

Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των s (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5)

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Ι. ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2014

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

Έστω **συνεχές σύστημα LTI** με κρουστική απόκριση $h(t)$ και έξοδο

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της θα έχουμε

$$\mathcal{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\}\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος ισούται με το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace της κρουστικής του απόκρισης και της εισόδου που διαβιβάζεται σε αυτό.

Εάν το σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \alpha_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) &= \\ = \beta_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \beta_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + \beta_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_0 x(t) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, σε συνεπτυγμένη μορφή

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^M \beta_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

η παραπάνω διαδικασία θα μας δώσει

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i \mathcal{L} \left\{ \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right\} = \sum_{j=0}^M \beta_j \mathcal{L} \left\{ \frac{d^j x(t)}{dx^j} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της διαφόρισης μπορούμε να γράψουμε

$$\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i s^i \right) \mathcal{L}\{y(t)\} - \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\sum_{k=1}^i s^{i-k} y^{(i-k)}(0) \right) =$$
$$\left(\sum_{j=0}^M \beta_j s^j \right) \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{j=1}^M \beta_j \left(\sum_{\ell=1}^j s^{j-\ell} x^{(j-\ell)}(0) \right)$$

Υποθέτοντας ότι $y^{(i)}(0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) και $x^{(j)}(0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, M$), θα είναι

$$\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i s^i \right) \mathcal{L}\{y(t)\} = \left(\sum_{j=0}^M \beta_j s^j \right) \mathcal{L}\{x(t)\}$$

και επομένως

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s) &= \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \left\{ \sum_{j=0}^M \beta_j s^j \right\} / \left\{ \sum_{i=0}^N \alpha_i s^i \right\} \\ &= \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_{M-1} s^{M-1} + \beta_M s^M}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N} \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$ και $\mathcal{X}(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\}$. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος **εξαρτάται μόνο από τις τιμές των παραμέτρων του** - δηλαδή των συντελεστών που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση ορισμού του - **ενώ είναι ανεξάρτητη από το σήμα εισόδου που εφαρμόζεται επί αυτού**

Στις ρητές συναρτήσεις μεταφοράς θα πρέπει ο βαθμός M του πολυωνύμου του αριθμητή να είναι μικρότερος - ή τουλάχιστον ίσος - από το βαθμό N του πολυωνύμου του παρονομαστή, αφού στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα είναι **ασταθές κατά BIBO**.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Εξισώσεις και βασικοί ορισμοί

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Πράγματι, εάν είναι $M > N$, τότε η εφαρμογή της **πολυωνυμικής διαίρεσης** θα μας δώσει

$$\mathcal{H}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \overbrace{c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_1 s + c_0}^{R(s)} + \frac{Q(s)}{D(s)}$$

όπου $k = M - N$ και $d = \deg[D(s)] < N$. Χρησιμοποιώντας το φραγμένο σήμα εισόδου $x(t) = u(t)$ με $\mathcal{X}(s) = 1/s$ θα έχουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s) = \frac{\mathcal{H}(s)}{s} = c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \dots + c_1 + \frac{c_0}{s} + \frac{Q(s)}{sD(s)}$$

και επομένως η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(t) = c_k \mathcal{L}^{-1}\{s^{k-1}\} + c_{k-1} \mathcal{L}^{-1}\{s^{k-2}\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{c_1\} + c_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{sD(s)}\right\}$$

Είναι όμως $\mathcal{L}^{-1}\{c_1\} = \mathcal{L}^{-1}\{c_1 \cdot 1\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{1\} = c_1 \delta(t)$ και κατά συνέπεια η έξοδος $y(t)$ θα περιέχει την **κρουστική συνάρτηση** $\delta(t)$ η οποία **δεν είναι φραγμένη**. Άρα το σύστημα **δεν είναι ευσταθές κατά BIBO**.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Παράδειγμα 1

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς των συνεχών συστημάτων

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \quad \text{και} \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

(α) Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής

$$\alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$

με $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = -2$ και $\beta_0 = 1$. Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$$

(β) Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής

$$\alpha_3 y'''(t) + \alpha_2 y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$

με $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 11$, $\alpha_0 = 1$ και $\beta_0 = 1$ από όπου προκύπτει ότι

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Παράδειγμα 2

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 4\mathcal{L}\{x(t)\}$$

ή ισοδύναμα

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

και τελικά

$$Y(s) \left[s^2 + 5s + 6 \right] = X(s) (s + 4)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 4}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s + 4}{(s + 2)(s + 3)} \quad \text{και}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 4}{(s + 2)(s + 3)}\right\} = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Παράδειγμα 2

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε εργαζόμενοι αντίστροφα να υπολογίσουμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος. Για το προηγούμενο παράδειγμα,

$$\text{είναι } \mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{s+4}{s^2+5s+6} \quad \text{και επομένως} \quad \mathcal{Y}(s)(s^2+5s+6) = \mathcal{X}(s)(s+4)$$

ή ισοδύναμα

$$s^2\mathcal{Y}(s) + 5s\mathcal{Y}(s) + 6\mathcal{Y}(s) = s\mathcal{X}(s) + 4\mathcal{X}(s)$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^2\mathcal{Y}(s)\} + 5\mathcal{L}^{-1}\{s\mathcal{Y}(s)\} + 6\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{s\mathcal{X}(s)\} + 4\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\}$$

και τελικά

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος LTI είναι μια ρητή συνάρτηση της μορφής

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots + \beta_{M-1} s^{M-1} + \beta_M s^M}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N}$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_M}{\alpha_N} \left\{ \frac{s^M + \frac{\beta_{M-1}}{\beta_M} s^{M-1} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_M} s + \frac{\beta_0}{\beta_M}}{s^N + \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} s^{N-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_N} s + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}} \right\} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

όπου $K = \beta_M / \alpha_N$ και

$$N(s) = s^M + \frac{\beta_{M-1}}{\beta_M} s^{M-1} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_M} s + \frac{\beta_0}{\beta_M} \quad D(s) = s^N + \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} s^{N-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_N} s + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}$$

Εάν παραγοντοποιήσουμε τα πολυώνυμα $N(s)$ και $D(s)$ γράφοντάς τα με τη μορφή

$$N(s) = \prod_{i=1}^M (s - z_i) = (s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_M)$$
$$D(s) = \prod_{j=1}^N (s - p_j) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_N)$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\beta_M}{\alpha_N} \left\{ \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_N)} \right\}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε τα **μηδενικά της συνάρτησης** ως τις ρίζες $s = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) της εξίσωσης $N(s) = 0$ και τους **πόλους της συνάρτησης**, ως τις ρίζες $s = p_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) της εξίσωσης $D(s) = 0$.

Η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ **μηδενίζεται στις θέσεις των μηδενικών** ενώ **απειρίζεται στις θέσεις των πόλων** έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{s \rightarrow z_i} \mathcal{H}(s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{και} \quad \lim_{s \rightarrow p_j} \mathcal{H}(s) = \infty \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι **είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί** οι οποίοι **μάλιστα θα εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών**.

Η σχεδίαση των πόλων και των μηδενικών επί του μιγαδικού επιπέδου χρησιμοποιώντας το σύμβολο **X** για τους πόλους και το σύμβολο **O** για τις μηδενικές τιμές οδηγεί στο **διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών**.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

Εάν στη διαφορική εξίσωση του συστήματος μηδενίσουμε την είσοδο $x(t)$ και όλες τις παραγώγους της θα λάβουμε

$$\alpha_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = 0$$

Θεωρώντας εκθετικές λύσεις $y(t) = e^{\lambda t}$, καταλήγουμε στο **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**

$$\alpha_N \lambda^N + \alpha_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

με ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ οι οποίες θεωρούνται **διακριτές μεταξύ τους**. Επομένως η παραπάνω εξίσωση διαθέτει ως λύσεις τις συναρτήσεις

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ενώ η γενική λύση της - που εκφράζει και την **απόκριση μηδενικής εισόδου** - θα είναι η

$$y(t) = \sum_{i=1}^N C_i y_i(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{\lambda_i t}$$

με τις σταθερές C_i να υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Συγκρίνοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με τη σχέση

$$\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N = 0$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

διαπιστώνουμε πως οι εξισώσεις είναι ίδιες και προφανώς θα έχουν τις ίδιες ρίζες.
Επομένως

οι πόλοι του συστήματος ταυτίζονται με τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y(t) = \sum_{i=1}^N C_i y_i(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος στο χώρο κατάστασης δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό πως

οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και οι ιδιοτιμές του πίνακα συστήματος \mathbf{A} , εκφράζουν ακριβώς το ίδιο πράγμα

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις όσον αφορά τη φύση των πόλων του συστήματος:

- **Πόλος με μηδενική τιμή:** εάν κάποιος πόλος p_k έχει τιμή ίση με το μηδέν, η συνιστώσα της εξόδου του συστήματος που αντιστοιχεί σε αυτόν θα είναι $y_k(t) = C_k$. Θα είναι λοιπόν

$$y(t) = C_k + \sum_{i=1, i \neq k}^N C_i e^{p_i t}$$

και επομένως η έξοδος του συστήματος θα διαθέτει **μία συνιστώσα σταθερού πλάτους** με τιμή C_k .

- **Πραγματικός πόλος με αρνητική τιμή:** εάν υπάρχει πραγματικός πόλος $p_k = -\xi$ η αντίστοιχη συνιστώσα της εξόδου

$$y_k(t) = C_k e^{-\xi t}$$

θα **ελαττώνεται** εκθετικά σε συνάρτηση με το χρόνο **με το ρυθμό της ελάττωσης να εξαρτάται από τη θέση του πόλου επί του πραγματικού άξονα.**

- Εάν ο πόλος έχει μεγάλη τιμή, η απόσβεση της συνιστώσας είναι ραγδαία.
- Εάν ο πόλος έχει μικρή τιμή, ο ρυθμός απόσβεσης είναι μικρός.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

- **Πραγματικός πόλος με θετική τιμή:** εάν υπάρχει πραγματικός πόλος $p_k = \xi$ η αντίστοιχη συνιστώσα της εξόδου του συστήματος

$$y_k(t) = C_k e^{\xi t}$$

θα αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο με το ρυθμό της αύξησης να εξαρτάται από τη θέση του πόλου επί του πραγματικού άξονα.

Ένα τέτοιο σύστημα θα είναι **ασταθές** αφού στο όριο $t \rightarrow \infty$ θα είναι

$$\lim y(t) = \infty$$

- **Μιγαδικός πόλος:** εάν υπάρχει μιγαδικός πόλος $p_k = \sigma + j\omega$, θα πρέπει υποχρεωτικά να υπάρχει **και ο συζυγής μιγαδικός πόλος** $p_{k'} = \sigma - j\omega$ με τη συνεισφορά αυτών των δύο πόλων στην έξοδο του συστήματος να υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} y_{k,k'}(t) &= C_k e^{p_k t} + C_{k'} e^{p_{k'} t} = C_k e^{(\sigma + j\omega)t} + C_{k'} e^{(\sigma - j\omega)t} = C_k e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \\ &+ C_{k'} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = C_k e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] + C_{k'} e^{\sigma t} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] \\ &= e^{\sigma t} \cos(\omega t) (C_k + C_{k'}) + e^{\sigma t} \sin(\omega t) [j(C_k - C_{k'})] \end{aligned}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

Ορίζοντας τους νέους συντελεστές $A = C_k + C_{k'}$ και $B = j(C_k - C_{k'})$ έχουμε

$$\begin{aligned}y_{k,k'}(t) &= Ae^{\sigma t} \cos(\omega t) + Be^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) \right) e^{\sigma t} \\ &= Ce^{\sigma t} \left[\sin \varphi \cos(\omega t) + \cos \varphi \sin(\omega t) \right] = Ce^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

όπου έχουμε ορίσει τις ποσότητες

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

και χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$. Επομένως

η συνεισφορά ενός ζεύγους συζυγών μιγαδικών πόλων στην απόκριση μηδενικής εισόδου, είναι μία ημιτονοειδής ταλάντωση συχνότητας ω , φάσης φ και πλάτους $Ce^{\sigma t}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις στο όριο $t \rightarrow \infty$:

- $\sigma \equiv \Re\{s\} < 0$: το πλάτος $Ce^{\sigma t}$ τείνει στο μηδέν και το σύστημα είναι **ευσταθές**.
- $\sigma \equiv \Re\{s\} > 0$: το πλάτος $Ce^{\sigma t}$ τείνει στο άπειρο και το σύστημα είναι **ασταθές**.

Οι σταθερές C και φ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές

- **Φανταστικός πόλος:** εάν η συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει έναν αμιγώς φανταστικό πόλο της μορφής $p_k = e^{j\omega}$ τότε θα εμφανίζεται υποχρεωτικά και ο συζυγής ως προς αυτόν πόλος $p_{k'} = e^{-j\omega}$.

Αυτή η περίπτωση είναι μερική περίπτωση της προηγούμενης για την τιμή $\sigma = 0$ η οποία επομένως οδηγεί σε μία συνεισφορά της μορφής

$$y_{k,k'} = C \sin(\omega t + \varphi)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως

η συνεισφορά ενός ζεύγους αμιγώς φανταστικών συζυγών πόλων στην απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος, είναι μία ημιτονοειδής ταλάντωση σταθερού πλάτους C και φάσης φ

Οι σταθερές C και φ υπολογίζονται και πάλι με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές ανωτέρας τάξεως

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ που περιέχει N διακριτούς πόλους p_1, p_2, \dots, p_N με τιμές πολλαπλότητας m_1, m_2, \dots, m_N . Στην περίπτωση αυτή, το συνολικό πλήθος των πόλων του συστήματος θα είναι

$$P = \sum_{k=1}^N m_k$$

Υποθέτοντας πως τα σύνολα των πόλων και των μηδενικών τιμών **δεν έχουν κοινά στοιχεία** η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται

$$\mathcal{H}(s) = N(s) / \left\{ \prod_{k=1}^N (s - p_k)^{m_k} \right\}$$

και αναπτύσσοντας τη συνάρτηση σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$\mathcal{H}(s) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(s - p_k)^m} \quad \text{όπου}$$

$$c_{km} = \frac{1}{(m_k - m)!} \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{d^{(m_k - m)}}{ds^{(m_k - m)}} \left\{ N(s) / \prod_{r=1, r \neq k}^N (s - p_r)^{m_r} \right\}$$

Συνάρτηση μεταφοράς συνεχών συστημάτων

Πόλοι και μηδενικές τιμές ανωτέρας τάξεως

η τιμή του υπολοίπου που αντιστοιχεί στον πόλο p_k με τιμή πολλαπλότητας m_k .

Επομένως, ένας πόλος p_k με τιμή πολλαπλότητας m_k συνεισφέρει στη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ ένα άθροισμα m_k όρων της μορφής

$$\frac{c_{k1}}{s - p_k} + \frac{c_{k2}}{(s - p_k)^2} + \frac{c_{k3}}{(s - p_k)^3} + \dots + \frac{c_{km_k}}{(s - p_k)^{m_k}}$$

με τις τιμές των συντελεστών $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{km_k}$ να δίδονται από την παραπάνω σχέση.

Έχοντας προσδιορίσει τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ ως τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)$. Θα είναι λοιπόν

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{m_k} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - p_k)^m}\right\} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} e^{p_k t} t^{m-1}$$

Επομένως η συνεισφορά του πόλου p_k με τιμή πολλαπλότητας m_k στην κρουστική απόκριση του συστήματος, θα είναι το άθροισμα των m_k όρων

$$c_{k1}e^{p_k t} + c_{k2}te^{p_k t} + \frac{c_{k3}}{2!}t^2e^{p_k t} + \frac{c_{k4}}{3!}t^3e^{p_k t} + \dots + \frac{c_{km_k}}{(m_k - 1)!}t^{m_k-1}e^{p_k t}$$

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Κριτήρια αιτιότητας και ευστάθειας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα συνεχές σύστημα LTI είναι **αιτιατό** όταν η κρουστική του απόκριση είναι **αιτιατό σήμα**, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη $h(t) = 0$ για $t < 0$.

Επομένως η συνάρτηση $h(t)$ είναι **σήμα δεξιάς πλευράς** και η περιοχή σύγκλισης της $\mathcal{H}(s)$ είναι ένα **δεξιό ημιπέπεδο**.

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή, η αιτιότητα διασφαλίζεται εάν η περιοχή σύγκλισης περιγράφεται από την εξίσωση $\sigma > \sigma_{max}$ όπου σ_{max} είναι το **μέγιστο πραγματικό μέρος** όλων των πόλων της $\mathcal{H}(s)$.

Ένα συνεχές σύστημα LTI είναι **αντιατιατό** όταν η κρουστική του απόκριση είναι ένα **αντιατιατό σήμα**, δηλαδή ικανοποιεί την ιδιότητα $h(t) = 0$ για $t > 0$.

Επομένως η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι ένα **σήμα αριστερής πλευράς** και η περιοχή σύγκλισης της $\mathcal{H}(s)$ είναι ένα **αριστερό ημιπέπεδο**.

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή, η αντιαιτιότητα διασφαλίζεται εάν η περιοχή σύγκλισης περιγράφεται από την εξίσωση $\sigma < \sigma_{min}$ όπου σ_{min} είναι το **ελάχιστο πραγματικό μέρος** όλων των πόλων της $\mathcal{H}(s)$.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Κριτήρια αιτιότητας και ευστάθειας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ένα συνεχές σύστημα LTI είναι **ευσταθές** όταν η απόκρισή του σε φραγμένο σήμα εισόδου **είναι ένα φραγμένο σήμα εξόδου** (ευστάθεια BIBO). Θεωρώντας ένα φραγμένο αιτιατό σήμα εισόδου $x(t)$ με $|x(t)| \leq M$ για κάθε t , η παραπάνω συνθήκη μας δίνει

$$\begin{aligned} |y(t)| = |h(t) * x(t)| &= \left| \int_0^\infty h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^\infty |h(\tau)| \cdot |x(t - \tau)| d\tau \\ &\leq M \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνο όταν η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι **απόλυτως ολοκληρώσιμη**, ικανοποιεί δηλαδή τη συνθήκη

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty$$

ήτοι, η συνθήκη της **απόλυτης ολοκληρωσιμότητας** αποτελεί προϋπόθεση για το χαρακτηρισμό ενός συστήματος LTI ως ευσταθές.

