

Ανάλυση Fourier στο πεδίο του διακριτού χρόνου (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Γνωρίζουμε πως τα **στοιχειώδη μιγαδικά εκθετικά σήματα**

$$x_k[n] = \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \exp(jk\omega_0 n) \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

είναι **περιοδικά σήματα** με κοινή περίοδο $N = 2\pi/\omega_0$.

Υπάρχουν N τέτοιες ακολουθίες οι οποίες αποτελούν **μία ορθογώνια βάση συναρτήσεων** εντός οποιουδήποτε διαστήματος διάρκειας N .

Κάθε περιοδικό σήμα $x[n] = x[n + rN]$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2$) περιόδου N , γράφεται ως

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k x_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

σχέση που είναι γνωστή ως **ανάπτυγμα ή σειρά Fourier του σήματος $x[n]$** . Οι συντελεστές α_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και υπολογίζονται από τη **συνθήκη ορθογωνιότητας**

$$\langle x_m[n], x_k[n] \rangle = \sum_{n=N_1}^{N_2} x_m[n] x_k^*[n] = \begin{cases} N & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με το μιγαδικό συζυγές σήμα

$$x_k^*[n] = \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

και αθροίζοντας για όλο το διάστημα διάρκειας N , θα λάβουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n]x_k^*[n] &= \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) \\ &= \sum_{n=\langle n \rangle} \underbrace{\left\{ \sum_{m=\langle N \rangle} \alpha_m \exp\left(jm\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}}_{x[n]} \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = N\alpha_n\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Οι συντελεστές Fourier α_k είναι **περιοδικές ακολουθίες** με περίοδο N , αφού

$$\alpha_{k+N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right) e^{-j2\pi n} = \alpha_k \quad (\forall k \in N)$$

Οι εξισώσεις ορισμού των ποσοτήτων $x[n]$ και α_k συνήθως εμφανίζονται **κατά ζεύγη** και η μία θεωρείται **αντίστροφη της άλλης**.

Η εξίσωση ορισμού των συντελεστών α_k ονομάζεται **εξίσωση ανάλυσης**, ενώ η εξίσωση ορισμού του διακριτού σήματος $x[n]$ ονομάζεται **εξίσωση σύνθεσης**.

Ορίζοντας την ποσότητα $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \iff x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k W_N^{-kn}$$

Σημειώστε πως το άθροισμα του αναπτύγματος Fourier **είναι πεπερασμένο** και επομένως συγκλίνει πάντοτε, σε αντίθεση με τη συνεχή περίπτωση.

Για τον ίδιο λόγο το **το φαινόμενο Gibbs** δεν εμφανίζεται στα διακριτά σήματα.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Τριγωνομετρική μορφή του αναπτύγματος Fourier

Το ανάπτυγμα Fourier **πραγματικών διακριτών σημάτων** μπορεί να διατυπωθεί σε τριγωνομετρική μορφή. Ξεκινώντας από την εξίσωση του **εκθετικού αναπτύγματος** και αναπτύσσοντας τον όρο για $k = 0$, έχουμε

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Εάν η περίοδος N του σήματος είναι **περιττός αριθμός**, η παράσταση $N - 1$ θα είναι άρτιος αριθμός και η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x[n] = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left\{ \alpha_k \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) + \alpha_{N-k} \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n\right] \right\}$$

Είναι όμως $\alpha_{N-k} = \alpha_k^*$ και $\exp[j(N-k)(2\pi/N)n] = \exp[-jk(2\pi/N)n]$ οπότε θα έχουμε

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Τριγωνομετρική μορφή του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\begin{aligned}x[n] &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[\alpha_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) + \alpha_k^* \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] = \\&= \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \Re\left\{ \alpha_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) \right\} = \\&= \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left\{ \Re\{\alpha_k\} \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) - \Im\{\alpha_k\} \sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}\end{aligned}$$

Εάν η περίοδος N του σήματος είναι **άρτιος αριθμός**, το σήμα γράφεται ως

$$\begin{aligned}x[n] &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{(N-2)/2} \left\{ \alpha_k \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) + \alpha_{N-k} \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n\right] \right\} \\&+ \alpha_{N/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{2}\right)\end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Τριγωνομετρική μορφή του αναπτύγματος Fourier

Πραγματοποιώντας την ανάλυση που κάναμε προηγουμένως και παρατηρώντας ότι

$$\exp\left(j\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{2}\right) = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

μπορούμε να διατυπώσουμε το σήμα $x[n]$ με τη μορφή

$$x[n] = \alpha_0 + (-1)^n \alpha_{N/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left\{ \Re\{\alpha_k\} \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) - \Im\{\alpha_k\} \sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}$$

που αποτελεί την τριγωνομετρική μορφή πραγματικού σήματος με **άρτια τιμή περιόδου**.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Άσκηση

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] = \begin{cases} 1 & n = mN, \quad (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

με περίοδο N , όπου $\delta[n]$ είναι η διακριτή κρουστική συνάρτηση.

Στην περιοχή τιμών $0 \leq n \leq N - 1$ είναι $x[n] = \delta[n]$ και επομένως θα έχουμε

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = 1$$

(ανατρέξτε στον ορισμό της συνάρτησης $\delta[n]$). Θα είναι λοιπόν

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

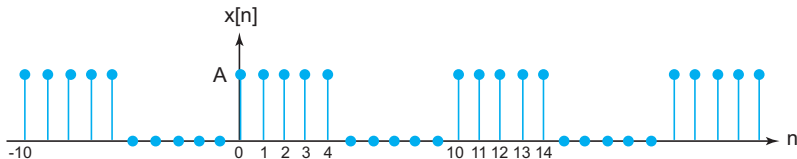
Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Άσκηση

Να βρεθούν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του περιοδικού ορθογώνιου σήματος

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN] \quad \text{με το διακριτό σήμα } x[n] \quad \text{να ορίζεται ως} \quad x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L < n \leq N \end{cases}$$

Το εν λόγω διακριτό σήμα απεικονίζεται στη συνέχεια για $L = 5$ και $N = 10$.



Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Παράδειγμα υπολογισμού αναπτύγματος Fourier

Από την εξίσωση ορισμού των συντελεστών Fourier θα έχουμε

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για $k = 0$ θα είναι

$$\alpha_0 = \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{L-1} 1 = \frac{AL}{N}$$

ενώ για την περιοχή τιμών $0 < k \leq L - 1$ βρίσκουμε ότι (ανατρέξτε στη σελίδα 528)

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} \left\{ \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k n\right) \right\}^n \\ &= \frac{A}{N} \exp\left[-j \frac{\pi k(L-1)}{N}\right] \left\{ \sin\left(\frac{\pi k L}{N}\right) \right\} / \left\{ \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για την παρουσίαση των ιδιοτήτων του διακριτού αναπτύγματος Fourier θα χρησιμοποιήσουμε για τους συντελεστές Fourier α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ τα σύμβολα x_k και y_k - θα είναι λοιπόν

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} n\right) \quad \text{και} \quad y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp\left(jk \frac{2\pi}{N} n\right)$$

Για την αναλυτική απόδειξη των ιδιοτήτων του αναπτύγματος Fourier των διακριτών περιοδικών σημάτων ανατρέξτε στις σελίδες 528-534.

- **Γραμμικότητα:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ με κοινή περίοδο N είναι οι x_k και y_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του γραμμικού συνδυασμού $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$ θα είναι οι

$$z_k = \alpha x_k + \beta y_k$$

- **Χρονική μετατόπιση:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του χρονικώς μετατοπισμένου σήματος $y[n] = x[n - m]$ θα είναι οι

$$y_k = W_N^{km} x_k = \exp(-2j\pi mk/N) x_k$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

- **Πολλαπλασιασμός:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ με κοινή περίοδο N είναι οι x_k και y_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $z[n] = x[n]y[n]$ θα δίδονται από τη σχέση

$$z_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{\ell} y_{\ell-k}$$

με το άθροισμα που εμφανίζεται σε αυτή, να εκφράζει την επονομαζόμενη **περιοδική συνέλιξη**.

- **Περιοδική συνέλιξη:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ με κοινή περίοδο N είναι οι x_k και y_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διακριτού σήματος που ορίζεται από τη σχέση

$$z[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m]$$

δηλαδή ως η **περιοδική συνέλιξη** των σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ θα υπολογίζονται ως

$$z_k = Nx_k y_k$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

- **Συμμετρία και συζυγία:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του μιγαδικού σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες συμμετρίας:
 - 1 Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y[n] = x^*[n]$ είναι οι $y_k = x_{-k}^*$.
 - 2 Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y[n] = x^*[-n]$ είναι οι $y_k = x_k^*$.
 - 3 Οι συντελεστές Fourier του **πραγματικού** σήματος $y[n] = \Re\{x[n]\}$ είναι οι $y_k = x_k^o$ όπου x_k^o η άρτια συνιστώσα των συντελεστών x_k ενώ το σύμβολο \Re εκφράζει τον τελεστή του πραγματικού μέρους.
 - 4 Οι συντελεστές Fourier του **φανταστικού** σήματος $y[n] = i\Im\{x[n]\}$ είναι οι $y_k = x_k^o$ όπου x_k^o η περιττή συνιστώσα των συντελεστών x_k ενώ το σύμβολο \Im εκφράζει τον τελεστή του φανταστικού μέρους.

Στην ειδική περίπτωση ενός περιοδικού σήματος $x[n]$ με **πραγματικές τιμές**, αποδεικνύεται ότι

$$\Re\{x_k\} = \Re\{x_{-k}\}, \quad \Im\{x_k\} = -\Im\{x_{-k}\}, \quad |x_k| = |x_{-k}|, \quad \angle x_k = -\angle x_{-k}$$

όπου $|x_k|$ και $\angle x_k$ το **μέτρο** και η **φάση** των συντελεστών x_k οι οποίοι γενικά είναι **μιγαδικοί αριθμοί**.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

- **Συχνοτική μετατόπιση:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nm\right) x[n]$$

έχουν τη μορφή $y_k = x_{k-m}$

- **Αντιστροφή χρόνου:** εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $y[n] = x[-n]$ θα έχουν τη μορφή $y_k = x_{-k}$.
- **Διαισμός:** εάν οι συντελεστές Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε οι συντελεστές Fourier των συντελεστών x_k θα είναι ίσοι με $x[-n]/N$.
- **Διαφορά:** εάν οι συντελεστές Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , τότε οι συντελεστές Fourier του σήματος $y[n] = x[n] - x[n-1]$ θα έχουν τη μορφή

$$y_k = \left[1 - \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] x_k$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

- **Κλιμάκωση χρόνου:** θεωρώντας ένα σήμα $x[n]$ περιόδου N , το **υποδειγματοληφθέν** σήμα $x_{\downarrow m}[n]$ ορίζεται ως (m θετικός ακέραιος)

$$x_{\downarrow m} = x[mn]$$

ενώ το **υπερδειγματοληφθέν** σήμα $x_{\uparrow m}[n]$ ορίζεται από τη σχέση

$$x_{\uparrow m}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{για τιμές } n \text{ ακέραια πολλαπλάσια του } m \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Υποδειγματοληψία: θεωρούμε μόνο τα δείγματα του $x[n]$ οι θέσεις των οποίων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του m .

Υπερδειγματοληψία: πραγματοποιείται προχωρώντας στην προσθήκη ($m - 1$) μηδενικών ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε διαδοχικά δείγματα του $x[n]$.

Τα σήματα $x_{\downarrow m}[n]$ και $x_{\uparrow m}[n]$ είναι περιοδικά (ανατρέξτε στη σελίδα 533) και ορίζεται το ανάπτυγμά τους κατά Fourier.

Θεωρώντας το σήμα $y[n] = x_{\uparrow m}[n]$ αποδεικνύεται ότι

$$y_k = \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} \ell k \right) \right\} = \frac{1}{m} x_k$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Εξίσωση του Parseval

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x[n]$ με περίοδο N είναι οι x_k , αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$$

Πράγματι από την εξίσωση ορισμού του αναπτύγματος Fourier έχουμε

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right) \quad \text{και} \quad x^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

και το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης διατυπώνεται ως

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \right\}$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά των παραπάνω αθροισμάτων θα λάβουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* x_k = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$$

που είναι και το τελικό αποτέλεσμα.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Η φυσική σημασία του αναπτύγματος Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων αναδεικνύει το **συχνοτικό τους περιεχόμενο**.

Σε αντίθεση με τα συνεχή σήματα που περιέχουν **άπειρες συχνότητες**, οι συχνότητες των διακριτών περιοδικών σημάτων είναι μοναδικές μόνο στην περιοχή τιμών $-\pi < \omega < \pi$ ή ισοδύναμα $-1/2 < f < 1/2$.

Για το λόγο αυτό **το ανάπτυσμά τους κατά Fourier θα περιέχει το πολύ N αρμονικά συσχετιζόμενες συχνοτικές συνιστώσες**.

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συνιστώσες ισούται με τη θεμελιώδη συχνότητα $\omega = 2\pi/N$ ή $f = 1/N$ όπου N η περίοδος του σήματος.

Σύμφωνα το ανάπτυγμα Fourier, **ένα οποιοδήποτε περιοδικό διακριτό σήμα $x[n]$ με περίοδο N αποτελείται από N συχνοτικές συνιστώσες**

$$\alpha_0, \quad \alpha_1 e^{j\omega n}, \quad \alpha_2 e^{2j\omega n} \quad \dots \quad \alpha_{N-1} e^{(N-1)j\omega n}$$

με συχνότητες $\omega_k = (2\pi/N)k = \omega_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) οι οποίες αποτελούν **ακέραια πολλαπλάσια** της θεμελιώδους συχνότητας $\omega = 2\pi/N$.

Η σχεδίαση των συντελεστών α_k συναρτήσει του δείκτη k ή της συχνότητας ω ονομάζεται **φάσμα Fourier** και παρουσιάζει με διαγραμματικό τρόπο **τη συνεισφορά των στοιχειωδών αρμονικών συνιστωσών, στο διακριτό περιοδικό σήμα $x[n]$** .

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Η φυσική σημασία του αναπτύγματος Fourier

Οι συντελεστές Fourier είναι **μγαδικοί αριθμοί** της μορφής $\alpha_k = |\alpha_k|e^{j\angle\alpha_k}$.

Η γραφική παράσταση του μέτρου $|\alpha_k|$ συναρτήσει του k ονομάζεται **φάσμα πλάτους**.

Η γραφική παράσταση της φάσης $\angle\alpha_k$ συναρτήσει του k ονομάζεται **φάσμα φάσης**.

Η γνώση των φασμάτων μας επιτρέπει να **ανακατασκευάσουμε** το σήμα $x[n]$ χρησιμοποιώντας την **εξίσωση σύνθεσης**.

Τέλος η ακολουθία τιμών $|\alpha_k|^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) περιγράφει **την κατανομή της ισχύος του σήματος ως συνάρτηση της συχνότητας** και αποτελεί το **φάσμα πυκνότητας ισχύος** του σήματος που είναι περιοδικό με περίοδο N .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως **η μέση ισχύς ενός διακριτού περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων των στοιχειωδών αρμονικών συνιστωσών της**.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Γνωρίζουμε πως ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$x[n] = z^n$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** κάθε **διακριτού συστήματος LTI** με ιδιοτιμή τη συνάρτηση

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

υπολογισμένη για την τιμή του z του σήματος εισόδου - θα είναι λοιπόν

$$y[n] = \mathcal{H}(z)x[n] = \mathcal{H}(z)z^n$$

Εάν το σήμα εισόδου είναι περιοδικό με περίοδο N και αναπτύχθει κατά Fourier ως

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \left\{ \exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right) \right\}^n = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k z_k^n$$

τότε η απόκριση του συστήματος στο στοιχειώδες σήμα

$$x_k[n] = z_k^n = \left\{ \exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right) \right\}^n$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI

Θα δίδεται από την **εξίσωση ιδιοτιμών**

$$y_k[n] = \mathcal{H}(z_k)z_k^n = \mathcal{H}\left[\exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

ενώ σύμφωνα με την **αρχή της επαλληλίας** η συνολική έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \mathcal{H}\left[\exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Αλλά οι συντελεστές Fourier και οι εκθετικές συναρτήσεις είναι **περιοδικές με περίοδο N** .

Επομένως το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας **N οποιεσδήποτε διαδοχικές τιμές του k** - θα είναι λοιπόν

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \mathcal{H}\left[\exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως, η έξοδος $y[n]$ ενός συστήματος LTI είναι περιοδική με περίοδο N . Επιπλέον, εάν λάβουμε το ανάπτυγμά της κατά Fourier

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} y_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

και συγκρίνουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε

$$y_k = \mathcal{H}\left[\exp\left(j \frac{2\pi}{N} k\right)\right] \alpha_k$$

Επομένως ο υπ' αριθμόν k συντελεστής Fourier του $y[n]$, προκύπτει από το γινόμενο του υπ' αριθμόν k συντελεστή Fourier του $x[n]$ επί την τιμή της συνάρτησης $\mathcal{H}[\exp(j2\pi k/N)]$ υπολογισμένης στη θέση της εκάστοτε συχνότητας k .

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Ας θεωρήσουμε ένα αναδρομικό γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

Να προσδιορίσετε το ανάπτυγμα κατά Fourier του σήματος εξόδου $y[n]$, όταν στην είσοδο του διαβιβαστεί το διακριτό περιοδικό σήμα

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Το ανάπτυγμα κατά Fourier της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \alpha_k \mathcal{H}\left[\exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

όπου $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του συστήματος. Διαβιβάζοντας στο σύστημα το σήμα $x[n] = e^{j\omega n}$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y[n] = \mathcal{H}(e^{j\omega})e^{j\omega n}$.

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

Επιπλέον θα έχουμε

$$y[n-1] = \mathcal{H}(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} = e^{-j\omega} \mathcal{H}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

και με αντικατάσταση στην εξίσωση διαφορών,

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - (1/4) e^{-j\omega}}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση του $y[n]$ θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{\alpha_k}{1 - \frac{1}{4} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

όπου α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διακριτού σήματος $x[n]$ το οποίο υποτίθεται πως είναι περιοδικό με περίοδο N .

Το σήμα $x[n]$ αποτελείται από δύο συνιστώσες με περιόδους $N_1 = 8$ και $N_2 = 4$ και επομένως η περίοδος του είναι $N = 8$ - θα είναι λοιπόν

$$x_2[n] = \sum_{k=\langle 8 \rangle} \alpha_k \exp\left(j \frac{2\pi}{8} kn\right)$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler διαπιστώνουμε ότι

$$x_2[n] = \frac{1}{2} \exp\left(j\frac{2\pi}{8}(1)n\right) + \frac{1}{2} \exp\left(j\frac{2\pi}{8}(-1)n\right) + \exp\left(j\frac{2\pi}{8}(2)n\right) + \exp\left(j\frac{2\pi}{8}(-2)n\right)$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, οι μοναδικοί μη μηδενικοί συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του $x[n]$ είναι οι

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_{-2} = 1$$

ήτοι, οι αντίστοιχοι μη μηδενικοί συντελεστές Fourier του σήματος $y[n]$ είναι

$$y_1 = \mathcal{H}\left\{\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)\right\} \alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$y_{-1} = \mathcal{H}\left\{\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)\right\} \alpha_{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$y_2 = \mathcal{H}\left\{\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)\right\} \alpha_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)}$$

Ανάπτυγμα Fourier διακριτών σημάτων

Ανάπτυγμα Fourier και συστήματα LTI - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$y_{-2} = \mathcal{H} \left\{ \exp \left(-j \frac{\pi}{2} \right) \right\} \alpha_{-2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{2} \right)}$$

Επομένως το ανάπτυγμα Fourier της εξόδου του συστήματος θα δίδεται από την εξίσωση

$$y[n] = y_1 \exp \left(j \frac{\pi n}{4} \right) + y_{-1} \exp \left(-j \frac{\pi n}{4} \right) + y_2 \exp \left(j \frac{\pi n}{2} \right) + y_{-2} \exp \left(-j \frac{\pi n}{2} \right)$$

και με αντικατάσταση των τιμών λαμβάνουμε

$$y[n] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\exp \left(j \frac{\pi n}{4} \right)}{1 - \frac{1}{4} \exp \left(-j \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{\exp \left(-j \frac{\pi n}{4} \right)}{1 - \frac{1}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{4} \right)} \right\} \\ + \frac{\exp \left(j \frac{\pi n}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4} \exp \left(-j \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{\exp \left(-j \frac{\pi n}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{2} \right)}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

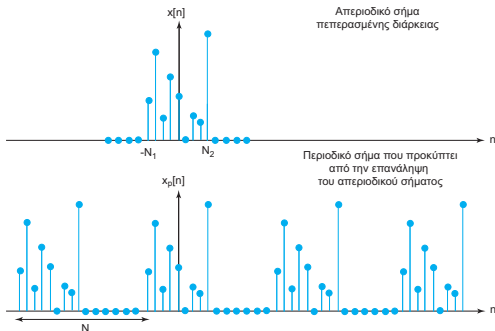
Εξισώσεις ευθείας - αντίστροφου μετασχηματισμού

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εφαρμόζεται στα **απεριοδικό** διακριτά σήματα. Θεωρώντας ένα απεριοδικό σήμα $x[n]$ που ορίζεται στην περιοχή $-N_1 \leq n \leq N_2$, κατασκευάζουμε ένα **περιοδικό** σήμα $x_p[n]$ περιόδου N δια της συνεχούς επαναλήψεως του $x[n]$ τέτοιο ώστε

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} x_p[n]$$



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Εξισώσεις ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού

Το ανάπτυγμα Fourier του περιοδικού σήματος $x_p[n]$ ορίζεται ως

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

με συντελεστές Fourier της μορφής

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x_p[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

Θεωρώντας την περιοχή τιμών $-N_1 \leq n \leq N_2$ για την οποία είναι $x_p[n] = x[n]$ θα έχουμε

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

Χρησιμοποιώντας την κυκλική συχνότητα $\omega_k = 2\pi k/N = k\omega_0$ (όπου $\omega_0 = 2\pi/N$ η θεμελιώδης συχνότητα) και ορίζοντας τη συνάρτηση

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) \equiv \mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Εξιιώσεις ευθέως - αντίστροφου μετασχηματισμού

η οποία είναι γνωστή ως ο **μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου** του διακριτού σήματος $x[n]$, οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier υπολογίζονται ως

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \mathcal{X}(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{N} \mathcal{X}(e^{jk\omega_0})$$

ή ισοδύναμα

$$N\alpha_k = \mathcal{X}(e^{jk\omega_0})$$

Επομένως

οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος $x_p[n]$, μπορούν να θεωρηθούν ως **δείγματα** της συνάρτησης $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ που αντιστοιχούν σε τιμές συχνότητας $\omega_k = k\omega_0$, οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας ω_0

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στο ανάπτυγμα Fourier του σήματος $x_p[n]$, αυτό θα λάβει τη μορφή

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} \mathcal{X}(e^{jk\omega_0}) \exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \mathcal{X}(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\omega_0 = 2\pi/N$ από την οποία προκύπτει ότι $1/N = \omega_0/2\pi$.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Εξισώσεις ευθείας - αντίστροφου μετασχηματισμού

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Υπολογίζοντας την παραπάνω σχέση στο όριο $N \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-\langle N \rangle} \mathcal{X}(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

αφού στο όριο $N \rightarrow \infty$ είναι $\omega_0 \rightarrow 0$. Η παράσταση $\mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ είναι **περιοδική** με περίοδο 2π και το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί **σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους 2π** . Συνδυάζοντας τα παραπάνω βρίσκουμε

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

εξισώσεις που εκφράζουν **το ζεύγος ευθείας - αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier των αperiοδικών σημάτων διακριτού χρόνου**.

Η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , αφού είναι

$$\mathcal{X}(e^{j(\omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{-j2k\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η φυσική σημασία του μετασχηματισμού Fourier

Ο **μετασχηματισμός Fourier** $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ περιγράφει την ανάλυση του σήματος $x[n]$ στις συχνοτικές του συνιστώσες το πλάτος των οποίων είναι

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

Για το λόγο αυτό είναι γνωστός ως το **φάσμα** του σήματος $x[n]$ με το οποίο σχετίζεται.

Η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική συνάρτηση και μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \Re\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} + i\Im\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = |\mathcal{X}(e^{j\omega})| e^{i\angle\mathcal{X}(e^{j\omega})}$$

όπου $|\mathcal{X}(e^{j\omega})|$ και $\angle\mathcal{X}(e^{j\omega})$ το **πλάτος** και η **φάση** του μετασχηματισμού.

