 + [|\mathcal{X}(j\omega)|]^2 \left[\frac{d\angle\mathcal{X}(j\omega)}{d\omega} \right]^2$$

λαμβάνουμε

$$(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{d|\mathcal{X}(j\omega)|}{d\omega} \right]^2 + [|\mathcal{X}(j\omega)|]^2 \left[\frac{d\angle\mathcal{X}(j\omega)}{d\omega} \right]^2 \right\} d\omega$$

Μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα του εύρους ζώνης

Εφαρμόζοντας μία παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι

$$(\Delta\omega)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\mathcal{X}(j\omega)|^2 d\omega$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του εύρους ζώνης όπως αυτό διατυπώνεται για σήματα πεπερασμένης ενέργειας, εάν το σήμα $x(t)$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα $\sqrt{t}x(t) \rightarrow 0$ στο όριο $t \rightarrow \pm\infty$ τότε θα είναι

$$(\Delta t)(\Delta\omega) \geq \sqrt{\pi/2}$$

με την ισότητα να αντιστοιχεί σε σήματα που ακολουθούν **κατανομή τύπου Gauss**.

Τα παραπάνω αφορούν τα **συνεχή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα σήματα πεπερασμένης ενέργειας**, ενώ τα **απολύτως ολοκληρώσιμα σήματα** ικανοποιούν την ανισότητα

$$(\Delta t)(\Delta\omega) \geq 2\pi$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Απευθείας υπολογισμός

Μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την εξίσωση ορισμού του

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\mathcal{X}(j\omega) = \cos[4\omega + (\pi/3)]$.

Από τον τύπο του Euler θα λάβουμε

$$X(\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{e^{j[4\omega+(\pi/3)]} + e^{-j[4\omega+(\pi/3)]}}{2} = \frac{1}{2} e^{j4\omega} e^{j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{-j4\omega} e^{-j\pi/3}$$

και επομένως θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\pi/3}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t+4)} dt + \frac{e^{-j\pi/3}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-4)} dt \\ &= \frac{e^{j\pi/3}}{4\pi} \delta(t+4) + \frac{e^{-j\pi/3}}{4\pi} \delta(t-4) \quad \text{αφού} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Μιγαδική ολοκλήρωση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στηρίζεται στη χρήση του **λογισμού υπολοίπων** και στη μέθοδο **μιγαδικής ολοκλήρωσης του Cauchy**.

Εάν ο μετασχηματισμός Fourier είναι **ρητή συνάρτηση** της συχνότητας ω , οι τιμές της συχνότητας που μηδενίζουν τον παρονομαστή ονομάζονται **πόλοι**. Εάν η συνάρτηση διαθέτει N πόλους $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ επί του μιγαδικού επιπέδου, αποδεικνύεται ότι

$$\oint_C \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi j \sum_{i=1}^N \text{Res} \left[\mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} \right]_{\omega=\omega_i}$$

όπου C **κλειστός δρόμος** που περιέχει τους πόλους της συνάρτησης.

Ο κλειστός δρόμος C συνήθως αποτελείται από μία **ημικυκλική διαδρομή ακτίνας R** και από **ένα τμήμα του οριζώντιου άξονα που ορίζεται από τις τιμές του διαστήματος $[-R, +R]$** . Στο όριο $R \rightarrow \infty$, το ολοκλήρωμα κατά μήκος του ημικυκλίου **μηδενίζεται** σύμφωνα με το **λήμμα του Jordan** ενώ το ολοκλήρωμα που απομένει είναι και εκείνο που τελικά θα δώσει τη ζητούμενη συνάρτηση $x(t)$.

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Μιγαδική ολοκλήρωση

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

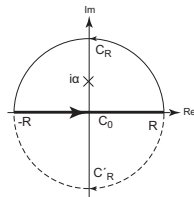
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\mathcal{X}(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)$.

Η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ είναι **ρητή** και διαθέτει ένα πόλο στη θέση $\omega = j\alpha$. Υπολογίζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathcal{X}(j\omega)e^{j\omega t}$ κατά μήκος του δρόμου C που αποτελείται από το άνω ημικύκλιο C_R και την ευθεία C_0 και περιέχει τον πόλο $\omega = j\alpha$, η εφαρμογή του θεωρήματος των υπολοίπων δίνει

$$\begin{aligned}\oint_C \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= 2\pi j \operatorname{Res} \left[\mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} \right]_{\omega=j\alpha} = \\ &= 2\pi j \lim_{\omega \rightarrow j\alpha} \left[(\omega - j\alpha) \frac{e^{j\omega t}}{i(\omega - j\alpha)} \right] \\ &= 2\pi \lim_{\omega=j\alpha} e^{j\omega t} = 2\pi e^{-\alpha t}\end{aligned}$$



Το ολοκλήρωμα κατά μήκος του δρόμου C' που αποτελείται από το ημικύκλιο C'_R και την ευθεία C_0 είναι ίσο με το μηδέν, γιατί δεν περιέχει πόλους της συνάρτησης $\mathcal{X}(j\omega)e^{j\omega t}$.