Αποδεικνύεται πως αυτή η συνθήκη διασφαλίζεται **μόνο εάν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς περιέχει το φανταστικό άξονα $s = j\omega$.**

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Κριτήρια αιτιότητας και ευστάθειας

Εάν η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ ενός **αιτιατού** συστήματος LTI είναι **ρητή** αποδεικνύεται πως ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός τέτοιου συστήματος είναι τα **πραγματικά μέρη όλων των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς να είναι αρνητικοί αριθμοί**.

Πράγματι, εάν p_1, p_2, \dots, p_N είναι οι πόλοι της $\mathcal{H}(s)$ με πολλαπλότητες m_1, m_2, \dots, m_N , το μέτρο της εξόδου $y(t)$ είναι

$$|y(t)| \leq M \int_0^\infty |h(t)| dt \equiv M \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left| \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_k t} \right| dt \right\}$$

Το ολοκλήρωμα που βρίσκεται στην τελευταία σχέση διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_k t} \right| dt &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} \int_0^t t^{m-1} |e^{p_k t}| dt \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} \int_0^t t^{m-1} e^{\Re\{p_k\}t} dt \end{aligned}$$

αφού ο πόλος p_k είναι μιγαδική μεταβλητή της μορφής $p_k = \Re\{p_k\} + j\Im\{p_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) ενώ ως γνωστόν,

$$|e^{p_k t}| = |e^{\Re\{p_k\}t + j\Im\{p_k\}t}| = |e^{\Re\{p_k\}t}| |e^{j\Im\{p_k\}t}| = e^{\Re\{p_k\}t}$$

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Κριτήρια αιτιότητας και ευστάθειας

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η τιμή της παραπάνω παράστασης στο όριο $t \rightarrow \infty$ είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν είναι $\Re\{p_k\} < 0$ και αποδεικνύεται ότι δίδεται από τη σχέση

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{km}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{\Re\{p_k\}t} dt = \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{mk}}{(-\Re\{p_k\})^m} < \infty$$

Επομένως η συνθήκη της απόλυτης ολοκληρωσιμότητας ισχύει μόνο **όταν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη**. Αυτή η συνθήκη εκτός από ικανή είναι και αναγκαία, αφού αποδεικνύεται ότι

- εάν η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ περιέχει πόλους που κείνται **επί του φανταστικού άξονα**, το σύστημα που περιγράφει είναι ασταθές κατά BIBO (δείτε την Άσκηση 5.4.1 στη σελίδα 281).
- εάν η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ περιέχει ένα πόλο που βρίσκεται **στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων**, το σύστημα που περιγράφει είναι ασταθές κατά BIBO (δείτε την Άσκηση 5.4.2 στη σελίδα 282).

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Απαλειφή κοινών πόλων - μηδενικών τιμών

Εάν κάποια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s) = \mathcal{Y}(s)/\mathcal{X}(s)$, διαθέτει ένα πόλο και μια μηδενική τιμή στην ίδια θέση $s = \alpha$, η απλοποίηση του κοινού όρου $(s - \alpha)$ από τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενδέχεται να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα όσον αφορά την **ευστάθεια** του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω η ρητή συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{s - 2}{s^2 + 2s - 8}$$

Παρατηρώντας ότι $s^2 + 2s - 8 = (s - 2)(s + 4)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s - 2}{(s + 4)(s - 2)} = \frac{1}{s + 4}$$

και να ισχυρισθούμε πως αφού η συνάρτηση περιέχει πόλο με αρνητικό πραγματικό μέρος στη θέση $s = -4$, ο σύστημα είναι ευσταθές. Αλλά αυτό είναι λάθος!!! **το σύστημα είναι ασταθές.**

Πράγματι, η διαφορική εξίσωση του συστήματος αποδεικνύεται πως είναι η

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t)$$

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Απαλειφή κοινών πόλων - μηδενικών τιμών

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace λαμβάνουμε

$$s^2\mathcal{Y}(s) - s\mathcal{Y}(0) - \dot{y}(0) + 2s\mathcal{Y}(s) - 2\mathcal{Y}(0) - 8\mathcal{Y}(s) = s\mathcal{X}(s) - x(0) - 2\mathcal{X}(s)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s-2}{s^2+2s-8}\mathcal{X}(s) + \frac{s+2}{s^2+2s-8}y(0) + \frac{\dot{y}(0)}{s^2+2s-8} - \frac{x(0)}{s^2+2s-8}$$

Θεωρώντας για λόγους απλότητας ότι $\dot{y}(0) = x(0) = 0$, έχουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s-2}{s^2+2s-8}\mathcal{X}(s) + \frac{s+2}{s^2+2s-8}y(0)$$

και επομένως η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται ως

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+2s-8}\mathcal{X}(s)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s-8}\right\}y(0)$$

και επειδή είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = \frac{2}{3}e^{2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-4t}u(t)$$

το σύστημα είναι ασταθές, αφού ο όρος e^{2t} απειρίζεται στο όριο $t \rightarrow \infty$.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Απαλειφή κοινών πόλων - μηδενικών τιμών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό; Η παράσταση που υπολογίσαμε στην τελευταία σχέση είναι η **φυσική απόκριση του συστήματος** η οποία γενικά έχει τη μορφή

$$y(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_N e^{p_N t}$$

όπου p_1, p_2, \dots, p_N οι N πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς. Αυτό σημαίνει πως ακόμα και εάν κάποιος πόλος p_k ακυρωθεί από κάποιο μηδενικό $z_k = p_k$, ο όρος $C_k e^{p_k t}$, **δεν πρόκειται να απομακρυνθεί από τη φυσική απόκριση του συστήματος.**

Εάν τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή της $\mathcal{H}(s)$ **δεν διαθέτουν κοινές ρίζες**, τότε

- Το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι της $\mathcal{H}(s)$ διαθέτουν αρνητικά πραγματικά μέρη.
- Το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **ασταθές** αν και μόνο αν (α) υπάρχει τουλάχιστον ένας πόλος με θετικό πραγματικό μέρος ή/και (β) υπάρχουν επαναλαμβανόμενοι πόλοι πάνω στο φανταστικό άξονα.
- Το σύστημα χαρακτηρίζεται ως **οριακά ευσταθές** αν και μόνο αν δεν υπάρχουν πόλοι με θετικό πραγματικό μέρος και διακριτοί πόλοι πάνω στο φανταστικό άξονα.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εάν ο προσδιορισμός των πόλων της $\mathcal{H}(s)$ δεν είναι εύκολος, η ευστάθεια του συστήματος προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας το **κριτήριο Ruth-Hurwitz**.

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί **τους συντελεστές του πολυώνυμου του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς** και μας πληροφορεί για το πλήθος των πόλων που ανήκουν στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή κείνται επί του φανταστικού άξονα.

Ένα πολυώνυμο όλες οι ρίζες του οποίου έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη ονομάζεται **πολυώνυμο Hurwitz**.

Θεωρώντας ένα πολυώνυμο βαθμού N της μορφής

$$P(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N$$

ο πίνακας πίνακα Hurwitz $H(P) \in R^{N \times N}$ ορίζεται ως

$$H(p) = \begin{bmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} & \alpha_N & \dots & 0 \\ \alpha_{N-5} & \alpha_{N-4} & \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

και με τη βοήθειά του ορίζονται οι υποπίνακες $\mathbf{H}_k(P) \in R^{k \times k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ως

$$\mathbf{H}_k(P) = \{\mathbf{H}(P)_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k)$$

Δηλαδή, ο πίνακας $\mathbf{H}_k(P)$ ορίζεται ως ο υποπίνακας διαστάσεων $k \times k$ που ορίζεται ξεκινώντας από το επάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα $\mathbf{H}(p)$.

Οι ορίζουσες $D_k = \det[\mathbf{H}_k(P)]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) των πινάκων $\mathbf{H}_k(p)$ είναι γνωστές ως **ορίζουσες Hurwitz**.

Σύμφωνα με το **θεώρημα του Hurwitz** ένα πολυώνυμο είναι **τύπου Hurwitz** αν και μόνο αν για τιμή συντελεστή $\alpha_n > 0$, όλες οι ορίζουσες Hurwitz οι οποίες ορίζονται ως

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha_{N-1} & D_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} \end{vmatrix} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{N-3} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} & \alpha_N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ D_N &= \alpha_N D_{N-1} \end{aligned}$$

έχουν τιμές **μεγαλύτερες του μηδενός**.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Έστω το πολυώνυμο $P(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 12$ βαθμού $N = 5$ με τιμές συντελεστών $\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3$ και $\alpha_5 = 1$.

Εφαρμόζοντας το **κριτήριο του Hurwitz** διαπιστώνουμε ότι

$$D_1 = \alpha_4 = 3 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -22 < 0$$

Παρατηρούμε πως εφ' όσον η ορίζουσα D_3 βρέθηκε να έχει αρνητική τιμή, το πολυώνυμο είναι **ασταθές** και δεν υπάρχει λόγος να συνεχίσουμε τη διαδικασία.

Στην αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να υπολογίσουμε τις ορίζουσες D_4 και D_5 και να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του πολυωνύμου ανάλογα με τα πρόσημα των τιμών που θα προέκυπταν.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

Στην πράξη το κριτήριο του Hurwitz χρησιμοποιείται δια της χρήσεως του **πίνακα Routh** που κατασκευάζεται πιο εύκολα.

Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα αριθμών

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1k}, \dots, \alpha_{1N}) \quad \text{και} \quad (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{2M})$$

τα οποία αναγράφουμε σε δύο γραμμές τη μία κάτω από την άλλη

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \dots & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2M} \end{array}$$

και στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα στοιχεία της τρίτης γραμμής ως

$$\alpha_{3i} = - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1,i+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2,i+1} \end{vmatrix}}{\alpha_{21}} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{1,i+1} - \alpha_{11}\alpha_{2,i+1}}{\alpha_{21}}$$

οδηγώντας έτσι στο αποτέλεσμα

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \hline \frac{\alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22}}{\alpha_{21}} & \frac{\alpha_{21}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\alpha_{21}} & \frac{\alpha_{21}\alpha_{14} - \alpha_{11}\alpha_{24}}{\alpha_{21}} & \frac{\alpha_{21}\alpha_{15} - \alpha_{11}\alpha_{25}}{\alpha_{21}} \end{array}$$

(θεωρούμε μόνο τα τέσσερα πρώτα στοιχεία της κάθε γραμμής για λόγους επίδειξης). Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Θεωρώντας τώρα ένα πολυώνυμο της μορφής

$$P(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \dots + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \alpha_N s^N$$

αποδεικνύεται πως αυτή η εξίσωση **δεν διαθέτει ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη**, εάν πληρούνται οι επόμενες δύο συνθήκες:

- Όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι διάφοροι του μηδενός, δηλαδή εμφανίζονται στην εξίσωση του πολυωνύμου $P(s)$.
- Όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης $P(s) = 0$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Αυτές οι δύο συνθήκες **είναι αναγκαίες αλλά όχι και ικανές** υπό την έννοια πως ακόμα και εάν όλοι οι συντελεστές έχουν το ίδιο πρόσημο, εν τούτοις είναι πιθανό κάποιο πολυώνυμο να διαθέτει ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη.

Υπολογίζοντας **την άρτια και την περιττή συνιστώσα** της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(s)$

$$P_e(s) = \alpha_0 + \alpha_2 s^2 + \alpha_4 s^4 + \alpha_6 s^6 + \dots \quad \text{και} \quad P_o(s) = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3 + \alpha_5 s^5 + \alpha_7 s^7 + \dots$$

ή εναλλακτικά

$$P_+(s) = \alpha_0 + \alpha_2 s + \alpha_4 s^2 + \alpha_6 s^3 + \dots \quad \text{και} \quad P_-(s) = \alpha_1 + \alpha_3 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_7 s^3 + \dots$$

[οπότε το πολυώνυμο $P(s)$ θα γράφεται ως $P(s) = P_+(s^2) + sP_-(s^2)$]

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Routh χρησιμοποιώντας ως τα δύο σύνολα αριθμών τους συντελεστές των πολωνύμων $P_+(s)$ και $P_-(s)$

$$(\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \dots) \quad \text{και} \quad (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9, \dots)$$

καταλήγοντας σε ένα αποτέλεσμα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0 & & \alpha_2 & & \alpha_4 & \dots & \alpha_{2k} \\ \alpha_1 & & \alpha_3 & & \alpha_5 & \dots & \alpha_{2k+1} \\ \hline \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 & & \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_0 \alpha_5 & & \alpha_1 \alpha_6 - \alpha_0 \alpha_7 & \dots & \alpha_1 \alpha_{2k+2} - \alpha_0 \alpha_{2k+3} \\ \hline \alpha_1 & & \alpha_1 & & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας για τη γενική περίπτωση πολωνύμου βαθμού n είναι

$$\begin{array}{l|ccccccc} s^N & \alpha_N & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-4} & \alpha_{N-6} & \dots & \alpha_2 & \alpha_0 \\ s^{N-1} & \alpha_{N-1} & \alpha_{N-3} & \alpha_{N-5} & \alpha_{N-7} & \dots & \alpha_1 & 0 \\ s^{N-2} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots & & \\ s^{N-3} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & & & \\ s^{N-4} & \delta_1 & \delta_2 & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ s^1 & & & & & & & \\ s^0 & & & & & & & \end{array}$$

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz

με τους συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots$, να υπολογίζονται ως

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{N-2}\alpha_{N-1} - \alpha_N\alpha_{N-3}}{\alpha_{N-1}}, \beta_2 = \frac{\alpha_{N-1}\alpha_{N-4} - \alpha_N\alpha_{N-5}}{\alpha_{N-1}}$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_{N-1}\alpha_{N-6} - \alpha_N\alpha_{N-7}}{\alpha_{N-1}}, \beta_4 = \frac{\alpha_{N-1}\alpha_{N-8} - \alpha_N\alpha_{N-9}}{\alpha_{N-1}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1\alpha_{N-3} - \beta_2\alpha_{N-1}}{\beta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_1\alpha_{N-5} - \beta_3\alpha_{N-1}}{\beta_1}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_1\alpha_{N-7} - \beta_4\alpha_{N-1}}{\beta_1}$$

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \delta_2 = \frac{\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3}{\gamma_1}$$

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο της μορφής

$$P(s) = \alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

είναι τύπου Hurwitz - δηλαδή όλες του οι ρίζες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη και επομένως είναι ευσταθές - αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του πίνακα Routh είναι θετικά. Αντίθετα, εάν στον πίνακα Routh υπάρχουν εναλλαγές προσήμου - δηλαδή κάποια από τα στοιχεία του διαθέτουν αρνητικό πρόσημο - το πλήθος αυτών των εναλλαγών είναι ίσο με το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου που έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

Αιτιότητα και ευστάθεια συνεχών συστημάτων

Το κριτήριο ευστάθειας των Routh - Hurwitz - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Routh να χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθεια το πολυώνυμο

$$P(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι $N = 6$ και οι συντελεστές του είναι οι $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 4$ και $\alpha_6 = 1$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Routh έχουμε

| | | | | |
|-------|--------|-------|---|---|
| s^6 | 1 | 3 | 1 | 4 |
| s^5 | 4 | 2 | 4 | 0 |
| s^4 | 5/2 | 0 | 4 | 0 |
| s^3 | 2 | -12/5 | 0 | 0 |
| s^2 | 3 | 4 | 0 | 0 |
| s^1 | -76/15 | 0 | 0 | 0 |
| s^0 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Παρατηρούμε πως υπάρχουν δύο αλλαγές στο πρόσημο, $(s^2 \rightarrow s^1) = (3 \rightarrow -76/15)$ και $(s^1 \rightarrow s^0) = (-76/15 \rightarrow 4)$. Επομένως το πολυώνυμο διαθέτει δύο πόλους με θετικά πραγματικά μέρη και το σύστημα είναι ασταθές. Πράγματι, υπολογίζοντας αναλυτικά τους πόλους του συστήματος βρίσκουμε $p_1 = -3.2644$, $p_2 = -0.8858$, $p_{3,4} = -0.6046 \pm 0.9935j$ και $p_{5,6} = 0.6797 \pm 0.7488j$.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Έστω σύστημα LTI με διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \alpha_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) \\ = \beta_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \beta_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + \beta_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_0 x(t) \end{aligned}$$

και έστω πως η έξοδος $y(t)$ χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο μη μηδενικών αρχικών συνθηκών της μορφής $y(0), y'(0), y''(0), \dots, y^{(N-1)}(0)$, ενώ αντίθετα για το σήμα εισόδου $x(t)$ είναι $x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(M-1)}(0) = 0$.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_N \left[s^N \mathcal{Y}(s) - s^{N-1} y(0) - s^{N-2} \frac{dy(0)}{dt} - \dots - s \frac{d^{(N-2)} y(0)}{dt^{N-2}} - \frac{d^{(N-1)} y(0)}{dt^{N-1}} \right] \\ + \alpha_{N-1} \left[s^{N-1} \mathcal{Y}(s) - s^{N-2} y(0) - \dots - s \frac{d^{(N-3)} y(0)}{dt^{N-3}} - \frac{d^{(N-2)} y(0)}{dt^{N-2}} \right] \\ + \alpha_1 s \mathcal{Y}(s) - \alpha_1 y(0) + \alpha_0 \mathcal{Y}(s) = \\ \beta_M s^M \mathcal{X}(s) + \beta_{M-1} s^{M-1} \mathcal{X}(s) + \dots + \beta_1 s \mathcal{X}(s) + \beta_0 \mathcal{X}(s) \end{aligned}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

ή πιο συνοπτικά

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i s^i \right) \mathcal{Y}(s) - \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\sum_{j=1}^i s^{i-j} \frac{d^{(i-j)} y(0)}{dt^{i-j}} \right) = \left(\sum_{i=1}^M \beta_i s^i \right) \mathcal{X}(s)$$

και επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος $y(t)$ είναι

$$\mathcal{Y}(s) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^M \beta_i s^i \right\}}_{\text{συνάρτηση μεταφοράς } \mathcal{H}(s)} / \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i s^i \right\} \mathcal{X}(s) + \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\sum_{j=1}^i s^{i-j} \frac{d^{(i-j)} y(0)}{dt^{i-j}} \right) \right\}}_{C(s)} / \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i s^i \right\}}_{D(s)} = \mathcal{H}(s) \mathcal{X}(s) + \frac{C(s)}{D(s)}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

- Ο όρος $\mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s)$ είναι **ανεξάρτητος από τις αρχικές συνθήκες** και εξαρτάται μόνο από το σήμα εισόδου δια μέσου του μετασχηματισμού $\mathcal{X}(s)$.