Η συνάρτηση $S_{xx}(\omega) = |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2$ ονομάζεται **φάσμα ενεργειακής πυκνότητας** και εκπεφρασμένη ως

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

περιγράφει **την ενέργεια του σήματος $x[n]$ που περιλαμβάνεται σε μία ζώνη συχνοτήτων εύρους $d\omega$** . Η συνολική ενέργεια του σήματος εκπεφρασμένη στο χώρο των συχνοτήτων δίδεται από τη σχέση

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η ταυτότητα του Parseval

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εκφράζει την **αρχή διατήρησης της ενέργειας** σύμφωνα με την οποία

Η ενέργεια του σήματος στο πεδίο του χρόνου **είναι ίση** με την ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας

και δίδεται από τη σχέση

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Για την απόδειξή της ως αντικαταστήσουμε την έκφραση

$$x^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega$$

στην εξίσωση ορισμού της ενέργειας του σήματος - θα είναι λοιπόν

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η ταυτότητα του Parseval

Εναλλάσσοντας τις πράξεις της άθροισης και της ολοκλήρωσης και χρησιμοποιώντας την εξίσωση ανάλυσης, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}^*(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}^*(e^{j\omega}) \mathcal{X}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

και συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις τελικά θα λάβουμε

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

που είναι και το ζητούμενο.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Οι συνθήκες σύγκλισης του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται μόνο όταν το άθροισμα που εμφανίζεται στην εξίσωση ορισμού του, **συγκλίνει ομοιόμορφα** προς μία πεπερασμένη τιμή για κάθε συχνότητα ω - θα είναι λοιπόν

$$|\mathcal{X}(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \right| < \infty \quad \text{για κάθε } \omega$$

Υπάρχουν δύο συνθήκες που διασφαλίζουν τη σύγκλιση του μετασχηματισμού Fourier:

- Η συνθήκη της **απόλυτης** αθροισσιμότητας που διατυπώνεται ως

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Η συνθήκη της **τετραγωνικής αθροισσιμότητας** που διατυπώνεται ως

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Η τελευταία συνθήκη αφορά τα **διακριτά σήματα πεπερασμένης ενέργειας** αλλά δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η συνθήκη της απόλυτης αθροισσιμότητας.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η σχέση των μετασχηματισμών Fourier και \mathcal{Z}

Ο μετασχηματισμός \mathcal{Z} μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$, ορίζεται ως

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] r^{-n} \right) e^{-j\omega n}$$

αφού είναι $z = r \exp(j\omega)$. Επομένως ο μετασχηματισμός $\mathcal{X}(z)$ ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας $x[n]z^{-n}$.

Εάν ο μετασχηματισμός \mathcal{Z} συγκλίνει για $|z| = 1$ τότε θα είναι

$$\mathcal{X}(z) \Big|_{z=\exp(j\omega)} = \mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier ταυτίζεται με το μετασχηματισμό \mathcal{Z} , υπολογισμένο στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου

Εάν ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού \mathcal{Z} τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ δεν υφίσταται.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους, φάσης και πυκνότητας ενέργειας της διακριτής ακολουθίας $x[n] = \alpha^n u[n]$ με τιμή παραμέτρου $|\alpha| < 1$.

Από την εξίσωση ορισμού του εν λόγω μετασχηματισμού θα έχουμε

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση στην καρτεσιανή της μορφή προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha \cos \omega) + j\alpha \sin \omega} = \frac{1 - \alpha \cos \omega}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2} - j \frac{\alpha \sin \omega}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}$$

Επομένως το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού ω θα δίδονται από τις σχέσεις

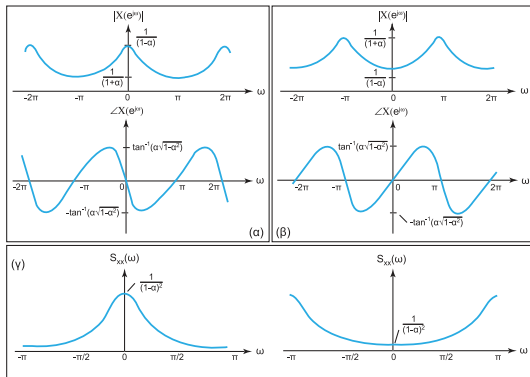
$$|\mathcal{X}(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{X}(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos \omega} \right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας θα έχει τη μορφή

$$S_{xx}(\omega) = |\mathcal{X}(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}$$



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος υπολογίζεται ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \sum_{n=0}^{L-1} (e^{-j\omega})^n = \frac{A(1 - e^{-j\omega L})}{1 - e^{-j\omega}}$$

Εργαζόμενοι όπως και πριν έχουμε

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = A \left\{ \frac{e^{-j\omega L/2}}{e^{-j\omega/2}} \right\} \left\{ \frac{e^{j\omega L/2} - e^{-j\omega L/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \right\} = A \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \exp \left[-j \frac{\omega(L-1)}{2} \right]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

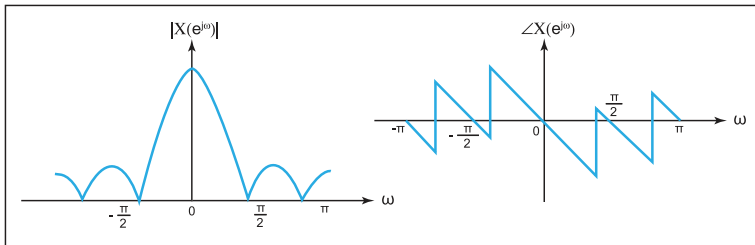
Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier

Επομένως, το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{X}(e^{j\omega})| = |A| \left| \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{X}(e^{j\omega}) = -\frac{\omega(L-1)}{2}$$

Για $\omega = 0$ είναι $|\mathcal{X}(e^{j\omega})| = |A|L$ και $\angle \mathcal{X}(e^{j\omega}) = 0$.

Η συνάρτηση $|\mathcal{X}(e^{j\omega})|$ για $A = 1$ ονομάζεται **πυρήνας του Dirichlet**.



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Τα διακριτά περιοδικά σήματα **δεν πληρούν** τις συνθήκες ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier, αφού δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικής αθροίσμα.

Ωστόσο χρησιμοποιώντας **κρουστικές συναρτήσεις στο χώρο των συχνοτήτων** μπορούμε να ορίσουμε τον εν λόγω μετασχηματισμό

ως ένα συρμό **διακριτών κρουστικών συναρτήσεων**

με τιμές **ανάλογες** των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier του σήματος $x[n]$.

Παρατηρώντας το μετασχηματισμό Fourier του περιοδικού σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)n}$$

διαπιστώνουμε πως το παραπάνω άθροισμα **δεν συγκλίνει** προς κάποια συνηθισμένη συνάρτηση αλλά (όπως και στη συνεχή περίπτωση) σε μία **γενικευμένη συνάρτηση** ή κατανομή.

Πράγματι, θεωρώντας το πεπερασμένο άθροισμα

$$\mathcal{X}_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{-j(\omega - \omega_0)n} = \sum_{m=0}^{2N} e^{-j(\omega - \omega_0)m} = \frac{\sin[(N + 1/2)(\omega - \omega_0)]}{\sin[(\omega - \omega_0)/2]}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

αυτό αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier ενός **ορθογώνιου σήματος πεπερασμένου μήκους** αλλά μετατοπισμένο πάνω στον άξονα των συχνοτήτων κατά την τιμή της συχνότητας ω_0 .

Δείτε τις διαφάνειες 37 και 38

Παρατηρώντας το **φάσμα πλάτους** της διαφάνειας 38 διαπιστώνουμε ότι:

- Το ύψος του κεντρικού λοβού είναι ανάλογο του N .
- Το εύρος του κεντρικού λοβού είναι αντιστρόφως ανάλογο του N .
- Το εμβαδόν που περικλείεται από τον κεντρικό λοβό τείνει στην τιμή 2π .

Επομένως **στο όριο** $N \rightarrow \infty$ αυτή η παράσταση τείνει στην **κρουστική συνάρτηση** $\delta(\omega - \omega_0)$ - θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}_N(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προκειμένου να ενσωματώσουμε την περιοδική φύση του μετασχηματισμού, γενικεύουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi)$$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ: Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση ορισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού, θα λάβουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{2\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) \right\} e^{j\omega n} d\omega$$

Αλλά εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης υπάρχει **μόνο μία κρουστική συνάρτηση** και επιλέγοντας το διάστημα που περιλαμβάνει την κρουστική συνάρτηση στη θέση $\omega = \omega_0 + 2\pi m$, η παραπάνω σχέση υπολογίζεται ως

$$\int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n} = x[n]$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** της παραπάνω σχέσης είναι το σήμα $x[n]$ και επομένως η έκφραση που κατασκευάσαμε είναι σωστή.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Έχοντας υπολογίσει το μετασχηματισμό Fourier του $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, ο μετασχηματισμός Fourier του **οποιαδήποτε περιοδικού διακριτού σήματος περιόδου N** προκύπτει αναπτύσσοντας το σήμα σε σειρά Fourier της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k e^{j\omega_0 kn} = \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N} kn\right)$$

Στην περίπτωση αυτή από τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N} kn\right) \right\} = \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \mathcal{F}\left\{ \exp\left(j\frac{2\pi}{N} kn\right) \right\} = \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \alpha_k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \alpha_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \end{aligned}$$

που είναι και το τελικό μας αποτέλεσμα.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

Το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N και με συντελεστές αναπτύγματος Fourier

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \right\} \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N}\right)$$

Εργαζόμενοι στην περιοχή $[0, N - 1]$, ο μόνος όρος του παραπάνω αθροίσματος που θα απομείνει είναι αυτός που αντιστοιχεί στην τιμή $k = 0$ - θα είναι λοιπόν

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N} \left[\delta[n] \exp\left(-jk \frac{2\pi}{N}\right) \right]_{n=0} = \frac{1}{N} \quad \text{και επομένως}$$

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

- **Περιοδικότητα:** ο μετασχηματισμός Fourier μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ είναι περιοδική συνάρτηση της συχνότητας ω με τιμή περιόδου ίση με 2π και επομένως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j(\omega \pm 2\pi m)}) \quad m = 1, 2, \dots$$

- **Γραμμικότητα:** εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του γραμμικού συνδυασμού $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$ θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Z}(e^{j\omega}) = \alpha \mathcal{X}(e^{j\omega}) + \beta \mathcal{Y}(e^{j\omega})$$

για κάθε τιμή των σταθερών α και β .

- **Χρονική μετατόπιση:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του χρονικώς καθυστερημένου σήματος $y[n] = x[n - n_0]$ είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

- **Συχνοτική μετατόπιση:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$ θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

- **Συζυγία και συμμετρία:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του συζυγούς σήματος $y[n] = x^*[n]$ θα είναι ο

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}^*(e^{-j\omega})$$

Εάν το σήμα $x[n]$ είναι **πραγματικό** θα είναι $x[n] = x^*[n]$ και επομένως $\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}^*(e^{-j\omega})$ από όπου προκύπτει ότι

$$\Re\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = \Re\{\mathcal{X}(e^{-j\omega})\} \quad \text{και} \quad \Im\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = -\Im\{\mathcal{X}(e^{-j\omega})\}$$

Επομένως, το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier ενός πραγματικού περιοδικού σήματος αποτελεί **άρτια** συνάρτηση της συχνότητας ω , ενώ το φανταστικό του μέρος αποτελεί μία **περιττή** συνάρτηση της συχνότητας. Χρησιμοποιώντας εκθετική αναπαράσταση προκύπτει ότι

$$|\mathcal{X}(e^{j\omega})| = |\mathcal{X}(e^{-j\omega})| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{X}(e^{j\omega}) = -\angle \mathcal{X}(e^{-j\omega})$$

Επομένως, το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού διακριτού σήματος είναι **άρτια** συνάρτηση της συχνότητας ω , ενώ το φάσμα φάσης του, είναι **περιττή** συνάρτηση της συχνότητας.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

- **Διαφορά:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y[n] = x[n] - x[n-1]$ είναι

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})\mathcal{X}(e^{j\omega})$$

- **Χρονική αντιστροφή:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του χρονικώς αντεστραμμένου σήματος $y[n] = x[-n]$ θα είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{-j\omega})$$

- **Παραγωγή στο χώρο των συχνοτήτων:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y[n] = nx[n]$ είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = i\mathcal{X}'(e^{j\omega})$$

- **Πολλαπλασιασμός:** εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου $z[n] = x[n]y[n]$ θα είναι ο

$$\mathcal{Z}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\theta})\mathcal{Y}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

- **Συνέλιξη:** εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι συναρτήσεις $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης των δύο σημάτων

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \quad \text{είναι ο} \quad \mathcal{Z}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega})\mathcal{Y}(e^{j\omega})$$

- **Χρονική κλιμάκωση:** Δεν ορίζεται όπως στη συνεχή περίπτωση αλλά δια της χρήσεως του σήματος

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{για τιμές του } n \text{ ακέραια πολλαπλάσια του } k \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Το διακριτό σήμα είναι μη μηδενικό μόνο για τιμές $n = rk$ οπότε θα είναι

$$\mathcal{X}_k(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k[rk] e^{-j\omega rk}$$

και επειδή $x_k[rk] = x[r]$, η παραπάνω σχέση τελικά μας δίνει

$$\mathcal{X}_k(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = \mathcal{X}(e^{jk\omega})$$

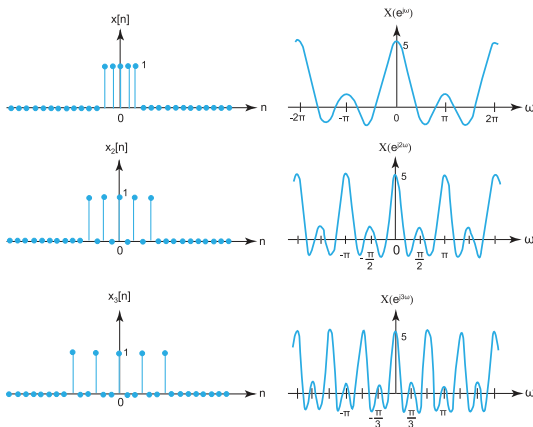
Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $x[n]$ και $X(e^{j\omega})$ για αυξανόμενο k αναδεικνύουν **επέκταση** του σήματος στο πεδίο του χρόνου και **συμπίεση** του μετασχηματισμού στο χώρο της συχνότητας.



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για τις αποδείξεις δείτε σελ. 553-558)

- **Διυσμός:** υφίσταται ανάμεσα στο μετασχηματισμό Fourier των διακριτών σημάτων και στο ανάπτυγμα Fourier των συνεχών σημάτων και αναδεικνύεται συγκρίνοντας το ζεύγος εξισώσεων

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{και} \quad \alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt$$

καθώς και το ζεύγος εξισώσεων

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{και} \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\omega_0 n t}$$

- **Συσχέτιση:** εάν οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συσχέτισης των δύο σημάτων θα δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{R}_{xy}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega})\mathcal{Y}(e^{-j\omega})$$

- **Διαμόρφωση:** εάν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ είναι ο $\mathcal{X}(e^{j\omega})$,

$$\mathcal{F}\left\{x[n] \cos(\omega_0 n)\right\} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{X}(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \mathcal{X}(e^{j(\omega-\omega_0)}) \right]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier - Παράδειγμα εφαρμογής

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier της βηματικής συνάρτησης $u[n]$.

Η άρτια και η περιττή συνιστώσα της βηματικής συνάρτησης $u[n]$ δίδονται από τις σχέσεις

$$u_e[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n] \quad \text{και} \quad u_o[n] = \frac{1}{2}\text{sgn}[n]$$

Από την ιδιότητα της πρόσθεσης του μετασχηματισμού Fourier θα λάβουμε

$$\mathcal{U}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{u[n]\} = \mathcal{F}\{u_e[n]\} + \mathcal{F}\{u_o[n]\}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες μετασχηματισμών προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\{u_e[n]\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\delta[n]\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1\} = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2k\pi)$$

ενώ από τον ορισμό της συνάρτησης πρόσημου,

$$\mathcal{F}\{u_o[n]\} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (+1) e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) e^{-j\omega n} \right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier - Παράδειγμα εφαρμογής

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν στο δεύτερο άθροισμα προχωρήσουμε στην αλλαγή δείκτη από $n \rightarrow -n$ τα όριά του ταυτίζονται με εκείνα του πρώτου αθροίσματος και επομένως

$$\mathcal{F}\{u_o[n]\} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-j\omega n} - e^{j\omega n}) = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega} - e^{j\omega}}{(1 - e^{-j\omega})(1 - e^{j\omega})}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $\mathcal{U}(\omega)$ καταλήγουμε στη ζητούμενη έκφραση

$$\mathcal{U}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier των τριγωνομετρικών σημάτων $x_1[n] = \cos(\omega_0 n)$ και $x_2[n] = \sin(\omega_0 n)$.

Για τη λύση ανατρέξτε στη σελίδα 558.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

Υπολογίζεται είτε δια της απευθείας χρήσης της εξίσωσης σύνθεσης

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

είτε διαχωρίζοντας τη συνάρτηση προς αντιστροφή σε μικρότερες παραστάσεις που περιλαμβάνονται σε **πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών** και υπολογίζοντας το τελικό αποτέλεσμα με τη βοήθεια της ιδιότητας της **γραμμικότητας** καθώς και των κατάλληλων σε κάθε περίπτωση υπόλοιπων ιδιοτήτων.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Από την εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει αμέσως ότι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{jWn} - e^{-jWn}}{jn} \right] = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler θα λάβουμε

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega = \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} e^{2j\omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει εύκολα ότι

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{-1}\{e^{2j\omega}\} + \frac{1}{4} \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2j\omega}\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Αλλά από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης για $n_0 = \pm 2$ θα έχουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{+2j\omega}\} = e^{2j\omega} \mathcal{F}\{1\} = \delta[n] \Big|_{n \rightarrow n+2} = \delta[n+2]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2j\omega}\} = e^{-2j\omega} \mathcal{F}\{1\} = \delta[n] \Big|_{n \rightarrow n-2} = \delta[n-2]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

ενώ ακόμη θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2}\delta[n]$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις βρίσκουμε

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\cos^2 \omega\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\text{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi A}\right)\right\} = A\text{sinc}^2(An) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi B}\right) e^{j\omega n_0}\right\} = B\text{sinc}[B(n+n_0)]$$

(για τιμές παραμέτρων $0 < A \leq 0.5$ και $0 < B \leq 1$) με τις συναρτήσεις rect και tri να ορίζονται ως

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > (1/2) \\ 1/2 & |t| = (1/2) \\ 1 & |t| < (1/2) \end{cases} \quad \text{και} \quad \text{tri}(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{για όλες τις άλλες τιμές} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ας θεωρήσουμε ένα διακριτό σύστημα LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

Η συχνотική απόκριση του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

- Χρησιμοποιώντας το **θεώρημα της συνέλιξης**
- Στηριζόμενοι στην ιδιότητα των στοιχειωδών εκθετικών μιγαδικών σημάτων να αποτελούν **ιδιοσυναρτήσεις** των διακριτών συστημάτων LTI.

Στην πρώτη περίπτωση γνωρίζουμε πως αν είναι $y[n] = h[n] * x[n]$ τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{j\omega})\mathcal{X}(e^{j\omega})$$

οπότε θα έχουμε

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{Y}(e^{j\omega})}{\mathcal{X}(e^{j\omega})}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν δεν γνωρίζουμε τα σήματα $(x[n], y[n])$ αλλά μόνο την **εξίσωση διαφορών** η εφαρμογή του μετασχηματισμού σε αμφότερα τα μέλη της θα μας δώσει

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N \alpha_k y[n-k]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]\right\}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{F}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M \beta_k \mathcal{F}\{x[n-k]\}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της **χρονικής μετατόπισης**

$$\mathcal{F}\{y[n-k]\} = e^{-j\omega k} \mathcal{Y}(e^{j\omega}) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}\{x[n-k]\} = e^{-j\omega k} \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$\left(\sum_{k=0}^N \alpha_k e^{-j\omega k}\right) \mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \left(\sum_{k=0}^M \beta_k e^{-j\omega k}\right) \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνοτική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου

και επομένως, η **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** θα υπολογιστεί ως ο λόγος

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{Y}(e^{j\omega})}{\mathcal{X}(e^{j\omega})} = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k e^{-j\omega k} \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k e^{-j\omega k} \right\}$$

Για τη χρήση της δεύτερης μεθόδου ως θεωρήσουμε την απόκριση του συστήματος στο σήμα $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ η οποία είναι η

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} = \mathcal{H}(\omega_0) x[n] \end{aligned}$$

με τη συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ να ορίζεται ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διατυπώνοντας τη μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ στην εκθετική μορφή

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = |\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{j\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})}$$

οι συναρτήσεις $|\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ και $\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})$ είναι γνωστές ως η **απόκριση πλάτους** και η **απόκριση φάσης** του διακριτού συστήματος που θεωρούμε.

Διατυπώνοντας τους μετασχηματισμούς Fourier των $x[n]$ και $y[n]$ ως

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = |\mathcal{Y}(e^{j\omega})|e^{j\angle\mathcal{Y}(e^{j\omega})} \quad \text{και} \quad \mathcal{X}(e^{j\omega}) = |\mathcal{X}(e^{j\omega})|e^{j\angle\mathcal{X}(e^{j\omega})}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$|\mathcal{Y}(e^{j\omega})| = |\mathcal{H}(e^{j\omega})||\mathcal{X}(e^{j\omega})| \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \angle\mathcal{H}(e^{j\omega}) + \angle\mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Επομένως

η επίδραση ενός διακριτού συστήματος LTI σε ένα απεριοδικό σήμα εισόδου είναι η **ενίσχυση** ορισμένων συχνотικών συνιστωσών και η **εξασθένηση** κάποιων άλλων, με την κατάλληλη σε κάθε περίπτωση μετατόπιση φάσης.

Η έξοδος $y[n]$ **δεν περιέχει συχνότητες** που δεν περιλαμβάνονται στο σήμα εισόδου.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου - Παράδειγμα

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η απόκριση ενός διακριτού συστήματος LTI στα στοιχειώδη τριγωνομετρικά σήματα $x_1[n] = A \cos(\omega n)$ και $x_2[n] = A \sin(\omega n)$.

Σύμφωνα με την **ιδιότητα των ιδιοτιμών** οι αποκρίσεις ενός συστήματος LTI στα στοιχειώδη εκθετικά σήματα $\kappa_1[n] = Ae^{j\omega n}$ και $\kappa_2[n] = Ae^{-j\omega n}$ θα έχουν τη μορφή

$$\lambda_1[n] = \mathcal{H}(e^{j\omega})\kappa_1[n] = A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{j\omega n}e^{j\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})}$$

$$\lambda_2[n] = \mathcal{H}(e^{j\omega})\kappa_2[n] = A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{-j\omega n}e^{j\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})}$$

ενώ σύμφωνα με την **αρχή της επαλληλίας**, η απόκριση του συστήματος στο σήμα

$$x_1[n] = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n} = \frac{1}{2}\kappa_1[n] + \frac{1}{2}\kappa_2[n]$$

θα είναι η

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \frac{1}{2}\lambda_1[n] + \frac{1}{2}\lambda_2[n] = \frac{1}{2}A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{j\omega n}e^{j\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})} + \frac{1}{2}A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|e^{-j\omega n}e^{j\angle\mathcal{H}(e^{j\omega})} = \\ &= A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|\frac{e^{j[\omega n + \angle\mathcal{H}(e^{j\omega})]} + e^{-j[\omega n + \angle\mathcal{H}(e^{j\omega})]}}{2} = A|\mathcal{H}(e^{j\omega})|\cos(\omega n + \angle\mathcal{H}(e^{j\omega})) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνοτική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου - Παράδειγμα

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό

$$x_2[n] = \sin(\omega n) = \frac{1}{2j} e^{j\omega n} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \kappa_1[n] - \frac{1}{2} \kappa_2[n]$$

θα είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \frac{1}{2j} \lambda_1[n] - \frac{1}{2j} \lambda_2[n] = \frac{1}{2j} A |\mathcal{H}(e^{j\omega})| e^{j\omega n} e^{j\angle \mathcal{H}(e^{j\omega})} - \frac{1}{2j} A |\mathcal{H}(e^{j\omega})| e^{-j\omega n} e^{j\angle \mathcal{H}(e^{j\omega})} = \\ &= A |\mathcal{H}(e^{j\omega})| \frac{e^{j[\omega n + \angle \mathcal{H}(e^{j\omega})]} - e^{-j[\omega n + \angle \mathcal{H}(e^{j\omega})]}}{2j} = A |\mathcal{H}(e^{j\omega})| \sin(\omega n + \angle \mathcal{H}(e^{j\omega})) \end{aligned}$$

Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα, πως

η διέλευση ενός απλού ημιτονοειδούς ή συνημιτονοειδούς σήματος από ένα διακριτό σύστημα LTI έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ημιτονοειδούς ή συνημιτονοειδούς σήματος αντίστοιχα, το πλάτος του οποίου **ενισχύεται** εάν είναι $|\mathcal{H}(e^{j\omega})| > 1$ ή **εξασθενεί** εάν είναι $|\mathcal{H}(e^{j\omega})| < 1$ ενώ η φάση του είναι **μετατοπισμένη** κατά την ποσότητα $\angle \mathcal{H}(e^{j\omega})$

Εάν το σήμα εισόδου αποτελείται από πολλές ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συνιστώσες, τότε η **παραπάνω επίδραση** θα **ασκηθεί στην κάθε επιμέρους συνιστώσα ξεχωριστά** και η συνολική έξοδος του συστήματος θα προκύψει από το **άθροισμα** όλων αυτών των τροποποιημένων συνιστωσών.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η συχνотική απόκριση του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier αμφότερων των μελών της εξίσωσης έχουμε

$$\mathcal{F}\{y[n]\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}\{y[n-1]\} = \mathcal{F}\{x[n]\} + 2\mathcal{F}\{x[n-1]\} + \mathcal{F}\{x[n-2]\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{Y}(e^{j\omega})$, $\mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{X}(e^{j\omega})$ και

$$\mathcal{F}\{y[n-1]\} = e^{-j\omega} \mathcal{Y}(e^{j\omega}), \quad \mathcal{F}\{x[n-1]\} = e^{-j\omega} \mathcal{X}(e^{j\omega}), \quad \mathcal{F}\{x[n-2]\} = e^{-2j\omega} \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην αρχική μας εξίσωση,

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega} \mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega} \mathcal{X}(e^{j\omega}) + e^{-2j\omega} \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

και τελικά

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{Y}(e^{j\omega})}{\mathcal{X}(e^{j\omega})} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - (1/2)e^{-j\omega}}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η εξίσωση διαφορών του διακριτού αναδρομικού συστήματος LTI η συχνοτική απόκριση του οποίου δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{1 - (1/2)e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}}{1 + (1/2)e^{-j\omega} + (3/4)e^{-2j\omega}}$$

Εδώ η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι η αντίστροφη της προηγούμενης.