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Μιγαδική ολοκλήρωση

Για $t > 0$ χρησιμοποιείται ο δρόμος C_R . Από το **λήμμα του Jordan** έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 0$$

αφού $\mathcal{X}(j\omega) \rightarrow 0$ στο όριο $\omega \rightarrow \infty$. Επομένως

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_0} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_C \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega - \int_{C_R} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Για $t < 0$ χρησιμοποιείται ο δρόμος C' και το ολοκλήρωμα έχει μηδενική τιμή αφού η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)e^{j\omega t}$ δεν διαθέτει πόλους εντός αυτού του δρόμου. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα λάβουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ιδιότητα της γραμμικότητας του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier σύμφωνα με την οποία ο μετασχηματισμός Fourier του συνεχούς σήματος

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_N x_N(t)$$

είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{X}(j\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{X}_i(j\omega) = \alpha_1 \mathcal{X}_1(j\omega) + \alpha_2 \mathcal{X}_2(j\omega) + \dots + \alpha_N \mathcal{X}_N(j\omega)$$

όπου $\mathcal{X}_i(j\omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Εάν λοιπόν η συνάρτηση $\mathcal{X}(j\omega)$ μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή γραμμικού συνδυασμού απλούστερων μετασχηματισμών $\mathcal{X}_i(j\omega)$, τότε το σήμα $x(t)$ θα προκύψει από την εξίσωση

$$x(t) = \alpha_1 \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}_1(j\omega)\} + \alpha_2 \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}_2(j\omega)\} + \dots + \alpha_N \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}_N(j\omega)\}$$

όπου οι στοιχειώδεις αντίστροφοι μετασχηματισμοί $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}_i(j\omega)\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) μπορούν να βρεθούν από πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στοιχειώδης Συνάρτηση $x(t)$	Μετασχηματισμός $X(j\omega)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$
$x(t) = x(t+T) = \begin{cases} 1 & t < \alpha \\ 0 & \alpha < t < \frac{T}{2} \end{cases}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin n\omega_0 \alpha}{n} \delta(\omega - n\omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Στοιχειώδης Συνάρτηση $x(t)$	Μετασχηματισμός $X(j\omega)$
$\begin{cases} 1 & t < \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases}$	$\frac{2 \sin(\omega\alpha)}{\omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$\begin{cases} 1 & \omega < W \\ 0 & \omega > W \end{cases}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-\alpha t} u(t), \Re(\alpha) > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$te^{-\alpha t} u(t), \Re(\alpha) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t), \Re(\alpha) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega^2 + 8\omega + 20}$$

Χρησιμοποιώντας τον **τύπο του Euler** για τη συνάρτηση του ημίτονου και παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή έχουμε

$$\mathcal{X}(j\omega) = \frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)} = \frac{e^{2j\omega}}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)} - \frac{e^{-2j\omega}}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)}$$

Εφαρμόζοντας τη **μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα** παίρνουμε

$$\frac{1}{(\omega - 10)(\omega - 2)} = \frac{A}{\omega - 10} + \frac{B}{\omega - 2} = \frac{(A + B)\omega - (2A + 10B)}{(\omega - 10)(\omega - 2)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων στο πρώτο και στο τελευταίο κλάσμα, έχουμε $A + B = 0$ και $2A + 10B = -1$ με λύση $(A, B) = (1/8, -1/8)$ οπότε θα είναι

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)} = \frac{1}{32} \left[\frac{2}{j(\omega - 10)} - \frac{2}{j(\omega - 2)} \right]$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε ότι $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = 2/j\omega$ όπου $\text{sgn}(t)$ η **συνάρτηση προσήμου** και από την ιδιότητα της **συχνοτικής μετατόπισης** για τις τιμές $\omega_0 = 10$ και $\omega_0 = 2$ θα λάβουμε

$$z_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j(\omega - 10)}\right\} = e^{10jt} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = e^{10jt} \text{sgn}(t) \quad \text{και}$$

$$z_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j(\omega - 2)}\right\} = e^{2jt} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = e^{2jt} \text{sgn}(t)$$

Θα είναι λοιπόν $z(t) = z_1(t) + z_2(t) = (1/32)(e^{10jt} - e^{2jt}) \text{sgn}(t)$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της **χρονικής μετατόπισης** θα λάβουμε

$$x_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{2j\omega}}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)}\right\} = \frac{1}{32}(e^{10j(t+2)} - e^{2j(t+2)}) \text{sgn}(t + 2)$$

$$x_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-2j\omega}}{2j(\omega - 10)(\omega - 2)}\right\} = \frac{1}{32}(e^{10j(t-2)} - e^{2j(t-2)}) \text{sgn}(t - 2)$$

και προσθέτοντας τις παραπάνω παραστάσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης και τις τεχνικές υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $x(t) = te^{-2t}u(t)$ και $h(t) = e^{-4t}u(t)$.

Σύμφωνα με το **θεώρημα της συνέλιξης** του μετασχηματισμού Fourier, εάν τα σήματα $y(t)$, $x(t)$ και $h(t)$ σχετίζονται ως

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

τότε οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier θα ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega)$$

Επομένως η συνέλιξη $y(t) = h(t) * x(t)$ μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί ως

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega)\}$$

διαδικασία που απαιτεί τον υπολογισμό των μετασχηματισμών $\mathcal{H}(j\omega)$ και $\mathcal{X}(j\omega)$.