Άρα εκφράζει **το μετασχηματισμό της απόκρισης μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}(t)$.

- Ο όρος $\mathcal{C}(s)/\mathcal{D}(s)$ είναι **ανεξάρτητος της εισόδου** και εξαρτάται μόνο από τις **αρχικές συνθήκες**.

Άρα εκφράζει **το μετασχηματισμό της απόκρισης μηδενικής εισόδου** $y_{zi}(t)$.

Επομένως η έξοδος του συστήματος $y(t)$ θα υπολογιστεί ως

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

με τις συναρτήσεις $y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s)\}$ και $y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{C}(s)}{\mathcal{D}(s)}\right\}$ να ορίζονται ως

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^M \beta_i s^i}{\sum_{i=1}^N \alpha_i s^i} X(s)\right\} \quad \& \quad y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\sum_{j=1}^i s^{i-j} \frac{d^{(i-j)}y(0)}{dt^{i-j}}\right)}{\sum_{i=1}^N \alpha_i s^i}\right\}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της βηματικής απόκρισης

Έστω **ευσταθές** συνεχές σύστημα LTI η συνάρτηση μεταφοράς του οποίου αναπτύσσεται σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της μορφής

$$\mathcal{H}(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_N}{s - p_n} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - p_i}$$

(όπου p_1, p_2, \dots, p_N οι N **διακριτοί** πόλοι της) και έστω το σήμα εισόδου $x(t) = u(t)$ ο μετασχηματισμός Laplace του οποίου είναι

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου $y(t)$ θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s) = \frac{\mathcal{H}(s)}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - p_i} = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - p_i}$$

και υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό βρίσκουμε ότι

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \sum_{i=1}^N C_i \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_i}\right\} = Au(t) + \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της βηματικής απόκρισης

Επομένως η μεταβατική απόκριση και η απόκριση σταθεράς κατάστασης του συστήματος θα δίδονται από τις σχέσεις

$$y_{tr}(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t} \quad \text{και} \quad y_{ss}(t) = Au(t)$$

Εάν ενδιαφερόμαστε **μόνο για την απόκριση σταθεράς κατάστασης**, αυτή μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από τη συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Πράγματι παρατηρώντας πως οι συναρτήσεις $\mathcal{H}(s)$ και $\mathcal{Y}(s)$ σχετίζονται ως

$$\mathcal{H}(s) = s\mathcal{Y}(s)$$

η εφαρμογή του θεωρήματος της αρχικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s\mathcal{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(0)$$

Επομένως, **η συνιστώσα σταθεράς κατάστασης της βηματικής απόκρισης είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης μεταφοράς για τιμή ορίσματος $s = 0$**

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της βηματικής απόκρισης - Παράδειγμα

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να προσδιορίσετε τη βηματική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής απόκρισης του συστήματος είναι

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s + 5}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{5}{2} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{4}{s + 1} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\}$$

και υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό βρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{5}{2} u(t) - 4e^{-t} u(t) + \frac{3}{2} e^{-2t} u(t) \end{aligned}$$

Επομένως η μεταβατική απόκριση και η απόκριση σταθεράς κατάστασης θα είναι

$$y_{tr}(t) = -4e^{-t} u(t) + \frac{3}{2} e^{-2t} u(t) \quad \text{και} \quad y_{ss}(t) = \frac{5}{2} u(t)$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης

Εργαζόμενοι όπως και πριν ας θεωρήσουμε το σήμα εισόδου $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ ο μετασχηματισμός Laplace του οποίου είναι ο

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(s) &= \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{A \cos(\omega t + \varphi)\} = \mathcal{L}\{A \cos(\omega) \cos \varphi - A \sin(\omega t) \sin \varphi\} = \\ &= A \cos \varphi \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} - A \sin \varphi \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \\ &= A \cos \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2} - A \sin \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A(s \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Υποθέτοντας πως η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ διαθέτει N διακριτούς πόλους p_1, p_2, \dots, p_N θα είναι

$$\mathcal{H}(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_N}{s - p_N} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - p_i}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s) = \frac{A\mathcal{H}(s)(s \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A(s \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{s^2 + \omega^2} \times \frac{C_i}{s - p_i} \right\}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης

Επομένως, η **συχνοτική απόκριση** του συστήματος θα υπολογιστεί από την εξίσωση

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-j\omega}\right\} + C^*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+j\omega}\right\} + \sum_{i=1}^N C_i\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_i}\right\}$$

Εκφράζοντας τον μιγαδικό συντελεστή C στην εκθετική του μορφή

$$C = |C|e^{j\angle C}$$

θα είναι προφανώς $C^* = |C|e^{-j\angle C}$ - όπου $|C|$ και $\angle C$ το μέτρο και η φάση του συντελεστή C - και οι δύο πρώτοι όροι της παραπάνω σχέσης υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-j\omega}\right\} + C^*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+j\omega}\right\} &= |C|e^{j\angle C}e^{j\omega t}|C|e^{-j\angle C}e^{-j\omega t} = \\ &= |C|\left\{e^{j(\omega t + \angle C)} + e^{-j(\omega t + \angle C)}\right\} = 2|C|\cos(\omega t + \angle C) \end{aligned}$$

με τον συντελεστή C να υπολογίζεται ως το **υπόλοιπο** της μιγαδικής συνάρτησης $Y(s)$ στη θέση του απλού πόλου $s = j\omega$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης

Από τη θεωρία των υπολοίπων θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}C &= \lim_{s \rightarrow j\omega} [(s - j\omega)\mathcal{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[(s - j\omega) \frac{A\mathcal{H}(s)(s \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{s^2 + \omega^2} \right] \\&= \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[\frac{A\mathcal{H}(s)(s \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{s + j\omega} \right] = \frac{A\mathcal{H}(j\omega)(j\omega \cos \varphi - \omega \sin \varphi)}{2j\omega} \\&= \frac{j\omega}{2j\omega} \mathcal{H}(j\omega)(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{A}{2} \mathcal{H}(j\omega) e^{j\varphi} = \frac{A}{2} |\mathcal{H}(j\omega)| e^{j(\varphi + \angle \mathcal{H}(j\omega))}\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$|C| = \frac{A}{2} |\mathcal{H}(j\omega)| \quad \text{και} \quad \angle C = \varphi + \angle \mathcal{H}(j\omega)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace των δύο πρώτων όρων της συνάρτησης $\mathcal{Y}(s)$, έχουμε

$$\dots = 2|C| \cos(\omega t + \angle C) = A|\mathcal{H}(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle \mathcal{H}(j\omega))$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης

Ο μετασχηματισμός Laplace του τρίτου όρου υπολογίζεται εύκολα ως

$$\sum_{i=1}^N C_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - p_i} \right\} = \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t}$$

Επομένως η συχνοτική απόκριση του συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = A|\mathcal{H}(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle\mathcal{H}(j\omega)) + \sum_{i=1}^N C_i e^{p_i t}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε πως ο δεύτερος όρος μηδενίζεται στο όριο $t \rightarrow \infty$ και αντιστοιχεί στη **μεταβατική απόκριση** του συστήματος, ενώ ο όρος

$$y_{ss}(t) = A|\mathcal{H}(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle\mathcal{H}(j\omega))$$

αποτελεί την **απόκριση σταθεράς κατάστασης**.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνотικής απόκρισης

Εάν λοιπόν σε ένα ευσταθές σύστημα LTI διαβιβάσουμε το σήμα εισόδου

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

η έξοδος του είναι ένα τριγωνομετρικό σήμα με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Η συχνότητά του ω είναι ίδια με τη συχνότητα ω του σήματος εισόδου.
- Το πλάτος του $A|H(j\omega)|$ είναι ίσο με το πλάτος A του σήματος εισόδου πολλαπλασιασμένο με το μέτρο της συχνотικής απόκρισης $H(j\omega)$ υπολογισμένης στη θέση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.
- Η φάση του $\varphi + \angle H(j\omega)$ είναι ίση με τη φάση φ του σήματος εισόδου προσαυξημένη κατά τη φάση $\angle H(j\omega)$ της συχνотικής απόκρισης $H(j\omega)$ υπολογισμένης στη θέση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.

Η ποσότητα $|H(j\omega)|$ που εκφράζει το κέρδος του συστήματος είναι γνωστή ως απόκριση πλάτους ενώ το μέγεθος $\angle H(j\omega)$ εκφράζει την απόκριση φάσης του συστήματος.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνотικής απόκρισης - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν η απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος

$$\mathcal{H}(s) = \frac{s - 2}{s^2 + 5s + 6}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η έξοδος του όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το σήμα $x(t) = 12 \cos(15t + 34^\circ)$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $s = j\omega$ η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{N}(j\omega)}{\mathcal{D}(j\omega)} = \frac{j\omega - 2}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} = \frac{-2 + j\omega}{(6 - \omega^2) + 5j\omega}$$

Διατυπώνοντας τις συναρτήσεις $\mathcal{N}(j\omega)$ και $\mathcal{D}(j\omega)$ σε εκθετική μορφή θα λάβουμε

$$\mathcal{N}(j\omega) = \sqrt{\omega^2 + 4} \exp \left[j \tan^{-1} \left(-\frac{\omega}{2} \right) \right]$$

$$\mathcal{D}(j\omega) = \sqrt{\omega^4 + 13\omega^2 + 36} \exp \left[j \tan^{-1} \left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2} \right) \right]$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

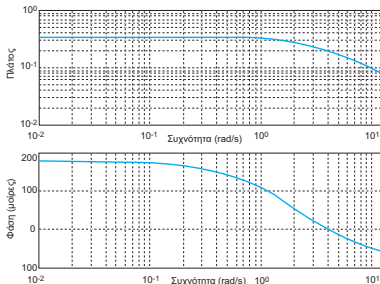
Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης - Παράδειγμα

Επομένως η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ είναι

$$\mathcal{H}(j\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}} \exp \left\{ j \left[\tan^{-1} \left(-\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2} \right) \right] \right\}$$

και η απόκριση πλάτους και η απόκριση φάσης του εν λόγω συστήματος θα δίδονται από τις σχέσεις

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}} \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2} \right)$$



Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης - Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας το σήμα εισόδου $x(t) = 12 \cos(15t + 34^\circ)$ για το οποίο είναι $A = 12$, $\omega = 15$ και $\varphi = 34^\circ$, οι συναρτήσεις $|\mathcal{H}(j\omega)|$ και $\angle \mathcal{H}(j\omega)$ για την τιμή $\omega = 15$ υπολογίζονται ως

$$|\mathcal{H}(15j)| = \sqrt{\frac{15^2 + 4}{15^4 + 13(15)^2 + 36}} = \sqrt{\frac{229}{53586}} = 0.065372 \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned}\angle \mathcal{H}(20j) &= \tan^{-1}\left(-\frac{15}{2}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{75}{219}\right) \\ &= -82.405356^\circ - 18.904575^\circ = -101.309931^\circ\end{aligned}$$

Επομένως η έξοδος του συστήματος $y(t)$ θα είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με

- Συχνότητα $\omega = 15$ rad/second
- Πλάτος $2|\mathcal{H}(15j)| = 0.784464$
- Φάση $(34 - 101.309931)^\circ = -67.309931^\circ$

και κατά συνέπεια θα περιγράφεται από τη σχέση

$$y(t) = 0.784464 \cos(15t - 67.309931^\circ)$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Έστω σύστημα LTI με ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_N)} = K \left\{ \prod_{m=1}^M (s - z_m) \right\} / \left\{ \prod_{n=1}^N (s - p_n) \right\}$$

που περιέχει N πόλους p_n ($n = 1, 2, \dots, N$) και M μηδενικές τιμές z_m ($m = 1, 2, \dots, M$).

- Τα M μηδενικά της $\mathcal{H}(s)$ περιγράφονται από τα διανύσματα $z_m = (\kappa_m, \lambda_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) και αναπαρίστανται ως

$$z_m = \kappa_m + j\lambda_m$$

όπου $\kappa_m = \Re\{z_m\}$ και $\lambda_m = \Im\{z_m\}$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

- Οι N πόλοι της $\mathcal{H}(s)$ περιγράφονται από τα διανύσματα $p_n = (\mu_n, \nu_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) και αναπαρίστανται ως

$$p_n = \mu_n + j\nu_n$$

όπου $\mu_n = \Re\{p_n\}$ και $\nu_n = \Im\{p_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) αντίστοιχα.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την $\mathcal{H}(s)$ στη $s = \sigma + j\omega$ που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $s = (\sigma, \omega)$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε

- M διανύσματα $\chi_m = s - z_m = r_m \exp(j\vartheta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) για τις M παραστάσεις του αριθμητή και
- N διανύσματα $\xi_n = s - p_n = q_n \exp(j\varphi_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) για τις N παραστάσεις του παρονομαστή

όπου

$$r_m = |\chi_m| = |s - z_m| = \sqrt{(\sigma - \kappa_m)^2 + (\omega - \lambda_m)^2}$$

$$\vartheta_m = \angle \chi_m = \angle(s - z_m) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \lambda_m}{\sigma - \kappa_m} \right\}$$

$$q_n = |\xi_n| = |s - p_n| = \sqrt{(\sigma - \mu_n)^2 + (\omega - \nu_n)^2}$$

$$\varphi_n = \angle \xi_n = \angle(s - p_n) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \nu_n}{\sigma - \mu_n} \right\}$$

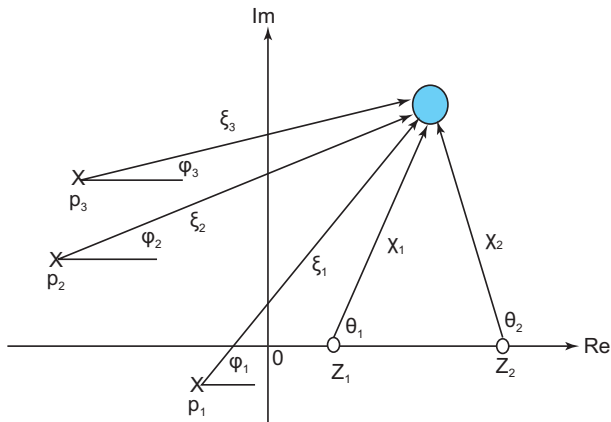
το μέτρο και η φάση των ποσοτήτων $s - z_m$ ($m = 1, 2, \dots, M$) και $s - p_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), αντίστοιχα.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος LTI.

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραστάσεις στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης μεταφοράς αυτή γράφεται ως

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(s) &= K \frac{r_1 e^{j\vartheta_1} r_2 e^{j\vartheta_2} \dots r_M e^{j\vartheta_M}}{q_1 e^{j\varphi_1} q_2 e^{j\varphi_2} \dots q_N e^{j\varphi_N}} = K \frac{(r_1 r_2 \dots r_M) e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_M)}}{(q_1 q_2 \dots q_N) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N)}} = \\ &= \frac{\prod_{m=1}^M r_m}{\prod_{n=1}^N q_n} \exp \left[j \left(\sum_{m=1}^M \vartheta_m - \sum_{n=1}^N \varphi_n \right) \right] = |\mathcal{H}(s)| \exp[j\angle \mathcal{H}(s)]\end{aligned}$$

με το μέτρο και τη φάση της συνάρτησης μεταφοράς να ορίζονται ως

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}(s)| &= \left\{ \prod_{m=1}^M \sqrt{(\sigma - \kappa_m)^2 + (\omega - \lambda_m)^2} \right\} / \left\{ \prod_{n=1}^N \sqrt{(\sigma - \mu_n)^2 + (\omega - \nu_n)^2} \right\} \\ \angle \mathcal{H}(s) &= \sum_{m=1}^M \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \lambda_m}{\sigma - \kappa_m} \right\} \right) - \sum_{n=1}^N \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \nu_n}{\sigma - \mu_n} \right\} \right)\end{aligned}$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

Τα προηγούμενα ισχύουν για **διακριτούς** πόλους και μηδενικές τιμές ενώ για τιμές πολυαπλότητας $k > 1$ θα πρέπει να καταμετρήσουμε τα μέτρα και τις φάσεις των διανυσμάτων χ_m ($m = 1, 2, \dots, M$) και ξ_n ($n = 1, 2, \dots, N$) **k φορές**. Θα είναι λοιπόν

$$|\mathcal{H}(s)| = \prod_{j=1}^M (r_j)^{m_j} / \prod_{i=1}^N (q_i)^{n_i} \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(s) = \sum_{j=1}^M m_j \vartheta_j - \sum_{i=1}^N n_i \varphi_i$$

Για τιμές $s = j\omega$ η συνάρτηση μεταφοράς ανάγεται στη **συχνοτική απόκριση** του συστήματος και η αντίστοιχη σχέση είναι

$$\mathcal{H}(j\omega) = K \left\{ \prod_{m=1}^M (j\omega - z_m) \right\} / \left\{ \prod_{n=1}^N (j\omega - p_n) \right\}$$

με μέτρο και φάση που ορίζονται ως

$$|\mathcal{H}(s)| = \left\{ \prod_{m=1}^M \sqrt{\kappa_m^2 + (\omega - \lambda_m)^2} \right\} / \left\{ \prod_{n=1}^N \sqrt{\mu_n^2 + (\omega - \nu_n)^2} \right\}$$
$$\angle \mathcal{H}(s) = \sum_{m=1}^M \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \lambda_m}{-\kappa_m} \right\} \right) - \sum_{n=1}^N \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega - \nu_n}{-\mu_n} \right\} \right)$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς - Παράδειγμα

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική μέθοδο να υπολογίσετε στη θέση $s = 3 + 5j$ την τιμή της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^3 + 8s^2 + 29s + 52}$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση $H(s)$ ως

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^3 + 8s^2 + 29s + 52} = \frac{(s+2)(s-3)}{(s^2 + 4s + 13)(s+4)} = \frac{(s+2)(s-3)}{(s+2-3j)(s+2+3j)(s+4)}$$

αυτή διαθέτει δύο μηδενικά $z_1 = -2$ και $z_2 = 3$ και τρεις πόλους $p_1 = -2 + 3j$, $p_2 = -2 - 3j$ και $p_3 = -4$. Θα είναι λοιπόν $\chi_1 = s_1 - z_1$ και $\chi_2 = s_1 - z_2$ όπου

$$r_1 = |\chi_1| = |s_1 - z_1| = 5\sqrt{2}, \quad \vartheta_1 = \angle \chi_1 = \angle(s_1 - z_1) = \tan^{-1}\{1\} = 45^\circ$$

$$r_2 = |\chi_2| = |s_1 - z_2| = 5, \quad \vartheta_2 = \angle \chi_2 = \angle(s_1 - z_2) = \tan^{-1}\{\infty\} = 90^\circ$$

και $\xi_1 = s_1 - p_1$, $\xi_2 = s_1 - p_2$, $\xi_3 = s_1 - p_3$ όπου

$$q_1 = |\xi_1| = |s_1 - p_1| = \sqrt{29}, \quad \varphi_1 = \angle \xi_1 = \angle(s_1 - p_1) = 21.801409^\circ$$

$$q_2 = |\xi_2| = |s_1 - p_2| = \sqrt{89}, \quad \varphi_2 = \angle \xi_2 = \angle(s_1 - p_2) = 57.994616^\circ$$

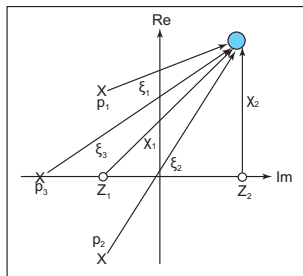
$$q_3 = |\xi_3| = |s_1 - p_3| = \sqrt{74}, \quad \varphi_3 = \angle \xi_3 = \angle(s_1 - p_3) = 35.537677^\circ$$

Η απόκριση των συστημάτων στο χώρο των s

Γεωμετρικός υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς - Παράδειγμα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραστάσεις στην εξίσωση υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς δια της εφαρμογής της γεωμετρικής μεθόδου, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s) &= \frac{r_1 r_2}{q_1 q_2 q_3} \exp \left[j (\vartheta_1 + \vartheta_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \right] = \\ &= \frac{(5\sqrt{2})5}{\sqrt{29}\sqrt{89}\sqrt{74}} \times \exp \left[j (45^\circ + 90^\circ - 21.801409^\circ - 57.994616^\circ - 35.537677^\circ) \right] = \\ &= \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{190994}} e^{j19.666298^\circ} = 0.080899 e^{j19.666298^\circ} \end{aligned}$$

Διαγράμματα Bode

Βασικοί ορισμοί

Ορισμός

Τα διαγράμματα Bode είναι γραφήματα που απεικονίζουν την απόκριση σταθεράς κατάστασης ενός συστήματος LTI, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί ένα στοιχειώδες τριγωνομετρικό σήμα που χαρακτηρίζεται από κάποια τιμή κυκλικής συχνότητας ω_0 .