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{Y}(e^{j\omega})}{\mathcal{X}(e^{j\omega})} = \frac{1 - (1/2)e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}}{1 + (1/2)e^{-j\omega} + (3/4)e^{-2j\omega}}$$

προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega}) + \frac{3}{4}e^{-2j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega}) + e^{-3j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega})$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της παραπάνω σχέσης αυτή γράφεται ως

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Συχνотική ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} + \frac{3}{4}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} = \\ \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega})\} + \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega})\}$$

Είναι όμως $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} = y[n]$ και $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = x[n]$ ενώ από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού θα πάρουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} = y[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2j\omega}\mathcal{Y}(e^{j\omega})\} = y[n-2], \\ \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = x[n-1], \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-3j\omega}\mathcal{X}(e^{j\omega})\} = x[n-3]$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραστάσεις στην τελευταία σχέση αυτή γράφεται ως

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση διαφορών του συστήματος.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Φίλτρα επιλογής συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα **φίλτρα επιλογής συχνότητας** είναι διακριτά συστήματα LTI η συχνотική απόκριση των οποίων έχει μέτρο με μικρή σχετική τιμή στις θέσεις των συχνотήτων του σήματος τις οποίες επιθυμούμε να απομακρύνουμε.

Η συχνотική απόκριση του **ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου** με συχνотητα αποκοπής $\omega = \omega_c$ ορίζεται ως

$$\mathcal{H}^{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{για } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{για } \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

ενώ η κρουστική του απόκριση έχει τη μορφή

$$h^{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{H}^{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}$$

και υπολογίζεται προφανώς ως ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου** της κρουστικής απόκρισης $\mathcal{H}^{lp}(e^{j\omega})$.

Αντιστρέφοντας τις συχνотικές αποκρίσεις του ιδανικού **υψηλοπερατού, ζωνοπερατού** και **ζωνοφρακτικού** φίλτρου, οι αντίστοιχες κρουστικές αποκρίσεις υπολογίζονται ως

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (ανατρέξτε στις σελίδες 568, 569 και 570).

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- **Ιδανικό υψηλοπερατό φίλτρο**

$$h_d^{hp}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ -\frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c} & n \neq 0 \end{cases}$$

- **Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο**

$$h_d^{bp}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_{c2}}{\pi} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin(n\omega_{c2})}{n\omega_{c2}} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin(n\omega_{c1})}{n\omega_{c1}} & n \neq 0 \end{cases}$$

- **Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο**

$$h_d^{bs}[n] = \begin{cases} 1 + \frac{\omega_{c1}}{\pi} - \frac{\omega_{c2}}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin(n\omega_{c1})}{n\omega_{c1}} - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin(n\omega_{c2})}{n\omega_{c2}} & n \neq 0 \end{cases}$$

όπου ω_c είναι η **συχνότητα αποκοπής** του ιδανικού υψηλοπερατού φίλτρου ενώ οι συχνότητες (ω_{c1}, ω_{c2}) ορίζουν την περιοχή **διέλευσης** και **αποκοπής** για το ιδανικό ζωνοπερατό και ζωνοφρακτικό φίλτρο αντίστοιχα.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Τα ιδανικά διακριτά φίλτρα είναι **μη αιτιατά** δηλαδή μη υλοποιήσιμα και αποτελούν **εξιδανικευμένα μοντέλα των αντιστοιχων πραγματικών φίλτρων**.

Χαρακτηρίζονται δε ως **φίλτρα μηδενικής φάσης**, αφού η συχνοτική τους απόκριση έχει μέτρο ίση με τη μονάδα (για την περιοχή διέλευσης) και φάση ίση με το μηδέν.

Το απλούστερο σύστημα που χαρακτηρίζεται από γραμμική φάση (η οποία εισάγει απλά μία **χρονική υστέρηση**) είναι το στοιχείο της **ιδανικής χρονικής υστέρησης** με κρουστική απόκριση $h[n] = \delta[n - n_0]$ και συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \mathcal{F}\{\delta[n - n_0]\} = e^{-j\omega n_0}$$

από όπου προκύπτει ότι $|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = 1$ και $\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = -\omega n_0$ ($|\omega| < \pi$).

Το **ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο** με γραμμική φασική απόκριση, χαρακτηρίζεται από τη **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας**

$$\mathcal{H}^l(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & \text{για } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{για } \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

ενώ η **κρουστική του απόκριση** έχει τη μορφή

$$h_d^l[n] = \frac{\sin[\omega_c(n - n_0)]}{\pi(n - n_0)}$$

Η **υστέρηση ομάδας** ορίζεται ως η **αρνητική κλίση** της φασικής συνιστώσας της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η συσχέτιση των συναρτήσεων $\mathcal{H}(z)$ και $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

Η συνάρτηση μεταφοράς του αναδρομικού διακριτού συστήματος LTI

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]$$

δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(z) = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k} \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k} \right\} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \right\}$$

($\alpha_0 = 1$) (δείτε την Εξίσωση 8.35). Εφόσον η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $\mathcal{H}(z)$ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, η τελευταία συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \left\{ \sum_{k=0}^M \beta_k e^{-j\omega k} \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^N \alpha_k e^{-j\omega k} \right\}$$

με τους συντελεστές $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η συσχέτιση των συναρτήσεων $\mathcal{H}(z)$ και $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

Εάν γνωρίζουμε τους **πόλους** $\{p_k\}$ και τα **μηδενικά** $\{z_k\}$ της $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, τότε

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \times \left\{ \prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega}) \right\}$$

και επομένως το μέτρο της συχνотικής απόκρισης είναι

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \left| \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| \times \left\{ \prod_{k=1}^M \left| 1 - z_k e^{-j\omega} \right| \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N \left| 1 - p_k e^{-j\omega} \right| \right\}$$

ενώ το τετράγωνο του μέτρου της υπολογίζεται ως

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})|^2 = \mathcal{H}(e^{j\omega}) \mathcal{H}^*(e^{j\omega})$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η $\mathcal{H}^*(e^{j\omega})$ μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση

$$\mathcal{H}^*(1/z^*) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \times \left\{ \prod_{k=1}^M (1 - z_k^* z) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N (1 - p_k^* z) \right\} \quad (z = e^{j\omega})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η συσχέτιση των συναρτήσεων $\mathcal{H}(z)$ και $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

και πώς στα συστήματα με **πραγματική** κρουστική απόκριση οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς εμφανίζονται πάντοτε **κατά ζεύγη μιγαδικών συζυγών**, θα είναι $\mathcal{H}^*(1/z^*) = \mathcal{H}(z^{-1})$ και $\mathcal{H}^*(e^{j\omega}) = \mathcal{H}(e^{-j\omega})$ οπότε

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^2 \times \left\{ \prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega}) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega}) \right\}$$

Στην πράξη μετατρέπουμε τα παραπάνω γινόμενα σε αθροίσματα λογαριθμίζοντας την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το dB οπότε θα είναι

$$20 \log_{10} |\mathcal{H}(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left| \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} |1 - z_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} |1 - p_k e^{-j\omega}|$$

Η συνάρτηση $20 \log_{10} |\mathcal{H}(e^{j\omega})|$ είναι γνωστή ως το **λογαριθμικό πλάτος της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος**.

Σε αρκετές περιπτώσεις αυτή η ποσότητα είναι γνωστή ως **κέρδος**, ενώ η αρνητική της τιμή είναι γνωστή ως **εξασθένιση**.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η συσχέτιση των συναρτήσεων $\mathcal{H}(z)$ και $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

Η **φασική απόκριση** του συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$\angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) + \sum_{k=1}^M \angle \left[1 - z_k e^{-j\omega} \right] - \sum_{k=1}^N \angle \left[1 - p_k e^{-j\omega} \right]$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) \right\} = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \angle \left(1 - p_k e^{-j\omega} \right) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle \left(1 - z_k e^{-j\omega} \right)$$

Αποδεικνύεται πως η **υστέρηση ομάδας** μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί και ως

$$\tau(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{|p_k|^2 - \Re\{p_k e^{-j\omega}\}}{1 + |p_k|^2 - 2\Re\{p_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|z_k|^2 - \Re\{z_k e^{-j\omega}\}}{1 + |z_k|^2 - 2\Re\{z_k e^{-j\omega}\}}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ ως

$$\mathcal{H}(e^{j\omega}) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} e^{j\omega(N-M)} \left\{ \prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k) \right\}$$

και εκφράζοντας τις ποσότητες $e^{j\omega} - z_k$ ($k = 1, 2, \dots, M$) και $e^{j\omega} - p_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) στην πολική τους μορφή

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\Theta_k(\omega)} \quad (1 \leq k \leq M) \quad \text{και} \quad e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \quad (1 \leq k \leq N)$$

με τις συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτές τις εκφράσεις να ορίζονται ως

$$V_k(\omega) = |e^{j\omega} - z_k|, \quad \Theta_k(\omega) = \angle(e^{j\omega} - z_k) \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

$$U_k(\omega) = |e^{j\omega} - p_k|, \quad \Phi_k(\omega) = \angle(e^{j\omega} - p_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

η αντικατάσταση στην εξίσωση ορισμού της συχνοτικής απόκρισης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ όπου έχουμε θέσει $\alpha_0 = |\alpha_0| e^{j\angle\alpha_0}$ και $\beta_0 = |\beta_0| e^{j\angle\beta_0}$ θα μας δώσει

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(e^{j\omega}) &= \frac{|\beta_0|e^{j\angle\beta_0}}{|\alpha_0|e^{j\angle\alpha_0}} e^{j\omega(N-M)} \left\{ \prod_{k=1}^M V_k(\omega) e^{j\Theta_k(\omega)} \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \right\} = \\ &= \frac{|\beta_0|}{|\alpha_0|} \left\{ \prod_{i=1}^M V_k(\omega) \right\} / \left\{ \prod_{k=1}^N U_k(\omega) \right\} \\ &\times \exp \left\{ j \left[\omega(N-M) + \angle\beta_0 - \angle\alpha_0 + \sum_{k=1}^M \Theta_k(\omega) - \sum_{k=1}^N \Phi_k(\omega) \right] \right\}\end{aligned}$$

Επομένως το μέτρο και η φάση της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{H}(e^{j\omega})| = \left| \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| \frac{\prod_{i=1}^M V_k(\omega)}{\prod_{k=1}^N U_k(\omega)} = \left| \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| \frac{V_1(\omega)V_2(\omega)\dots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)\dots U_N(\omega)} \quad \text{και}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

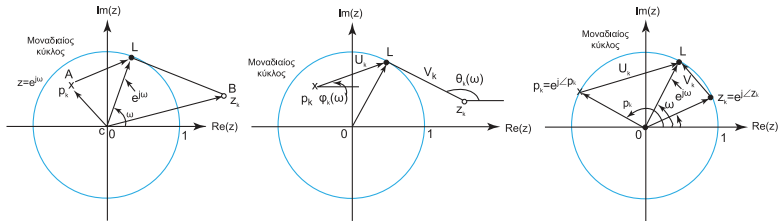
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\begin{aligned} \angle \mathcal{H}(e^{j\omega}) &= \omega(N - M) + \angle \beta_0 - \angle \alpha_0 + \sum_{k=1}^M \Theta_k(\omega) - \sum_{k=1}^N \Phi_k(\omega) = \\ &= \omega(N - M) + \angle \beta_0 - \angle \alpha_0 + [\Theta_1(\omega) + \Theta_2(\omega) + \dots + \Theta_M(\omega)] \\ &\quad - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \dots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας ενός διακριτού συστήματος LTI γνωρίζοντας τις θέσεις των μηδενικών τιμών και των πόλων της.

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται διαγραμματικά στο επόμενο σχήμα.



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι:

- Η ύπαρξη ενός μηδενικού στη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας το οποίο βρίσκεται **κοντά στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου**, οδηγεί σε **μικρές τιμές πλάτους** για αυτή τη συνάρτηση στις θέσεις συχνοτήτων που αναπαρίστανται από σημεία γειτονικά του σημείου που αναπαριστά τη μηδενική τιμή.
- Η ύπαρξη ενός πόλου στην παραπάνω θέση, οδηγεί σε **μεγάλες τιμές πλάτους** για τις παραπάνω συχνοτήτες.
- Η ύπαρξη μιας μηδενικής τιμής επιφέρει το αντίθετο αποτέλεσμα από εκείνο που επιφέρει η ύπαρξη ενός πόλου και στην ειδική περίπτωση κατά την οποία αυτά τα δύο σημεία ταυτίζονται λαμβάνει χώρα **πλήρης και αμοιβαία εξουδετέρωση** των επιδράσεών τους επί της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας.

Οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών της συχνοτικής απόκρισης, παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαδικασία σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ - Παράδειγμα

Άσκηση

Να διερευνήσετε θεωρητικά την επίδραση μιας μηδενικής τιμής, ενός πόλου, ενός ζεύγους μιγαδικώς συζυγών μηδενικών τιμών και ενός ζεύγους μιγαδικώς συζυγών πόλων στη συχνοτική απόκριση ενός συστήματος LTI.

Έστω σημείο $z = re^{j\vartheta}$ του μιγαδικού επιπέδου που αναπαριστά μία μηδενική τιμή της $\mathcal{H}(e^{j\omega})$. Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας θα περιέχει λοιπόν έναν όρο της μορφής

$$1 - ze^{-j\omega} = 1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega} = 1 - re^{-j(\omega - \vartheta)} = [1 - r \cos(\omega - \vartheta)] + jr \sin(\omega - \vartheta)$$

το μέτρο του οποίου όπως αποδεικνύεται εύκολα θα έχει τη μορφή

$$|1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega}| = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \vartheta)}$$

ή εκπεφρασμένο σε μονάδες dB

$$20 \log_{10} |1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega}| = 10 \log_{10} [1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \vartheta)]$$

Η μέγιστη τιμή του λογαριθμικού πλάτους αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \pi + \vartheta$ και είναι ίση με $20 \log_{10}(1 + r)$, ενώ η ελάχιστη τιμή αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \vartheta$ και είναι ίση με $20 \log_{10} |1 - r|$.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ - Παράδειγμα

Η φάση του όρου της συνάρτησης μεταφοράς που συνεισφέρεται από τη μηδενική τιμή είναι

$$\angle(1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega}) = \tan^{-1} \left\{ \frac{r \sin(\omega - \vartheta)}{1 - r \cos(\omega - \vartheta)} \right\}$$

(πρωτεύουσα τιμή στο διάστημα $(-\pi, +\pi]$) ενώ η υστέρηση ομάδας υπολογίζεται ως

$$\tau_{\omega}(1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \angle(1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega}) = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \vartheta)}$$

Τα παραπάνω αφορούν μηδενική τιμή ενώ εάν η παράσταση $(1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega})$ αντιστοιχεί σε πόλο της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$, οι συναρτήσεις φάσης, λογαριθμικού πλάτους και υστέρησης ομάδας θα είναι **οι αρνητικές αυτών που υπολογίσαμε παραπάνω**.

Θεωρώντας δύο συζυγείς μιγαδικές μηδενικές τιμές $z_1 = re^{j\vartheta}$ και $z_2 = z_1^* = re^{-j\vartheta}$ η συχνοτική απόκριση θα περιέχει τον όρο

$$(1 - re^{j\vartheta} e^{-j\omega})(1 - re^{-j\vartheta} e^{-j\omega}) = [1 - re^{-j(\omega - \vartheta)}][1 - re^{-j(\omega + \vartheta)}]$$

Στην προκειμένη περίπτωση η **συνάρτηση λογαριθμικού πλάτους** είναι η

$$10 \log_{10} \left[1 - 2r \cos(\omega - \vartheta) + r^2 \right] + 10 \log_{10} \left[1 - 2r \cos(\omega + \vartheta) + r^2 \right]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης $\mathcal{H}(e^{j\omega})$ - Παράδειγμα

η φάση που αντιστοιχεί σε αυτό το γινόμενο έχει την τιμή

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{r \sin(\omega - \vartheta)}{1 - r \cos(\omega - \vartheta)} \right\} + \tan^{-1} \left\{ \frac{r \sin(\omega + \vartheta)}{1 - r \cos(\omega + \vartheta)} \right\}$$

ενώ η αντίστοιχη υστέρηση ομάδας υπολογίζεται ως

$$\frac{r^2 - r \cos(\omega - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \vartheta)} + \frac{r^2 - r \cos(\omega + \vartheta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \vartheta)}$$

Τέλος, εάν οι ποσότητες z_1 και z_2 αναφέρονται σε πόλους, το γινόμενο

$$[1 - re^{-j(\omega - \vartheta)}][1 - re^{-j(\omega + \vartheta)}]$$

θα βρίσκεται στον **παρονομαστή** της συχνοτικής απόκρισης και οι συναρτήσεις φάσης, λογαριθμικού πλάτους και υστέρησης ομάδας θα είναι οι **αρνητικές** αυτών που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η αναγκαιότητα ύπαρξης του διακριτού μετασχηματισμού.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αποτελεί **συνεχή συνάρτηση της συχνότητας ω** και δεν μπορεί να υλοποιηθεί από ένα ψηφιακό υπολογιστικό σύστημα.

Στην πράξη η μελέτη μιας διακριτής ακολουθίας $x[n]$ στηρίζεται σε ένα σύνολο **δειγμάτων** του συνεχούς φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ που καταγράφονται περιοδικά στο χώρο των συχνοτήτων και απέχουν μεταξύ τους (συχνοτική) απόσταση $\delta\omega$.

Το αποτέλεσμα αυτής της **δειγματοληψίας στο χώρο των συχνοτήτων** οδηγεί στο **διακριτό μετασχηματισμό Fourier** ο οποίος μπορεί να υλοποιηθεί σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Προκειμένου να κατανοήσουμε πώς πραγματοποιείται η δειγματοληψία στο χώρο των συχνοτήτων θα παρουσιάσουμε πρώτα τη δειγματοληψία **στο πεδίο του χρόνου** και όλα τα χαρακτηριστικά που σχετίζονται με αυτή.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η βασική διαφορά που υφίσταται ανάμεσα σε ένα **συνεχές** σήμα $x_\alpha(t)$ και σε ένα **διακριτό** σήμα $x[n]$, είναι πως το $x_\alpha(t)$ ορίζεται **για κάθε τιμή της χρονικής μεταβλητής t** , ενώ το $x[n]$ ορίζεται **μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές** οι οποίες περιγράφονται από την ακέραια μεταβλητή n .

Η κατασκευή του διακριτού από το συνεχές σήμα συνίσταται **στην καταγραφή των τιμών του συνεχούς σήματος σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές**, διαδικασία η οποία είναι γνωστή ως **δειγματοληψία**.

Εάν οι χρονικές στιγμές καταγραφής των διαδοχικών τιμών του σήματος **ισαπέχουν** μεταξύ τους

- η διαδικασία της δειγματοληψίας χαρακτηρίζεται ως **ομοιόμορφη**.
- το χρονικό διάστημα T_s που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές καταγραφές είναι γνωστό ως **περίοδος δειγματοληψίας**.
- το πλήθος F_s των δειγμάτων που καταγράφονται στη μονάδα του χρόνου είναι γνωστό ως **συχνότητα δειγματοληψίας**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το συνεχές σήμα $x_\alpha(t)$ και το διακριτό σήμα $x[n]$ σχετίζονται ως

$$x[n] = x_\alpha(nT_s), \quad -\infty < n < \infty$$

ενώ οι μεταβλητές του συνεχούς και του διακριτού χρόνου θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$t = nT_s = n/F_s$$

Επομένως, το διακριτό σήμα $x[n]$ που θα προκύψει από τη δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας F_s προκύπτει κάνοντας την αντικατάσταση

$$t \implies n/F_s$$

Θεωρώντας για παράδειγμα το απλό συνημίτονο

$$x(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi)$$

το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του με περίοδο $T_s = 1/F_s$ είναι

$$x[n] = A \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + \varphi\right) = A \cos(2\pi fn + \varphi)$$

με τη συχνότητα $f = F/F_s$ του διακριτού σήματος που θα προκύψει, να ονομάζεται **σχετική** ή **κανονικοποιημένη** συχνότητα.

Επομένως η συχνότητα του διακριτού σήματος είναι ο λόγος της **συχνότητας F του συνεχούς σήματος** και της **συχνότητας δειγματοληψίας F_s** .

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Θεωρώντας το συνεχές σήμα $x(t) = 5 \cos(200\pi t)$, να προσδιορίσετε το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του παραπάνω σήματος με συχνότητες $F_{s1} = 300$ Hz και $F_{s2} = 800$ Hz.

Εάν συγκρίνουμε την εξίσωση του $x(t)$ με την εξίσωση του ημιτονοειδούς σήματος

$$x(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi)$$

προκύπτει αμέσως ότι $A = 5$, $\varphi = 0^\circ$ και $F = 100$ Hz. Επομένως το διακριτό σήμα που θα προκύψει από διαδικασία δειγματοληψίας με συχνότητα $F_{s1} = 300$ Hz θα έχει τη μορφή

$$x[n] = 5 \cos\left(2\pi \frac{100}{300}n\right) = 5 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

ενώ το σήμα που θα προκύψει από δειγματοληψία με συχνότητα $F_{s2} = 800$ Hz είναι το

$$x[n] = 5 \cos\left(2\pi \frac{100}{800}n\right) = 5 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Αναδιπλούμενες συχνότητες

Τα συνεχή και τα διακριτά σήματα έχουν αρκετές διαφορές όσον αφορά το μέγεθος της συχνότητας:

- Η συχνότητα F συνεχούς σήματος έχει **οποιαδήποτε τιμή** στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ενώ η συχνότητα f διακριτού σήματος παίρνει τιμές μόνο στην περιοχή $(-1/2, +1/2)$.
- Σε αντίθεση με τα συνεχή σήματα που εφόσον έχουν διαφορετικές συχνότητες **διακρίνονται μεταξύ τους**, δύο διακριτά σήματα με συχνότητες f_1 και f_2 τέτοιες ώστε $f_2 - f_1 = m$ (ή $\omega_2 - \omega_1 = 2\pi m$) είναι ταυτόσημα.

Η συχνότητα f διακριτού σήματος με $-\pi < f < \pi$ είναι **μοναδική** και λέγεται **αληθής**.

Εκτός αυτού του διαστήματος υπάρχουν **άπειρες ισοδύναμες ως προς αυτή** συχνότητες με απόσταση ακέραιο πολλαπλάσιο των 2π που χαρακτηρίζονται ως **ψευδεπίγραφες** ή **αναδιπλούμενες**.

Για πιο λόγο η ύπαρξη αναδιπλούμενων συχνοτήτων δημιουργεί πρόβλημα:

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Αναδιπλούμενες συχνότητες

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Οι **ψηφιακές** μέθοδοι επεξεργασίας σήματος είναι πιο ακριβείς από τις **αναλογικές** μεθόδους.

Για το λόγο αυτό στην πράξη:

- Το συνεχές σήμα προς επεξεργασία μετατρέπεται σε διακριτό.
- Το διακριτό σήμα υφίσταται τις ψηφιακές τεχνικές επεξεργασίας.
- Το επεξεργασμένο διακριτό σήμα μετατρέπεται σε συνεχές σήμα.

Εάν η συχνότητα του διακριτού σήματος έχει τιμή $\omega > \pi$, υπάρχουν **άπειρες ισοδύναμες συχνότητες** (δηλαδή άπειρα ισοδύναμα διακριτά σήματα) και επομένως και άπειρα υποψήφια αναλογικά σήματα η δειγματοληψία των οποίων θα οδηγούσε στη δημιουργία του διακριτού σήματος που θεωρούμε.

Η παραπάνω διαδικασία μετατροπής απαιτεί μία **αντιστοιχία 1-1** ανάμεσα στις συχνότητες του συνεχούς και του διακριτού σήματος.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Αναδιπλούμενες συχνότητες

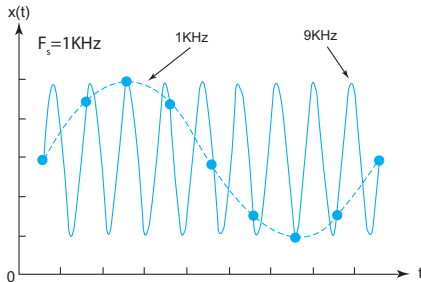
Ας θεωρήσουμε τη δειγματοληψία του στοιχειώδους τριγωνομετρικού σήματος

$$x(t) = A \cos(2\pi Ft)$$

με περίοδο δειγματοληψίας T_s και συχνότητα $F_s = 1/T_s$ που οδηγεί στο σήμα

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(2\pi Ft) = A \cos(2\pi FnT_s) = A \cos(2\pi FnT_s + 2\pi m) \\ &= A \cos \left[2\pi \left(F + \frac{m}{nT_s} \right) nT_s \right] = A \cos[2\pi(F + kF_s)nT_s] \quad (k = m/n) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως η δειγματοληψία των κυματομορφών με συχνότητες F και $F_k = F + kF_s$ όπου F_s ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) **οδηγεί στο ίδιο σήμα!!!**



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Αναδιπλούμενες συχνότητες

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το διακριτό σήμα $x[n]$ **δεν προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο το συνεχές σήμα** αφού από τα ίδια σημεία διέρχεται και άλλη καμπύλη.