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών βρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\}_{\Re(\alpha)>0} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{te^{-\alpha t}u(t)\}_{\Re(\alpha)>0} = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

από όπου προκύπτει ότι

$$\mathcal{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{te^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{4+j\omega}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης θα λάβουμε την εξίσωση

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{X}(j\omega)\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2(4+j\omega)}$$

και από τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα παίρνουμε

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4+j\omega} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2+j\omega} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2+j\omega)^2} \right\}$$

Τέλος, ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα που έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{4+j\omega} \right\} - \frac{1}{4} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2+j\omega} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2+j\omega)^2} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{-4t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t} \right) u(t) \end{aligned}$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Τεχνικές ανάλυσης συστημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι τεχνικές μελέτης και αναπαράστασης σημάτων και συστημάτων στο χώρο των συχνοτήτων στηρίζονται κατά κύριο λόγο στο **θεώρημα της συνέλιξης** και στην **ιδιότητα της διαφόρισης** του μετασχηματισμού Fourier που διατυπώνονται ως

$$y(t) = h(t) * x(t) \iff \mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x^{(n)}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n \mathcal{X}(j\omega)$$

και χρησιμοποιούνται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Εάν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$, η απόκριση του συστήματος $y(t)$ στο σήμα εισόδου $x(t)$, υπολογίζεται ως $y(t) = h(t) * x(t)$ ή εναλλακτικά ως

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}\}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega)\}$$

- Εάν γνωρίζουμε την έξοδο $y(t)$ και την αντίστοιχη είσοδο $x(t)$, υπολογίζοντας τους **μετασχηματισμούς Fourier** των σημάτων $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη **συχνοτική απόκριση** του συστήματος από τη σχέση

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{\mathcal{X}(j\omega)}$$

και στη συνέχεια τη **συχνοτική απόκριση** ως τον **αντίστροφο μετασχηματισμό**

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\}$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Τεχνικές ανάλυσης συστημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Εάν γνωρίζουμε τη **συχνοτική απόκριση** $\mathcal{H}(j\omega)$, μπορούμε, διατυπώνοντας τη ως

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{\mathcal{X}(j\omega)}$$

να προσδιορίσουμε τη συσχέτιση των μετασχηματισμών Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ και υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της έκφραση που θα προκύψει, να κατασκευάσουμε τη **διαφορική εξίσωση** που περιγράφει το σύστημα.

- Εάν γνωρίζουμε τη **διαφορική εξίσωση** του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών και χρησιμοποιώντας **την ιδιότητα της διαφόρισης** να κατασκευάσουμε μία αλγεβρική εξίσωση από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τη **συχνοτική απόκριση** $\mathcal{H}(j\omega)$ καθώς και την **κρουστική απόκριση** ως

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\}$$

Η μέθοδος που θα επιλέξουμε εξαρτάται από τη διατύπωση του προβλήματος.

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Αναπαράσταση πλάτους - φάσης & θεώρημα συνέλιξης

Σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης, η αναπαράσταση στο χώρο των συχνοτήτων της εξόδου $y(t) = h(t) * x(t)$ ενός συστήματος LTI έχει τη μορφή

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

με τη συχνοτική απόκριση $H(j\omega)$ να ορίζεται ως ο **μετασχηματισμός Fourier** της κρουστικής απόκρισης $h(t)$,

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Επομένως

το φάσμα του σήματος εξόδου ενός συστήματος LTI προκύπτει από το γινόμενο του φάσματος $H(j\omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και του φάσματος του σήματος εισόδου $X(j\omega)$

Διατυπώνοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς στην εκθετική τους μορφή

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| e^{j\angle Y(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Αναπαράσταση πλάτους - φάσης & θεώρημα συνέλιξης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του **θεωρήματος της συνέλιξης**, λαμβάνουμε

$$\mathcal{Y}(j\omega) = |\mathcal{Y}(j\omega)|e^{j\angle\mathcal{Y}(j\omega)} = (|\mathcal{H}(j\omega)||\mathcal{X}(j\omega)|) e^{j[\angle\mathcal{H}(j\omega)+\angle\mathcal{X}(j\omega)]}$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$|\mathcal{Y}(j\omega)| = |\mathcal{H}(j\omega)||\mathcal{X}(j\omega)| \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{Y}(j\omega) = \angle\mathcal{H}(j\omega) + \angle\mathcal{X}(j\omega)$$

Επομένως, η επίδραση ενός συστήματος LTI πάνω σε ένα σήμα εισόδου είναι

- ο **πολλαπλασιασμός του μέτρου** του μετασχηματισμού Fourier $|\mathcal{X}(j\omega)|$ με το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος $|\mathcal{H}(j\omega)|$
- η **μετατόπιση της φάσης** του μετασχηματισμού Fourier του σήματος $\angle\mathcal{X}(j\omega)$ κατά τη φάση της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος $\angle\mathcal{H}(j\omega)$.

Το μέτρο της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος $|\mathcal{H}(j\omega)|$ είναι γνωστό ως **κέρδος**.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $|\mathcal{H}(j\omega)|$ και $\angle\mathcal{H}(j\omega)$ ως προς τη συχνότητα ω του σήματος εισόδου, ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Παράδειγμα ανάλυσης συστήματος

Άσκηση

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος LTI η κρουστική απόκριση του οποίου δίδεται από τη σχέση $h(t) = u(t-2) - u(t+1)$.