Θεωρώντας πως η συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ διαθέτει M μηδενικά $-z_1, -z_2, \dots, -z_M$ και N πόλους $-p_1, -p_2, \dots, -p_N$ αποδεικνύεται μετά από απλές πράξεις (δείτε τη σελίδα 307 του βιβλίου) πως αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(s) &= K \frac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\dots(s+z_M)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\dots(s+p_N)} \\ &= K \left\{ \frac{\prod_{m=1}^M z_m}{N} \right\} \left\{ \frac{\prod_{m=1}^M \left(1 + \frac{s}{z_m}\right)}{\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_n}\right)} \right\} = K' \left\{ \frac{\prod_{m=1}^M \left(1 + \frac{s}{z_m}\right)}{\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_n}\right)} \right\}\end{aligned}$$

Διαγράμματα Bode

Βασικοί ορισμοί

Η παραπάνω συνάρτηση εκπεφρασμένη στην εκθετική της μορφή γράφεται

$$\mathcal{H}(j\omega) = |\mathcal{H}(j\omega)| \exp[j\angle\mathcal{H}(j\omega)]$$

όπου

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \left| K' \frac{\prod_{m=1}^M \left(1 + \frac{j\omega}{z_m}\right)}{\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{j\omega}{p_n}\right)} \right| = |K'| \frac{\prod_{m=1}^M \left|1 + \frac{j\omega}{z_m}\right|}{\prod_{n=1}^N \left|1 + \frac{j\omega}{p_n}\right|}$$
$$\angle\mathcal{H}(j\omega) = \angle K' + \sum_{m=1}^M \angle\left(1 + \frac{j\omega}{z_m}\right) - \sum_{n=1}^N \angle\left(1 + \frac{j\omega}{p_n}\right)$$

Ως διάγραμμα Bode περιγράφουμε ένα σύνολο δύο γραφημάτων της μορφής

$$(x, y) = \left\{ \omega, |\mathcal{H}(j\omega)| \right\} \quad \text{και} \quad (x, y) = \left\{ \omega, \angle\mathcal{H}(j\omega) \right\}$$

με το πρώτο να περιγράφει την απόκριση πλάτους και το δεύτερο την απόκριση φάσης.

Διαγράμματα Bode

Βασικοί ορισμοί

Η **φασική απόκριση** κατασκευάζεται εύκολα σχεδιάζοντας τον κάθε στοιχειώδη φασικό όρο ξεχωριστά και στη συνέχεια προσθέτοντας μεταξύ τους όλους αυτούς τους όρους.

Για την κατασκευή της **απόκρισης πλάτους** $|\mathcal{H}(j\omega)|$ μετατρέπουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα θεωρώντας **το λογάριθμο του γινομένου**, αφού ως γνωστόν

$$\log \left(\prod_{i=1}^N x_i \right) = \log(x_1 x_2 \dots x_N) = \log(x_1) + \log(x_2) + \dots + \log(x_N) = \sum_{i=1}^N \log(x_i)$$

Τα διαγράμματα πλάτους είναι εκπεφρασμένα σε μονάδες dB (decibel) και επομένως αντί για την τιμή $\log_{10}(x)$ θεωρούμε την τιμή $y = 20 \log_{10}(x)$ και όπως αποδεικνύεται εύκολα (σελίδα 308 του βιβλίου) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} 20 \log_{10}(|\mathcal{H}(j\omega)|) &= 20 \log_{10}(|K'|) + \sum_{m=1}^M 20 \log_{10} \left(\left| 1 + \frac{j\omega}{z_m} \right| \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N 20 \log_{10} \left(\left| 1 + \frac{j\omega}{p_n} \right| \right) \end{aligned}$$

Διαγράμματα Bode

Βασικοί ορισμοί

Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ εκφράζεται και αυτή με τη βοήθεια **αθροισμάτων και διαφορών** γεγονός που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε την απόκριση πλάτους του συστήματος με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζουμε και την απόκριση φάσης.

Τα διαγράμματα Bode ορίζονται λοιπόν ως διαγράμματα της μορφής

$$(x, y) = \left\{ \log_{10} \omega, 20 \log_{10} |\mathcal{H}(j\omega)| \right\} \quad \text{και} \quad (x, y) = \left\{ \log_{10} \omega, \angle \mathcal{H}(j\omega) \right\}$$

Το διάγραμμα πλάτους είναι τύπου log-log δηλαδή **και οι δύο άξονες χρησιμοποιούν λογαριθμική κλίμακα.**

Το διάγραμμα φάσης είναι τύπου log-lin αφού **ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιεί λογαριθμική ενώ ο κατακόρυφος άξονας, γραμμική κλίμακα.**

Ο οριζόντιος λογαριθμικός άξονας της κυκλικής συχνότητας ω είναι εκπεφρασμένος σε **rad/second**, ο κατακόρυφος άξονας του λογαριθμικού πλάτους μετράται σε **decibels**, ενώ ο κατακόρυφος άξονας της φάσης είναι βαθμονομημένος σε **μοίρες**.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

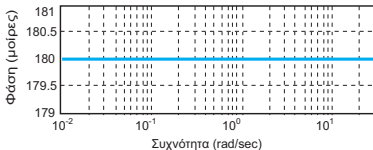
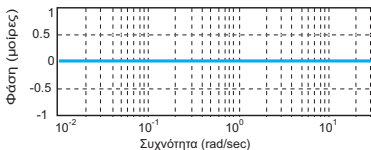
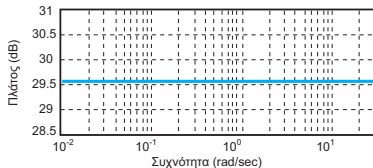
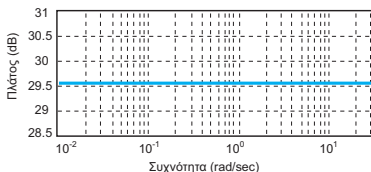
Περίπτωση 1η: Σταθερός όρος

Εάν η συνάρτηση $\mathcal{H}(j\omega)$ περιέχει κάποιο σταθερό όρο K , τόσο η απόκριση πλάτους όσο και η απόκριση φάσης είναι **σταθερές** και ανεξάρτητες της συχνότητας ω . Εάν η σταθερά K έχει θετική τιμή μπορούμε να γράψουμε ότι $K = |K|e^{j2\kappa\pi}$ από όπου προκύπτει ότι

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = |K| \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{H}(j\omega) = 2\kappa\pi \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$

Αντίθετα, εάν η τιμή του K είναι αρνητική θα έχουμε $K = |K|e^{j(2\kappa+1)\pi}$ και επομένως

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = |K| \quad \text{και} \quad \angle\mathcal{H}(j\omega) = (2\kappa + 1)\pi \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$



Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός **απλού πόλου** στη θέση $s = -\alpha$ έτσι ώστε να είναι

$$H(s) \sim \frac{1}{1 + \frac{s}{\alpha}}$$

το πλάτος αυτού του όρου για την τιμή $s = j\omega$ εκπεφρασμένο σε dB θα είναι ίσο με

$$20 \log_{10} \frac{1}{\left| 1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right|} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \text{ dB}$$

Προσέγγιση για την περιοχή συχνοτήτων $\omega \gg \alpha$: υποθέτοντας ότι $(\omega/\alpha) \approx 0$ θα είναι

$$-20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \approx -20 \log_{10}(1) = 0$$

Άρα για συχνότητες $\omega \gg \alpha$ η συνάρτηση του λογαριθμικού πλάτους είναι ίση με το μηδέν.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

Προσέγγιση για την περιοχή συχνοτήτων $\omega \ll \alpha$: εδώ είναι $(\omega/\alpha) \gg 1$ και κάνοντας την προσέγγιση $(\omega/\alpha) + 1 \approx \omega/\alpha$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} &\approx -20 \log_{10} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \\ &= -20 \log \omega + 20 \log \alpha = -20u + 20 \log \alpha \quad (u = \log \omega) \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει **μία ευθεία με κλίση -20 dB/decade ή -8 dB/octave**. Η σχέση λαμβάνει μηδενική τιμή για $\omega = \alpha$, και επομένως η εν λόγω ευθεία, **τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε αυτό το σημείο**.

Το παραπάνω διάγραμμα είναι **ασυμπτωτικό**, ενώ για να λάβουμε την πραγματική καμπύλη θα πρέπει να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}} = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)$$

Το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης του πραγματικού από το ασυμπτωτικό διάγραμμα στη θέση $\omega = \alpha$ (**συχνότητα κλίσης**) είναι

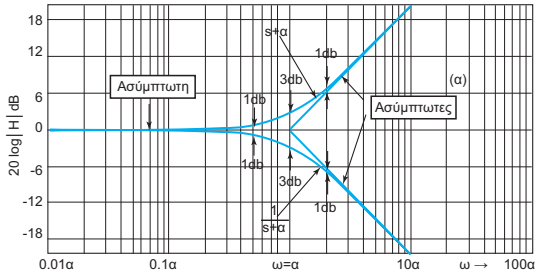
$$-20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}} \Big|_{\omega=\alpha} = -20 \log_{10}(\sqrt{2}) = -3.01 \approx -3 \text{ dB}$$

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

Το διάγραμμα πλάτους για **μηδενική τιμή** στη θέση $s = \alpha$, είναι το *κατοπτρικό* αυτού που αντιστοιχεί στον πόλο στην ίδια θέση. Επομένως

- Στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων η καμπύλη θα ταυτίζεται με τον άξονα των ω .
- Στο όριο των υψηλών συχνοτήτων θα χαρακτηρίζεται από *θετική κλίση* με τιμή 20 dB/decade ή 8 dB/octave.
- Το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης στη θέση $\omega = \alpha$ είναι ίσο με 3 dB.



Διάγραμμα πλάτους για απλό πόλο και μηδενική τιμή στη θέση $s = \alpha$.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

Το **διάγραμμα φάσης** της συνάρτησης $\mathcal{H}(j\omega)$, προκύπτει με παρόμοιο τρόπο. Για ένα πόλο στη θέση $s = \alpha$ που δημιουργεί τον όρο $[1 + (j\omega/\alpha)]^{-1}$, η αντίστοιχη φάση είναι

$$\angle \left\{ \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right)^{-1} \right\} = \angle 1 - \angle \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right) = -\angle \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)$$

Η προσέγγιση στις **χαμηλές συχνότητες** $\omega \ll \alpha$ είναι η $(\omega/\alpha) \approx 0$ και μας δίνει

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \approx -\tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

ενώ για τις **υψηλές συχνότητες** $\omega \gg \alpha$ υποθέτοντας ότι $(\omega/\alpha) \rightarrow \infty$ θα έχουμε

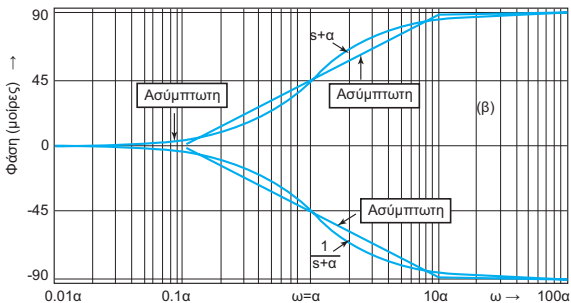
$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \approx -\tan^{-1}(\infty) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2} \text{ ακτίνια}$$

Αυτές οι **ασύμπτωτες** καμπύλες είναι **παράλληλες προς τον οριζόντιο άξονα** και περιγράφονται από τις εξισώσεις $\varphi = 0^\circ$ και $\varphi = -90^\circ$. Για δεδομένο α η ευθεία $\varphi = 0^\circ$ εκτείνεται στην περιοχή $0 \leq \omega \leq (\alpha/10)$, ενώ η ευθεία $\varphi = -90^\circ$ ορίζεται για $\omega \geq 10\alpha$. Αυτές οι ευθείες ενώνονται με μία τρίτη με κλίση $-45^\circ/\text{decade}$ που ξεκινά από το σημείο $\omega = \alpha/10$ και τερματίζεται στο σημείο $\omega = 10\alpha$.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

Το αντίστοιχο **διάγραμμα φάσης** για μία μηδενική τιμή στη θέση $s = \alpha$ είναι **το κατοπτρικό αυτού που σχετίζεται με ένα απλό πόλο στην ίδια θέση**, συμπεράσμα που προκύπτει χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία που αναπτύξαμε και προηγουμένως.



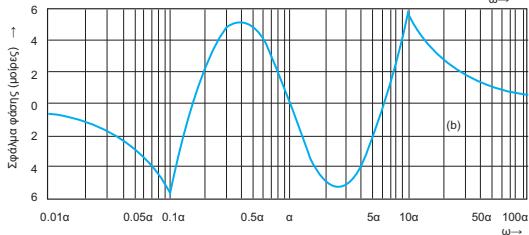
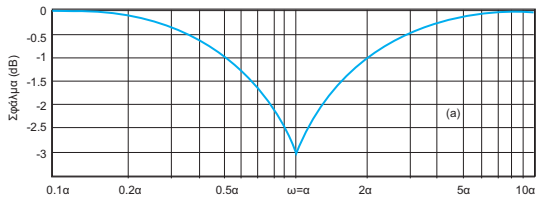
Απόκριση φάσης για απλό πόλο και μηδενική τιμή στη θέση $s = \alpha$.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 2η: Πραγματικός πόλος ή μηδενική τιμή πρώτης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η μεταβολή του σφάλματος προσέγγισης των διαγραμμάτων πλάτους και φάσης από τις ασύμπτωτες εκδόσεις τους για την περίπτωση απλού πόλου και μηδενικής τιμής στη θέση $s = \alpha$.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

Εάν στον παρονομαστή της συνάρτησης $\mathcal{H}(s)$ υπάρχει παράσταση της μορφής

$$s^2 + 2\zeta\alpha s + \alpha^2$$

τα διαγράμματα λογαριθμικού πλάτους και φάσης αφορούν τις συναρτήσεις

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = -20 \log_{10} \left| 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha} + \left(\frac{j\omega}{\alpha} \right)^2 \right| \quad \text{και} \quad \angle \mathcal{H}(j\omega) = -\angle \left[1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha} + \left(\frac{j\omega}{\alpha} \right)^2 \right]$$

Ξεκινώντας από το διάγραμμα πλάτους ισχύουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Για τις χαμηλές συχνότητες ($\omega \ll \alpha$), δεχόμενοι ότι $(\omega/\alpha) \approx 0$ έχουμε

$$|\mathcal{H}(j\omega)| \approx -20 \log_{10}(1) = 0$$

- Για τις υψηλές συχνότητες ($\omega \gg \alpha$) δεχόμενοι ότι

$$1 + 2i\zeta \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) + \left(\frac{j\omega}{\alpha} \right)^2 \approx \left(\frac{j\omega}{\alpha} \right)^2 = -\left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2$$

και η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ - θέτοντας $u = \log \omega$ - προσεγγίζεται ως

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(j\omega)| &\approx -20 \log \left| -\left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2 \right| = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \\ &= -40 \log \omega + 40 \log \alpha = -40u + 40 \log \alpha \end{aligned}$$

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

Επομένως το διάγραμμα λογαριθμικού πλάτους διαθέτει **δύο ασύμπτωτες ευθείες**, τις

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = 0 \quad \text{για την περιοχή } \omega < \alpha$$

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = -40u + 40 \log \alpha \quad \text{για την περιοχή } \omega > \alpha$$

Η δεύτερη ευθεία χαρακτηρίζεται από κλίση **-40 dB/decade** ή **-12 dB/octave** και τέμνει τον οριζόντιο άξονα στη θέση $\omega = \alpha$.