Εάν λοιπόν το μόνο που διαθέτουμε είναι η διακριτή χρονοσειρά, δεν μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το συνεχές σήμα από τη δειγματοληψία του οποίου έχει προέλθει.

Αυτό το ανεπιθύμητο αποτέλεσμα ονομάζεται **αναδίπλωση συχνότητας**.

Το πρόβλημα επιλύεται εάν η συχνότητα του $x[n]$ είναι ανήκει στην περιοχή $(-1/2, +1/2)$ αφού οι συχνότητες αυτής της περιοχής είναι μοναδικές. Θα είναι λοιπόν

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{F}{F_s} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2T_s} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

ή ισοδύναμα

$$-\frac{1}{2T_s} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι:

- Για δεδομένη συχνότητα δειγματοληψίας F_s η συχνότητα του συνεχούς σήματος θα πρέπει να είναι **το πολύ ίση** με $F_s/2$.
- Για δεδομένη συχνότητα σήματος F , η συχνότητα της δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι **τουλάχιστον ίση** με $2F$

Η συχνότητα $F_s = 2F$ ονομάζεται **συχνότητα Nyquist**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Αναδιπλούμενες συχνότητες - Παράδειγμα

Έστω δύο συνεχή σήματα $x_1(t) = \cos(20\pi t)$ και $x_2(t) = \cos(100\pi t)$ με συχνότητες $F_1 = 10\text{Hz}$ και $F_2 = 50\text{Hz}$ που δειγματοληπτούνται με συχνότητα $F_s = 40\text{Hz}$. Τα διακριτά σήματα που θα προκύψουν έχουν τη μορφή

$$x_1[n] = \cos \left[2\pi \left(\frac{10}{40} \right) n \right] = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) n \right]$$
$$x_2[n] = \cos \left[2\pi \left(\frac{50}{40} \right) n \right] = \cos \left[\left(\frac{5\pi}{2} \right) n \right]$$

Παρατηρούμε όπως πώς

$$\cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi n \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

από όπου προκύπτει ότι $x_1[n] = x_2[n]$. Με άλλα λόγια, τα δύο σήματα είναι πανομοιότυπα και επομένως το σήμα $x_2[n]$ είναι **ψευδεπίγραφο** του σήματος $x_1[n]$.

Αυτό συμβαίνει γιατί η **μέγιστη συχνότητα** του σήματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαδικασία δειγματοληψίας συχνότητας $F_s = 40\text{Hz}$ είναι $F_{max} = F_s/2 = 20\text{Hz}$ ενώ η συχνότητα του σήματος $x_2(t)$ είναι $F_2 = 50\text{Hz} > F_{max}$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Γενικεύοντας την παραπάνω περιγραφή για ένα αυθαίρετο σήμα της μορφής

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \varphi_i)$$

η συχνότητα δειγματοληψίας που διασφαλίζει την απουσία του φαινομένου της αναδίπλωσης, θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$F_s > 2F_{max}$$

όπου $F_{max} = \max(F_1, F_2, \dots, F_N)$ είναι η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο αναλογικό σήμα προς δειγματοληψία.

Με τον τρόπο αυτό κάθε ημιτονοειδής συνιστώσα συχνότητας $|F_i| < F_{max}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) απεικονίζεται σε μία μοναδική διακριτή ημιτονοειδή συνιστώσα με συχνότητα στην περιοχή $[-1/2, 1/2]$ ή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (για την κυκλική συχνότητα $\omega_i = 2\pi f_i$).

Κατά συνέπεια, το φαινόμενο της αναδίπλωσης δεν εμφανίζεται ενώ είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από το διακριτό ισοδύναμό του δια της χρήσεως μεθόδων παρεμβολής

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεώρημα

Εάν η μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος $x_\alpha(t)$ είναι F_{max} και η δειγματοληψία του γίνεται με συχνότητα $F_s > 2F_{max}$, η κυματομορφή $x_\alpha(t)$ ανακατασκευάζεται πλήρως από τα δείγματά της $x_\alpha(n/F_s) = x_\alpha(nT_s) \equiv x[n]$, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi F_{max}t)}{2\pi F_{max}t}$$

και δια της χρήσεως μιας εξίσωσης της μορφής

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

Εάν είναι $F_s = 2F_{max}$ (αυτή η συχνότητα λέγεται **συχνότητα Nyquist**), θα είναι

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha\left(\frac{n}{2F_{max}}\right) \frac{\sin\{2\pi F_{max}[t - (n/2F_{max})]\}}{2\pi F_{max}[(t - (n/2F_{max}))]}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Ποια είναι η σχέση που υφίσταται ανάμεσα στα φάσματα του συνεχούς και του διακριτού σήματος; Ορίζοντας τη **συνάρτηση δειγματοληψίας**

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

το διακριτό σήμα $x[n]$ θα είναι ένας συρμός κρουστικών συναρτήσεων της μορφής

$$x_s(t) = x_\alpha(t) s(t) = x_\alpha(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(t) \delta(t - nT_s)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ θα έχουμε **$x_\alpha(t)\delta(t - nT_s) = x_\alpha(nT_s)\delta(t - nT_s)$** και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$$

αφού όπως είδαμε παραπάνω είναι $x[n] = x_\alpha(nT_s)$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x_s(t)$ έχουμε

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\{x_\alpha(t) s(t)\} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathcal{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \mathcal{X}_\alpha(j\Omega) * \mathcal{S}(j\Omega) \right\}$$

όπου $\mathcal{X}_s(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\}$, $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_\alpha(t)\}$ και $\mathcal{S}(j\Omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $s(t)$ αποδεικνύεται πως είναι ο

$$\mathcal{S}(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s} \right)$$

(ανατρέξτε στις σελίδες 184-185) και επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_\alpha(j\Omega) * \left\{ \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s} \right) \right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha(j\Omega) * \delta \left(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s} \right)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα

$$\mathcal{X}(j\Omega) * \delta(\Omega - \Omega_0) = \mathcal{X}[j(\Omega - \Omega_0)]$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[j \left(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s} \right) \right]$$

Επομένως

το φάσμα του σήματος που προκύπτει από τη δειγματοληψία προκύπτει από την **περιοδική επανάληψη** συχνοτικώς μετατοπισμένων αντιγράφων του φάσματος $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$ του σήματος $x_\alpha(t)$ που δειγματοληπτείται, κλιμακωμένα κατά τον παράγοντα $F_s = 1/T_s$

Με ποιο τρόπο είναι δυνατή η **ανακατασκευή** του συνεχούς από το διακριτό σήμα και μάλιστα **χωρίς την παραμικρή απώλεια πληροφορίας**;

Έστω πως το $x_\alpha(t)$ διαθέτει **περιορισμένο εύρος ζώνης**, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$ είναι μη μηδενικός μόνο στο διάστημα $-\omega_N \leq \omega \leq \omega_N$ με μέγιστη συχνότητα την $\omega = \omega_N$

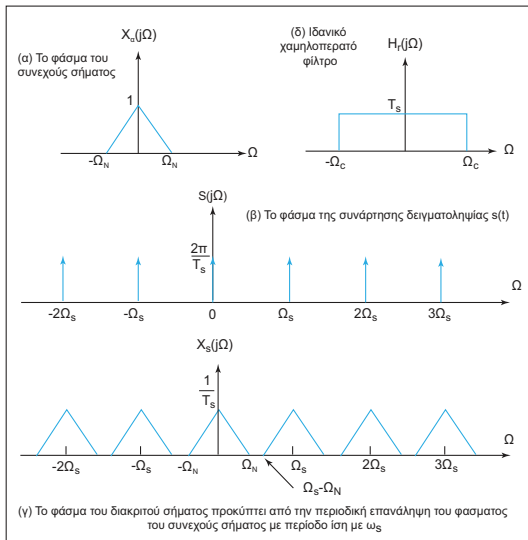
Παρατηρήστε τώρα το επόμενο σχήμα

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το φάσμα του συνεχούς σήματος προκύπτει θεωρώντας **μόνο** το τμήμα του φάσματος $\mathcal{X}_s(j\Omega)$ με συχνότητες στην περιοχή $[0, \Omega_c]$ - όπου $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$.

Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας ένα **ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο** με συχνοτική απόκριση

$$\mathcal{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} T_s & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή, το φάσμα εξόδου του φίλτρου θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{X}_r(j\Omega) = \mathcal{H}_r(j\Omega) \mathcal{X}_s(j\Omega) = T_s \mathcal{X}_s(j\Omega) = \mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$$

Επομένως, το φάσμα του σήματος που θα εμφανιστεί στην έξοδο του φίλτρου **θα είναι το ίδιο** με το φάσμα του συνεχούς σήματος $x_\alpha(t)$ το οποίο ανακατασκευάζεται πλήρως **χωρίς την παραμικρή παραμόρφωση**.

εφόσον

οι διαδοχικές επαναλήψεις του φάσματος $\mathcal{X}_\alpha(j\Omega)$ **δεν επικαλύπτονται** δηλαδή όταν

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \Omega_s > 2\Omega_N$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

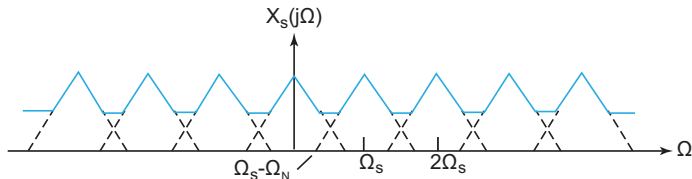
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως η πλήρης ανακατασκευή του αρχικού σήματος είναι δυνατή μόνο όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που περιέχεται στο σήμα που δειγματοληπτείται.

Αντίθετα, εάν είναι $\Omega_s - \Omega_N \leq \Omega_N$ ή $\Omega_s \leq 2\Omega_N$, οι διαδοχικές επαναλήψεις του φάσματος $X_\alpha(j\Omega)$ επικαλύπτονται μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος χωρίς σφάλματα.

Στην περίπτωση αυτή, το ανακατασκευασθέν σήμα $x_r(t)$ αποτελεί μία παραμορφωμένη έκδοση του αυθεντικού σήματος $x_\alpha(t)$.



Το φάσμα του διακριτού σήματος για την περίπτωση $\omega_s < 2\omega_N$. Παρατηρούμε πως στην προκειμένη περίπτωση, τα συχνοτικώς μετατοπισμένα αντίγραφα του φάσματος του συνεχούς σήματος επικαλύπτονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η χωρίς σφάλματα ανακατασκευή του.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Επιστρέφοντας στον προσδιορισμό της συσχέτισης ανάμεσα στα φάσματα $\mathcal{X}_\alpha(j\omega)$ και $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου στην εξίσωση ορισμού του $x_s(t)$ θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s) \delta(t - nT_s) \right\} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_\alpha(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_\alpha(nT_s) e^{-j\Omega(nT_s)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_\alpha(nT_s) \exp\left(-j \frac{2\pi F}{F_s} n\right)\end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x[n]$ ορίζεται ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathcal{X}_s(j\Omega) = \mathcal{X}(e^{j\omega})_{\omega=\Omega T_s} = \mathcal{X}(e^{j\Omega T_s})$$

σχέση που συσχετίζει τα φάσματα των σημάτων $x_s(t)$ και $x[n]$ και οδηγεί στην εξίσωση

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_\alpha \left[j \left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s} \right) \right]$$

Επομένως το φάσμα του διακριτού σήματος προκύπτει από το φάσμα του συνεχούς σήματος διαμέσου μιας διαδικασίας **κλιμάκωσης συχνότητας**.

Επιστρέφοντας στην ανακατασκευή του αρχικού σήματος, το ανακατασκευασμένο σήμα $x_r(t)$ θα υπολογιστεί ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$\mathcal{X}_r(j\Omega) = \begin{cases} T_s \mathcal{X}_s(j\Omega) & |\Omega| \leq \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| > \Omega_s/2 \end{cases}$$

Αντιστρέφοντας καταλήγουμε στην έκφραση (ανατρέξτε στη σελίδα 586)

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_s) \left\{ \sin \left[\frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right] \right\} / \left\{ \frac{\pi}{T_s} (t - nT_s) \right\}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

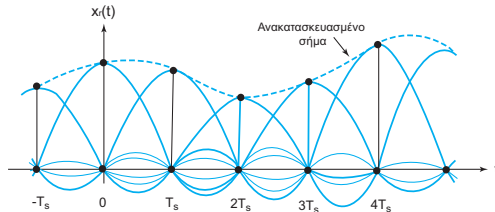
Η τελευταία σχέση ονομάζεται **εξίσωση παρεμβολής** και περιέχει τη συνάρτηση

$$g(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

μετατοπισμένη κατά τις ποσότητες nT_s ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) και **πολλαπλασιασμένη** με τις αντίστοιχες τιμές του συνεχούς σήματος που είναι οι $x_\alpha(nT_s)$.

Τη χρονική στιγμή $t = kT_s$ η συνάρτηση $g(t - nT_s)$ έχει παντού τιμή ίση με το **μηδέν** εκτός από τη θέση $k = n$ για την οποία η τιμή της είναι ίση με τη μονάδα.

Επομένως η τιμή της συνάρτησης $x_r(t)$ στη θέση $t = kT_s$ είναι το δείγμα $x_\alpha(kT_s)$, ενώ για όλες τις υπόλοιπες στιγμές, το **σταθμισμένο άθροισμα** των χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων παρεμβολής θα μας δώσει επί ακριβώς όλες τις τιμές του σήματος $x_\alpha(t)$.

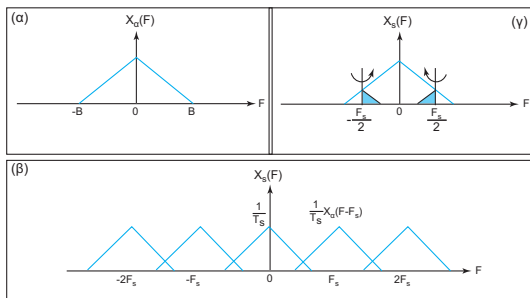


Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Η ονομασία του φαινομένου της **αναδίπλωσης συχνότητας** οφείλεται στην **επικάλυψη** που χαρακτηρίζει τις συχνοτικώς μετατοπισμένες εκδόσεις του φάσματος $X_a(j\Omega)$ για συχνότητες δειγματοληψίας $\omega < 2\omega_N$.

Παρατηρείστε πως οι υψηλές συχνότητες με τιμές $F > F_s/2$ **αναδιπλώνονται** και εμφανίζονται ως συχνότητες με τιμές $F < F_s$. Για το λόγο αυτό, η συχνότητα $F_s/2$ είναι γνωστή και ως **συχνότητα αναδίπλωσης**.



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι **συνεχής** συνάρτηση της συχνότητας ω και δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στην πράξη χρησιμοποιείται μία **διακριτή** έκδοσή του που υπολογίζεται καταγράφοντας τις τιμές N δειγμάτων της συνάρτησης

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

στο διάστημα $0 \leq \omega \leq 2\pi$ που αντιστοιχούν σε συχνότητες

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Η τιμή της συνάρτησης $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ στις θέσεις αυτών των συχνοτήτων υπολογίζεται ως

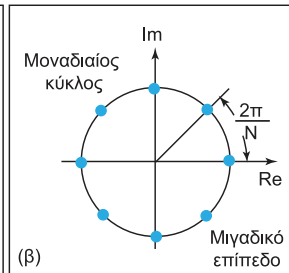
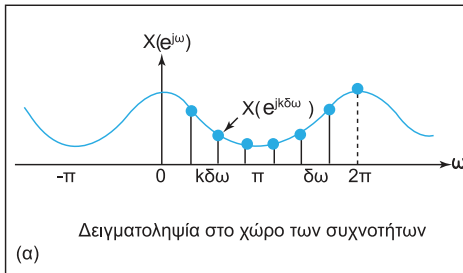
$$\mathcal{X}(e^{j\omega_k}) = \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp \left(-j \frac{2\pi k}{N} n \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι **περιοδική ως προς ω** με περίοδο 2π και επομένως η ακολουθία $X(e^{j\omega_k})$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) θα είναι και αυτή **περιοδική ως προς k** με περίοδο N .

Αυτή η δειγματοληψία είναι ισοδύναμη με τον προσδιορισμό N σημείων που ανήκουν **στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου** (γιατί;) και απέχουν γωνιακή απόσταση $2\pi/N$.



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

Διατυπώνοντας το άθροισμα των άπειρων όρων της εξίσωσης του $\mathcal{X}(e^{j\omega k})$ με τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\left[\exp\left(j\frac{2\pi k}{N}\right)\right] &= \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) + \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) + \\ &+ \sum_{n=N}^{2N-1} \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) + \cdots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right)\end{aligned}$$

και προχωρώντας στην αλλαγή δείκτη $n \rightarrow r = n - mN$ τελικά έχουμε (σελίδα 589)

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\left[\exp\left(j\frac{2\pi k}{N}\right)\right] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}r\right) = \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \right] \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}r\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \xi[n] \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)\end{aligned}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

με το διακριτό σήμα $\xi[n]$ να ορίζεται ως (κάνοντας την αντικατάσταση $r \rightarrow n$)

$$\xi[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN]$$

Αναπτύσσοντας το περιοδικό σήμα $\xi[n]$ σε σειρά Fourier έχουμε

$$\xi[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

με συντελεστές Fourier

$$\xi_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi[n] \exp\left(-j \frac{2\pi k}{N} n\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Εάν συγκρίνουμε την τελευταία σχέση με την εξίσωση

$$\mathcal{X} \left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right) \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \xi[n] \exp\left(-j \frac{2\pi k}{N} n\right)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

προκύπτει αμέσως ότι

$$\xi_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

και επομένως το διακριτό περιοδικό σήμα $\xi[n]$ θα λάβει τη μορφή

$$\xi[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} n \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Η ανακατασκευή του σήματος $x[n]$ από τα δείγματα του φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ είναι δυνατή όταν δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Αυτό συμβαίνει όταν το μήκος L του σήματος $x[n]$ είναι μικρότερο από την περίοδο N του σήματος $\xi[n]$ ενώ είναι αδύνατο στην αντίθετη περίπτωση.

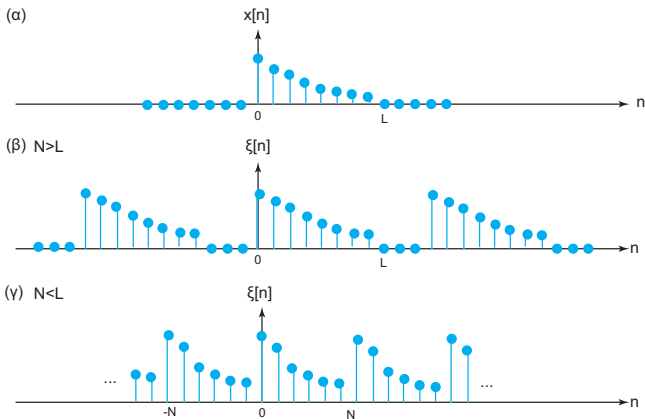
(δείτε το επόμενο σχήμα).

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η διακριτή απεριοδική ακολουθία $x[n]$ [εικόνα (α)] και η περιοδική της επανάληψη υπό καθεστώς απουσίας αναδίπλωσης [εικόνα (β)] και υπό καθεστώς παρουσίας αναδίπλωσης [εικόνα (γ)].

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Επομένως η **πλήρης** ανακατασκευή του φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ ενός **απεριοδικού διακριτού σήματος** διάρκειας L από τα δείγματά του

$$\mathcal{X}(e^{j\omega_k}) = \mathcal{X}(e^{j2\pi k/N}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο:

- 1 Κατασκευάζουμε το περιοδικό σήμα $\xi[n]$ από τη σχέση

$$\xi[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} n \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

- 2 Κατασκευάζουμε το σήμα $x[n]$ από το σήμα $\xi[n]$ ως

$$x[n] = \begin{cases} \xi[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

- 3 Υπολογίζουμε το φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ από την εξίσωση

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

Ποια είναι η συσχέτιση ανάμεσα στο φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και στα δείγματά του $\mathcal{X}(e^{j2\pi k/N})$;

Παρατηρώντας πως για την περιοχή τιμών $0 \leq n \leq N - 1$ είναι

$$x[n] = \xi[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} n \right)$$

η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} n \right) \right\} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[-j \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right) n \right] \right\} \end{aligned}$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση

$$\mathcal{P}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \right\} = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

(δείτε την Άσκηση 9.2.6), η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \mathcal{P} \left\{ \exp \left[j \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \right\}$$

Παρατηρώντας πως

$$\mathcal{P} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

η παραπάνω εξίσωση για τιμές $\omega_k = 2\pi k/N$ δίνει **επ' ακριβώς** τις τιμές των δειγμάτων $\mathcal{X}(e^{j2\pi k/N})$ ενώ για όλες τις ενδιάμεσες τιμές, υπολογίζει τις τιμές του φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ ως ένα **σταθμισμένο άθροισμα των τιμών των δειγμάτων του**.

Επομένως, η δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

$$\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\omega n}, \quad (0 \leq \omega \leq 2\pi)$$

ενός απериοδικού διακριτού σήματος $x[n]$ με μήκος $L > N$ οδηγεί στη **διακριτή ακολουθία**

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\mathcal{X}[k] \equiv \mathcal{X} \left[\exp \left(j \frac{2\pi k n}{N} \right) \right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp \left(-j \frac{2\pi k n}{N} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **διακριτός μετασχηματισμός Fourier** του σήματος $x[n]$ και επιτρέπει το μετασχηματισμό μιας ακολουθίας N διακριτών τιμών $x[n]$ εκπεφρασμένων στο πεδίο του διακριτού χρόνου, σε μία ακολουθία ισάριθμων τιμών $\mathcal{X}[k]$ που ορίζονται στο χώρο των συχνοτήτων.

Από την άλλη πλευρά, η σχέση

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \exp \left(j \frac{2\pi k n}{N} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

είναι γνωστή ως ο **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier** και επιτρέπει την κατασκευή της ακολουθίας $x[n]$ από τις τιμές των δειγμάτων του φάσματος $\mathcal{X}[k]$.

Ο υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier χαρακτηρίζεται από μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα και στην πράξη χρησιμοποιούνται πιο αποτελεσματικοί τρόποι υπολογισμού όπως είναι ο **γρήγορος μετασχηματισμός Fourier**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

Οι συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$ αφορούν το πεδίο του διακριτού χρόνου, ενώ οι αντίστοιχες συχνότητες του συνεχούς σήματος υπολογίζονται ως $\Omega_k = 2\pi k/NT_s = 2\pi kF_s/N$ ή ως

$$F_k = k \frac{F_s}{N} = \frac{k}{NT_s} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Παρατηρώντας ότι $f = F/F_s$, οι κυκλικές συχνότητες Ω και ω σχετίζονται ως $\omega = 2\pi f = 2\pi F/F_s = \Omega/F_s = \Omega T_s$ όπου $T_s = 1/F_s$ είναι η **περίοδος δειγματοληψίας**.

Το μέγεθος $1/(NT_s)$ χαρακτηρίζεται ως η **θεμελιώδης συχνότητα** του DFT.

Το γινόμενο NT_s περιγράφει τη **χρονική διάρκεια** της δειγματοληψίας των N δειγμάτων του αρχικού σήματος με περίοδο δειγματοληψίας T_s .

Οι N τιμές συχνότητας F_k που εκτείνονται από $F_0 = 0$ έως $F_{N-1} = F_s$ διαχωρίζουν την περιοχή $[0, F_s]$ σε N διαστήματα εύρους F_s/N με το διάστημα υπ' αριθμόν k να έχει ως κέντρο τη συχνότητα F_k .

Η τιμή του N είναι πολύ σημαντική γιατί επηρεάζει τη **διακριτική ικανότητα** του μετασχηματισμού (δηλαδή την **ελάχιστη απόσταση** ανάμεσα σε δύο συχνότητες έτσι ώστε αυτές να μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους).

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα και συσχετίσεις μετασχηματισμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να αποδειχθεί πως ο μετασχηματισμός DFT μιας ακολουθίας $x[n]$ και οι συντελεστές Fourier x_k του αναπτύγματός της κατά Fourier σχετίζονται ως

$$X[k] = Nx_k$$

όπου N το πλήθος των σημείων του μετασχηματισμού.

Δείτε την Άσκηση 9.5.13 στη σελίδα 592.

Άσκηση

Να αποδειχθεί πως ο μετασχηματισμός DFT και ο μετασχηματισμός Z σχετίζονται ως

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] / \left\{ 1 - \frac{1}{z} \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} \right) \right\}$$

Δείτε την Άσκηση 9.5.14 στη σελίδα 593.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών DFT

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της διακριτής κρουστικής συνάρτησης.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού DFT έχουμε

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) = 1$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων της χρονικώς μετατοπισμένης διακριτής κρουστικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως $x[n] = \delta[n - n_0]$ ($0 < n_0 < N$)

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού DFT έχουμε

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) = \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n_0\right)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών DFT

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N στοιχείων του σήματος

$$u[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και να αποδειχθεί πως αυτός προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ για τιμές συχνότητας $\omega = 2\pi k/N$.

Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού DFT θα έχουμε (σελίδα 595)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}n\right) = \dots\dots \\ &= \exp\left[-j\left(\frac{2k\pi}{N} - \omega_0\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)\right] \left\{ \frac{\sin\left[\left(\frac{2k\pi}{N} - \omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{N} - \omega_0\right)\right]} \right\} \end{aligned}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών DFT

Από την άλλη πλευρά, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - \omega_0)n} = \frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_0)N}}{1 - e^{-j(\omega - \omega_0)}} = \\ &= \exp \left[-j(\omega - \omega_0) \left(\frac{N-1}{2} \right) \right] \left\{ \sin \left[(\omega - \omega_0) \frac{N}{2} \right] \right\} / \left\{ \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right) \right\}\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις των μετασχηματισμών $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{X}[k]$ διαπιστώνουμε πως η δεύτερη συνάρτηση προκύπτει από την πρώτη για τιμές συχνότητας $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός DFT μήκους N στοιχείων του διακριτού σήματος

$$x[n] = \exp(j2\pi k_0 n/N) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Δείτε την Άσκηση 9.5.22 στη σελίδα 595.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η μορφή πινάκων του διακριτού μετασχηματισμού

Ορίζοντας την ποσότητα $W_N = \exp(-j2\pi/N)$, οι εξισώσεις του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού DFT διατυπώνονται ως

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] W_N^{-kn} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Ο μετασχηματισμός DFT αποτελεί μία γραμμική απεικόνιση της μορφής

$$\underbrace{\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}^T}_{x_N: \text{διάνυσμα χρονικών δειγμάτων}} \rightarrow \underbrace{\{\mathcal{X}[0], \mathcal{X}[1], \mathcal{X}[2], \dots, \mathcal{X}[N-1]\}^T}_{x_N: \text{διάνυσμα συχνοτικών δειγμάτων}}$$

ή ισοδύναμα

$$x_N \xrightarrow{\text{μετασχηματισμός DFT}} \mathcal{X}_N$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η μορφή πινάκων του διακριτού μετασχηματισμού

Η παραπάνω απεικόνιση χρησιμοποιώντας πίνακες διατυπώνεται στη μορφή

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

με τον πίνακα \mathbf{W}_N να ορίζεται ως

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \mathbf{W}_N ονομάζεται **πίνακας του μετασχηματισμού DFT** και είναι **συμμετρικός** οπότε θα είναι $\mathbf{W}_N = (\mathbf{W}_N)^T$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός DFT γράφεται ως

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{x}_N$$

Εφαρμόζοντας την ίδια λογική στην αυθεντική εξίσωση του αντίστροφου DFT, θα έχουμε

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{x}_N$$

και επομένως θα είναι $\mathbf{W}_N^* = N \mathbf{W}_N^{-1}$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η μορφή πινάκων του διακριτού μετασχηματισμού

Στην πράξη τα περιεχόμενα των πινάκων W_N για τις διάφορες τιμές του N υπολογίζονται εκ των προτέρων και χρησιμοποιούνται απευθείας.

Για παράδειγμα, οι πίνακες W_2 και W_3 έχουν τη μορφή

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1+j\sqrt{3}}{2} & -\frac{1-j\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1-j\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+j\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

ενώ ο πίνακας W_4 που επιτρέπει τον υπολογισμό διακριτών μετασχηματισμών Fourier μήκους $N = 4$ είναι ο

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω αναπαράσταση του μετασχηματισμού DFT, μπορούμε να τον υπολογίσουμε άμεσα πραγματοποιώντας απλούς πολλαπλασιασμούς ανάμεσα σε πίνακες.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η μορφή πινάκων του διακριτού μετασχηματισμού - Παράδειγμα

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας την πινακική αναπαράσταση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της διακριτής ακολουθίας $\mathcal{X}[k] = [6, -2 + 2j, -2, -2 - 2j]$ που αντιστοιχεί στην τιμή $N = 4$.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα W_4^{-1} ο οποίος υπολογίζεται εύκολα ως

$$W_4^{-1} = \frac{1}{4} W_4^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα ως

$$x_4 = \frac{1}{4} W_4^* \mathcal{X}_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

- **Γραμμικότητα:** εάν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}[k]$ και $\mathcal{Y}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT του γραμμικού συνδυασμού $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$ θα είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Z}[k] = \alpha \mathcal{X}[k] + \beta \mathcal{Y}[k]$$

με μήκος $N_3 = \max(N_1, N_2)$ όπου N_1 και N_2 τα μήκη των $\mathcal{X}[k]$ και $\mathcal{Y}[k]$.

- **Περιοδικότητα:** εάν οι ακολουθίες $x[n]$ και $\mathcal{X}[k]$ με μήκος N δείγματα, αποτελούν ζεύγος ευθέως / αντίστροφου μετασχηματισμού DFT, τότε

$$x[n + M] = x[n] \quad (\forall n) \quad \text{και} \quad \mathcal{X}[k + M] = \mathcal{X}[k] \quad (\forall k)$$

- **Χρονική αντιστροφή:** εάν ο μετασχηματισμός DFT μήκους N της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ στοιχείων είναι ο $\mathcal{X}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της $y[n] = x[(-n)_N] = x[N - n]$ αποδεικνύεται πως έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}[k] = \mathcal{X}[((-k))_N] = \mathcal{X}[N - k]$$

Επομένως, η χρονική αντιστροφή μιας ακολουθίας N σημείων, είναι ισοδύναμη με την **αντιστροφή των δειγμάτων** του διακριτού μετασχηματισμού στο χώρο των συχνοτήτων.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

- **Συμμετρία:** Θεωρώντας δύο **μγαδικές** ακολουθίες $x[n]$ και $\mathcal{X}[k]$ μήκους N δειγμάτων που αποτελούν **ζεύγος ευθέως / αντίστροφου μετασχηματισμού**

$$\begin{aligned}x[n] &= \Re\{x[n]\} + j\Im\{x[n]\} \quad (0 \leq n \leq N-1) \\ \mathcal{X}[k] &= \Re\{\mathcal{X}[k]\} + j\Im\{\mathcal{X}[k]\} \quad (0 \leq k \leq N-1)\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις ορισμού του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού DFT, λαμβάνουμε

$$\Re\{\mathcal{X}[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\Re\{x[n]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \Im\{x[n]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

$$\Im\{\mathcal{X}[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\Im\{x[n]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - \Re\{x[n]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

$$\Re\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Re\{\mathcal{X}[k]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - \Im\{\mathcal{X}[k]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

$$\Im\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Re\{\mathcal{X}[k]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \Im\{\mathcal{X}[k]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

Οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται εάν οι ακολουθίες είναι αμιγώς πραγματικές ή φανταστικές.

Εάν η ακολουθία $x[n]$ είναι πραγματική, τότε θα έχουμε

$$\mathcal{X}[N - k] = \mathcal{X}^*[k] = \mathcal{X}[-k]$$

από όπου προκύπτει εύκολα ότι

$$|\mathcal{X}[N - k]| = |\mathcal{X}[k]| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{X}[N - k] = -\angle \mathcal{X}[k]$$

Εάν το πραγματικό σήμα $x[n]$ χαρακτηρίζεται από **άρτια συμμετρία**, αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις για ένα **πραγματικό περιττό σήμα** είναι οι

$$\mathcal{X}[k] = -j \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x[n] = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Τέλος, για ένα **αμιγώς φανταστικό σήμα** το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού DFT ορίζονται ως

$$\Re\{\mathcal{X}[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \Im\{x[n]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\Im\{\mathcal{X}[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \Re\{x[n]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

- **Κυκλική χρονική μετατόπιση:** η ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$y[n] = x[n - \ell] \iff \mathcal{Y}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\ell} \mathcal{X}(e^{j\omega})$$

του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, **δεν ισχύει** για το μετασχηματισμό DFT, αφού αυτός σχετίζεται με ακολουθίες **πεπερασμένου μήκους**.

Αποδεικνύεται (σελίδες 601-602) πως

εάν ο μετασχηματισμός DFT μήκους N στοιχείων της ακολουθίας $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της κυκλικά μετατοπισμένης κατά ℓ στοιχεία ακολουθίας

$$y[n] = x[((n - \ell))_N] = x[(n - \ell) \text{ modulo } N]$$

θα είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{Y}[k] = \exp\left(-j\frac{2k\pi\ell}{N}\right) \mathcal{X}[k]$$

(για την κατανόηση του τρόπου χρήσης της συνάρτησης modulo δείτε τα Παραδείγματα 9.5.3 και 9.5.4 στη σελίδα 601).

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

- **Κυκλική συχνοτική μετατόπιση:** εάν ο μετασχηματισμός DFT μήκους N στοιχείων της ακολουθίας $x[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της

$$y[n] = \exp\left(j\frac{2\pi\ell n}{N}\right)x[n]$$

θα είναι η συνάρτηση $\mathcal{X}[\left((k - \ell)\right)_N]$ η οποία προκύπτει από την **κυκλική συχνοτική μετατόπιση** της συνάρτησης $\mathcal{X}[k]$ κατά ℓ δείγματα.

- **Διτισμός:** εάν ο μετασχηματισμός DFT μήκους N στοιχείων της ακολουθίας $x[n]$ είναι η ακολουθία $\mathcal{X}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της ακολουθίας $\mathcal{X}[n]$ θα είναι η ακολουθία $x[\left((-k)\right)_N]/N$.
- **Συζυγία:** αποδεικνύεται ότι
 - ο μετασχηματισμός DFT της ακολουθίας $y[n] = x^*[n]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{Y}[k] = \mathcal{X}^*[\left((-k)\right)_N] = \mathcal{X}^*[N - k]$
 - ο μετασχηματισμός DFT της ακολουθίας $y[n] = x^*[\left((-n)\right)_N]$ είναι η συνάρτηση $\mathcal{Y}[k] = \mathcal{X}^*[k]$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 599-606)

- **Κυκλική συσχέτιση:** εάν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}[k]$ και $\mathcal{Y}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της κυκλικής συσχέτισης

$$\rho_{xy}[\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[((n-\ell))_N]$$

δίδεται από τη σχέση $\mathcal{R}_{xy}[k] = \mathcal{X}[k]\mathcal{Y}^*[k]$

- **Γινόμενο:** εάν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}[k]$ και $\mathcal{Y}[k]$, τότε ο μετασχηματισμός DFT της ακολουθίας $z[n] = x[n]y[n]$ είναι ο

$$\mathcal{Z}[k] = \frac{1}{N} \left\{ \mathcal{X}[k] \circledast \mathcal{Y}[k] \right\}$$

- **Θεώρημα του Parseval:** εάν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι οι $\mathcal{X}[k]$ και $\mathcal{Y}[k]$, αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}[k] \mathcal{Y}^*[k]$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ας θεωρήσουμε δύο ακολουθίες $x[n]$ και $y[n]$ πεπερασμένου μήκους N με μετασχηματισμούς DFT της μορφής

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\mathcal{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

και ας πολλαπλασιάσουμε αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς έτσι ώστε να κατασκευάσουμε το διακριτό μετασχηματισμό

$$\mathcal{Z}[k] = \mathcal{X}[k]\mathcal{Y}[k] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

ο οποίος θα αποτελείται και αυτός από N δείγματα.

Ποιο είναι το σήμα $z[n]$ ο μετασχηματισμός DFT του οποίου είναι ο $\mathcal{Z}[k]$;

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό $Z[k]$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}z[m] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z[k] \exp\left(j\frac{2\pi km}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] Y[k] \exp\left(j\frac{2\pi km}{N}\right) \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} y[\ell] \exp\left(-j\frac{2\pi k\ell}{N}\right) \right] \exp\left(j\frac{2\pi km}{N}\right) \\&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{\ell=0}^{N-1} y[\ell] \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[j\frac{2\pi k(m-n-\ell)}{N}\right] \right\}\end{aligned}$$

Ορίζοντας την παράμετρο $\alpha = \exp[2\pi j(m-n-\ell)/N]$ το τελευταίο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[j\frac{2\pi k(m-n-\ell)}{N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \begin{cases} N & \text{για } \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνθήκη $\alpha = 1$ ισχύει μόνο όταν η τιμή $m - n - \ell$ είναι **ακέραιο πολλαπλάσιο** του N .

Θα είναι λοιπόν $m - n - \ell = pN$ όπου $p \in \mathbb{N}^*$ και επομένως

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[j \frac{2\pi k(m-n-\ell)}{N} \right] = \begin{cases} N & \ell = m - n + pN = ((m-n))_N \quad (p \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$z[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[((m-n))_N] \triangleq x[m] \circledast y[m] \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Το παραπάνω **συνελικτικό άθροισμα** δεν περιέχει τη συνήθη χρονική μετατόπιση που χαρακτηρίζει τη γραμμική συνέλιξη αλλά μία **κυκλική μετατόπιση**.

Για το λόγο αυτό, ο τύπος της συνέλιξης που ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο, είναι γνωστός ως **κυκλική συνέλιξη**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

Καταλήγουμε λοιπόν στο **θεώρημα της συνέλιξης** για το μετασχηματισμό DFT

Εάν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ μήκους N είναι οι συναρτήσεις $X[k]$ και $Y[k]$ τότε ο μετασχηματισμός DFT της **κυκλικής συνέλιξης**

$$z[n] = x[n] \circledast y[n]$$

ισούται με το γινόμενο των μετασχηματισμών DFT των ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$.

Ποια είναι η σχέση της γραμμικής με την κυκλική συνέλιξη;

Υποθέτοντας πως τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ περιέχουν N_1 και N_2 δείγματα αντίστοιχα, η **γραμμική** τους συνέλιξη ορίζεται ως

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] = \begin{cases} \neq 0 & \text{για } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Επομένως η **γραμμική** συνέλιξη ακολουθιών πεπερασμένου μήκους ορίζεται μεν αλλά αποτελεί και η ίδια **σήμα πεπερασμένου μήκους**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

Θυμηθείτε πως εάν ο μετασχηματισμός $\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ υποστεί **δειγματοληψία** στις θέσεις $\omega_k = 2\pi k/N$, η ακολουθία που θα προκύψει, αντιστοιχεί στους **συντελεστές Fourier** της περιοδικής ακολουθίας άπειρου μήκους

$$\xi[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN]$$

και πως η ακολουθία **πεπερασμένου μήκους** που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}[k] = \begin{cases} \mathcal{X}(e^{j2\pi k/N}) & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

αποτελεί **το μετασχηματισμό DFT μιας περιόδου του $\xi[n]$** που ορίζεται ως

$$x'[n] = \begin{cases} \xi[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Εάν το μήκος L του $x[n]$ είναι μικρότερο ή ίσο από το μήκος N του μετασχηματισμού DFT το φαινόμενο της αναδίπλωσης **δεν εμφανίζεται** και επομένως θα είναι $x[n] = x'[n]$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ας κατασκευάσουμε μία περιοδική ακολουθία $\zeta[n]$ **απείρου μήκους**, ως

$$\zeta[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n - mN] \quad \text{όπου} \quad z[n] = x[n] * y[n]$$

Εάν είναι $\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$, $\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$ και $\mathcal{Z}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{z[n]\}$, θα έχουμε

$$\mathcal{Z}(e^{j\omega}) = \mathcal{X}(e^{j\omega})\mathcal{Y}(e^{j\omega})$$

εξίσωση, που για τιμές συχνότητας $\omega = 2k\pi/N$ ανάγεται στην

$$\mathcal{Z}[k] = \mathcal{X}[k]\mathcal{Y}[k]$$

με αντίστροφο DFT το σήμα $z[n] = x[n] \circledast y[n]$. Ταυτόχρονα όμως η $\mathcal{Z}[k]$ θα αποτελεί τον DFT μιας περιόδου της περιοδικής ακολουθίας $\zeta[n]$ η οποία ορίζεται ως

$$z'[n] = \begin{cases} \zeta[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Εάν το μήκος N των $\mathcal{X}[k]$, $\mathcal{Y}[k]$ και $\mathcal{Z}[k]$ είναι μεγαλύτερο από $N_1 + N_2 - 1$, το φαινόμενο της αναδίπλωσης δεν εμφανίζεται, δηλαδή $z'[n] = z[n]$ και **η κυκλική συνέλιξη των $x[n]$ και $y[n]$ ταυτίζεται με τη γραμμική συνέλιξη.**

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη - Παράδειγμα υπολογισμού

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού DFT, να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad \text{και} \quad y[n] = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

Αρχικά ως υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς DFT των $x[n]$ και $y[n]$. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^3 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \exp\left(j\frac{2\pi kn}{4}\right)$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$x[1] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = x[3] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

ενώ ακόμη θα είναι $x[0] = \cos(0) = 1$ και $x[2] = \cos(\pi) = -1$ και τελικά

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0,2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \exp\left(j\frac{\pi kn}{2}\right) = 1 - e^{jk\pi}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Κυκλική συνέλιξη - Παράδειγμα υπολογισμού

Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση $\mathcal{Y}[k]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^3 2^n \exp\left(j \frac{\pi kn}{2}\right) \\ &= 1 + 2 \exp\left(j \frac{\pi k}{2}\right) + 4 \exp(j\pi k) + 8 \exp\left(j \frac{3\pi k}{2}\right)\end{aligned}$$

Το γινόμενο των παραπάνω διακριτών μετασχηματισμών είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[k] &= \mathcal{X}[k]\mathcal{Y}[k] = (1 - e^{jk\pi}) \times \left[1 + 2 \exp\left(j \frac{\pi k}{2}\right) + 4 \exp(j\pi k) + 8 \exp\left(j \frac{3\pi k}{2}\right) \right] = \\ &= -3 - 6 \exp\left(j \frac{\pi k}{2}\right) + 3 \exp(j\pi k) + 6 \exp\left(j \frac{3\pi k}{2}\right)\end{aligned}$$

και επομένως η ζητούμενη κυκλική συνέλιξη θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}z[n] &= x[n] \circledast y[n] = -3\mathcal{F}^{-1}\{1\} - 6\mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(j \frac{\pi k}{2}\right)\right\} + 3\mathcal{F}^{-1}\{\exp(j\pi k)\} \\ &+ 6\mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(j \frac{3\pi k}{2}\right)\right\} = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]\end{aligned}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η υλοποίηση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο υπολογισμός των N τιμών του μετασχηματισμού DFT μιας ακολουθίας N δειγμάτων, απαιτεί την πραγματοποίηση N^2 **πολλαπλασιασμών** και $N(N-1)$ **προσθέσεων**.

Εάν το πλήθος N είναι **σταθερό** και **γνωστό**, οι N^2 ποσότητες

$$\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

είναι **ανεξάρτητες** των δειγμάτων του $x[n]$ και μπορούν να υπολογισθούν **από την αρχή**. Επιπλέον, για δεδομένο μήκος N είναι

$$\left[\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)\right]^N = 1$$

για κάθε ζεύγος τιμών (n, k) γεγονός που σημαίνει πως οι N ποσότητες

$$\exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

αποτελούν τις **N -οστές ρίζες της μονάδας** κάτι που απλοποιεί περαιτέρω τη διαδικασία.

Ωστόσο στην πράξη χρησιμοποιούνται άλλες πιο **αποδοτικές μέθοδοι υπολογισμού**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Ανήκει στην οικογένεια των αλγορίθμων "διαίρει και βασίλευε" στους οποίους

- Το πρόβλημα προς επίλυση **διασπάται σε μικρότερα παρόμοια προβλήματα** τα οποία στην ιδανική περίπτωση έχουν το ίδιο μέγεθος.
- Το κάθε ένα από τα μικρότερα προβλήματα που προέκυψαν από τη διάσπαση του αρχικού προβλήματος **επιλύεται ξεχωριστά από τα υπόλοιπα** χρησιμοποιώντας ως επί το πλείστον **αναδρομικές μεθόδους**.
- Οι λύσεις που προέκυψαν στο προηγούμενο βήμα, **συνδυάζονται μεταξύ τους** - εάν αυτό είναι αναγκαίο - προκειμένου να σχηματίσουν τη λύση του αρχικού μεγάλου προβλήματος.

Στην προκειμένη περίπτωση ο αλγόριθμος εφαρμόζεται

διαχωρίζοντας την αρχική διακριτή ακολουθία των N στοιχείων σε M ακολουθίες των L στοιχείων (ή σε L ακολουθίες των M στοιχείων) και υπολογίζοντας M διακριτούς μετασχηματισμούς μήκους L (ή L διακριτούς μετασχηματισμούς μήκους M) οι οποίοι στη συνέχεια συνδυάζονται μεταξύ τους προκειμένου να μας δώσουν το ζητούμενο μετασχηματισμό μήκους N

Στην πρώτη περίπτωση τα δεδομένα αποθηκεύονται **κατά γραμμές** ενώ στη δεύτερη **κατά στήλες**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η διακριτή ακολουθία $x[n]$ μήκους N στοιχείων

$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$x[8]$	$x[9]$	$x[10]$	$x[11]$
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	---------

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $X[k]$ μήκους N στοιχείων

$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$	$X[3]$	$X[4]$	$X[5]$	$X[6]$	$X[7]$	$X[8]$	$X[9]$	$X[10]$	$X[11]$
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	---------

Κατανομή δεδομένων κατά γραμμές ($L \times M$) = (3x4)

$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$	$X[3]$
$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$X[4]$	$X[5]$	$X[6]$	$X[7]$
$x[8]$	$x[9]$	$x[10]$	$x[11]$	$X[8]$	$X[9]$	$X[10]$	$X[11]$

Κατανομή δεδομένων κατά στήλες ($L \times M$) = (3x4)

$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$	$X[3]$
$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$X[4]$	$X[5]$	$X[6]$	$X[7]$
$x[8]$	$x[9]$	$x[10]$	$x[11]$	$X[8]$	$X[9]$	$X[10]$	$X[11]$

Κατανομή των δειγμάτων της διακριτής ακολουθίας και του διακριτού μετασχηματισμού της κατά Fourier κατά γραμμές και κατά στήλες.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω πως ο πίνακας διαστάσεων $L \times M$ που περιέχει τα δεδομένα $x[n]$ συμβολίζεται με ζ και περιγράφεται με τους δείκτες (ℓ, m) ($0 \leq \ell \leq L - 1$ και $0 \leq m \leq M - 1$) με το δείκτη ℓ για τις γραμμές και το δείκτη m για τις στήλες.

Η παραπάνω αναδιάταξη δεδομένων απαιτεί τον προσδιορισμό μίας αντιστοιχίας

$$x[n] \Rightarrow \zeta[\ell, m] \quad (0 \leq n \leq N - 1)$$

όπου $n = M\ell + m$ για αποθήκευση **κατά γραμμές** και $n = mL + \ell$ για την αποθήκευση **κατά στήλες**.

Ομοίως για τα N δείγματα του $\mathcal{X}[k]$ χρησιμοποιούμε τον πίνακα \mathcal{Z} διαστάσεων $L \times M$ και ένα ζεύγος δεικτών (p, q) ($0 \leq p \leq L - 1$ και $0 \leq q \leq M - 1$).

Η ζητούμενη αντιστοιχία έχει τη μορφή

$$\mathcal{X}[k] \Rightarrow \mathcal{Z}[p, q] \quad (0 \leq k \leq N - 1)$$

όπου $k = Mp + q$ για αποθήκευση **κατά γραμμές** και $k = qL + p$ για αποθήκευση **κατά στήλες**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Αποθηκεύοντας τα στοιχεία του $x[n]$ **κατά στήλες** και τα στοιχεία του $X[k]$ **κατά γραμμές**, θα έχουμε $n = mL + \ell$ και $k = Mp + q$ και επομένως

$$\mathcal{Z}(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \zeta(\ell, m) W_N^{(Mp+q)(mL+\ell)} = \sum_{\ell=0}^{L-1} \left\{ W_N^{\ell q} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \zeta(\ell, m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{\ell p}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier θα πρέπει:

- Να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier M στοιχείων για τις L γραμμές του πίνακα \mathcal{Z}

$$\Gamma(\ell, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \zeta(\ell, m) W_M^{mq}, \quad 0 \leq q \leq M-1$$

- Να ορίσουμε το βοηθητικό διδιάστατο πίνακα

$$\mathcal{G}(\ell, q) = W_N^{\ell q} \Gamma(\ell, q) \quad \text{για την περιοχή τιμών} \quad \begin{cases} 0 \leq q \leq M-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1 \end{cases}$$

- Να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό DFT L σημείων για την κάθε στήλη του πίνακα \mathcal{G} ως

$$\mathcal{Z}(p, q) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathcal{G}(\ell, q) W_L^{\ell p}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού του DFT απαιτεί $N(M + L + 1)$ πολλαπλασιασμούς και $N(M + L - 2)$ προσθέσεις.

Εάν αποθηκεύσουμε τα δείγματα $x[n]$ κατά γραμμές και τα δείγματα $X[k]$ κατά στήλες, η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$\mathcal{Z}(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \zeta(\ell, m) W_N^{pm} W_L^{p\ell} W_M^{qm} = \sum_{m=0}^{M-1} W_M^{mq} \left[\sum_{\ell=0}^{L-1} \zeta(\ell, m) W_L^{p\ell} \right] W_N^{mp}$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο **διαίρει και βασίλευε** το καθένα από τα δύο αυτά προβλήματα θα διασπαστούν σε πιο μικρά προβλήματα που με τη σειρά τους θα διασπαστούν περαιτέρω κ.ο.κ.

Πότε θα σταματήσει αυτή η διάσπαση;

Όταν το μήκος του κάθε επιμέρους μετασχηματισμού είναι **πρώτος αριθμός** και δεν γίνεται περαιτέρω διάσπαση (γιατί);

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω πως ο ζητούμενος DFT έχει μήκος $N = 15015$ στοιχείων.