Η συχνοτική απόκριση του συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης και υπολογίζεται ως

$$\mathcal{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-2) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t+1) e^{-j\omega t} dt$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$u(t-2) = \begin{cases} 1 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t+1) = \begin{cases} 1 & t > -1 \\ 0 & t < -1 \end{cases}$$

η παραπάνω σχέση τελικά θα μας δώσει

$$\mathcal{H}(j\omega) = \int_2^{\infty} e^{-j\omega t} dt - \int_{-1}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = -e^{-j\omega/2} \frac{2 \sin(3\omega/2)}{\omega} = -3e^{-j\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

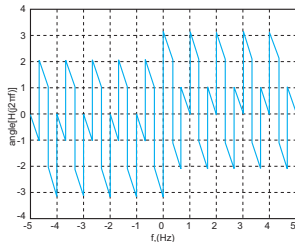
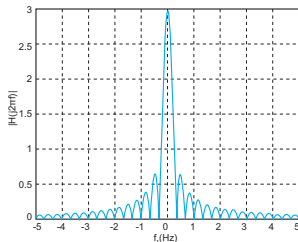
Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Παράδειγμα ανάλυσης συστήματος

Διατυπώνοντας τη συχνοτική απόκριση του συστήματος στην αναπαράσταση πλάτους φάσης βρίσκουμε

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = 3 \left| \text{sinc} \left(\frac{3\omega}{2\pi} \right) \right| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\frac{\omega}{2} = -\pi f$$

Οι γραφικές παραστάσεις των αποκρίσεων πλάτους και φάσης του συστήματος παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



Οι συναρτήσεις απόκρισης πλάτους και φάσης του συστήματος

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Παράδειγμα ανάλυσης συστήματος

Άσκηση

Να υπολογίσετε την απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος LTI η έξοδος του οποίου όταν σε αυτό διαβιβάσουμε το σήμα εισόδου $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ έχει τη μορφή $y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$.

Οι μετασχηματισμοί $\mathcal{X}(j\omega)$ και $\mathcal{Y}(j\omega)$ υπολογίζονται ως

$$\mathcal{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j(1+j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-j(3+j\omega)t} dt = \frac{4 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(3 + j\omega)}$$

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-j(1+j\omega)t} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-j(4+j\omega)t} dt = \frac{6}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

και επομένως θα είναι

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{\mathcal{X}(j\omega)} = \frac{6}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)} \times \frac{(1 + j\omega)(3 + j\omega)}{2(2 + j\omega)} = \frac{9 + 3j\omega}{8 + 6j\omega - \omega^2}$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Παράδειγμα ανάλυσης συστήματος

Εάν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων προκύπτει ότι

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{9(\omega^2 + 8)}{\omega^4 + 20\omega^2 + 64} - j\omega \frac{3(\omega^2 + 10)}{\omega^4 + 20\omega^2 + 64}$$

Επομένως, οι αποκρίσεις πλάτους και φάσης υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\Re\{\mathcal{H}(j\omega)\}^2 + \Im\{\mathcal{H}(j\omega)\}^2} \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\Im\{\mathcal{H}(j\omega)\}}{\Re\{\mathcal{H}(j\omega)\}} \right\}$$

και οι τελικές εκφράσεις προκύπτουν μετά την πραγματοποίηση των πράξεων.

Ο υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος από τον αντίστροφο μετασχηματισμό $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\}$. Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ σε σειρά μερικών κλασμάτων εύκολα ότι

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{4 + j\omega} \right\} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2 + j\omega} \right\}$$

και από την ιδιότητα της γραμμικότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού θα λάβουμε

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\} = \frac{3}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{4 + j\omega} \right\} + \frac{3}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{2 + j\omega} \right\} = \frac{3}{2} (e^{-4t} + e^{-2t}) u(t)$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Παράδειγμα ανάλυσης συστήματος

Άσκηση

Να κατασκευάσετε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος LTI το οποίο όταν δέχεται στην είσοδό του το σήμα $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ παράγει στην έξοδό του το σήμα $y(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-4t})u(t)$.

Στην προηγούμενη άσκηση δείξαμε ότι

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{9 + 3j\omega}{8 + 6j\omega + (j\omega)^2}$$

Διατυπώνοντας την παραπάνω σχέση ως

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 3(j\omega)X(j\omega) + 9X(j\omega)$$

και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)^2 Y(j\omega)\} + 6\mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)Y(j\omega)\} + 8\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = 3\mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)X(j\omega)\} + 9\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = y(t)$ και $\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t)$ ενώ από την ιδιότητα της διαφόρισης του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)^2 Y(j\omega)\} = y''(t), \quad \mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)Y(j\omega)\} = y'(t), \quad \mathcal{F}^{-1}\{(j\omega)X(j\omega)\} = x'(t)$$

και με αντικατάσταση παίρνουμε $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 3x'(t) + 9x(t)$.

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Συστήματα γραμμικής και μη γραμμικής φάσης

Τα **συστήματα γραμμικής φάσης** διαθέτουν συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)|e^{j\angle\mathcal{H}(j\omega)} = e^{-j\omega\tau}$$

για την οποία είναι $|\mathcal{H}(j\omega)| = 1$ και $\angle\mathcal{H}(j\omega) = -\omega\tau$. Αυτό σημαίνει ότι

- Η τιμή του κέρδους είναι **ίση με τη μονάδα**.
- Η φάση είναι **γραμμική συνάρτηση** της συχνότητας ω .