Η πραγματική καμπύλη του διαγράμματος λογαριθμικού πλάτους προκύπτει σχεδιάζοντας την πραγματική συνάρτηση

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \text{ dB}$$

Η συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ περιέχει μία **ελεύθερη παράμετρο** ζ και επομένως για κάθε τιμή αυτής της παραμέτρου θα έχουμε και μία διαφορετική καμπύλη. Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως οι πόλοι της συνάρτησης είναι οι

$$s_1 = \alpha \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad \text{και} \quad s_2 = \alpha \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

εάν είναι $0 < \zeta < 1$ η συνάρτηση διαθέτει **δύο συζυγείς μιγαδικούς πόλους**, ενώ για $\zeta \geq 1$ υπάρχουν **δύο διακριτοί πραγματικοί πόλοι**.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

Η συχνότητα ω_r στη θέση της οποίας το διάγραμμα παρουσιάζει μέγιστο αποτελεί λύση της εξίσωσης $|\mathcal{H}(j\omega)|' = 0$, ή μετά από απλές πράξεις

$$\frac{d|\mathcal{H}(j\omega)|}{d\omega} = \frac{2\omega}{\alpha^2} \times \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2\zeta^2 \right\} / \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right]^3} = 0$$

Επιλύοντας ως προς ω την εξίσωση

$$1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2\zeta^2 = 0 \quad \text{βρίσκουμε τη λύση} \quad \omega_r = \alpha \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $|\mathcal{H}(j\omega)|$ βρίσκουμε

$$|\mathcal{H}(j\omega_r)| = -20 \log_{10} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2(1 - 2\zeta^2)}{\alpha^2} \right)^2 + \frac{4\zeta^2}{\alpha^2} \left[\alpha^2(1 - 2\zeta^2) \right]} \right\} = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Επομένως για κάθε τιμή του ζ η κορυφή του διαγράμματος εμφανίζεται στη θέση $\omega_r = \alpha \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ενώ η τιμή της είναι $|\mathcal{H}(j\omega_r)| = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Αυτή η κορυφή εμφανίζεται για **πραγματικές τιμές του ω_r** και επομένως όταν $1 - 2\zeta^2 > 0$ ή ισοδύναμα όταν $\zeta < 1/\sqrt{2} \approx 0.707106$. Για αυτή την περιοχή τιμών, η συχνότητα ω_r είναι αρκετά κοντά στη συχνότητα του πόλου α και ταυτίζεται μαζί της όταν $\zeta = 0$.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

Η **φάση** του όρου που αντιστοιχεί στον πόλο δεύτερας τάξεως δίδεται από τη σχέση

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\angle \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) + j \left(\frac{2\zeta\omega}{\alpha} \right) \right] = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\alpha}{1 - (\omega^2/\alpha^2)}$$

Στις χαμηλές συχνότητες $\omega \ll \alpha$ η συνάρτηση $\angle \mathcal{H}(j\omega)$ προσεγγίζεται ως $\angle \mathcal{H}(j\omega) \approx 0^\circ$ ενώ η προσέγγιση για την περιοχή των υψηλών συχνοτήτων είναι η $\angle \mathcal{H}(j\omega) \approx -180^\circ$.

Οι παραπάνω ευθείες αποτελούν τις **ασύμπτωτες** του διαγράμματος φάσης, μαζί με μία καμπύλη που ενώνει τις εν λόγω ευθείες ξεκινώντας από τη συχνότητα $\omega_1 = (\alpha/2) \log_{10}(2/\zeta)$ και τερματίζοντας στη συχνότητα $\omega_2 = 2\alpha / \log_{10}(2\zeta)$.

Όσον αφορά την **πραγματική καμπύλη**, αυτή προκύπτει κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης απόκρισης φάσης που ορίζεται ως

$$\angle \mathcal{H}(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\alpha}{1 - (\omega^2/\alpha^2)}$$

Λόγω της ύπαρξης της ελεύθερης παραμέτρου ζ για κάθε ξεχωριστή τιμή αυτή της παραμέτρου θα έχουμε και μία ξεχωριστή καμπύλη

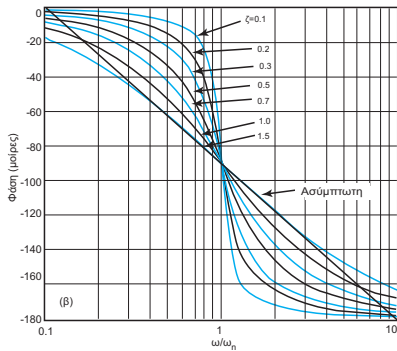
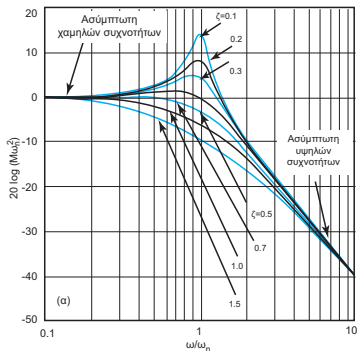
Τα διαγράμματα της μηδενικής τιμής είναι **τα κατοπτρικά ως προς τον οριζόντιο άξονα** των αντίστοιχων διαγραμμάτων του πόλου στην ίδια θέση.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



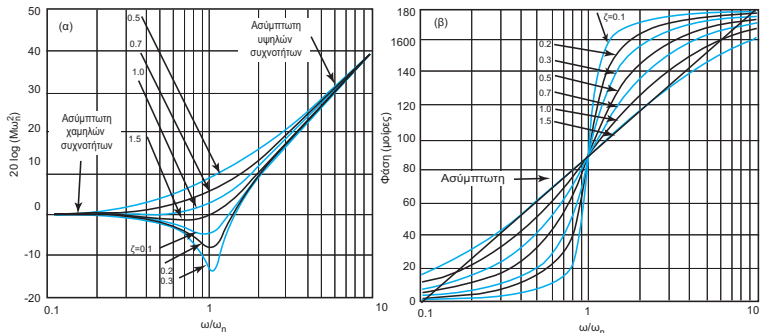
Διάγραμμα Bode (α) λογαριθμικού πλάτους και (β) φάσης ενός πόλου δευτέρας τάξεως.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

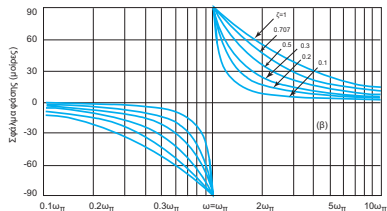
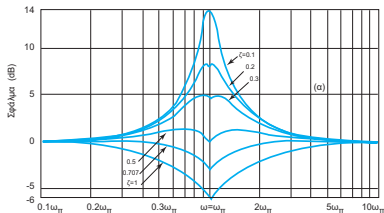
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Διάγραμμα Bode (α) λογαριθμικού πλάτους και (β) φάσης ενός μηδενικού δευτέρας τάξεως.

Στοιχειώδη διαγράμματα Bode

Περίπτωση 3η: Πόλοι και μηδενικές τιμές δεύτερης τάξεως



Τα σφάλματα προσέγγισης των διαγραμμάτων λογαριθμικού πλάτους και φάσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα ω για πόλο δευτέρας τάξεως

Γενικεύοντας την παραπάνω ανάλυση για ένα **πόλο τάξεως n**

- Η κλίση της ασύμπτωτης στο διάγραμμα πλάτους είναι ίση με **$-20n$ dB/decade**
- Η ασύμπτωτη στο διάγραμμα φάσης βρίσκεται στη θέση **$\varphi = -90n^\circ$** .

Τα παραπάνω ισχύουν και για μία **μηδενική τιμή τάξεως n** με τις τιμές των παραπάνω μεγεθών να συνοδεύονται από θετικό πρόσημο.

Διαγράμματα Bode

Η διαδικασία κατασκευής των διαγραμμάτων Bode

- Μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ έτσι ώστε να έλθει στη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = K' \left\{ \frac{z_1 z_2 z_3 \dots z_M}{p_1 p_2 p_3 \dots p_N} \right\} \times \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \left(1 + \frac{s}{z_3}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{z_M}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \left(1 + \frac{s}{p_3}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{p_N}\right)}$$

- Διαχωρίζουμε τη συνάρτηση, στις **στοιχειώδεις δομικές μονάδες** που εμπίπτουν σε κάποια από τις επόμενες κατηγορίες
 - σταθεροί όροι
 - πραγματικοί ή συζυγείς μιγαδικοί πόλοι
 - πραγματικές ή συζυγείς μιγαδικές μηδενικές τιμές.
- Σχεδιάζουμε τους άξονες του διαγράμματος και προσθέτουμε στον οριζόντιο άξονα **τους πόλους και τις μηδενικές τιμές**

Διαγράμματα Bode

Η διαδικασία κατασκευής των διαγραμμάτων Bode - Διάγραμμα πλάτους

- Ξεκινάμε από τα αριστερά προς τα δεξιά χαράσσοντας μία ευθεία με εξίσωση $|\mathcal{H}(j\omega)| = 0$ μέχρι να συναντήσουμε το πρώτο σημείο αλλαγής κλίσης. Εάν υπάρχει πόλος στη θέση $\omega = 0$ χαράσσουμε μία ευθεία με κλίση -20 dB/decade που διέρχεται από τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $\omega = 1$. Εάν υπάρχει μηδενικό στην θέση $\omega = 0$ η κλίση αυτής της γραμμής είναι θετική και ίση με $+20$ dB/decade.
- Κάθε φορά που συναντούμε πραγματικό πόλο, **ελαττώνουμε** την κλίση κατά 20 dB/decade ενώ κάθε φορά που συναντάμε ένα μηδενικό, **αυξάνουμε** την κλίση κατά 20 dB/decade.
- Εάν συναντήσουμε πόλο δευτέρας τάξεως, **ελαττώνουμε** την κλίση κατά 40 dB/decade και σχεδιάζουμε μία κορυφή στη θέση ω_r με τιμή συχνότητας $|\mathcal{H}(j\omega_r)|$. Αντίθετα εάν συναντήσουμε μηδενική τιμή **αυξάνουμε** την κλίση κατά 40 dB/decade και σχεδιάζουμε μία **κοιλία** στην ίδια θέση.
- Βαθμονομούμε τον κατακόρυφο άξονα επιλέγοντας περιοχές συχνότητας κατά μήκος των οποίων το λογαριθμικό πλάτος παραμένει σταθερό.
- Εξομαλύνουμε τις ασύμπτωτες στις θέσεις των σημείων αλλαγής κλίσης χωρίς όμως να υπερβούμε τα επιτρεπτά όρια σφάλματος.

Διαγράμματα Bode

Η διαδικασία κατασκευής των διαγραμμάτων Bode - Διάγραμμα φάσης

- Ξεκινάμε από τα αριστερά προς τα δεξιά χαράσσοντας μία ευθεία με εξίσωση $\angle H(j\omega) = 0$ μέχρι τη στιγμή που θα συναντήσουμε το πρώτο σημείο αλλαγής κλίσης. Εάν υπάρχει πόλος στη θέση $\omega = 0$ χαράσσουμε μία ευθεία με εξίσωση $\angle H(j\omega) = -90^\circ$. Εάν υπάρχει μηδενικό στη θέση $s = 0$ η εξίσωση της ευθείας που χαράσσεται είναι η $\angle H(j\omega) = +90^\circ$.
- Κάθε φορά που συναντάμε ένα **πόλο** $\omega = \alpha$ **ελαττώνουμε** τη φάση κατά 90° για την περιοχή συχνοτήτων $[0.1\alpha, 10\alpha]$ ενώ αντίθετα για ένα **μηδενικό** στην ίδια θέση, **αυξάνουμε** τη φάση κατά 90° και για την ίδια περιοχή τιμών. Θα πρέπει να ληφθεί μέριμνα, ώστε στη θέση του πόλου / μηδενικής τιμής, η φάση της συνάρτησης να έχει ελαττωθεί / αυξηθεί κατά 45° αντίστοιχα.
- Κάθε φορά που συναντάμε ένα **πόλο δευτέρας τάξεως** ελαττώνουμε την κλίση κατά 180° ενώ για την περίπτωση **μηδενικής τιμής** της ίδιας τάξεως θα πρέπει να προσθέτουμε στη φάση της συνάρτησης την παραπάνω τιμή.
- Εξομαλύνουμε τις ασύμπτωτες κατά έξι περίπου μοίρες στην περιοχή τιμών $[0.1\alpha, 10\alpha]$, έτσι ώστε η γραφική παράσταση να μοιάζει περισσότερο με αυτή της συνάρτησης του τόξου εφαιπτομένης.

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα κατασκευής διαγράμματος Bode

Άσκηση

Να κατασκευαστεί το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{100s^2 + 750s}{s^2 + 13s + 30}$$

Διατυπώνοντας τη συνάρτηση $H(s)$ με τη μορφή

$$H(s) = \frac{10s^2 + 750s}{s^2 + 13s + 30} = \frac{10s(s + 75)}{(s + 3)(s + 10)} = 25 \frac{s[1 + (s/75)]}{[1 + (s/3)][1 + (s/10)]}$$

εντοπίζουμε ένα σταθερό όρο $K = 25$,

δύο μηδενικά στις θέσεις $s = 0$ και $s = -75$ και δύο πόλους στις θέσεις $s = -3$ και $s = -10$.

Επομένως στο διάγραμμα Bode θα υπάρχουν **τρεις συχνότητες κλίσης**, με τιμές $\omega_1 = 3$ rad/second, $\omega_2 = 10$ rad/second και $\omega_3 = 75$ rad/second.

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα κατασκευής διαγράμματος Bode - Διάγραμμα πλάτους

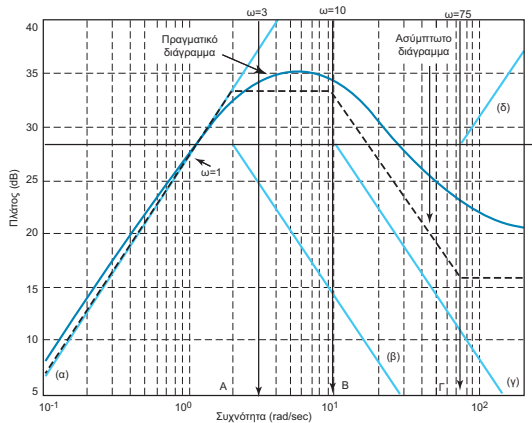
- Η συνεισφορά του σταθερού όρου $K = 25$ έχει τιμή ίση με $20 \log_{10}(25) = 27.958800$. Για να την ενσωματώσουμε μετατοπίζουμε τον οριζόντιο άξονα προς τα πάνω έτσι ώστε αυτός να ταυτιστεί με την ευθεία $|\mathcal{H}(j\omega)| = 20 \log_{10}(25) = 27.958800$ dB.
- Για τη μηδενική τιμή στη θέση $s = 0$ χαράσσουμε μία ευθεία με **θετική κλίση** +20 dB/decade που διέρχεται από το σημείο $\omega = 1$ rad/second του μετατοπισμένου οριζόντιου άξονα.
- Για τον απλό πόλο στη θέση $s = -3$ χαράσσουμε μία ευθεία με **αρνητική κλίση** -20 dB/decade που τέμνει το μετατοπισμένο οριζόντιο άξονα στο σημείο $\omega = 2$ rad/second.
- Για τον απλό πόλο στη θέση $s = -10$ χαράσσουμε μία ευθεία με **αρνητική κλίση** -20 dB/decade που τέμνει το μετατοπισμένο οριζόντιο άξονα στο σημείο $\omega = 10$ rad/second.
- Για τη μηδενική τιμή στη θέση $s = -75$ χαράσσουμε μία ευθεία με **θετική κλίση** +20 dB/decade που τέμνει το μετατοπισμένο οριζόντιο άξονα στο σημείο $\omega = 75$ rad/second.
- Προσθέτουμε μεταξύ τους τις επιμέρους συνεισφορές κατασκευάζοντας το διάγραμμα πλάτους.

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα κατασκευής διαγράμματος Bode - Διάγραμμα πλάτους

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Το διάγραμμα Bode για το πλάτος της συνάρτησης $H(s)$ του παραδείγματος

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα κατασκευής διαγράμματος Bode - Διάγραμμα φάσης

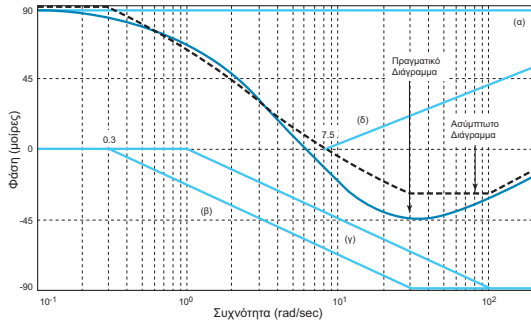
- Η μηδενική τιμή $s = 0$ **αυξάνει** τη φάση κατά 90° .
- Ο σταθερός όρος $K = 25$ δεν μεταβάλλει το διάγραμμα, αφού αντιστοιχεί σε τιμή φάσης 0° .
- Ο πόλος $s = -2$ συνεισφέρει **δύο ασύμπτωτες** στις περιοχές $\omega < 0.2$ rad/second και $\omega > 20$ rad/second με τιμές φάσης 0° και -90° οι οποίες συνδέονται με μία ευθεία με σταθερή πτώση φάσης -45 dB/decade.
- Ο πόλος $s = -10$ συνεισφέρει **δύο ασύμπτωτες** στις περιοχές $\omega < 1$ rad/second και $\omega > 100$ rad/second με τιμές φάσης 0° και -90° οι οποίες συνδέονται με μία ευθεία παρόμοια με την προηγούμενη.
- Η μηδενική τιμή $s = -75$ θα δώσει **δύο ασύμπτωτες** που έχουν μηδενική τιμή μέχρι τη συχνότητα των 7.5 rad/second και τιμή 90° για συχνότητες $\omega > 750$ rad/second οι οποίες συνδέονται με μία ευθεία με θετική κλίση ίση με $+45$ dB/decade.
- Προσθέτουμε μεταξύ τους τις επιμέρους συνεισφορές κατασκευάζοντας το διάγραμμα πλάτους.

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα κατασκευής διαγράμματος Bode - Διάγραμμα φάσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Το διάγραμμα Bode για τη φάση της συνάρτησης $H(s)$ του παραδείγματος

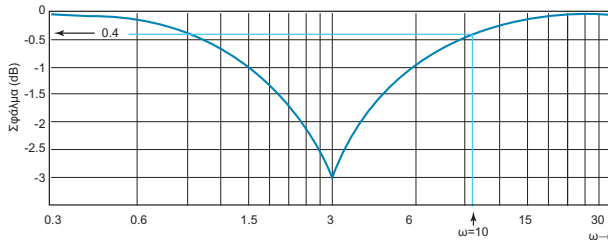
Διαγράμματα Bode

Διόρθωση γραφημάτων Bode

Το διάγραμμα Bode που κατασκευάσαμε παραπάνω επιδέχεται διορθώσεις που περιλαμβάνουν:

Εξομάλυνση καμπυλών πόλων στις θέσεις των συχνοτήτων κλίσης κατεβάζοντας τες κατά -3dB και ανεβάζοντας την καμπύλη στη θέση $\omega = 75$ κατά την ίδια ποσότητα.