- Το πρόβλημα διασπάται σε δύο προβλήματα υπολογισμού DFT μήκους $N_1 = 143$ στοιχείων (πρόβλημα A) και $N_2 = 105$ στοιχείων (πρόβλημα B)
- Το πρόβλημα A διασπάται στα προβλήματα υπολογισμού DFT μήκους $N_{11} = 13$ στοιχείων (πρόβλημα A1) και $N_{12} = 11$ στοιχείων (πρόβλημα A2).
- Το πρόβλημα B διασπάται στα προβλήματα υπολογισμού DFT μήκους $N_{21} = 15$ στοιχείων (πρόβλημα B1) και $N_{22} = 7$ στοιχείων (πρόβλημα B2).
- Το πρόβλημα B2 διασπάται στα προβλήματα υπολογισμού DFT μήκους $N_{221} = 3$ στοιχείων (πρόβλημα B21) και $N_{222} = 5$ στοιχείων (πρόβλημα B22).

Η παραπάνω διάσπαση στηρίζεται στο γεγονός ότι

$$N = 15015 = [(3 \cdot 5) \cdot 7] \cdot (11 \cdot 13)$$

Στη γενική περίπτωση, το μήκος N του διακριτού μετασχηματισμού, θεωρείται ως ένα **γινόμενο ν πρώτων αριθμών** της μορφής

$$N = r_1 r_2 \dots r_\nu$$

Εάν είναι $r_1 = r_2 = \dots = r_\nu = r$ τότε $N = r^\nu$ με το κοινό μήκος r των στοιχειωδών μετασχηματισμών να είναι γνωστό ως **βάση**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

Στην περίπτωση κατά την οποία είναι $r = 2$, το πλήθος N των στοιχείων του $x[n]$ θα είναι

$$N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{\nu \text{ φορές}} = 2^\nu$$

και η υποδιαίρεση του αρχικού πίνακα γίνεται σε δύο ίσα τμήματα.

Ωστόσο, οι υποακολουθίες που θα προκύψουν δεν περιέχουν $N/2$ διαδοχικά δείγματα η κάθε μία, αφού αποδεικνύεται πως

ο μετασχηματισμός DFT μιας ακολουθίας N στοιχείων προκύπτει από τη **συνένωση** δύο μετασχηματισμών DFT μήκους $N/2$ στοιχείων ο καθένας, εκ των οποίων ο πρώτος υπολογίζεται από τα **άρτια** ως προς τις θέσεις τους δείγματα του $x[n]$ και ο δεύτερος από τα **περιττά** ως προς τις θέσεις τους δείγματα.

Αυτός ο τρόπος υποδιαίρεσης αντιστοιχεί στις τιμές $M = N/2$ και $L = 2$ και αποτελεί συνέπεια του λήμματος των **Danielson** και **Lanczos**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

Έστω ακολουθίες $g[n] = x[2n]$ και $h[n] = x[2n + 1]$ ($n = 1, 2, \dots, N/2$) που περιέχουν τα άρτια και περιττά ως προς τις θέσεις τους δείγματα του σήματος $x[n]$ μήκους N .

Ο DFT του $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιο}}}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ περιττό}}}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} g[\ell] W_N^{k(2\ell)} + \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} h[\ell] W_N^{k(2\ell+1)} \end{aligned}$$

όπου $W_N = \exp(-2\pi j/N)$. Παρατηρούμε όμως ότι

$$W_N^{k(2\ell)} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)^{k(2\ell)} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}k(2\ell)\right] = \exp\left(-j\frac{2\pi k\ell}{N/2}\right) = W_{N/2}^{k\ell}$$

Θα είναι λοιπόν $W_N^{k(2\ell+1)} = W_N^{2k\ell} W_N^k = W_{N/2}^{k\ell} W_N^k$ και επομένως

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[k] &= \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} g[\ell] W_M^{k(2\ell)} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} h[\ell] W_N^{2k\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} g[\ell] W_{N/2}^{k\ell} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} h[\ell] W_{N/2}^{k\ell} = \mathcal{G}(k) + W_N^k \mathcal{H}(k) \end{aligned}$$

με τις συναρτήσεις

$$\mathcal{G}[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} g[\ell] W_{N/2}^{k\ell} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} h[\ell] W_{N/2}^{k\ell}$$

να αποτελούν τους **μετασχηματισμούς DFT** των σημάτων $g[n]$ και $h[n]$ κάθε ένας εκ των οποίων έχει μήκος $N/2$.

Η τελευταία σχέση αποτελεί και την απόδειξη του θεωρήματος των **Danielson** και **Lanczos**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

Οι συναρτήσεις $\mathcal{G}[k]$ και $\mathcal{H}[k]$ είναι **περιοδικές** με περίοδο $N/2$ και επομένως

$$\mathcal{G}[k] = \mathcal{G}\left[k + \frac{N}{2}\right] \quad \text{και} \quad \mathcal{H}[k] = \mathcal{H}\left[k + \frac{N}{2}\right]$$

Ακόμη θα έχουμε

$$W_N^{k+(N/2)} = W_N^k W_N^{N/2} = -W_N^k$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\left[k + \frac{N}{2}\right] &= \mathcal{G}\left[k + \frac{N}{2}\right] + W_N^{k+(N/2)} \mathcal{H}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \\ &= \mathcal{G}[k] - W_N^k \mathcal{H}[k] \end{aligned}$$

Οι συντελεστές W_N^k του μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{H}(k)$ ονομάζονται **παράγοντες αναστροφής**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για τον υπολογισμό του DFT το λήμμα των Danielson και Lanczos εφαρμόζεται **αναδρομικά**:

Έχοντας διασπάσει τον $\mathcal{X}[k]$ στους $\mathcal{G}[k]$ και $\mathcal{H}[k]$ μήκους $N/2$ ο καθένας στη συνέχεια διασπούμε κάθε έναν από αυτούς σε δύο μικρότερους μετασχηματισμούς μήκους $N/4$.

Για παράδειγμα ο $\mathcal{G}[k]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα

$$\mathcal{G}[k] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} g[2n] W_{N/4}^{nk} + W_{N/2}^k \sum_{n=0}^{(N/4)-1} g[2n+1] W_{N/4}^{nk}$$

Με τον τρόπο αυτό στο τέλος της διαδικασίας θα καταλήξουμε σε N μετασχηματισμούς με **μήκος** ένα στοιχείο.

Τι κάνουμε τώρα; Ποιος είναι ο μετασχηματισμός DFT ενός απλού στοιχείου; Από την εξίσωση ορισμού του DFT έχουμε

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{1-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi n}{1}\right) = x[0] = \xi$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

Επομένως,

ο μετασχηματισμός DFT μιας διακριτής ακολουθίας που περιέχει ένα μόνο στοιχείο, είναι αυτό το ίδιο το στοιχείο!!!

Αυτή η ιδιότητα διατυπώνεται ως

$$\mathcal{F}_k^{e\circ e\circ e\circ e\circ \dots \circ e} = x[n] \quad \text{για κάποια τιμή του } n$$

με το πλήθος των e και \circ στην ακολουθία $e\circ e\circ e\circ e\circ \dots \circ e$ να είναι ίσο με $\log_2 N$.

Η τιμή του n που αντιστοιχεί σε κάποια ακολουθία $e\circ e\circ e\circ e\circ \dots \circ e$ για την οποία ισχύει η συνθήκη τερματισμού $\mathcal{F}[k] = \xi$, βρίσκεται ως εξής

- Αντιστρέφουμε την ακολουθία.
- Προχωρούμε στις αντικαταστάσεις $e \rightarrow 0$ και $\circ \rightarrow 1$.

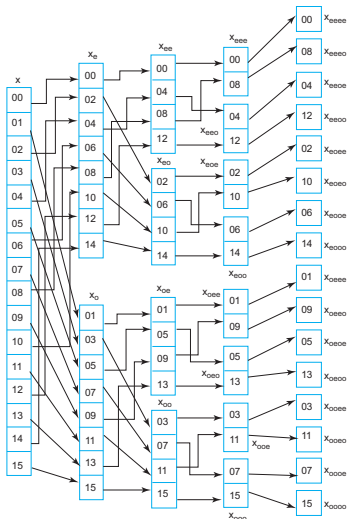
Το αποτέλεσμα που θα προκύψει, είναι η ζητούμενη τιμή του n εκπεφρασμένη στο **δυναμικό σύστημα**.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διαδοχικές διασπάσεις για $N = 16$

(για μία λεκτική περιγραφή της διαδικασίας διάσπασης ανατρέξτε στις σελίδες 617-618).

Επομένως για να είναι δυνατή η εφαρμογή του FFT επί της ακολουθίας των 16 σημείων, αυτά θα πρέπει να **αναδιαταχθούν** έτσι ώστε να εμφανίζονται με τη σειρά

{00, 08, 04, 12, 02, 10, 06, 14,
01, 09, 05, 13, 03, 11, 07, 05}

Το ίδιο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται πολύ πιο εύκολα με τη μέθοδο του

bit reverse sorting

που επιδεικνύεται στον επόμενο πίνακα.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τιμή Δείγματος	Τιμή Δείκτη	Διαδική Τιμή	Κατοπτρική Τιμή	Δεκαδική Τιμή
$X_{00} = 5.27$	00	0000	0000	00
$X_{01} = 8.48$	01	0001	1000	08
$X_{02} = 3.71$	02	0010	0100	04
$X_{03} = 0.33$	03	0011	1100	12
$X_{04} = 4.85$	04	0100	0010	02
$X_{05} = 1.70$	05	0101	1010	10
$X_{06} = 9.23$	06	0110	0110	06
$X_{07} = 0.45$	07	0111	1110	14
$X_{08} = 5.17$	08	1000	0001	01
$X_{09} = 3.07$	09	1001	1001	09
$X_{10} = 1.09$	10	1010	0101	05
$X_{11} = 3.12$	11	1011	1101	13
$X_{12} = 8.16$	12	1100	0011	03
$X_{13} = 9.96$	13	1101	1011	11
$X_{14} = 1.12$	14	1110	0111	07
$X_{15} = 6.85$	15	1111	1111	15

Παρατηρείστε πως η διάταξη των αριθμών στην κόκκινη στήλη είναι η ίδια με αυτή που προέκυψε από τις διαδοχικές διασπάσεις !!!

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

Στη φάση της **σύνθεσης** του μετασχηματισμού και λαμβάνοντας υπόψη πως το κάθε σημείο της νέας, αναδιατεταγμένης ακολουθίας αποτελεί **το μετασχηματισμό DFT του εαυτού** του εφαρμόζουμε το λήμμα των Danielson και Lanczos με τον ακόλουθο τρόπο (η περιγραφή αφορά την περίπτωση $N = 16$):

- Συνενώνοντας δύο διαδοχικά σημεία - που αποτελούν DFT μήκους $N/16 = 1$ - κατασκευάζουμε έναν DFT μήκους $N/8 = 2$ (θα προκύψουν 8 τέτοιοι DFTs).
- Συνενώνοντας δύο διαδοχικούς DFTs μήκους $N/8 = 2$ κατασκευάζουμε έναν DFT μήκους $N/4 = 4$ (θα προκύψουν 4 τέτοιοι DFTs).
- Συνενώνοντας δύο διαδοχικούς DFTs μήκους $N/4 = 4$ κατασκευάζουμε έναν DFT μήκους $N/2 = 8$ (θα προκύψουν 2 τέτοιοι DFTs).
- Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας συνενώνοντας τους δύο διαδοχικούς DFTs μήκους $N/2 = 8$ θα κατασκευάσουμε τον ζητούμενο DFT μήκους $N = 16$ στοιχείων.

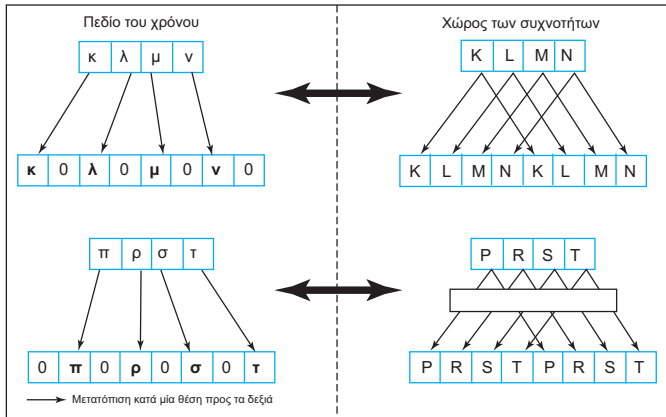
Η διαδικασία κατασκευής ενός DFT μήκους $N = 8$ από δύο DFTs μήκους $N = 4$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η φάση της σύνθεσης του μετασχηματισμού FFT

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

Ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με το σχήμα (ως πρώτο στοιχείο θεωρούμε το $x[1]$)

- Οι τιμές $\{\kappa, \lambda, \mu, \nu\}$ υποτίθεται πως ανήκουν στις **περιττές** θέσεις του $x[n]$.
- Οι τιμές $\{\pi, \rho, \sigma, \tau\}$ υποτίθεται πως ανήκουν στις **άρτιες** θέσεις του $x[n]$.
- Για να το κάνουμε αυτό
 - **διπλασιάζουμε** το μήκος της ακολουθίας των τεσσάρων σημείων
 - τοποθετούμε **τα περιττά δείγματα στις περιττές θέσεις**
 - τοποθετούμε **μηδενικές τιμές** στα ενδιάμεσα κελιά

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι η ακολουθία $\{\kappa, 0, \lambda, 0, \mu, 0, \nu, 0\}$

Για τα **άρτια** δείγματα κάνουμε ακριβώς το ίδιο αλλά:

Μετά τη δημιουργία του νέου διανύσματος, τα περιεχόμενά του **μετατοπίζονται κατά μία θέση προς τα δεξιά** (έτσι ώστε να μετακινηθούν στις άρτιες θέσεις) - ενώ στο πρώτο κελί τοποθετούμε τη **μηδενική τιμή**.

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι η ακολουθία $\{0, \pi, 0, \rho, 0, \sigma, 0, \tau\}$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

Ο υπολογισμός των συντελεστών του μετασχηματισμού Fourier οδηγεί στις αντιστοιχίες

$$\{\kappa, 0, \lambda, 0, \nu, 0, \nu, 0\} \Leftrightarrow \{K, L, M, N, K, L, M, N\}$$

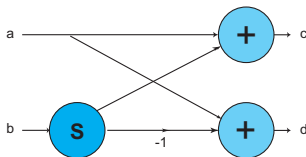
$$\{0, \pi, 0, \rho, 0, \sigma, 0, \tau\} \leftrightarrow \{P, R, S, T, P, R, S, T\}$$

Επομένως σε αμφότερες τις περιπτώσεις έχουμε **διπλασιασμό του φάσματος**.

Στην τελευταία περίπτωση η μετατόπιση κατά μία θέση προς τα δεξιά, προκαλεί τον **πολλαπλασιασμό** των συντελεστών Fourier με μία ημιτονοειδή συνάρτηση (γιατί;)

Τέλος τα σήματα $\{\kappa, 0, \lambda, 0, \mu, 0, \nu, 0\}$ και $\{0, \pi, 0, \rho, 0, \sigma, 0, \tau\}$ προστίθενται για τον υπολογισμό του φάσματος $\{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau\}$.

Η βασική δομική μονάδα που περιγράφει την παραπάνω πρόσθεση είναι η **δομή της πεταλούδας**.

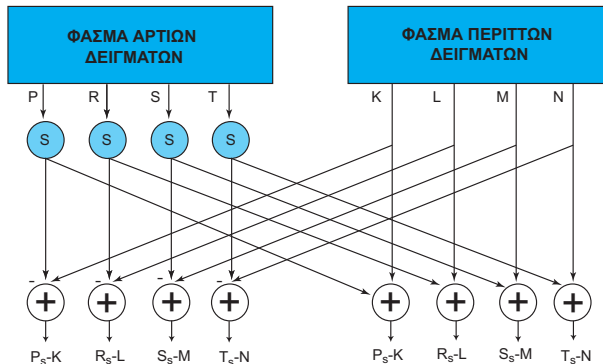


Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



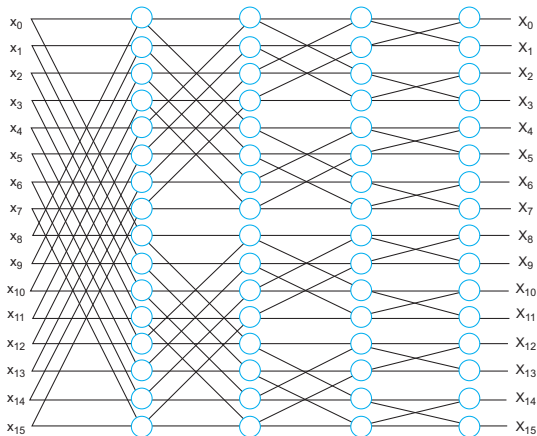
Υπολογισμός του φάσματος μιας ακολουθίας οκτώ σημείων από τα φάσματα δύο ακολουθιών μήκους τεσσάρων σημείων

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$ - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διάγραμμα πεταλούδας για τον υπολογισμό μετασχηματισμού FFT 16 σημείων

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

Αποδεκατισμός στη συχνότητα.

Η παραπάνω τεχνική υπολογισμού του FFT είναι γνωστή ως **αποδεκατισμός στο χρόνο** αφού η διαδικασία της διαδοχικής διάσπασης εφαρμόζεται στην ακολουθία $x[n]$ που είναι ορισμένη στο πεδίο του χρόνου.

Η τεχνική του αποδεκατισμού στη συχνότητα εφαρμόζεται στην ακολουθία $\mathcal{X}[k]$ που ορίζεται στο **χώρο της συχνότητας** και η αντίστοιχη εξίσωση είναι η

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

η οποία μετασχηματίζεται ως (ανατρέξτε στη σελίδα 618)

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{N-1} x \left[n + \frac{N}{2} \right] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ x[n] + (-1)^k x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right\} W_N^{kn}$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να προχωρήσουμε στην πρώτη υποδιαίρεση της ακολουθίας $\mathcal{X}[k]$ στα άρτια και στα περιττά δείγματά της, ορίζοντας τις ακολουθίες

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\mathcal{G}[k] = \mathcal{X}[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right\} W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{kn}$$
$$\mathcal{H}[k] = \mathcal{X}[2k+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left(x[n] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) W_N^n \right\} W_{N/2}^{kn}$$

(για τις τιμές $0 \leq k \leq (N/2) - 1$) με τα σήματα $g[h]$ και $h[n]$ να ορίζονται ως

$$\left. \begin{aligned} g[n] &= x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] \\ h[n] &= \left(x[n] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) W_N^n \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

ενώ στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε στην περαιτέρω υποδιαίρεση των ακολουθιών $\mathcal{G}[k]$ και $\mathcal{H}[k]$ στα άρτια και περιττά δείγματά τους, κ.ο.κ.

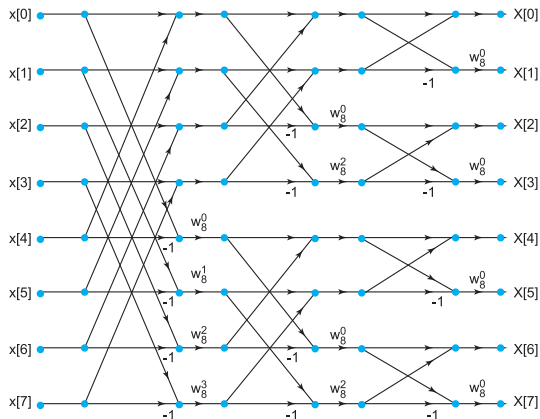
Αυτή η προσέγγιση απαιτεί $\nu = \log_2 N$ διασπάσεις, δηλαδή $(N/2) \log_2 N$ πολλαπλασιασμοί και $N \log_2 N$ προσθέσεις ανάμεσα σε μγαδικές ποσότητες.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 2$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διάγραμμα πεταλούδας για τον υπολογισμό ενός διακριτού μετασχηματισμού Fourier μήκους $N = 8$ με τη μέθοδο του **αποδεκατισμού στη συχνότητα**

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

Η χρήση της βάσης $r = 4$ απαιτεί μήκος ακολουθίας $N = 4^v$ με το διαχωρισμό των δεδομένων της διακριτής ακολουθίας να στηρίζεται στις τιμές $L = 4$ και $M = L/4$.

Θα είναι λοιπόν $n = 4m + \ell$ και $k = (N/4)p + q$ με τους πίνακες να σχετίζονται ως

$$\zeta[\ell, m] = x[4m + \ell] \quad \text{και} \quad \mathcal{Z}[p, q] = \mathcal{X} \left[\frac{N}{4}p + q \right]$$

Επομένως, η αρχική ακολουθία $x[n]$ μήκους N διασπάται στις ακολουθίες

$$\left. \begin{aligned} e[n] &= x[4n] \\ f[n] &= x[4n + 1] \\ g[n] &= x[4n + 2] \\ h[n] &= x[4n + 3] \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

ενώ η εφαρμογή ανάλυσης ανάλογης με την προηγούμενη θα οδηγήσει στην έκφραση

$$\mathcal{Z}(p, q) = \sum_{\ell=0}^3 \left\{ W_N^{\ell q} \left[\sum_{m=0}^{(N/4)-1} \zeta(\ell, m) W_{N/4}^{mq} \right] \right\} W_4^{\ell p} \quad \left\{ \begin{array}{l} p, \ell = 0, 1, 2, 3 \\ q = 0, 1, 2, \dots, (N/4) - 1 \end{array} \right.$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

Κατά συνέπεια τώρα απαιτείται ο υπολογισμός **τεσσάρων DFT** μήκους $N/4$

$$\Gamma(\ell, q) = \sum_{m=0}^{(N/4)-1} \zeta(\ell, m) W_{N/4}^{mq}$$

ενώ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}(p, q)$ υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Z}(0, q) \\ \mathcal{Z}(1, q) \\ \mathcal{Z}(2, q) \\ \mathcal{Z}(3, q) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}}_{W_4} \begin{bmatrix} W_N^0 \Gamma(0, q) \\ W_N^q \Gamma(1, q) \\ W_N^{2q} \Gamma(2, q) \\ W_N^{3q} \Gamma(3, q) \end{bmatrix}$$

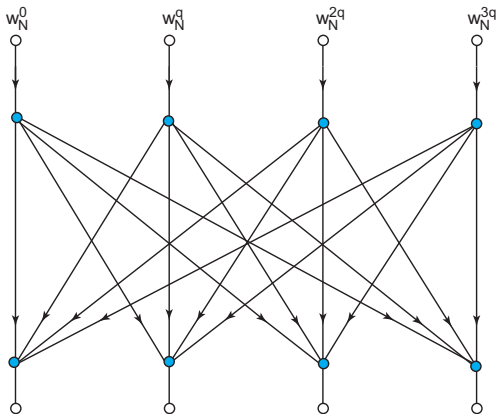
Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται **αναδρομικά** ν φορές, οδηγώντας σε ένα αλγόριθμο ν βημάτων με το κάθε βήμα να περιέχει $N/4$ δομές πεταλούδας, δηλαδή $(3N/8) \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς και $(3N/2) \log_2 N$ προσθέσεις ανάμεσα σε μιγαδικές ποσότητες.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



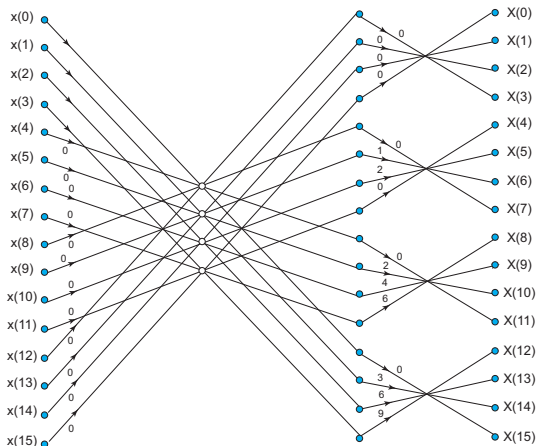
Δομή πεταλούδας για τον αλγόριθμο αποδεκατισμού στο χρόνο και για τιμή βάσης $r = 4$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Το **διάγραμμα πεταλούδας** της διαδικασίας υπολογισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μήκους $N = 16$ για τη **μέθοδο αποδεκατισμού στο χρόνο** και για τιμή βάσης $r = 4$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

Για την εφαρμογή της μεθόδου **αποδεκατισμού στη συχνότητα** επιλέγουμε $L = N/4$ και $M = 4$ ενώ οι δείκτες σχετίζονται μεταξύ τους ως $n = (N/4)m + \ell$ και $k = 4p + q$ και παίρνουν τις τιμές $\ell, p = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$ και $q = 0, 1, 2, 3$.

Διατυπώνοντας την εξίσωση του διακριτού μετασχηματισμού ως

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[k] &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/4}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{(3N/4)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=3N/4}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{kN/4} \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x \left[n + \frac{N}{4} \right] W_N^{kn} + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x \left[n + \frac{N}{2} \right] W_N^{kn} \\ &\quad + W_N^{3kN/4} \sum_{n=0}^{(N/4)-1} x \left[n + \frac{3N}{4} \right] W_N^{kn} \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $W_N^{kN/4} = (-j)^k$, $W_N^{kN/2} = (-1)^k$ και $W_N^{3kN/4} = (+j)^k$ τότε

$$\mathcal{X}[k] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \left\{ x[n] + (-j)^k x \left[n + \frac{N}{4} \right] + (-1)^k x \left[n + \frac{N}{2} \right] + (+j)^k x \left[n + \frac{3N}{4} \right] \right\}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

Έχοντας διατυπώσει τη συνάρτηση $\mathcal{X}[k]$ με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να προχωρήσουμε **στην πρώτη υποδιαίρεση** ορίζοντας τις ακολουθίες

$$\mathcal{X}[4k] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \left\{ x[n] + x \left[n + \frac{N}{4} \right] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] + x \left[n + \frac{3N}{4} \right] \right\} W_N^0 W_{N/4}^{kn}$$

$$\mathcal{X}[4k+1] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \left\{ x[n] - jx \left[n + \frac{N}{4} \right] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] + jx \left[n + \frac{3N}{4} \right] \right\} W_N^n W_{N/4}^{kn}$$

$$\mathcal{X}[4k+2] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \left\{ x[n] - x \left[n + \frac{N}{4} \right] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] - x \left[n + \frac{3N}{4} \right] \right\} W_N^{2n} W_{N/4}^{kn}$$

$$\mathcal{X}[4k+3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \left\{ x[n] + jx \left[n + \frac{N}{4} \right] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] - jx \left[n + \frac{3N}{4} \right] \right\} W_N^{3n} W_{N/4}^{kn}$$

όπου για την κατασκευή των παραπάνω σχέσεων λάβαμε υπ' όψιν ότι $W_N^{4kn} = W_{N/4}^{kn}$.