Εάν από ένα σύστημα γραμμικής φάσης διέλθει σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier

$$\mathcal{X}(j\omega) = |\mathcal{X}(j\omega)|e^{j\angle\mathcal{X}(j\omega)}$$

τότε, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου θα υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(j\omega) &= \mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega) = \left(|\mathcal{H}(j\omega)||\mathcal{X}(j\omega)|\right) e^{j[\angle\mathcal{H}(j\omega)+\angle\mathcal{X}(j\omega)]} = |\mathcal{X}(j\omega)|e^{j[\angle\mathcal{Q}(\omega)-\omega\tau]} = \\ &= e^{-j\omega\tau} \left\{ |\mathcal{X}(j\omega)|e^{j\angle\mathcal{X}(j\omega)} \right\} = e^{-j\omega\tau} \mathcal{X}(j\omega)\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της **χρονικής μετατόπισης** βρίσκουμε

$$y(t) = x(t - \tau)$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Συστήματα γραμμικής και μη γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οδηγούμαστε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα:

η επίδραση ενός συστήματος LTI με μοναδιαίο κέρδος και φάση που να είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας ω πάνω σε ένα σήμα εισόδου, είναι η χρονική υστέρηση του σήματος κατά τ χρονικές μονάδες, ή ισοδύναμα κατά την κλίση της γραμμικής φάσης $\angle H(j\omega) = -\omega\tau$.

Εάν το σύστημα LTI δεν είναι γραμμικό τότε οι στοιχειώδεις μιγαδικές εκθετικές συνιστώσες του σήματος εισόδου θα μετατοπιστούν με τρόπο που θα μεταβάλλει τις σχετικές τους φάσεις οδηγώντας σε παραμόρφωση του σήματος που προκύπτει από την επανασύνθεσή τους.

Για πολύ μικρό εύρος ζώνης συχνοτήτων η μη γραμμική φάση του συστήματος μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\angle H(j\omega) \approx -\varphi - \omega\tau$$

γεγονός που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της εξόδου του συστήματος από την προσεγγιστική σχέση

$$Y(j\omega) \approx X(j\omega)|H(j\omega)|e^{-j\varphi}e^{-j\omega\tau}$$

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Συστήματα γραμμικής και μη γραμμικής φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ποια είναι η επίδραση του συστήματος πάνω στο μετασχηματισμό Fourier του σήματος εισόδου, στην περίπτωση αυτή;

- Η **διαμόρφωση** του μέτρου του σύμφωνα με το μέτρο της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης.
- Ο πολλαπλασιασμός (α) με ένα **σταθερό μιγαδικό εκθετικό παράγοντα** της μορφής $e^{-j\varphi}$ και (β) με ένα **όρο γραμμικής φάσης** της μορφής $e^{-j\omega\tau}$ ο οποίος και θα προκαλέσει μία χρονική υστέρηση ίση με τ χρονικές μονάδες

Αυτή η χρονική υστέρηση είναι γνωστή ως **υστέρηση ομάδας** και ορίζεται ως **η αρνητική κλίση της φάσης του συστήματος υπολογισμένη στην τιμή της συχνότητας που μας ενδιαφέρει**, ή σε μαθηματική γραφή

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle \mathcal{H}(j\omega) \right\}$$

Εάν η τιμή της συνάρτησης $\tau(\omega)$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη της συχνότητας, όλες οι συνιστώσες του σήματος θα υποστούν **την ίδια χρονική υστέρηση**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση οι διαφορετικές συχνοτικές συνιστώσες θα υποστούν διαφορετική υστέρηση, με αποτέλεσμα το σήμα που θα προκύψει από τη σύνθεσή τους, να είναι **διαφορετικό από το αρχικό**.

Περιγραφή στο χώρο των συχνοτήτων

Συστήματα γραμμικής και μη γραμμικής φάσης - Παράδειγμα

Άσκηση

Να υπολογιστούν το μέτρο και η φάση της συχνοτικής απόκρισης καθώς και η υστέρηση ομάδας για ένα σύστημα LTI η συχνοτική απόκριση του οποίου έχει τη μορφή

$$H(j\omega) = e^{-j\omega} \frac{2 - e^{j\omega}}{2 - e^{-j\omega}}$$

Πραγματοποιώντας απλές μαθηματικές πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$|H(j\omega)| = |e^{-j\omega}| \frac{|2 - e^{j\omega}|}{|2 - e^{-j\omega}|} = 1$$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle\{e^{-j\omega}\} + \angle\{2 - e^{j\omega}\} - \angle\{2 - e^{-j\omega}\} = -\omega + \tan^{-1}\left\{-\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} \\ &\quad - \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} = -\omega - 2 \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle H(j\omega) \right\} = -\frac{d}{d\omega} \left[-\omega - 2 \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} \right] = \\ &= -1 + 2 \frac{d}{d\omega} \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} \frac{d}{d\omega} \left\{\frac{\sin(\omega)}{2 - \cos(\omega)}\right\} = \frac{3}{5 - 4 \cos(\omega)} \end{aligned}$$

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Βασικοί ορισμοί

Ένα **περιοδικό** σήμα $x(t)$ εκφράζεται ως **άθροισμα άπειρων αρμονικών συναρτήσεων** με συχνότητες $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$, με πλάτη που εξαρτώνται από τους **συντελεστές Fourier** και ορίζουν το **γραμμικό φάσμα**.

Ένα **απεριοδικό** σήμα εκφράζεται ως η επαλληλία άπειρων συχνοτικών συνιστωσών, που ορίζουν ένα **συνεχές φάσμα** το οποίο προσδιορίζεται δια του υπολογισμού του **μετασχηματισμού Fourier** $X(j\omega)$.

Ένα φίλτρο ορίζεται ως **ένα σύστημα LTI** που πραγματοποιεί μία εκ δύο θεμελιωδών λειτουργιών, δηλαδή

- Τη **μεταβολή** των σχετικών πλατών των συχνοτικών συνιστωσών του σήματος εισόδου.
- Την **ολοκληρωτική εξάλειψη**, ή έστω, τη σημαντική **εξασθένηση**, κάποιων από αυτές.