Διορθώσεις που σχετίζονται με **την ύπαρξη των υπόλοιπων συχνοτήτων οι οποίες επηρεάζουν το σχήμα της καμπύλης**. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την τιμή της διόρθωσης, χρησιμοποιούμε την καμπύλη μεταβολής του σφάλματος προσέγγισης του διαγράμματος από την ασύμπτωτη έκδοσή του η οποία για $\omega = 3 \text{ rad/second}$ παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Υπολογισμός των τιμών της διόρθωσης για τις διάφορες συχνότητες

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Σύνδεση σε σειρά και παράλληλα

Στην διασύνδεση συστημάτων εν σειρά, η έξοδος του πρώτου συστήματος $z(t) = x(t) * h(t)$ γίνεται είσοδος στο δεύτερο σύστημα η έξοδος του οποίου είναι η

$$y(t) = z(t) * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] = x(t) * h_s(t)$$

όπου $h_s(t) = h(t) * g(t)$. Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$\mathcal{H}_s(s) = \mathcal{L}\{h_s(t)\} = \mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{H}(s)\mathcal{G}(s)$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου συστήματος προκύπτει από το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των στοιχειωδών συστημάτων.

Στην παράλληλη σύνδεση, η έξοδος του σύνθετου συστήματος προκύπτει από το άθροισμα των εξόδων των στοιχειωδών συστημάτων, ή σε μαθηματική γραφή

$$y(t) = x(t) * h(t) + x(t) * g(t) = x(t) * h_p(t)$$

όπου $h_p(t) = h(t) + g(t)$. Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$\mathcal{H}_p(s) = \mathcal{L}\{h_p(t)\} = \mathcal{L}\{h(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{H}(s) + \mathcal{G}(s)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του σύνθετου συστήματος στην παράλληλη σύνδεση, ισούται με το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς των στοιχειωδών συστημάτων.

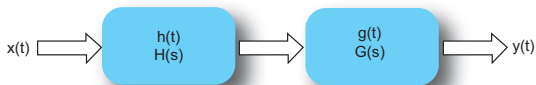
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Σύνδεση σε σειρά και παράλληλα

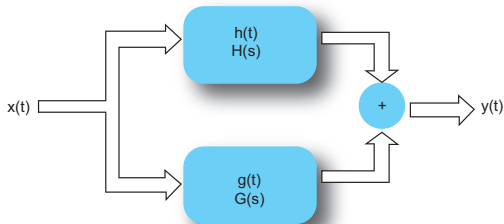
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ



ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΥΝΔΕΣΗ



Διασύνδεση συνεχών συστημάτων σε σειρά και παράλληλα.

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Σύνδεση σε σειρά και παράλληλα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για ένα **αυθαίρετο πλήθος γραμμικών και χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων** που συνδέονται **σε σειρά ή παράλληλα**.

Θεωρώντας N τέτοια συστήματα με συναρτήσεις μεταφοράς $\mathcal{H}_1(s), \mathcal{H}_2(s), \dots, \mathcal{H}_N(s)$, η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου συστήματος που προκύπτει από την **εν σειρά σύνδεσή τους** θα δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_1(s)\mathcal{H}_2(s)\dots\mathcal{H}_N(s) = \prod_{i=1}^N \mathcal{H}_i(s)$$

ενώ η αντίστοιχη έκφραση για την **παράλληλη σύνδεση** έχει τη μορφή

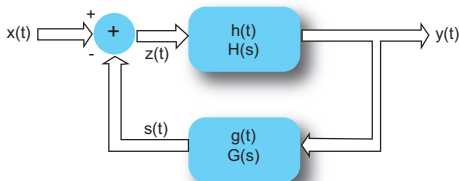
$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_1(s) + \mathcal{H}_2(s) + \dots + \mathcal{H}_N(s) = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i(s)$$

Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Σύνδεση με ανάδραση

Στη σύνδεση με ανάδραση η έξοδος του συστήματος **ανατροφοδοτεί** την είσοδο.

Θεωρώντας δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h(t)$ και $g(t)$ και συναρτήσεις μεταφοράς $\mathcal{H}(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ και $\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ αυτή η σύνδεση γίνεται ως εξής



Η έξοδος $s(t)$ του συστήματος $\mathcal{G}(s)$, **αφαιρείται** από την είσοδο $x(t)$ για να δώσει το νέο σήμα εισόδου $z(t) = x(t) - s(t)$ του συστήματος $\mathcal{H}(s)$.

Παρατηρούμε ότι

- $y(t) = z(t) * h(t)$ και επομένως $\mathcal{Y}(s) = \mathcal{Z}(s) \mathcal{H}(s)$
- $s(t) = y(t) * g(t)$ και επομένως $\mathcal{S}(s) = \mathcal{Y}(s) \mathcal{G}(s)$.

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Σύνδεση με ανάδραση

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace της σχέσης $z(t) = x(t) - s(t)$ θα λάβουμε $\mathcal{Z}(s) = \mathcal{X}(s) - \mathcal{S}(s)$ και επομένως θα είναι

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{H}(s) \mathcal{Z}(s) = \mathcal{H}(s) \left[\mathcal{X}(s) - \mathcal{S}(s) \right] = \mathcal{H}(s) \left[\mathcal{X}(s) - \mathcal{Y}(s) \mathcal{G}(s) \right]$$

από όπου προκύπτει πως η συνάρτηση μεταφοράς του σύνθετου συστήματος είναι η

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\mathcal{H}(s)}{1 + \mathcal{H}(s) \mathcal{G}(s)}$$

Το **αντίστροφο** ενός συστήματος $\mathcal{H}(s)$ είναι το σύστημα $\mathcal{G}(s)$ που αν συνδεθεί σε σειρά με το $\mathcal{H}(s)$ οδηγεί στη δημιουργία ενός σύνθετου συστήματος η έξοδος του οποίου $y(t)$ ταυτίζεται με την είσοδό του $x(t)$ και επομένως

$$y(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] = x(t)$$

Εάν λάβουμε το **μετασχηματισμό Laplace** της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει αμέσως ότι $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \mathcal{L}\{h(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$ - θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}_s(t) = \mathcal{L}\{h(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{H}(s) \mathcal{G}(s) = 1$$

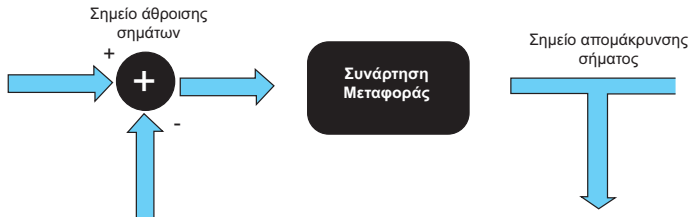
και επομένως $\mathcal{G}(s) = 1/\mathcal{H}(s)$. Τι συμπεραίνετε για τους πόλους και τις μηδενικές τιμές;

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα

Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις δομικές μονάδες που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή σχηματικών διαγραμμάτων:

- **Αθροιστής σημάτων:** δέχεται σαν είσοδο δύο σήματα και παράγει στην έξοδό του το άθροισμα ή τη διαφορά τους.
- **Συνάρτηση μεταφοράς:** αναπαρίσταται από ένα ορθογώνιο και περιέχει ως ετικέτα το σύμβολο της συνάρτησης μεταφοράς ή την εξίσωση ορισμού της
- **Σημείο απομάκρυνσης σήματος:** αναπαριστά ένα σημείο διακλάδωσης δια μέσου του οποίου το σήμα μπορεί να ανακατευθυνθεί προς κάποιο άλλο προορισμό.



Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Παράδειγμα

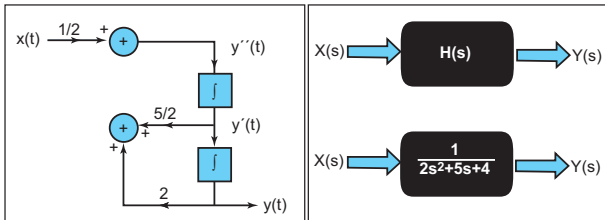
Θεωρώντας το σύστημα LTI που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{1}{2s^2 + 5s + 4}$$

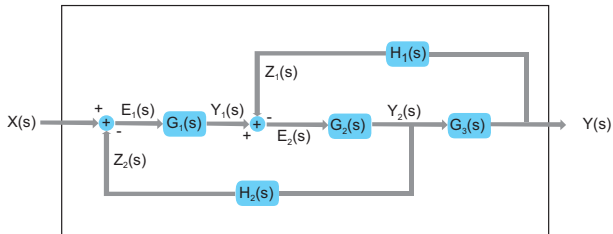
η διαγραμματική περιγραφή του στο πεδίο του χρόνου και στο χώρο των s απεικονίζεται στη συνέχεια



Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σύστημα του επόμενου σχήματος



Μπορεί να απλοποιηθεί σε ένα απλούστερο αλλά **ισοδύναμο** σύστημα; Η απάντηση είναι καταφατική.

Τα παραπάνω συστήματα είναι LTI και η απλοποίηση του σύνθετου συστήματος στηρίζεται στη χρήση των ιδιοτήτων της **συνέλιξης** και της **γραμμικότητας** του μετασχηματισμού Laplace.

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace έχουμε

- Για το υποσύστημα $\mathcal{G}_1(s)$: $y_1(t) = g_1(t) * e_1(t) \Leftrightarrow \mathcal{Y}_1(s) = \mathcal{G}_1(s) \mathcal{E}_1(s)$
- Για το υποσύστημα $\mathcal{G}_2(s)$: $y_2(t) = g_2(t) * e_2(t) \Leftrightarrow \mathcal{Y}_2(s) = \mathcal{G}_2(s) \mathcal{E}_2(s)$
- Για το υποσύστημα $\mathcal{G}_3(s)$: $y(t) = g_3(t) * y_2(t) \Leftrightarrow \mathcal{Y}(s) = \mathcal{G}_3(s) \mathcal{Y}_2(s)$
- Για το υποσύστημα $\mathcal{H}_1(s)$: $z_1(t) = h_1(t) * y(t) \Leftrightarrow \mathcal{Z}_1(s) = \mathcal{H}_1(s) \mathcal{Y}(s)$
- Για το υποσύστημα $\mathcal{H}_2(s)$: $z_2(t) = h_2(t) * y_2(t) \Leftrightarrow \mathcal{Z}_2(s) = \mathcal{H}_2(s) \mathcal{Y}_2(s)$

όπου οι κρουστικές αποκρίσεις των πέντε υποσυστημάτων ορίζονται ως

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{G}_1(s)\}, \quad g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{G}_2(s)\}, \quad g_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{G}_3(s)\}$$
$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}_1(s)\}, \quad h_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}_2(s)\}$$

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

Στηριζόμενοι τώρα στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(s) &= \mathcal{G}_3(s)\mathcal{Y}_2(s) = \mathcal{G}_3(s)\{\mathcal{G}_2(s)\mathcal{E}_2(s)\} = \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)[\mathcal{Y}_1(s) - \mathcal{Z}_1(s)] \\ &= \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{Y}_1(s) - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{Z}_1(s) = \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{Y}_1(s) - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\{\mathcal{H}_1(s)\mathcal{Y}(s)\} \\ &= \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\{\mathcal{G}_1(s)\mathcal{E}_1(s)\} - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_1(s)\mathcal{Y}(s) = \\ &= \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_1(s)[\mathcal{X}(s) - \mathcal{Z}_2(s)] - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_1(s)\mathcal{Y}(s) = \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_1(s)\mathcal{X}(s) - \\ &- \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_1(s)\mathcal{Z}_2(s) - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_1(s)\mathcal{Y}(s) = \\ &= \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_1(s)\mathcal{X}(s) - \mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_1(s)\mathcal{H}_2(s)\mathcal{Y}(s) - \mathcal{G}_3(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_1(s)\mathcal{Y}(s)\end{aligned}$$

Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{Y}(s) \left[1 + \mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_2(s) + \mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_3(s)\mathcal{H}_1(s) \right] = \left[\mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_3(s) \right] \mathcal{X}(s)$$

και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου συστήματος θα είναι

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_3(s)}{1 + \mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{H}_2(s) + \mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_3(s)\mathcal{H}_1(s)}$$

Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνει χώρα η απλοποίηση οποιουδήποτε διαγράμματος.

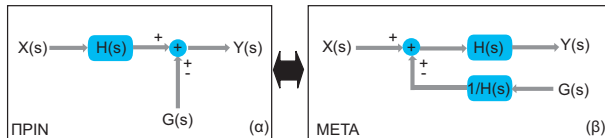
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

Στη γενική περίπτωση χρησιμοποιούνται οι επόμενοι μετασχηματισμοί.

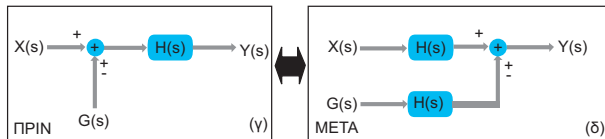
- **Μετακίνηση αθροιστή σημάτων μπροστά από στοιχείο συνάρτησης μεταφοράς.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$Y(s) = H(s)X(s) \pm G(s)$$



- **Μετακίνηση αθροιστή σημάτων πίσω από στοιχείο συνάρτησης μεταφοράς.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$Y(s) = H(s)[X(s) \pm G(s)]$$

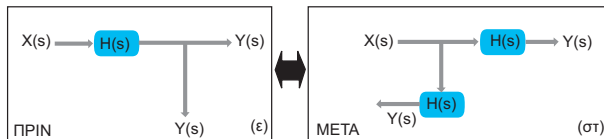


Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

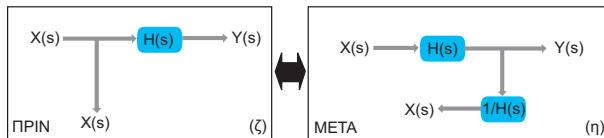
- **Μετακίνηση σημείου διακλάδωσης μπροστά από στοιχείο συνάρτησης μεταφοράς.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$Y(s) = H(s)X(s)$$



- **Μετακίνηση σημείου διακλάδωσης πίσω από στοιχείο συνάρτησης μεταφοράς.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

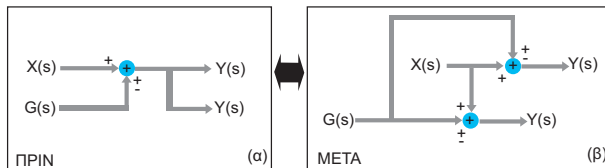


Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Απλοποίηση συστημάτων

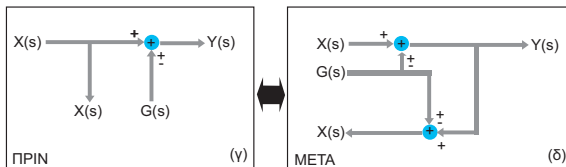
- **Μετακίνηση σημείου διακλάδωσης μπροστά από αθροιστή σημάτων.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s) \pm \mathcal{G}(s)$$



- **Μετακίνηση σημείου διακλάδωσης πίσω από αθροιστή σημάτων.** Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s) \pm \mathcal{G}(s)$$

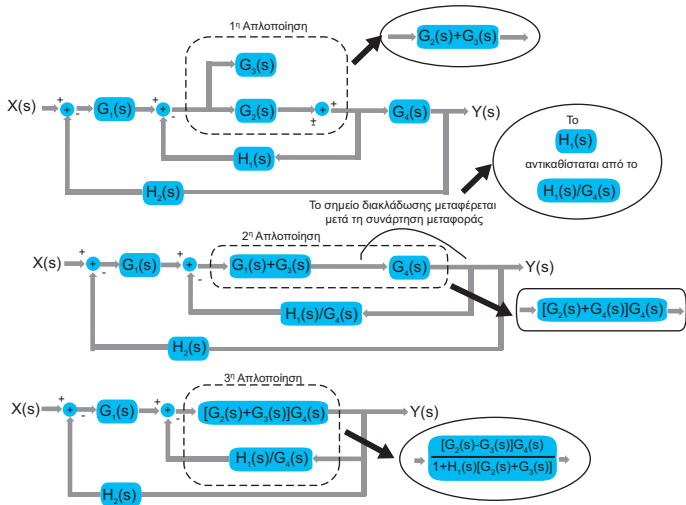


Διασύνδεση συστημάτων LTI

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Παράδειγμα απλοποίησης (A)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

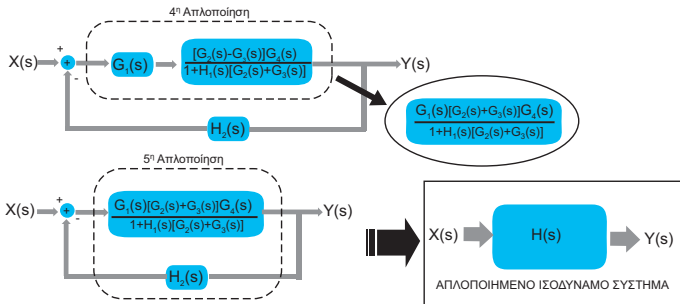


Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Αναπαράσταση με σχηματικά διαγράμματα - Παράδειγμα απλοποίησης (B)

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ



Η συνάρτηση του σύνθετου συστήματος έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \left\{ \frac{G_1(s) [G_2(s) + G_3(s)] G_4(s)}{1 + H_1(s) [G_2(s) + G_3(s)]} \right\} / \left\{ 1 + \frac{H_2(s) G_1(s) [G_2(s) + G_3(s)] G_4(s)}{1 + H_1(s) [G_2(s) + G_3(s)]} \right\}$$

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Γραφήματα ροής σημάτων

Αποτελούν εναλλακτικό τρόπο περιγραφής των συστημάτων LTI και χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της **συνάρτησης μεταφοράς** και την περιγραφή των συστημάτων στο **χώρο κατάστασης**.

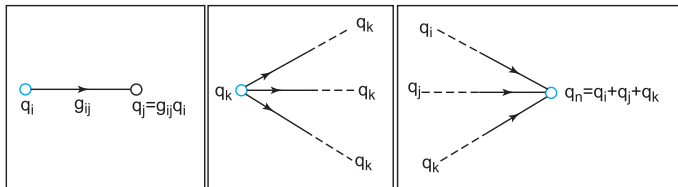
Η δομή τους χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη συνόλου **κόμβων** που αναπαριστούν **σήματα** και οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με τη βοήθεια **προσανατολισμένων κλάδων** που αναπαριστούν **συστήματα**.