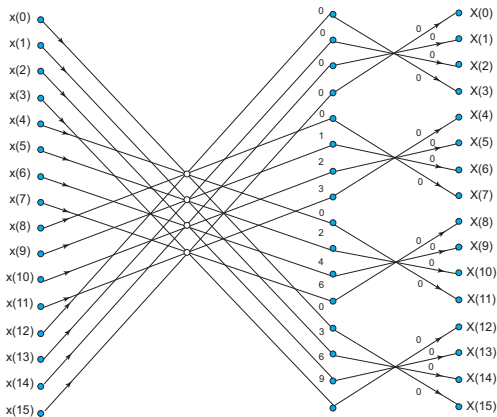
Στη συνέχεια η διαδικασία πραγματοποιείται με το γνωστό τρόπο.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier - Αλγόριθμος βάσης $r = 4$

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Το διάγραμμα πεταλούδας του FFT μήκους $N = 16$ για τη μέθοδο αποδεκατισμού στη συχνότητα και για τιμή βάσης $r = 4$

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η συχνοτική ανάλυση ενός σήματος στην ιδανική περίπτωση στηρίζεται στη χρήση του **μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου**.

Στην πράξη χρησιμοποιείται ο DFT που όμως αποτελεί **προσέγγιση** γιατί:

- Περιέχει μόνο ορισμένα δείγματα του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.
- Εφαρμόζεται μόνο σε διακριτά σήματα **πεπερασμένου** μήκους.

Πώς διασφαλίζουμε πως τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε προσεγγίζουν την ιδανική περίπτωση;

- Φροντίζουμε ώστε η κυκλική συνέλιξη να δίνει **ταυτόσημα** αποτελέσματα με αυτά που δίνει η γραμμική συνέλιξη
- Καθιστούμε το μήκος των σημάτων **πεπερασμένο** εφαρμόζοντας την κατάλληλη **συνάρτηση παραθύρου**

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Με ποιο τρόπο είναι δυνατή η μετατροπή μιας ακολουθίας $x[n]$ απείρου μήκους, σε μία πεπερασμένη ακολουθία $y[n]$ που περιέχει N δείγματα του σήματος $x[n]$;

Ο πιο απλός τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν **ορθογώνιο παλμό**

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και να κατασκευάσουμε το σήμα $y[n]$, πολλαπλασιάζοντας τα σήματα $x[n]$ και $w[n]$ οπότε θα λάβουμε

$$y[n] = x[n]w[n] = x[n] \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} = \begin{cases} x[n] & \text{για } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Αυτός ο παλμός ονομάζεται **συνάρτηση παραθύρου** και αποτελεί ένα μέλος μίας οικογένειας παραθύρων που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Η κατασκευή **πεπερασμένου σήματος** με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

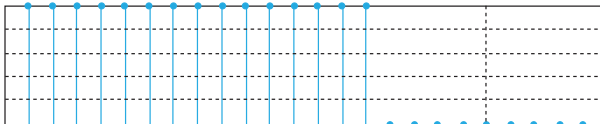
Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

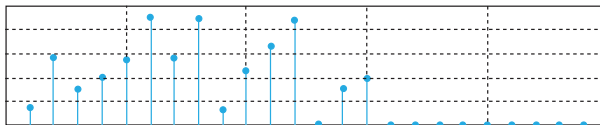
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



(α) Το αρχικό διακριτό σήμα $x[n]$ που μπορεί να περιέχει άπειρο πλήθος δειγμάτων



(β) Η ορθογώνια διακριτή ακολουθία μήκους $N=15$ δειγμάτων



(γ) Το πεπερασμένο διακριτό σήμα $y[n]=x[n]*w[n]$ μήκους $N=15$ δειγμάτων

Κατασκευή σήματος **πεπερασμένου μήκους** δια του πολλαπλασιασμού σήματος **άπειρου μήκους** με την ορθογώνια διακριτή ακολουθία μήκους $N = 15$ δειγμάτων

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

Το πεπερασμένο σήμα $y[n]$ αποτελεί **προσέγγιση** του άπειρου σήματος $x[n]$.

Επομένως, η χρήση της **συνάρτησης παραθύρου**, θα καταστήσει κατ' αναλογία και το φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$ **προσέγγιση** του επιθυμητού φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$.

Για δεδομένο μήκος παραθύρου N , το ορθογώνιο παράθυρο οδηγεί στο **μικρότερο σφάλμα προσέγγισης** σε σχέση με όλα τα παράθυρα του ίδιου μήκους.

Πράγματι, το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης** του $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ από το $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega}) - \mathcal{Y}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval, διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathcal{X}(e^{j\omega}) - \mathcal{Y}(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad \text{πώς προκύπτει το ζητούμενο;} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n] - y[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - y[n]|^2 + \sum_{n \in Z - [0, N]} |x[n] - y[n]|^2 \end{aligned}$$

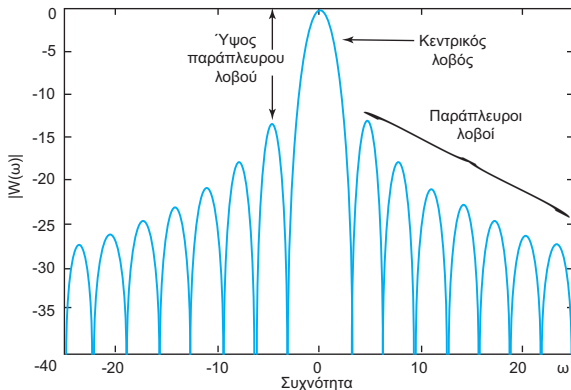
Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

Το φάσμα της διακριτής ορθογώνιας ακολουθίας μήκους N δειγμάτων, ορίζεται ως

$$\mathcal{W}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

και το μέτρο του απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση $|\mathcal{W}(e^{j\omega})|$ χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός **κεντρικού λοβού**

Το εύρος αυτού του λοβού είναι το **το ενεργό εύρος $\Delta\omega_w$** του παραθύρου $w[n]$.

Το φάσμα διαθέτει και ένα πλήθος **παράπλευρων λοβών** το ύψος των οποίων **ελαττώνεται** με ρυθμό ανάλογο του $1/\omega$.

Η επίδραση του παραθύρου θεωρείται τόσο πιο αποδοτική **όσο πιο μικρό** είναι το ύψος των λοβών και **όσο μεγαλύτερος** είναι ο ρυθμός με τον οποίο εξασθενεί.

Με ποιο τρόπο το παράθυρο $w[n]$ επηρεάζει το φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ του αρχικού διακριτού σήματος $x[n]$; Από το **θεώρημα του γινομένου** του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{F}\{w[n] \cdot x[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(e^{j\lambda}) \mathcal{W}(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda$$

και επομένως

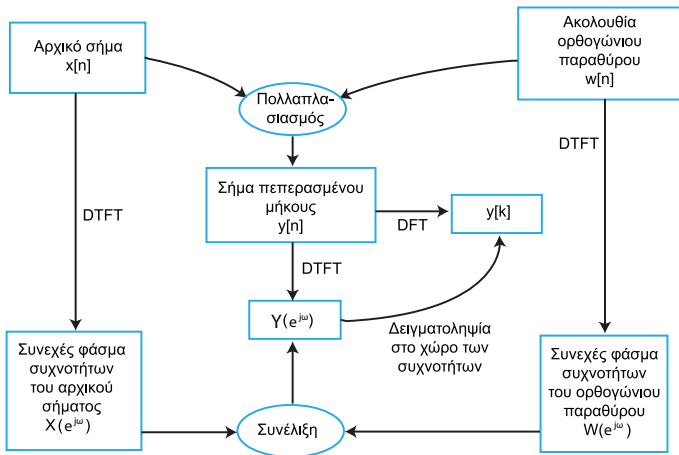
το φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$ της διακριτής ακολουθίας πεπερασμένου μήκους $y[n]$ θα υπολογιστεί ως η **συνέλιξη** των φασμάτων $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{W}(e^{j\omega})$

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Κατασκευή διακριτών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

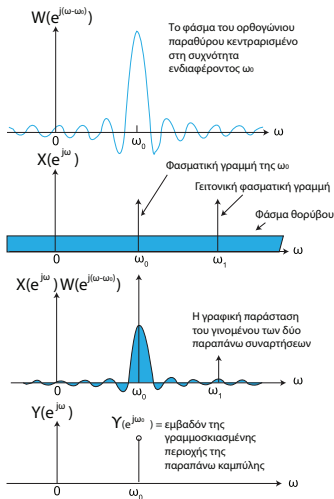
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση παραθύρου λειτουργεί ως **συνάρτηση βάρους**

Στον υπολογισμό της τιμής του φάσματος $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$ στη θέση ω_0 συνεισφέρουν **όλες οι συχνότητες**

Ο βαθμός συνεισφοράς της κάθε συχνότητας προσδιορίζεται από την τιμή της συνάρτησης $\mathcal{W}(e^{j(\omega_0-\omega)})$.

Το πλάτος του φάσματος στη θέση κάποιας συχνότητας επηρεάζεται από το **συσσωρευμένο ευρυζωνικό θόρυβο** που περιλαμβάνεται στο εύρος ζώνης του παραθύρου.



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Γνωρίζουμε πως το φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$ του πεπερασμένου σήματος $y[n]$ υπολογίζεται από τη **συνέλιξη** των φασμάτων του άπειρου σήματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και του παραθύρου $\mathcal{W}(e^{j\omega})$.

Εάν το εύρος των φασμάτων $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ και $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ είναι $\Delta\omega_x$ και $\Delta\omega_w$ αντίστοιχα, το εύρος του φάσματος $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$ θα υπολογίζεται ως (ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης)

$$\Delta\omega_y = \Delta\omega_x + \Delta\omega_w$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως

η εφαρμογή μιας συνάρτησης παραθύρου $w[n]$ επί ενός άπειρου σήματος $x[n]$ προκειμένου αυτό να καταστεί πεπερασμένο, προκαλεί τη **διεύρυνση** του φάσματος του αρχικού σήματος κατά το **ενεργό εύρος ζώνης** του φάσματος της συνάρτησης παραθύρου που εφαρμόζεται επί αυτού

Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως **φασματική διάχυση** και οφείλεται στον κεντρικό λοβό του φάσματος της ορθογώνιας διακριτής ακολουθίας

Η φασματική διάχυση επηρεάζει τη **διακριτική ικανότητα** όσον αφορά τον εντοπισμό γειτονικών συχνотήτων στο φάσμα του διακριτού μετασχηματισμού.

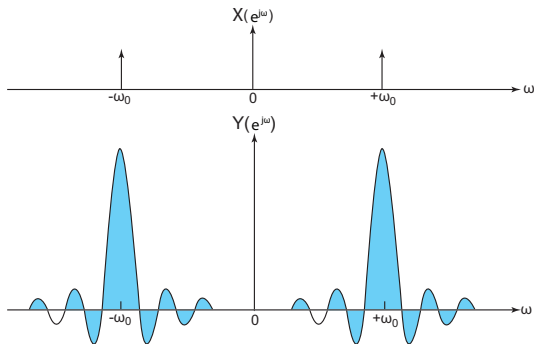
Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή - Παράδειγμα φασματικής διάχυσης

Έστω το διακριτό συνημίτονο $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$ ($-\infty < n < \infty$) το φάσμα $X(e^{j\omega})$ του οποίου διαθέτει δύο φασματικές γραμμές στις θέσεις $\omega = +\omega_0$ και $\omega = -\omega_0$.

Εάν πολλαπλασιάσουμε το $x[n]$ με ένα ορθογώνιο παράθυρο $w[n]$ μήκους N στοιχείων ($-N/2 \leq n \leq N/2$), τότε το φάσμα $Y(e^{j\omega})$ του $y[n]$ θα υπολογιστεί από τη **συνέλιξη** των φασμάτων $X(e^{j\omega})$ και $W(e^{j\omega})$.

Τα φάσματα $X(e^{j\omega})$ και $W(e^{j\omega})$ παρουσιάζονται στη συνέχεια (**που είναι η διάχυση**;) :



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πόσο εκτεταμένη είναι η φασματική διάχυση; Σύμφωνα με το **θεώρημα του εύρους ζώνης**, το ενεργό εύρος $\Delta\omega$ και η ενεργός διάρκεια Δt είναι αντιστρόφως ανάλογα, δηλαδή

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \gamma$$

όπου γ μία **παγκόσμια σταθερά**.

Επομένως, **όσο μεγαλύτερο** είναι το μήκος του παραθύρου που χρησιμοποιούμε, **τόσο μικρότερο** είναι το ενεργό εύρος ζώνης και ο βαθμός της φασματικής διάχυσης

Η φασματική διάχυση, δεν εξαλείφεται ποτέ, αφού ακόμα και εάν το $x[n]$ είναι αυστηρά **πεπερασμένου εύρους ζώνης**, η εφαρμογή του παραθύρου θα προκαλέσει την **επέκταση του φάσματος σε περιοχές συχνοτήτων στις οποίες το μέτρο του αρχικά ήταν ίσο με το μηδέν**.

Αυτό το ανεπιθύμητο φαινόμενο είναι γνωστό ως **διαρροή** και οφείλεται στην ύπαρξη των **παράπλευρων λοβών** του φάσματος της ορθογώνιας διακριτής ακολουθίας.

Η βασική συνέπεια της φασματικής διαρροής είναι πως **η ενέργεια του σήματος επεκτείνεται σε γειτονικές συχνότητες** εισάγοντας με τον τρόπο αυτό ανεπιθύμητο **θόρυβο**.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

Εάν η συχνότητα του $x[n]$ ταυτίζεται με κάποια από τις N συχνότητες $F_k = kF_s/N$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) στις θέσεις των οποίων υπολογίζεται ο μετασχηματισμός DFT, η φασματική διαρροή δεν εμφανίζεται.

Έστω $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ με φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$. Είναι όμως

$$\mathcal{W}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

και το φάσμα του $y[n] = x[n]w[n]$ είναι (για τις πράξεις ανατρέξτε στις σελίδες 627-628)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{X}(e^{j\lambda}) \mathcal{W}(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda = \dots\dots \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[-j(\omega - \omega_0) \frac{N-1}{2} \right] \frac{\sin \left[\frac{(\omega - \omega_0)N}{2} \right]}{\sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right)} \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left[-j(\omega + \omega_0) \frac{N-1}{2} \right] \frac{\sin \left[\frac{(\omega + \omega_0)N}{2} \right]}{\sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \right)} \end{aligned}$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν το $x[n]$ είναι **περιοδικό** με m πλήρεις επαναλήψεις στο σύνολο των N δειγμάτων, η συχνότητά του θα έχει τη μορφή $f_0 = m/N$ δηλαδή $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi m/N$.

Θα είναι λοιπόν $x[n] = \cos(2\pi mn/N)$ και επομένως

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \exp \left[-j \left(\omega - \frac{2\pi m}{N} \right) \frac{N-1}{2} \right] \frac{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi m}{N} \right) N/2 \right]}{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi m}{N} \right) /2 \right]} \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left[-j \left(\omega + \frac{2\pi m}{N} \right) \frac{N-1}{2} \right] \frac{\sin \left[\left(\omega + \frac{2\pi m}{N} \right) N/2 \right]}{\sin \left[\left(\omega + \frac{2\pi m}{N} \right) /2 \right]} \end{aligned}$$

Ο DFT του $y[n]$, προκύπτει από τη **δειγματοληψία** του φάσματος $Y(e^{j\omega})$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\omega \rightarrow \omega_k$ όπου $\omega_k = 2\pi k/N$ και τις προσεγγίσεις

$$\sin \left[\frac{\pi}{N} (k - m) \right] \approx \frac{\pi}{N} (k - m) \quad \text{και} \quad \sin \left[\frac{\pi}{N} (k + m) \right] \approx \frac{\pi}{N} (k + m)$$

τελικά λαμβάνουμε (ανατρέξτε στη σελίδα 628)

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

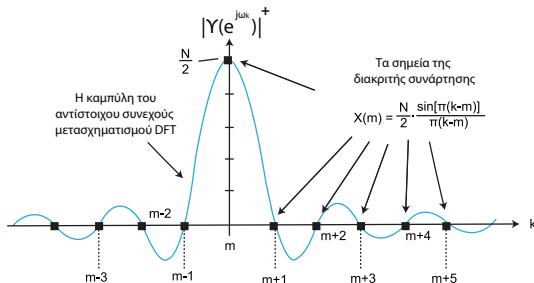
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\mathcal{Y}(e^{j\omega_k}) \approx \left\{ \frac{N \sin[\pi(k-m)]}{2 \pi(k-m)} \right\} \exp \left[-j \frac{\pi}{N} (k-m)(N-1) \right] \\ + \left\{ \frac{N \sin[\pi(k+m)]}{2 \pi(k+m)} \right\} \exp \left[-j \frac{\pi}{N} (k+m)(N-1) \right]$$

Το μέτρο του φάσματος στις περιοχές θετικών αρνητικών συχνοτήτων είναι

$$|\mathcal{Y}(e^{j\omega_k})|^+ \approx \frac{N \sin[\pi(k-m)]}{2 \pi(k-m)} \quad \text{και} \quad |\mathcal{Y}(e^{j\omega_k})|^- \approx \frac{N \sin[\pi(k+m)]}{2 \pi(k+m)}$$



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

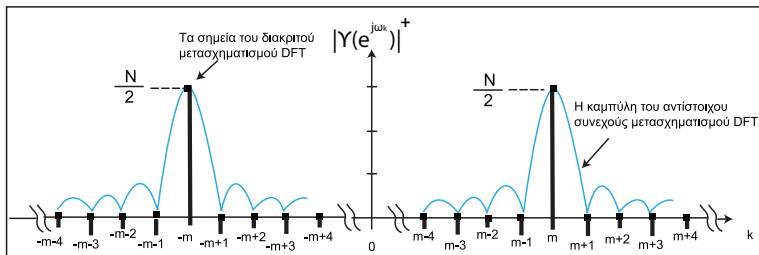
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Περίπτωση 1: Η συχνότητα $\omega_0 = 2\pi m/N$ του $x[n]$ ταυτίζεται με κάποια από τις k συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$ του DFT.

Για $k = m$ και $k = -m$ οι εκθετικές παραστάσεις του $\mathcal{Y}(e^{j\omega_k})$ είναι ίσες με 1 ενώ οι όροι των ημίτονων είναι ίσοι με N .

Για $k \neq m$ και $k \neq -m$ οι όροι των ημίτονων είναι ίσοι με το μηδέν.

Αποδεικνύεται ότι $\mathcal{Y}(e^{j\omega_k})_{k=m} = \mathcal{Y}(e^{j\omega_k})_{k=-m} = N/2$. Το φάσμα λοιπόν περιέχει μόνο δύο γραμμές και **δεν παρατηρείται** διαρροή.



Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Φασματική διάχυση και διαρροή

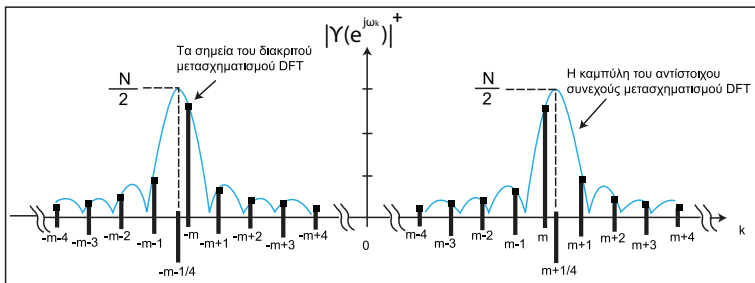
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Περίπτωση 2: Η συχνότητα $\omega_0 = 2\pi m/N$ του $x[n]$ **δεν ταυτίζεται** με κάποια από τις k συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$ του DFT.

Τώρα όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι διάφοροι του μηδενός και το φάσμα περιέχει φασματικές γραμμές μη μηδενικού ύψους στη θέση καθεμιάς από τις N διακριτές συχνότητες.

Επομένως η ενέργεια του $x[n]$, **δεν είναι συγκεντρωμένη** στις συχνότητες που σχετίζονται με αυτό, αλλά έχει **διαρρεύσει** σε όλες τις συχνότητες $F_k = kF_s/N$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$). Υπάρχει λοιπόν **φασματική διαρροή**.



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πώς μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη φασματική διάχυση και διαρροή;

- Το μέγεθος της διάχυσης είναι ίσο με το **ενεργό εύρος ζώνης** του φάσματος $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ δηλαδή αντιστρόφως ανάλογο της ενεργούς διάρκειας του σήματος $w[n]$.

Η διάχυση λοιπόν ελαττώνεται επιλέγοντας **παράθυρα μεγάλου μήκους**.

- Το φαινόμενο της **διαρροής** ελαττώνεται αυξάνοντας το **βαθμό εξασθένησης του ύψους των παράπλευρων λοβών** επιλέγοντας παράθυρο με μεγάλο βαθμό ομαλότητας (δείτε το σχόλιο στη σελίδα 631).

Συμπέρασμα: το ορθογώνιο παράθυρο είναι **ακατάλληλο** αφού χαρακτηρίζεται από μεγάλο βαθμό ασυνέχειας.

Η ταυτόχρονη ελάττωση της διάχυσης και διαρροής δεν είναι δυνατή!

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Το ορθογώνιο παράθυρο προκαλεί την **ελάχιστη δυνατή φασματική διάχυση** αλλά:

- Οι παράπλευροι λοβοί του φάσματος χαρακτηρίζονται **από μεγάλο μέγεθος και από μικρό σχετικά βαθμό εξασθένησης** μεγιστοποιώντας τη φασματική διαρροή.
- Η ελάττωση του μεγέθους των παράπλευρων λοβών αυξάνοντας το μήκος της ακολουθίας, προκαλεί την αύξηση του ύψους των παράπλευρων λοβών!

Γιατί να μην χρησιμοποιήσουμε τότε ένα παράθυρο που να χαρακτηρίζεται από **μεγαλύτερο βαθμό ομαλότητας**;

Στην περίπτωση αυτή θα διαπιστώσουμε ότι

- Οι παράπλευροι λοβοί είναι μικρότεροι και εξασθενούν **πιο γρήγορα** σε σχέση με αυτούς του ορθογώνιου παραθύρου
- Το εύρος του κεντρικού λοβού είναι **αρκετά μεγαλύτερο** οδηγώντας έτσι σε μεγαλύτερο βαθμό φασματικής διάχυσης!!!

Θα πρέπει λοιπόν να καταφύγουμε σε κάποιο είδος **συμβιβασμού** ανάμεσα στις ανεπιθύμητες επιδράσεις της **φασματικής διάχυσης** και **διαρροής** και να επιλέξουμε εκείνο τον τύπο παραθύρου που θεωρείται ως ο πλέον κατάλληλος για το κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα !!!

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Υπάρχουν πολλοί τύποι διαθέσιμων παραθύρων με κοινό μήκος N δειγμάτων που είναι **συμμετρικά** ως προς το σημείο $n = N/2$ και διαθέτουν **συχνотική απόκριση** που χαρακτηρίζεται από **γενικευμένη γραμμική φάση** και ορίζεται ως

$$\mathcal{W}(e^{j\omega}) = \mathcal{A}(\omega) \exp \left[-j\omega \frac{N-1}{2} \right]$$

Αυτά τα παράθυρα προσφέρουν διαφορετικό βαθμό συμβιβασμών ανάμεσα στο **εύρος του κεντρικού λοβού**, στο **μέγεθος των παράπλευρων λοβών** και το **ρυθμό εξασθένησης**

Συνάρτηση παραθύρου $w[n]$	Εύρος κεντρικού λοβού	Ρυθμός εξασθένησης (dB/octave)	Ύψος μέγιστου παράπλευρου λοβού (dB)
Ορθογώνιο παράθυρο	$4\pi/N$	-06	-13.3
Παράθυρο Bartlett	$8\pi/N$	-12	-26.5
Παράθυρο von Hann	$8\pi/N$	-18	-31.5
Παράθυρο Hamming	$8\pi/N$	-06	-42.7
Παράθυρο Blackman	$12\pi/N$	-18	-58.1

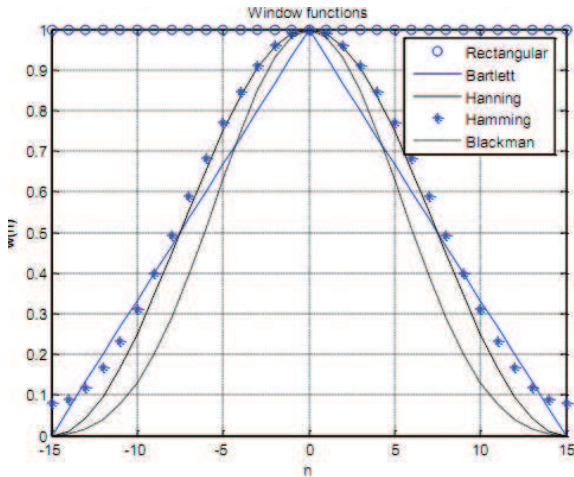
Κατά την επιλογή του παραθύρου η ελάττωση της φασματικής διαρροής θεωρείται **πολύ πιο σημαντική** από την ελάττωση της φασματικής διάχυσης.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



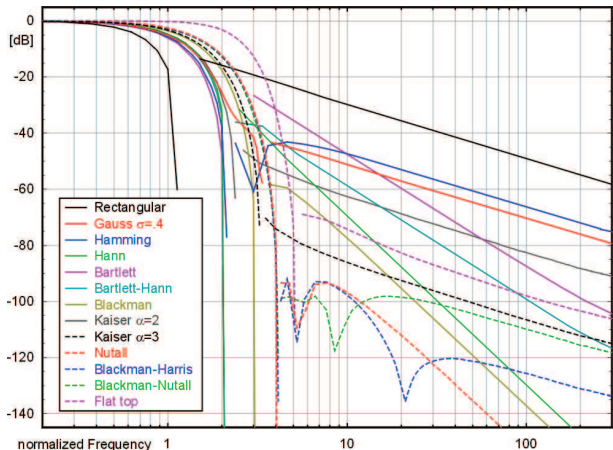
Οι πιο σημαντικές συναρτήσεις παραθύρου

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Συγκριτική παρουσίαση των φασμάτων των πιο γνωστών παραθύρων σε κανονικοποιημένη λογαριθμική κλίμακα

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η **φασματική διάχυση** οδηγεί σε **μείωση της διακριτικής ικανότητας**.