Τα φίλτρα που επιτελούν την πρώτη λειτουργία είναι γνωστά ως **φίλτρα μορφοποίησης συχνοτήτων**, ενώ τα φίλτρα που πραγματοποιούν τη δεύτερη λειτουργία είναι γνωστά ως **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**.

Η σχεδίαση ενός φίλτρου, απαιτεί την κατασκευή της **συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης**, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι υφιστάμενες σε κάθε περίπτωση απαιτήσεις.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Βασικοί ορισμοί

Υπάρχουν τέσσερις βασικές κατηγορίες φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

- **Χαμηλοπερατά φίλτρα**, που επιτρέπουν τη διέλευση συχνοτήτων με χαμηλή τιμή ενώ αποκόπτουν μεγαλύτερες συχνότητες.
- **Υψηλοπερατά φίλτρα**, που επιτρέπουν τη διέλευση συχνοτήτων με υψηλή τιμή ενώ αποκόπτουν χαμηλότερες συχνότητες.
- **Ζωνοπερατά φίλτρα** που επιτρέπουν τη διέλευση όλων των συχνοτήτων που ανήκουν σε μία συγκεκριμένη ζώνη ενώ αποκόπτουν όλες τις υπόλοιπες συχνότητες.
- **Ζωνοφρακτικά φίλτρα**, που αποκόπτουν τις συχνότητες που ανήκουν σε μία συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων ενώ επιτρέπουν τη διέλευση όλων των υπόλοιπων συχνοτήτων.

Οι συχνότητες που διέρχονται από το φίλτρο ορίζουν τη **ζώνη διέλευσης** ενώ εκείνες που αποκόπτονται από αυτό, ορίζουν τη **ζώνη αποκοπής**.

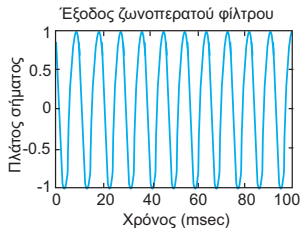
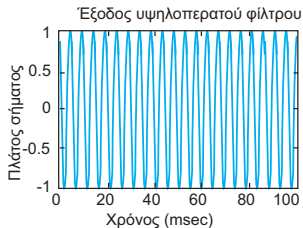
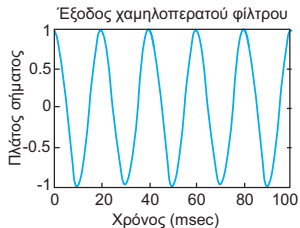
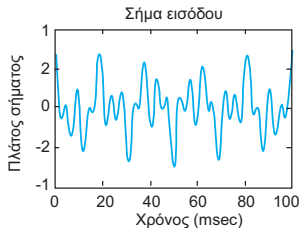
Το όριο ανάμεσα στη ζώνη αποκοπής και στη ζώνη διέλευσης προσδιορίζεται από τη **συχνότητα αποκοπής** ω_c . Τα ζωνοπερατά και τα ζωνοφρακτικά φίλτρα απαιτούν τη χρήση δύο συχνοτήτων αποκοπής ω_{c1} και ω_{c2} .

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Η τυπική έξοδος των βασικών τύπων φίλτρων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Ιδανικά φίλτρα

Επιτρέπουν τη διέλευση του σήματος εισόδου χωρίς την παραμικρή παραμόρφωση. Λαμβάνοντας υπόψη πως ο μετασχηματισμός της εξόδου του φίλτρου ορίζεται ως

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \mathcal{H}(j\omega)\mathcal{X}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)||\mathcal{X}(j\omega)|e^{j[\angle\mathcal{H}(j\omega)+\angle\mathcal{X}(j\omega)]}$$

η εξάλειψη της συχνοτικής συνιστώσας ω_0 απαιτεί να είναι $\mathcal{H}(j\omega_0) = 0$ ενώ η πλήρης απουσία παραμόρφωσης απαιτεί όπως $\mathcal{H}(j\omega_0) = 1$ για συχνότητες $\omega \neq \omega_0$. Επομένως,

- **Χαμηλοπερατά φίλτρα με συχνότητα αποκοπής ω_c :** χαρακτηρίζονται από ζώνη διέλευσης $\omega \leq \omega_c$ και από ζώνη αποκοπής $\omega > \omega_c$ και επομένως θα είναι

$$|\mathcal{H}_{lp}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

- **Υψηλοπερατά φίλτρα με συχνότητα αποκοπής ω_c :** χαρακτηρίζονται από ζώνη διέλευσης $\omega \geq \omega_c$ και από ζώνη αποκοπής $\omega < \omega_c$ και επομένως θα είναι

$$|\mathcal{H}_{hp}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Ιδανικά φίλτρα

- **Ζωνοπερατά φίλτρα με συχνότητες αποκοπής ω_{c1} και ω_{c2}** : χαρακτηρίζονται από μία ζώνη διέλευσης $\omega_{c1} \leq \omega_c \leq \omega_{c2}$ και δύο ζώνες αποκοπής $\omega < \omega_{c1}$ και $\omega > \omega_{c2}$ και επομένως θα είναι

$$|\mathcal{H}_{bp}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

- **Ζωνοφρακτικά φίλτρα με συχνότητες αποκοπής ω_{c1} και ω_{c2}** : χαρακτηρίζονται από μία ζώνη αποκοπής $\omega_{c1} \leq \omega_c \leq \omega_{c2}$ και δύο ζώνες διέλευσης $\omega < \omega_{c1}$ και $\omega > \omega_{c2}$ και επομένως θα είναι

$$|\mathcal{H}_{bs}(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 1 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Η φάση της συχνοτικής απόκρισης όλων των τύπων ιδανικών φίλτρων είναι **γραμμική συνάρτηση της συχνότητας** και ορίζεται ως