- Οι κόμβοι του γραφήματος αποτελούν **μεταβλητές** του συστήματος και είναι διατεταγμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε να υπακούουν στην αρχή **αιτίου - αποτελέσματος**.
- Σε κάθε κλάδο του γραφήματος αντιστοιχεί ένα **βάρος** που είναι γνωστό ως **κέρδος** και εκφράζει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος που περιγράφεται από τον κλάδο.
- Η τιμή του κέρδους **πολλαπλασιάζεται** με το σήμα που διέρχεται από τον κλάδο έτσι ώστε να υπολογιστεί η έξοδος του.
- Η τιμή της μεταβλητής που σχετίζεται με κάποιο κόμβο **μεταδίδεται** σε όλους τους κλάδους του κυκλώματος που ξεκινούν από αυτόν (κόμβος - πηγή).
- Η τιμή της μεταβλητής που σχετίζεται με κάποιο κόμβο είναι ίση με το **άθροισμα** των σημάτων που εισέρχονται σε αυτόν (κόμβος - προορισμός).

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Γραφήματα ροής σημάτων

- Η διέλευση ενός σήματος από τον ίδιο κόμβο περισσότερες από μία φορές **δεν είναι επιτρεπτή**, εκτός εάν το σήμα ξεκινά και καταλήγει στον ίδιο κόμβο σχηματίζοντας ένα κλειστό **βρόχο**.
- Το **κέρδος βρόχου** ισούται με το **γινόμενο των κερδών των κλάδων του συστήματος από τους οποίους διερχόμαστε για μία και μοναδική φορά**, ακολουθώντας τη ροή του σήματος μέχρι τελικά να καταλήξουμε στον κόμβο από τον οποίο ξεκινήσαμε.
- Το κέρδος μιας ανοικτής διαδρομής ισούται με το **γινόμενο των κερδών** που σχετίζονται με τους επιμέρους κλάδους της.

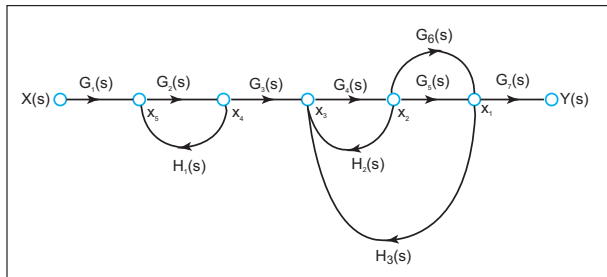


Ιδιότητες των γραφημάτων ροής σημάτων.

Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Γραφήματα ροής σημάτων - Παράδειγμα

Θεωρώντας το επόμενο γράφημα ροής σήματος παρατηρούμε ότι:



Υπάρχουν τέσσερα κέρδη βρόχων, τα $G_2(s)H_1(s)$, $G_4(s)H_2(s)$, $G_4(s)G_5(s)H_3(s)$ και $G_4(s)G_6(s)H_3(s)$.

Ο βρόχος $G_2(s)H_1(s)$ είναι ξένος ως προς τους βρόχους $G_4(s)H_2(s)$, $G_4(s)G_5(s)H_3(s)$ και $G_4(s)G_6(s)H_3(s)$ αφού δεν μοιράζεται κοινούς κόμβους με αυτούς.

Υπάρχουν δύο κέρδη διαδρομών, τα $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_7(s)$ και $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s)G_7(s)$.

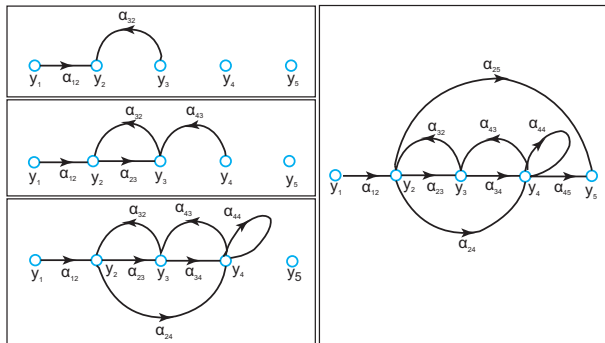
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Κατασκευή γραφήματος ροής σημάτων

Το γράφημα κατασκευάζεται σταδιακά προσθέτοντας αρχικά τους κόμβους και μετά τους κλάδους. Θεωρώντας για παράδειγμα το σύστημα εξισώσεων

$$y_2 = \alpha_{12}y_1 + \alpha_{32}y_3, \quad y_3 = \alpha_{23}y_2 + \alpha_{43}y_4, \quad y_4 = \alpha_{24}y_2 + \alpha_{34}y_3 + \alpha_{44}y_4, \quad y_5 = \alpha_{25}y_2 + \alpha_{45}y_4$$

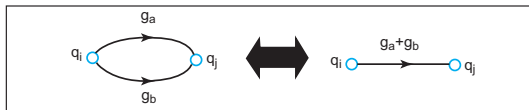
το ισοδύναμο γράφημα ροής κατασκευάζεται όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



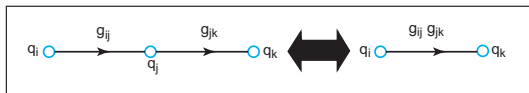
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Απλοποίηση γραφημάτων ροής σημάτων

- Εάν δύο κόμβοι q_i και q_j συνδέονται με δύο διαφορετικούς κλάδους με κέρδη g_α και g_β , οι δύο κλάδοι μπορούν να αντικατασταθούν **από ένα απλό κλάδο** με τιμή κέρδους $g_\alpha + g_\beta$.



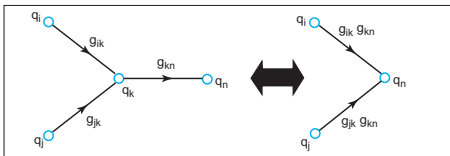
- Ένα σύνολο τριών κόμβων q_i , q_j και q_k συνδεδεμένοι εν σειρά δια μέσου κλάδων με τιμές κέρδους g_{ij} και g_{jk} είναι ισοδύναμο με ένα γράφημα που περιέχει τους **δύο ακραίους κόμβους** q_i και q_k οι οποίοι συνδέονται **με ένα απλό κλάδο** με τιμή κέρδους $g_{ij}g_{jk}$.



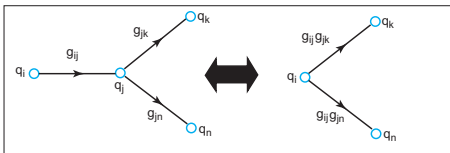
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Απλοποίηση γραφημάτων ροής σημάτων

- Εάν οι κόμβοι q_i και q_j συνδέονται **παράλληλα** με τον q_k με κέρδη g_{ik} και g_{jk} που με τη σειρά του συνδέεται με τον q_n με κέρδος g_{kn} , αυτό το σύνολο είναι ισοδύναμο με ένα γράφημα που περιέχει μόνο τους κόμβους q_i , q_j και q_k , με τους q_i και q_j να συνδέονται **παράλληλα** με τον q_k με κέρδη $g_{ik}g_{kn}$ και $g_{jk}g_{kn}$.



- Ένα σύνολο τεσσάρων κόμβων q_i , q_j , q_k και q_n εκ των οποίων ο q_i συνδέεται με τον q_j με κέρδος g_{ij} ο οποίος με τη σειρά του συνδέεται στους κόμβους q_k και q_n με κέρδη g_{jk} και g_{jn} , είναι ισοδύναμο με ένα απλό γράφημα στο οποίο ο κόμβος q_j συνδέεται με τους q_k και q_n με κέρδη $g_{ij}g_{jk}$ και $g_{ij}g_{jn}$.



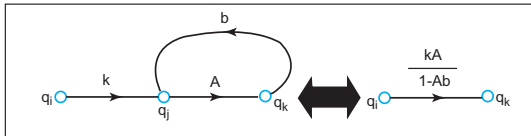
Διασύνδεση συστημάτων LTI

Απλοποίηση γραφημάτων ροής σημάτων

- Εάν τρεις κόμβοι q_i , q_j και q_k συνδέονται **εν σειρά** με κέρδη $g_{ij} = g_{jk} = 1$ ενώ ο κόμβος q_j συνδέεται με τον εαυτό του **διά μέσου βρόχου** με κέρδος $g_{jj} = L$, αυτή η συνδεσμολογία είναι ισοδύναμη με ένα γράφημα που περιέχει τους κόμβους q_i και q_k οι οποίοι συνδέονται δια μέσου ενός κλάδου με τιμή κέρδους $1/(L-1)$.

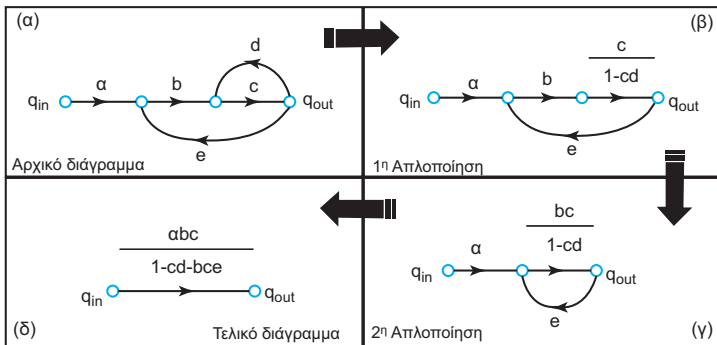


- Εάν τρεις κόμβοι q_i , q_j και q_k συνδέονται με κέρδη $g_{ij} = k$ και $g_{jk} = A$ και υπάρχει **αναδρομικός κλάδος** που συνδέει τον κόμβο q_k με τον q_j με κέρδος $g_{kj} = b$, τότε αυτή η συνδεσμολογία είναι ισοδύναμη με ένα γράφημα που περιέχει μόνο τους κόμβους q_i και q_k οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με κέρδος $kA/(1-Ab)$.



Διασύνδεση συστημάτων LTI

Παράδειγμα απλοποίησης γραφημάτων ροής σημάτων



Παράδειγμα εφαρμογής της διαδικασίας απλοποίησης γραφήματος ροής σημάτων.

Διασύνδεση συστημάτων LTI

Ο κανόνας του Mason

Επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς πολύπλοκων συστημάτων και δίδεται από την εξίσωση

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} \equiv \frac{q_{\text{out}}}{q_{\text{in}}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k \Delta_k$$

($k = 1, 2, 3, \dots, N$) όπου N το πλήθος των απλών κλάδων του γραφήματος με φορά προς τα εμπρός, \mathcal{G}_k το κέρδος που σχετίζεται με τον υπ' αριθμόν k κλάδο του γραφήματος και Δ , η ορίζουσα του γραφήματος που ορίζεται ως

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \dots + (-1)^n \sum_{i,j,k,\dots} L_i L_j L_k \dots + \dots$$

όπου L_i το κέρδος του βρόχου i , $L_i L_j$ το γινόμενο των κερδών των βρόχων i και j , $L_i L_j L_k$ το γινόμενο των κερδών των βρόχων i , j και k , κ.ο.κ.

Επομένως για να προσδιορίσουμε την τιμή του Δ , θα πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα των κερδών όλων των απλών βρόχων, το άθροισμα των γινομένων των κερδών των ξένων μεταξύ τους βρόχων ανά δύο, το άθροισμα των γινομένων των κερδών των ξένων μεταξύ τους βρόχων ανά τρεις, κ.ο.κ. και να αφαιρέσουμε όλες αυτές τις τιμές από τη μονάδα.

Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Ο κανόνας του Mason - Παράδειγμα εφαρμογής

Ας προσδιορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του επόμενου γραφήματος

Υπάρχουν τρεις
διαδρομές προς τα εμπρός, οι

$$P_1 : y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5$$

$$P_2 : y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5$$

$$P_3 : y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_5$$

με αντίστοιχα κέρδη

$$G_1 = \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}$$

$$G_2 = \alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{45}$$

$$G_3 = \alpha_{12}\alpha_{25}$$

και τέσσερις βρόχοι, οι

$$y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$$

$$y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_3$$

$$y_2 \rightarrow y_4 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$$

$$y_4 \rightarrow y_4$$

με αντίστοιχα κέρδη

$$L_1 = \alpha_{23}\alpha_{32}$$

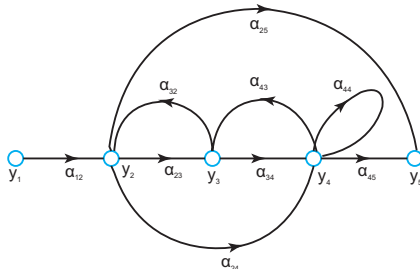
$$L_2 = \alpha_{34}\alpha_{43}$$

$$L_3 = \alpha_{24}\alpha_{43}\alpha_{32}$$

$$L_4 = \alpha_{44}$$

Ο πρώτος και ο τέταρτος βρόχος είναι ξένοι μεταξύ τους με γινόμενο κερδών

$$L_1 L_4 = \alpha_{23}\alpha_{32}\alpha_{44}$$



Διασύνδεση συστημάτων ΛΤΙ

Ο κανόνας του Mason - Παράδειγμα εφαρμογής

Επομένως, η **διακρίνουσα** του γραφήματος υπολογίζεται ως

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_4$$

Για τον υπολογισμό των Δ_1 , Δ_2 και Δ_3 που αντιστοιχούν στις διαδρομές P_1 , P_2 και P_3 θα πρέπει στη διακρίνουσα Δ να μηδενίσουμε τα κέρδη των βρόχων που διαθέτουν κοινούς κόμβους με την κάθε διαδρομή.

Διαδρομές P_1 και P_2 : όλοι οι βρόχοι διαθέτουν κοινούς κόμβους με αυτές και επομένως θα πρέπει να θέσουμε όλα τα L στη μηδενική τιμή. Θα είναι λοιπόν $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$

Διαδρομή P_3 : οι βρόχοι $y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$ και $y_2 \rightarrow y_4 \rightarrow y_3 \rightarrow y_2$ διαθέτουν κοινούς κόμβους με αυτή, όχι όμως και οι $y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_3$ και $y_4 \rightarrow y_4$. Θέτοντας στην εξίσωση της διακρίνουσας $L_1 = L_3 = 0$ θα έχουμε $\Delta_3 = 1 - L_2 - L_4 = 1 - \alpha_{34}\alpha_{43} - \alpha_{44}$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραστάσεις στον τύπο του Mason θα λάβουμε

$$\begin{aligned} G &= \frac{y_5}{y_1} = \frac{G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2 + G_3 \Delta_3}{\Delta} \\ &= \frac{(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}) + (\alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{45}) + (\alpha_{12}\alpha_{25})(1 - \alpha_{34}\alpha_{43} - \alpha_{44})}{1 - (\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{34}\alpha_{43} + \alpha_{24}\alpha_{32}\alpha_{43} + \alpha_{44}) + \alpha_{23}\alpha_{32}\alpha_{44}} \end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Όπως έχουμε δει, η συμπεριφορά ενός γραμμικού συστήματος MIMO στο χώρο κατάστασης, περιγράφεται με τη βοήθεια των **δυναμικών εξισώσεων**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_N(t)]^T$$

το διάνυσμα των N **καταστατικών μεταβλητών**

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_K(t)]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_L(t)]^T$$

τα διανύσματα εισόδου και εξόδου K και L στοιχείων και $\mathbf{A}_{N \times N}$, $\mathbf{B}_{N \times K}$, $\mathbf{C}_{L \times N}$ και $\mathbf{D}_{L \times K}$ οι πίνακες συστήματος, εισόδου, μέτρησης και εξόδου.

Οι παραπάνω σχέσεις για τα απλά συστήματα SISO ($K = L = 1$) γράφονται

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \mathbf{A}q(t) + \mathbf{B}x(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}q(t) + \mathbf{D}x(t)\end{aligned}$$

με τις διαστάσεις των πινάκων να προσαρμόζονται ανάλογα.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ας διατυπώσουμε τις δυναμικές εξισώσεις στην αναλυτική τους μορφή

$$\dot{q}_1(t) = \alpha_{11}q_1(t) + \alpha_{12}q_2(t) + \cdots + \alpha_{1N}q_N(t) + \beta_{11}x_1(t) + \beta_{12}x_2(t) + \cdots + \beta_{1K}x_K(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \alpha_{21}q_1(t) + \alpha_{22}q_2(t) + \cdots + \alpha_{2N}q_N(t) + \beta_{21}x_1(t) + \beta_{22}x_2(t) + \cdots + \beta_{2K}x_K(t)$$

.....

$$\dot{q}_N(t) = \alpha_{N1}q_1(t) + \alpha_{N2}q_2(t) + \cdots + \alpha_{NN}q_N(t) + \beta_{N1}x_1(t) + \cdots + \beta_{NK}x_K(t)$$

και

$$y_1(t) = \gamma_{11}q_1(t) + \gamma_{12}q_2(t) + \cdots + \gamma_{1N}q_N(t) + \delta_{11}x_1(t) + \delta_{12}x_2(t) + \cdots + \delta_{1K}x_K(t)$$

$$y_2(t) = \gamma_{21}q_1(t) + \gamma_{22}q_2(t) + \cdots + \gamma_{2N}q_N(t) + \delta_{21}x_1(t) + \delta_{22}x_2(t) + \cdots + \delta_{2K}x_K(t)$$

.....

$$y_L(t) = \gamma_{L1}q_1(t) + \gamma_{L2}q_2(t) + \cdots + \gamma_{LN}q_N(t) + \delta_{L1}x_1(t) + \cdots + \delta_{LK}x_K(t)$$

Ορίζοντας τις ποσότητες

$$\mathcal{Q}_i(s) = \mathcal{L}\{q_i(t)\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad \text{και} \quad \mathcal{X}_j(s) = \mathcal{L}\{x_j(t)\} \quad (j = 1, 2, \dots, K)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της **διαφόρισης** του μετασχηματισμού Laplace η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathcal{L}\{\dot{q}(t)\} = s\mathcal{Q}(s) - q(0)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace σε κάθε μία από τις N καταστατικές εξισώσεις, θα μας δώσει

$$sQ_1(s) - q_1(0) = \alpha_{11}Q_1(s) + \cdots + \alpha_{1N}Q_N(s) + \beta_{11}X_1(s) + \cdots + \beta_{1K}X_K(s)$$

$$sQ_2(s) - q_2(0) = \alpha_{21}Q_1(s) + \cdots + \alpha_{2N}Q_N(s) + \beta_{21}X_1(s) + \cdots + \beta_{2K}X_K(s)$$

.....