Αυτή ορίζεται ως η **δυνατότητα εντοπισμού γειτονικών συχνοτήτων** του φάσματος $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ μέσα στο φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$ που έχει προκύψει δια της εφαρμογής της συνάρτησης παραθύρου.

Εάν η απόσταση ανάμεσα στις συχνότητες ω_1 και ω_2 του $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ είναι **μικρότερη** από το **εύρος του κεντρικού λοβού** του φάσματος $\mathcal{W}(e^{j\omega})$, αυτές δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους στο φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$, αφού θα **καταπνιγούν** από το φαινόμενο της φασματικής διάχυσης.

Θεωρώντας το άπειρο σήμα $x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n) + A_2 \cos(\omega_2 n)$ ($-\infty < n < \infty$) με συχνότητες $\omega = \omega_1$ και $\omega = \omega_2$, το φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ θα περιέχει **τέσσερις διακριτές φασματικές γραμμές** στις θέσεις $\omega = \pm\omega_1$ και $\omega = \pm\omega_2$.

Εφαρμόζοντας το παράθυρο $w[n]$ το φάσμα $\mathcal{X}(e^{j\omega})$ θα μετατραπεί στο

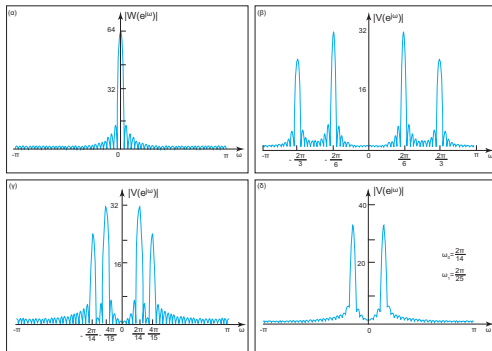
$$\mathcal{Y}(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{2} \mathcal{W}(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} \mathcal{W}(e^{j(\omega+\omega_1)}) + \frac{A_2}{2} \mathcal{W}(e^{j(\omega-\omega_2)}) + \frac{A_2}{2} \mathcal{W}(e^{j(\omega+\omega_2)})$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

Επιλέγοντας ορθογώνιο παράθυρο μήκους $N = 64$, το εύρος του κεντρικού λοβού του $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ είναι $4\pi/N = \pi/16$, τιμή που εκφράζει και το όριο της διακριτικής ικανότητας στο φάσμα $\mathcal{Y}(e^{j\omega})$.

Επομένως, οι συχνότητες ω_1 και ω_2 μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους, μόνο όταν η απόστασή τους είναι ίση ή μεγαλύτερη από $\pi/16$.



Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

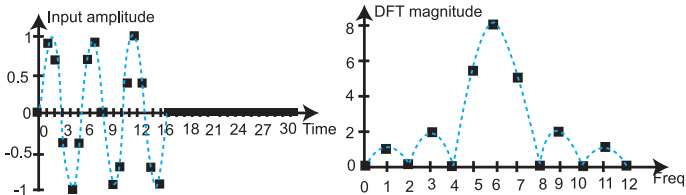
Εάν οι συχνότητες ενδιαφέροντος δεν ταυτίζονται με κάποιες από τις N συχνότητες ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$) του DFT, υφίστανται **εξασθένιση**

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται **μειώνοντας** την απόσταση ανάμεσα στις ω_k κάτι που γίνεται **αυξάνοντας** την τιμή του N .

Εάν δεν διαθέτουμε πρόσθετα δείγματα του $x[n]$, προσθέτουμε απλά p **μηδενικές τιμές** (το νέο μήκος του $x[n]$ είναι $L = N + p$) και υπολογίζουμε εν νέου τον DFT.

Σημειώστε, πως αυτή η προσθήκη μηδενικών τιμών **δεν αυξάνει** τη διακριτική ικανότητα, αφού για να γίνει κάτι τέτοιο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε L **πραγματικά** δείγματα του σήματος εισόδου.

Το επόμενο σχήμα αφορά την περίπτωση $N = 16$ και $p = 16$ οπότε είναι $L = 32$.



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

Οι πιο γνωστές συναρτήσεις παραθύρου παρουσιάζονται στη συνέχεια

- **Παράθυρα von Hann και Hamming:** Περιγράφονται από την εξίσωση

$$w_H[n] = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

με την τιμή $\alpha = 0.5$ να δημιουργεί το **παράθυρο von Hann** που έχει τη μορφή

$$w_H[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] = \cos^2\left(\frac{n\pi}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

και την τιμή $\alpha = 0.54$ να δημιουργεί το παράθυρο **Hamming** που ορίζεται ως

$$w_H[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

- **Παράθυρο Blackman:** Η εξίσωση ορισμού του **παραθύρου Blackman** έχει τη μορφή

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

Τα μέτρα των φασμάτων αυτών των παραθύρων ορίζονται ως (για αποδείξεις και σχόλια ανατρέξτε στις σελίδες 638-639)

Παράθυρο von Hann

$$\mathcal{A}(\omega) = 0.5 \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 0.25 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} \right\}$$

Παράθυρο Hamming

$$\mathcal{A}(\omega) = 0.54 \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 0.23 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} \right\}$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

Παράθυρο Blackman

$$\mathcal{A}(\omega) = 0.42 \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 0.25 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} \right\} + 0.04 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} + \frac{2N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{N-1}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2} - \frac{2N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{N-1}\right)} \right\}$$

Βελτιωμένες εκδόσεις του παραθύρου Blackman είναι τα δύο **παράθυρα Blackman - Harris**

$$w[n] = 0.44959 + 0.49364 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.05677 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$$

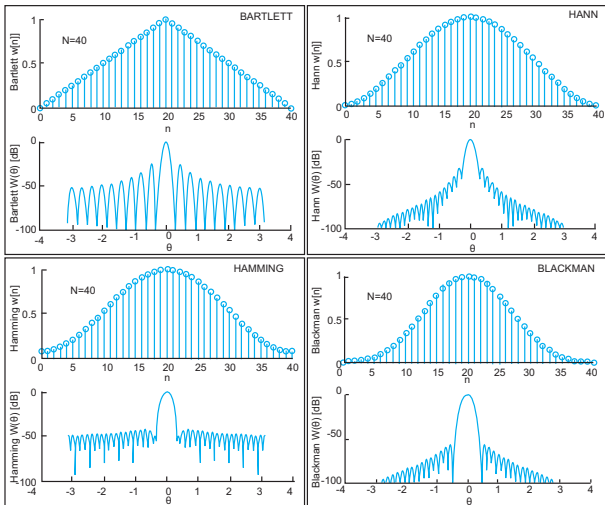
$$w[n] = 0.40217 + 0.49703 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.09892 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) + 0.00183 \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

- **Παράθυρο Bartlett:** περιγράφεται από την εξίσωση

$$w_{BR}[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{για } \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

και υπολογίζεται ως η **συνέλιξη** των ορθογώνιων παραθύρων

$$w_1[n] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{N-1}} & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} - 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases} \quad \text{και} \quad w_2[n] = w_1[n-1]$$

με το φάσμα του να έχει τη μορφή

$$W_{BR}(e^{j\omega}) = W_1(e^{j\omega})W_2(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin[(N-1)\omega/4]}{\sin(\omega/2)} \right]^2 \exp \left[j \frac{\omega(N-1)}{2} \right]$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- **Παράθυρο Tukey:** περιγράφεται από την εξίσωση

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\pi \left(\frac{2n}{\alpha N} - 1 \right) \right] \right\} & \text{για } 0 \leq n < \frac{\alpha N}{2} \\ 1 & \text{για } \frac{\alpha N}{2} \leq n < N \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\pi \left(\frac{2n}{\alpha N} - \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right] \right\} & N \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \leq n \leq N \end{cases}$$

- **Παράθυρο Lanczos:** ορίζεται ως

$$w[n] = \left(\frac{\sin[2\pi(n-L)(N-1)]}{2\pi(n-L)/L} \right)^\ell \quad \ell > 0, \quad L = (N-1)/2$$

- **Παράθυρο Dolph - Chebyshev:** περιγράφεται από την εξίσωση

$$w[n] = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{j\pi}{N} \right) \right] \cos \left(\frac{2n\pi j}{N} \right) \right]$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

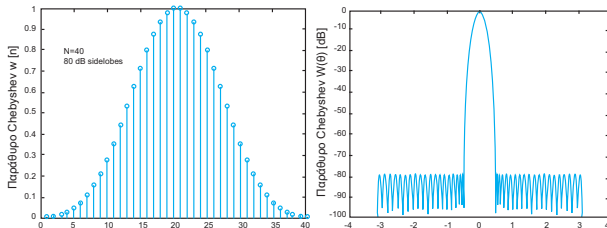
Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

όπου r ο λόγος **εναπομείνουσας διακύμανσης**, δηλαδή ο λόγος του εύρους του μέγιστου παράπλευρου λοβού προς το εύρος του κεντρικού λοβού εκτεφρασμένος σε εκατοστιαίες μονάδες, x_0 η παράμετρος

$$x_0 = \cosh \left(\frac{1}{N-1} \cosh^{-1} \frac{1}{r} \right)$$

ενώ οι συναρτήσεις $T_k(x)$ είναι τα **πολύωνυμα Chebyshev**

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases}$$



Η γραφική παράσταση και το φάσμα του παραθύρου Dolph - Chebyshev.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

- **Παράθυρο Kaiser:** Το παράθυρο Kaiser ορίζεται ως

$$w[n] = \frac{I_0(\alpha \sqrt{L^2 - (n-L)^2})}{I_0(\alpha L)} \quad L = (N-1)/2$$

Η παράμετρος $\alpha \in [0, 4]$ καθορίζει το σχήμα του φάσματος, ενώ I_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξεως πρώτου είδους

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right]^2$$

Το φάσμα του παραθύρου Kaiser δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{W}(\omega) = \frac{2}{I_0(\alpha)} \frac{\sin[2\sqrt{\omega^2 - \omega_\alpha^2}]}{\sqrt{\omega^2 - \omega_\alpha^2}} \quad \omega_\alpha = \alpha/2$$

Η **ελάττωση** της τιμής του α (για σταθερό N), προκαλεί **μείωση** του ύψους των παράπλευρων λοβών και **αύξηση** του εύρους του κεντρικού λοβού.

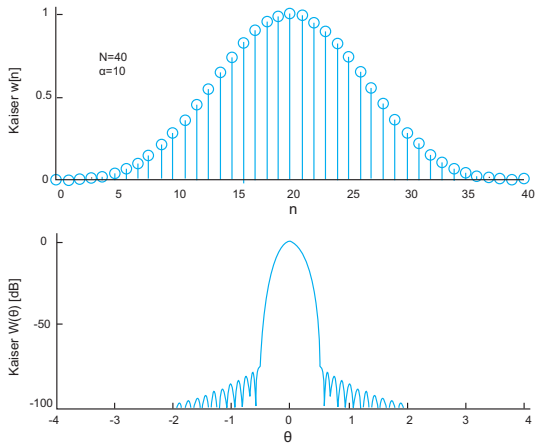
Η **αύξηση** της τιμής του N (για σταθερό α) προκαλεί **ελάττωση** του εύρους του κεντρικού λοβού ενώ το ύψος των παράπλευρων λοβών παραμένει **αμετάβλητο**.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Γραφική παράσταση και φάσμα του παραθύρου Kaiser.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - γνωστές συναρτήσεις παραθύρου

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- Παράθυρο de la Vallé-Puissin

$$w[n] = \begin{cases} 1.0 - 6 \left[\frac{n}{N/2} \right]^2 \left[1.0 - \frac{|n|}{N/2} \right] & 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2} \\ 2 \left[1.0 - \frac{|n|}{N/2} \right]^3 & \frac{N}{4} \leq |n| \leq \frac{N}{2} \end{cases}$$

- Παράθυρο Bohman

$$w[n] = \left[1.0 - \frac{|n|}{N/2} \right] \cos \left[\pi \frac{|n|}{N/2} \right] + \frac{1}{\pi} \sin \left[\pi \frac{|n|}{N/2} \right] \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$$

- Παράθυρο Poisson $w[n] = \exp \left(-\alpha \frac{|n|}{N/2} \right) \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$

- Παράθυρο Hanning-Poisson

$$w[n] = 0.5 \left[1.0 + \cos \left(\pi \frac{n}{N/2} \right) \right] \exp \left(-\alpha \frac{|n|}{N/2} \right) \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$$

- Παράθυρο Cauchy $w[n] = \left[1.0 + \left(\alpha \frac{n}{N/2} \right)^2 \right]^{-1} \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$

- Παράθυρο Riesz $w[n] = 1.0 - \left[\frac{n}{N/2} \right]^2 \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$

- Παράθυρο Riemann $w[n] = \sin \left[\frac{n}{N} 2\pi \right] / \left(\frac{n}{N} 2\pi \right) \quad 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

1) **Εύρος κεντρικού λοβού W_{main}** : αποτελεί το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό κάθε συνάρτησης παραθύρου και είναι **αντιστρόφως ανάλογος** του μήκους του παραθύρου.

Σημαντικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με αυτή την παράμετρο, είναι

- Το εύρος του παραθύρου που αντιστοιχεί σε εξασθένηση 6 dB
- Το εύρος του παραθύρου που αντιστοιχεί σε εξασθένηση 3 dB

Η διάκριση δύο συχνοτήτων στην έξοδο του μετασχηματισμού, απαιτεί συχνοτική απόσταση μεγαλύτερη από την τιμή της πρώτης παραμέτρου.

Για παράθυρα που χαρακτηρίζονται από ικανοποιητική απόδοση ισχύει ότι

$$1.04 \leq \frac{B_{3 \text{ db}}}{B_{\text{eq}}} \leq 1.055$$

όπου B_{eq} το **ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου** που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

2) **Εξασθένηση παράπλευρων λοβών A_{side}** : περιγράφεται (α) από το ύψος του **πρώτου** παράπλευρου λοβού H_{side} και (β) από την **εξασθένηση** του πιο απομακρυσμένου λοβού.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

3) **Ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου B_{eq}** : ορίζεται ως το εύρος του **ιδανικού ορθογώνιου παραθύρου** που προκαλεί τη συσσώρευση της ίδιας ισχύος θορύβου με τη συνάρτηση παραθύρου που θεωρούμε, για την ίδια τιμή του μέγιστου κέρδους ισχύος.

Εάν το παράθυρο εφαρμοσθεί σε σήμα που περιέχει **λευκό θόρυβο μηδενικού μέσου όρου**, η συνολική ισχύς του θορύβου είναι

$$P_w = \frac{N_0}{2} \int_{-1/2T}^{+1/2T} |\mathcal{W}(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

όπου N_0 η **ισχύς θορύβου ανά μονάδα εύρους ζώνης** και T η **περίοδος της δειγματοληψίας** στο πεδίο του χρόνου.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως αυτή η ισχύς για το ιδανικό φίλτρο είναι $P_F = N_0 B [\mathcal{W}(0)]^2$ διαπιστώνουμε ότι

$$2B_{eq} = \frac{1}{2[\mathcal{W}(0)]^2} \int_{-1/2T}^{+1/2T} |\mathcal{W}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \left\{ \sum_n w^2[nT] \right\} / \left\{ 2 \left(\sum_n w[nT] \right)^2 \right\}$$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

4) Συντελεστές κέρδους και εξασθένησης λόγω επεξεργασίας G_p και L_p : ο μετασχηματισμός DFT ενός σήματος $x[n]$ υπολογίζεται επακριβώς από μία συστοιχία

N ζωνοπερατών φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

με την κεντρική συχνότητα του κάθε φίλτρου να ταυτίζεται με κάποια από τις N διακριτές συχνότητες ω_k .

Το μέγεθος SNR ορίζεται ως ο λόγος της ισχύος του σήματος S προς την ισχύ του θορύβου N που περιλαμβάνεται σε αυτό.

Ο λόγος των τιμών του SNR στην είσοδο και στην έξοδο του φίλτρου που υλοποιεί το DFT, ονομάζεται κέρδος επεξεργασίας G_p

$$G_p = \frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}} = \frac{S_{\text{out}}/N_{\text{out}}}{S_{\text{in}}/N_{\text{in}}}$$

και αποδεικνύεται (δείτε τις σελίδες 646-647) πως έχει τη μορφή $G_p = \frac{1}{2B_{\text{eq}}}$ όπου B_{eq} το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου.

Το αντίστροφο του κέρδους επεξεργασίας $L_p = 1/G_p = 2B_{\text{eq}}$ είναι γνωστό ως εξασθένηση επεξεργασίας.

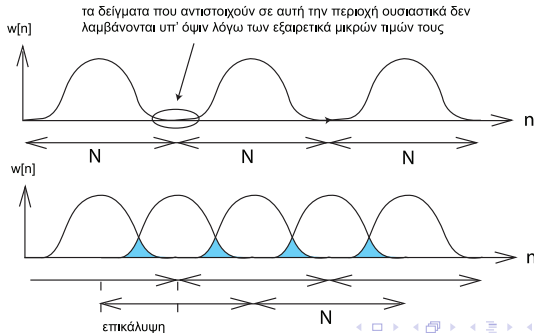
Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

5) Συντελεστής συσχέτισης λόγω επικάλυψης $c(r)$: εάν το σήμα $x[n]$ έχει μεγάλο μήκος το διαχωρίζουμε σε μικρότερες ακολουθίες μήκους N επί των οποίων εφαρμόζουμε τη συνάρτηση παραθύρου.

Τα δείγματα του $w[n]$ χαρακτηρίζονται από ολοένα και μικρότερες τιμές καθώς πλησιάζουμε στα άκρα του παραθύρου.

Για το λόγο αυτό τα διαδοχικά τμήματα στα οποία χωρίζουμε το αρχικό σήμα, επικαλύπτονται, με το ποσοστό επικάλυψης r να κυμαίνεται από 50% έως 75%.



Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ο βαθμός συσχέτισης ανάμεσα στα επικαλυπτόμενα τμήματα περιγράφεται από το συντελεστή συσχέτισης

$$c(r) = \left\{ \sum_{n=0}^{rN-1} \left\{ w[n]w[n + (1-r)N] \right\} \right\} / \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n] \right\}$$

Τα δείγματα του σήματος που βρίσκονται στην περιοχή της επικάλυψης υφίστανται την επίδραση δύο διαδοχικών παραθύρων, των $w_1[n]$ και $w_2[n]$.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε άλλους δύο συντελεστές απόδοσης που είναι οι

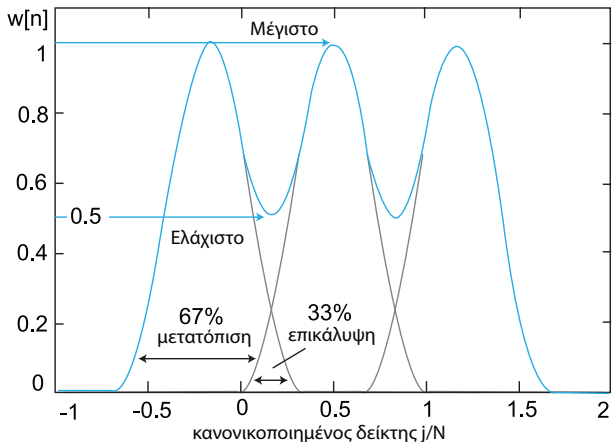
- **Συντελεστής AF (Amplitude Flatness)** που ορίζεται ως ο λόγος του ελάχιστου συνολικού βάρους που μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιοδήποτε σημείο προς το μέγιστο συνολικό βάρος.
- **Συντελεστής PF (Power Flatness)** που ορίζεται ως το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών των δειγμάτων $w_1[k]$ και $w_2[k]$

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



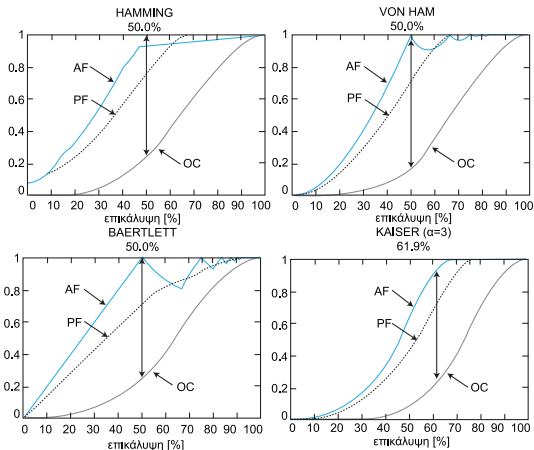
Ορισμός του συντελεστή AF για την περίπτωση **διαδοχικών παραθύρων Hamming** με ποσοστό επικάλυψης 33%.

Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Μεταβολή των συντελεστών **AF**, **PF** και **C(r)** συναρτήσει του **εκατοστιαίου ποσοστού επικάλυψης** για τα παράθυρα Hamming, von Hann, Bartlett και Kaiser.

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Συντελεστής πρόσθετης εξασθένησης L_s : αφορά την εξασθένηση που υφίστανται συχνότητες οι οποίες δεν συμπίπτουν με τις βασικές συχνότητες του DFT.

Ο βαθμός εξασθένησης εξαρτάται από την απόσταση της συχνότητας του σήματος από τις βασικές συχνότητες.

Στη χειρότερη δυνατή περίπτωση, η συχνότητα του $x[n]$ βρίσκεται ακριβώς στο μέσο δύο βασικών συχνοτήτων, δηλαδή είναι της μορφής $(k + \frac{1}{2})f_s/N$.

Στην περίπτωση αυτή ο **συντελεστής πρόσθετης εξασθένησης** ορίζεται ως

ο λόγος του σύμφωνου κέρδους για σήμα $x[n]$ συχνότητας $(k + \frac{1}{2})f_s/N$ προς το σύμφωνο κέρδος για σήμα $x[n]$ η συχνότητα του οποίου ταυτίζεται με κάποια από τις **βασικές συχνότητες** του DFT

θα είναι λοιπόν

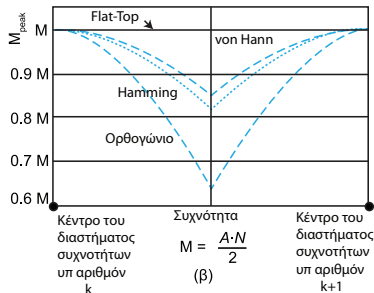
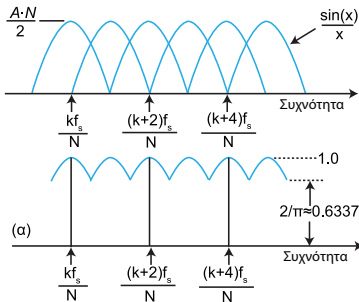
$$L_s = \frac{G_{\text{coh}}(\omega_{k+\frac{1}{2}})}{G_{\text{coh}}(\omega_k)} = \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[nT] \exp\left(j\frac{\pi}{N}n\right) \right| \right\} / \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} w[nT] \right\} = \frac{\left| \mathcal{W}\left(\frac{\pi}{NT}\right) \right|}{\mathcal{W}(0)}$$

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Τα παραπάνω αφορούν το ορθογώνιο παράθυρο που οδηγεί στη μέγιστη εξασθένιση.

Η κατάσταση βελτιώνεται χρησιμοποιώντας άλλα παράθυρα οι λοβοί των οποίων χαρακτηρίζονται από **μεγαλύτερο βαθμό επικάλυψης**.

Θεωρώντας ένα ημιτονοειδές σήμα πλάτους A , η μέγιστη τιμή M του πλάτους του DFT θα ανήκει στην περιοχή τιμών

$$0.637AN/2 \leq M \leq AN/2$$

Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Χρήση συνάρτησης παραθύρου - συντελεστές απόδοσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Αυτή η πρόσθετη εξασθένηση εκμηδενίζεται πλήρως με ειδικά παράθυρα (flat-top windows) η απόκριση πλάτους των οποίων είναι όσο το δυνατό πιο επίπεδη.

Τα παράθυρα αυτά ορίζονται από μία σχέση της μορφής

$$w[n] = \sum_{k=0}^M \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3 \leq M \leq 5)$$

Η καμπύλη και το φάσμα ενός flat-top window παρουσιάζονται στη συνέχεια.