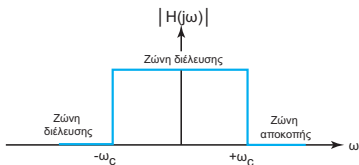
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = \begin{cases} -\alpha\omega & \text{για τη ζώνη διέλευσης} \\ 0 & \text{για τη ζώνη αποκοπής} \end{cases}$$

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

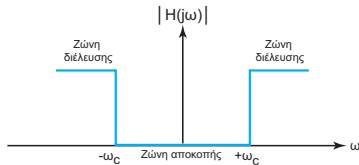
Ιδανικά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

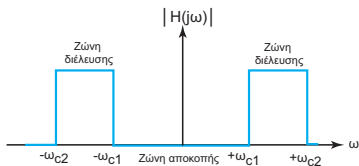
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



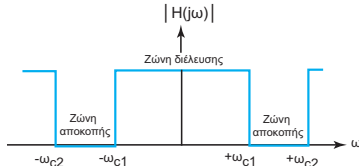
Χαμηλοπερατό Φίλτρο



Υψηλοπερατό Φίλτρο



Ζωνοπερατό Φίλτρο



Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

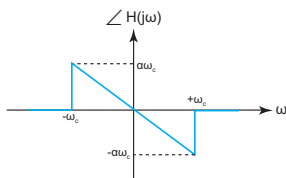
Η μεταβολή του μέτρου της συνάρτησης **συχνοτικής απόκρισης** των τεσσάρων διαφορετικών κατηγοριών ιδανικών φίλτρων ως συνάρτηση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

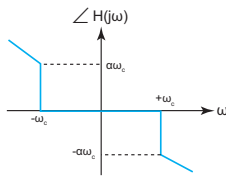
Ιδανικά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

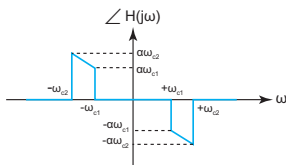
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



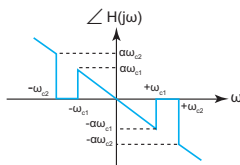
Χαμηλοπερατό Φίλτρο



Υψηλοπερατό Φίλτρο



Ζωνοπερατό Φίλτρο



Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

Η μεταβολή της φάσης της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης των τεσσάρων διαφορετικών κατηγοριών ιδανικών φίλτρων ως συνάρτηση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Μειονεκτήματα ιδανικών φίλτρων

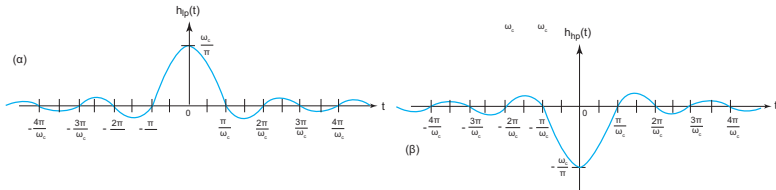
Τα ιδανικά φίλτρα **δεν είναι υλοποιήσιμα** γιατί:

- Η κρουστική τους απόκριση έχει **άπειρο μήκος** στο πεδίο του χρόνου.
- Η κρουστική τους απόκριση δεν είναι **αιτιατό σήμα**.

Για παράδειγμα η κρουστική απόκριση του **ιδανικού χαμηλοπερατού** και του **ιδανικού υψηλοπερατού** φίλτρου υπολογίζονται ως

$$h_{lp}(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \quad \text{και} \quad h_{hp}(\omega) = \delta(\omega) - \frac{\sin(\omega_c \omega)}{\pi \omega}$$

και επομένως έχουν **άπειρη διάρκεια** και ορίζονται και για **αρνητικές** χρονικές στιγμές. Αυτά τα σήματα απεικονίζονται στις εικόνες (α) και (β) του επόμενου σχήματος.



Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Πραγματικά φίλτρα

Τα πραγματικά φίλτρα προσεγγίζουν τη συμπεριφορά των ιδανικών φίλτρων τα οποία διαφέρουν από τα ιδανικά και μη υλοποιήσιμα φίλτρα στα εξής σημεία:

- Το μέτρο $|H(j\omega)|$ δεν έχει σταθερή τιμή ίση με 1 στις ζώνες διέλευσης αλλά παρουσιάζει **διακυμάνσεις** πλάτους δ_p που είναι γνωστό ως **κυματισμός των ζωνών διέλευσης**.
- Το μέτρο $|H(j\omega)|$ δεν έχει σταθερή μηδενική τιμή στις ζώνες αποκοπής, αλλά παρουσιάζει **διακυμάνσεις** πλάτους δ_s που είναι γνωστό ως **κυματισμός των ζωνών αποκοπής**.
- Η μετάβαση από ζώνη διέλευσης σε ζώνη αποκοπής **δεν είναι απότομη** και δεν παρατηρείται **ασυνέχεια** στη συχνότητα αποκοπής ω_c . Η πτώση του μέτρου $|H(j\omega)|$ είναι ομαλή και ο μηδενισμός της τιμής του γίνεται σε συχνότητα ω_d με τη ζώνη συχνοτήτων $\omega_d - \omega_c$ να ονομάζεται **ζώνη μετάβασης**.