$$sQ_N(s) - q_N(0) = \alpha_{N1}Q_1(s) + \cdots + \alpha_{NN}Q_N(s) + \beta_{N1}X_1(s) + \cdots + \beta_{NK}X_K(s)$$

ή εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων

$$s \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_N(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_N(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \cdots & \beta_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_K(s) \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορίζοντας τα διανύσματα

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(s) &= [\mathcal{Q}_1(s) \ \dots \ \mathcal{Q}_N(s)]^T \\ \mathbf{q}(0) &= [q_1(0) \ q_2(0) \ \dots \ q_N(0)]^T \\ \mathcal{X}(s) &= [\mathcal{X}_1(s) \ \mathcal{X}_2(s) \ \dots \ \mathcal{X}_K(s)]^T\end{aligned}$$

η παραπάνω σχέση μετά από απλές πράξεις γράφεται

$$(sI - \mathbf{A})\mathcal{Q}(s) = \mathbf{q}(0) + \mathbf{B}\mathcal{X}(s)$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας $N \times N$. Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη επί $\Phi(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1}$ λαμβάνουμε

$$\mathcal{Q}(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1} \left[\mathbf{q}(0) + \mathbf{B}\mathcal{X}(s) \right] = \Phi(s)\mathbf{q}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s)$$

και επομένως το ζητούμενο κατασταστικό διάνυσμα $\mathbf{q}(t)$ θα υπολογιστεί ως ο **αντίστροφος μετασχηματισμός**

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Q}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}\mathbf{q}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s)\}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

Με παρόμοιο τρόπο, ορίζοντας τις συναρτήσεις $\mathcal{Y}_i(s) = \mathcal{L}\{y_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$) και παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace των L εξισώσεων εξόδου έχουμε

$$\mathcal{Y}_1(s) = \gamma_{11}Q_1(s) + \gamma_{12}Q_2(s) + \dots + \gamma_{1N}Q_N(s) + \delta_{11}X_1(s) + \dots + \delta_{1K}X_K(s)$$

$$\mathcal{Y}_2(s) = \gamma_{21}Q_1(s) + \gamma_{22}Q_2(s) + \dots + \gamma_{2N}Q_N(s) + \delta_{21}X_1(s) + \dots + \delta_{2K}X_K(s)$$

.....

$$\mathcal{Y}_L(s) = \gamma_{L1}Q_1(s) + \gamma_{L2}Q_2(s) + \dots + \gamma_{LN}Q_N(s) + \delta_{L1}X_1(s) + \dots + \delta_{LK}X_K(s)$$

ή εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας πίνακες,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1(s) \\ \mathcal{Y}_2(s) \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{L1} & \gamma_{L2} & \dots & \gamma_{LN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_N(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1K} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{L1} & \delta_{L2} & \dots & \delta_{LK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_K(s) \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Εργαζόμενοι όπως και πριν και ορίζοντας το διάνυσμα $\mathcal{Y}(s) = [\mathcal{Y}_1(s) \ \mathcal{Y}_2(s) \ \cdots \ \mathcal{Y}_l(s)]^T$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{Y}(s) = \mathbf{C}\mathcal{Q}(s) + \mathbf{D}\mathcal{X}(s)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\mathcal{Q}(s) = \Phi(s)\mathbf{q}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s)$ θα λάβουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \mathbf{C} \left[\Phi(s)\mathbf{q}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s) \right] + \mathbf{D}\mathcal{X}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{q}(0) + \left[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathcal{X}(s)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το άθροισμα δύο όρων

- $\mathcal{Y}_{zi}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{q}(0)$: απόκριση στη μηδενική είσοδο
- $\mathcal{Y}_{zs}(s) = [\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathcal{X}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s)$: απόκριση στη μηδενική κατάσταση

Επομένως η έξοδος του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}\Phi(s)\}\mathbf{q}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathcal{X}(s) \right\}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις - Παράδειγμα επίλυσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Άσκηση

Να επιλύσετε την καταστατική εξίσωση $\dot{q}(t) = \mathbf{A}q(t) + \mathbf{B}x(t)$ για τιμές παραμέτρων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 0$$

Ο πίνακας $sI - \mathbf{A}$ υπολογίζεται ως

$$sI - \mathbf{A} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

Θα είναι λοιπόν

$$\Phi(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις - Παράδειγμα επίλυσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

και επομένως

$$\Phi(s)\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Η είσοδος $x(t)$ του συστήματος είναι ίση με το μηδέν και επομένως $\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = 0$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της συνάρτησης $\mathcal{Q}(s)$ λαμβάνουμε

$$\mathcal{Q}(s) = \Phi(s)\mathbf{q}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

και η λύση της καταστατικής εξίσωσης υπολογίζεται ως

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Q}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \right\} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις - Παράδειγμα επίλυσης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Προκειμένου να υπολογίσουμε τους παραπάνω αντίστροφους μετασχηματισμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα καταλήγοντας στο αποτέλεσμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 6e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 4e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t)$$

Επομένως η λύση της καταστατικής εξίσωσης θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \\ 4e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$q_1(t) = 6e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \quad \text{και} \quad q_2(t) = 4e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης

Η λύση της καταστατικής εξίσωσης ενός συστήματος LTI δίδεται από την έκφραση

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

(για $t_0 = 0$) και αντίστοιχα, για το χώρο των s

$$\mathbf{Q}(s) = \Phi(s)\mathbf{q}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathcal{X}(s)$$

Παρατηρώντας ότι $\mathbf{Q}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{q}(t)\}$ και $\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{x}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} \mathbf{B}\mathcal{X}(s)$, διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση $\Phi(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1}$ δεν είναι παρά ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης $e^{\mathbf{A}t}$.

Πράγματι, από την εξίσωση ορισμού της εκθετικής συνάρτησης

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k$$

η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace μας δίνει

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} \mathbf{A}^k$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad \text{ή ισοδύναμα ότι} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

και με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k s^{-(k+1)} = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k s^{-k} = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1} \mathbf{A})^k$$

Σύμφωνα με τη γραμμική άλγεβρα εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας, η παραπάνω δυναμοσειρά άπειρων όρων συγκλίνει εντός του χώρου $R^{N \times N}$ επί του οποίου ορίζεται στον πίνακα $(I - s^{-1} \mathbf{A})^{-1}$. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης $e^{\mathbf{A}t}$ θα λάβει τη μορφή

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = s^{-1} (I - s^{-1} \mathbf{A})^{-1} = [s(I - s^{-1} \mathbf{A})]^{-1} = (sI - s s^{-1} \mathbf{A})^{-1} = (sI - \mathbf{A})^{-1} = \Phi(s)$$

και κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την εκθετική συνάρτηση ως

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης - Παράδειγμα

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να υπολογίσετε την εκθετική συνάρτηση e^{At} όπου ο πίνακας A δίδεται από τη σχέση

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση $\Phi(s)$ υπολογίζεται ως

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

και επομένως θα είναι

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)(s+2)}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right\} \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης - Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)(s+2)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

και η εκθετική συνάρτηση πίνακα e^{At} δίδεται από τη σχέση

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) & -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \\ -e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) & -e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t) \end{bmatrix}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Συνάρτηση μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δυναμικών εξισώσεων και θέτοντας $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$, η είσοδος και η έξοδος του συστήματος εκπεφρασμένες στο χώρο των s συνδέονται με τη σχέση

$$\mathcal{Y}(s) = \left[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathcal{X}(s) = \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα πως η συνάρτηση

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathcal{L}\{e^{At}\}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

θα πρέπει να αποτελεί τη **συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος**. Πράγματι, αφού η συνάρτηση μεταφοράς αποτελεί **το μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης**, αυτή η απόκριση θα πρέπει να μπορεί να υπολογιστεί ως $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\}$.

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό διαπιστώνουμε ότι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{H}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\} = \mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

συμπέρασμα που επαληθεύει τον ισχυρισμό μας.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Συνάρτηση μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Ορισμός

Ένα μοντέλο του χώρου κατάστασης $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ λέγεται πως υλοποιεί μία συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s)$ εάν αυτή η συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\mathcal{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

Από την άλλη πλευρά, εάν ο πίνακας $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ δεν υφίσταται, τότε το σύστημα που περιγράφεται από τους παραπάνω πίνακες θεωρείται μη υλοποιήσιμο.

Αναπτύσσοντας τον πίνακα $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ στη δυναμοσειρά άπειρων όρων

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = s^{-1} + \mathbf{A}s^{-2} + \mathbf{A}^2s^{-3} + \mathbf{A}^3s^{-4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k s^{-(k+1)}$$

η συνάρτηση μεταφοράς δύναται να εκφρασθεί με τη μορφή

$$\mathcal{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k s^{-(k+1)} \right) \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{B}s^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}s^{-2} + \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}s^{-3} + \dots$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Συνάρτηση μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

Ορίζοντας τους πίνακες $\mathcal{H}_k \in C^{L \times K}$ ως $\mathcal{H}_0 = D$ και $\mathcal{H}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$ ($k \geq 1$) η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 s^{-1} + \mathcal{H}_2 s^{-2} + \mathcal{H}_3 s^{-3} + \dots$$

Αυτοί οι πίνακες εξαρτώνται **μόνο από τη συνάρτηση μεταφοράς και όχι από την εκάστοτε υλοποίηση του συστήματος** και είναι γνωστοί ως **παράμετροι Markov**.

Λαμβάνοντας υπόψη πως ο αντίστροφος ενός πίνακα \mathbf{A} είναι ίσος με τον προσαρτημένο πίνακα $\text{Adj}(\mathbf{A})$ διαιρεμένο με την ορίζουσά του $\det(\mathbf{A})$ ή σε μαθηματική γραφή

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{Adj}(\mathbf{A}) / \det(\mathbf{A})$$

η εξίσωση ορισμού της συνάρτησης μεταφοράς επαναδιατυπώνεται ως

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\mathbf{C} [\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + D$$

Αποδεικνύεται πως ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή $\mathbf{C} [\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{B}$ είναι πάντοτε **μικρότερος** από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ όταν είναι $D = 0$ ενώ για πίνακες $D \neq 0$ οι δύο βαθμοί μπορεί και να **ταυτίζονται**.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Υλοποιήσεις ελάχιστης διάστασης

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Διαπιστώνουμε ακόμη πως οι πόλοι του συστήματος ταυτίζονται με τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(sI - A) = 0$ οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Σημειώστε, πως αυτό **δεν σημαίνει** πως το σύνολο των πόλων του συστήματος **ταυτίζεται** υποχρεωτικά και σε κάθε περίπτωση με το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα συστήματος, αφού οι πόλοι μπορεί να είναι απλά ένα **υποσύνολο** του συνόλου των ιδιοτιμών του πίνακα A .

Εάν τα δύο σύνολα ταυτίζονται, τότε το θεωρούμενο σύστημα είναι γνωστό ως **σύστημα ελάχιστης διάστασης**.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο συνεχές σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από μία υλοποίηση ελάχιστης διάστασης, είναι **ταυτόχρονα** ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

(για την απόδειξη του θεωρήματος ανατρέξτε στη σελίδα 349 του βιβλίου).

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Ισοδύναμα συστήματα

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΡΓΑΡΗΣ

Η συνάρτηση μεταφοράς $\mathcal{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ παραμένει **αναλλοίωτη** κάτω από **μετασχηματισμούς ομοιότητας** της μορφής $\mathbf{p}(t) = \mathbf{W}\mathbf{q}(t)$. Οι δυναμικές εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad \text{και} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

μετασχηματίζονται στη μορφή

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{p}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t) \quad \text{και} \quad \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{p}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{x}(t)$$

όπου $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}$. Ακόμη, παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{B} \\ &+ \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{s}\mathbf{I}\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{W}^{-1}]^{-1}\mathbf{W}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}[(\mathbf{W}^{-1})^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W}^{-1}]\mathbf{W}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W})(s\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W})\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathcal{H}(s)\end{aligned}$$

διαπιστώνουμε πως πράγματι οι συναρτήσεις μεταφοράς

$$\mathcal{H}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad \text{και} \quad \tilde{\mathcal{H}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1} & \mathbf{W}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1} & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

είναι **ισοδύναμες μεταξύ τους** που είναι και το ζητούμενο.

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

Έστω πως για δεδομένες τιμές των πινάκων A , B , C και D η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\beta_{N-1}s^{N-1} + \beta_{N-2}s^{N-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \alpha_{N-2}s^{N-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

όπου υποθέσαμε ότι $\alpha_N = 1$, θέσαμε $M = N$ και θεωρήσαμε πως ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή της παραπάνω ρητής συνάρτησης είναι μικρότερος κατά μία μονάδα σε σχέση με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή.

Το σύστημά μας μπορεί να προκύψει από την εν σειρά διασύνδεση δύο συστημάτων $z(t) = \mathcal{T}_1\{x(t)\}$ και $y(t) = \mathcal{T}_2\{z(t)\} = \mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1\{x(t)\}\}$ με συναρτήσεις μεταφοράς

$$\mathcal{H}_1(s) = \frac{\mathcal{Z}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{1}{s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \alpha_{N-2}s^{N-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad \text{και}$$

$$\mathcal{H}_2(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{Z}(s)} = \beta_{N-1}s^{N-1} + \beta_{N-2}s^{N-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0$$

Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_1(s)\mathcal{H}_2(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{\beta_{N-1}s^{N-1} + \beta_{N-2}s^{N-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \alpha_{N-2}s^{N-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

και κατασκευάζοντας τις διαφορικές εξισώσεις των παραπάνω υποσυστημάτων βρίσκουμε

$$\frac{d^N z(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} z(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dz(t)}{dt} + \alpha_0 z(t) = x(t) \quad \text{και}$$
$$y(t) = \beta_{N-1} \frac{d^{N-1} z(t)}{dt^{N-1}} + \beta_{N-2} \frac{d^{N-2} z(t)}{dt^{N-2}} + \dots + \beta_1 \frac{dz(t)}{dt} + \beta_0 z(t)$$

Ορίζοντας τις N συνιστώσες του καταστατικού διανύσματος ως

$$q_1(t) = z(t)$$
$$q_2(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt}$$
$$q_3(t) = \frac{dq_2(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

.....

$$q_N(t) = \frac{dq_{N-1}(t)}{dt} = \frac{d^{N-1} z(t)}{dt^{N-1}}$$

και διαφορίζοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{dq_N(t)}{dt} &= \frac{d^N z(t)}{dt^N} = x(t) - \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} z(t)}{dt^{N-1}} - \dots - \alpha_1 \frac{dz(t)}{dt} - \alpha_0 z(t) = \\ &= x(t) - \alpha_{N-1} q_N(t) - \alpha_{N-2} q_{N-1}(t) - \dots - \alpha_1 q_2(t) - \alpha_0 q_1(t) \end{aligned}$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

Καταλήγουμε λοιπόν στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) &= q_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{q}_{N-1}(t) &= q_N(t) \\ \dot{q}_N(t) &= -\alpha_0 q_1(t) - \alpha_1 q_2(t) - \dots - \alpha_{N-1} q_N(t) + x(t)\end{aligned}$$

το οποίο δύναται να εκφρασθεί από μία εξίσωση πινάκων της μορφής

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Από την άλλη πλευρά, αντικαθιστώντας τις παραπάνω καταστατικές μεταβλητές στη δεύτερη διαφορική εξίσωση, θα λάβουμε

$$y(t) = \beta_{N-1} q_N(t) + \beta_{N-2} q_{N-1}(t) + \dots + \beta_1 q_2(t) + \beta_0 q_1(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

ή σε μορφή πίνακα

$$y(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{N-2} & \beta_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{bmatrix}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις πίνακα αποτελούν το **σχήμα ελεγχιμότητας** και αναγνωρίζονται ως η καταστατική εξίσωση και η εξίσωση εξόδου της κανονικής μορφής του ελεγκτή.

Για την κατασκευή του **σχήματος παρατηρησιμότητας** θα χρησιμοποιήσουμε τη **διαφορική εξίσωση** του συστήματος που προκύπτει από την αρχική μας συνάρτηση $\mathcal{H}(s)$ και η οποία είναι η

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0 y(t) = \beta_{N-1} \frac{d^{N-1} x(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_0 x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

Στην προκειμένη περίπτωση, οι καταστατικές μεταβλητές του συστήματος ορίζονται ως

$$q_{N-1}(t) = \frac{dq_N(t)}{dt} + \alpha_{N-1}q_N(t) - \beta_{N-1}x(t)$$

$$q_{N-2}(t) = \frac{dq_{N-1}(t)}{dt} + \alpha_{N-2}q_N(t) - \beta_{N-2}x(t)$$

.....

$$q_2(t) = \frac{dq_3(t)}{dt} + \alpha_2q_N(t) - \beta_2x(t)$$

$$q_1(t) = \frac{dq_2(t)}{dt} + \alpha_1q_N(t) - \beta_1x(t)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$q_1(t) = \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-2}y(t)}{dt^{N-2}} + \dots + \alpha_1 y(t) \\ - \beta_{N-1} \frac{d^{N-2}x(t)}{dt^{N-2}} - \beta_{N-2} \frac{d^{N-3}x(t)}{dt^{N-3}} - \dots - \beta_1 x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

η οποία μετά από παραγωγή και χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση που κατασκευάσαμε προηγουμένως, ανάγεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dq_1(t)}{dt} &= \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} - \\ &- \beta_{N-1} \frac{d^{N-1} x(t)}{dt^{N-1}} - \dots - \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} = \beta_0 x(t) - \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t) - \alpha_0 q_N(t) \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο σύστημα των εξισώσεων

$$\dot{q}_1(t) = \beta_0 x(t) - \alpha_0 q_N(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = q_1(t) - \alpha_1 q_N(t) + \beta_1 x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = q_2(t) - \alpha_2 q_N(t) + \beta_2 x(t)$$

.....

$$\dot{q}_N(t) = q_{N-1}(t) - \alpha_{N-1} q_N(t) + \beta_{N-1} x(t)$$

το οποίο σε μορφή πινάκων διατυπώνεται ως

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix} x(t)$$

Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Δυναμικές εξισώσεις από συνάρτηση μεταφοράς

Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση εξόδου του συστήματος διατυπώνεται ως

$$y(t) = q_N(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{N-1}(t) \\ q_N(t) \end{bmatrix}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν το **σχήμα παρατηρησιμότητας** και αναγνωρίζονται εύκολα ως **η καταστατική εξίσωση** και **η εξίσωση εξόδου της κανονικής μορφής του παρατηρητή**.