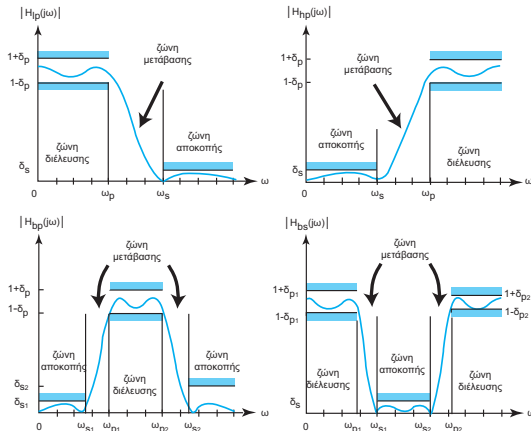
Στα πραγματικά φίλτρα η συχνότητα αποκοπής ω_c συνήθως βρίσκεται **μέσα στη ζώνη μετάβασης** και ορίζεται ως η τιμή της συχνότητας στη θέση της οποίας η τιμή του πλάτους της συχνοτικής απόκρισης έχει μειωθεί **στο 0.7071 της μέγιστης τιμής της** δηλαδή σε **-3 dB** σε λογαριθμική κλίμακα.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Πραγματικά φίλτρα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η μεταβολή του μέτρου $|H(j\omega)|$ για τους τέσσερις τύπους πραγματικών φίλτρων ως συνάρτηση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Πραγματικά φίλτρα RC πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αποτελούνται από μία **αντίσταση** R και ένα **πυκνωτή** C συνδεδεμένα σε σειρά ενώ το σήμα εισόδου τους $x(t)$ προέρχεται από μία πηγή τάσης $V_s(t)$.

Εάν οι τάσεις στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή είναι οι $V_R(t)$ και $V_C(t)$, το κύκλωμα λειτουργεί ως **χαμηλοπερατό φίλτρο** εάν ως σήμα εξόδου $y(t)$ θεωρήσουμε την τάση $V_C(t)$ και ως **υψηλοπερατό φίλτρο**, εάν ως σήμα εξόδου θεωρήσουμε την τάση $V_R(t)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΧΑΜΗΛΟΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ

Θέτοντας $x(t) = V_s(t)$ και $y(t) = V_C(t)$ η εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff μας δίνει

$$RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_s(t)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση, για μηδενικές αρχικές συνθήκες, περιγράφει ένα σύστημα LTI, με συχνοτική απόκριση

$$V_C(t) = \mathcal{H}(j\omega) e^{j\omega t}$$

(όπου θεωρήσαμε ότι $V_s(t) = e^{j\omega t}$). Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \exp \left[-j \tan^{-1}(\omega RC) \right]$$

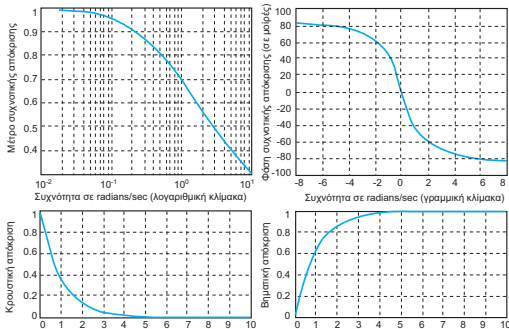
Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Πραγματικά φίλτρα RC πρώτης τάξεως

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε την **κρουστική** και τη **βηματική** απόκριση ως

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega RC}\right\} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \quad \text{και}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/RC} u(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\tau/RC} d\tau = (1 - e^{-t/RC}) u(t)$$



Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Πραγματικά φίλτρα RC πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΥΨΗΛΟΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ

Θέτοντας $x(t) = V_s(t)$ και $y(t) = V_R(t)$ η εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff μας δίνει

$$RC \frac{dV_R(t)}{dt} + V_R(t) = RC \frac{dV_S(t)}{dt}$$

με τη συχνотική απόκριση του συστήματος να δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \exp \left[j \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) \right] \quad \text{όπου} \quad V_s(t) = e^{j\omega t}$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας με τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = 1 - \frac{1}{j\omega RC}$$

η κρουστική και η βηματική απόκριση του εν λόγω κυκλώματος υπολογίζονται ως

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega RC}\right\} = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t), \quad \text{και}$$

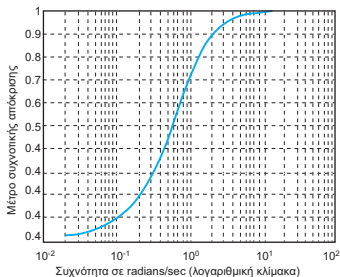
$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau - \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/RC} u(\tau) d\tau = e^{-t/RC} u(t)$$

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

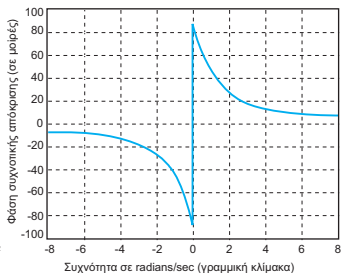
Πραγματικά φίλτρα RC πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

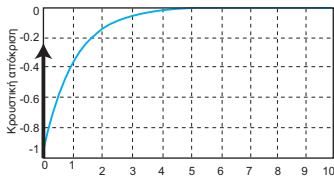
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



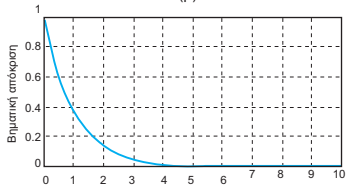
(α)



(β)



(γ)



(δ)