

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Πρόλογος | 3 |
| 2 | Μαθηματικό υπόβαθρο και χρήσιμα εργαλεία | 4 |
| 2.1 | Τριγωνομετρικά μεγέθη | 5 |
| 2.2 | Η βασική θεωρία των μιγαδικών αριθμών | 8 |
| 2.3 | Παραδείγματα χρήσης μιγαδικών αριθμών | 10 |
| 2.4 | Ασκήσεις προς επίλυση | 15 |
| 2.5 | Βιβλιοθήκη διαχείρισης μιγαδικών αριθμών | 15 |
| 2.6 | Συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής | 16 |
| 2.7 | Εξισώσεις διαφορών και τεχνικές επίλυσής τους | 17 |
| 2.7.1 | Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξεως | 18 |
| 2.7.2 | Γραμμικές εξισώσεις διαφορών ανωτέρας τάξεως | 18 |
| 2.8 | Δημιουργία γραφικών παραστάσεων | 21 |
| 3 | Εισαγωγικές έννοιες - Σήματα και Συστήματα | 23 |
| 3.1 | Αναλογικά και Ψηφιακά Σήματα και Συστήματα | 24 |
| 3.2 | Κατηγορίες σημάτων | 25 |
| 4 | Σήματα διακριτού χρόνου ή διακριτά σήματα | 26 |
| 4.1 | Ταξινόμηση διακριτών σημάτων | 29 |
| 4.1.1 | Σήματα ενέργειας και σήματα ισχύος | 29 |
| 4.1.2 | Περιοδικά σήματα και απεριοδικά σήματα | 30 |
| 4.1.3 | Συμμετρικά σήματα και αντισυμμετρικά σήματα | 31 |
| 4.2 | Θεμελιώδεις πράξεις με διακριτά σήματα | 33 |
| 4.3 | Η έννοια της συχνότητας στα συνεχή και στα διακριτά σήματα | 35 |
| 4.4 | Η συνεχής και η διακριτή συνάρτηση μοναδιαίας ώσης | 39 |
| 4.5 | Βασικές συναρτήσεις διαχείρισης διακριτών σημάτων | 41 |
| 4.6 | Στατιστικές ιδιότητες μονοδιάστατων διακριτών σημάτων | 45 |
| 4.7 | Συσχέτιση και αυτοσυσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου | 46 |
| 4.7.1 | Ιδιότητες της συσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης | 47 |
| 4.7.2 | Παράδειγμα υπολογισμού της ακολουθίας συσχέτισης | 49 |
| 5 | Συστήματα διακριτού χρόνου | 51 |
| 5.1 | Είδη και κατηγορίες διακριτών συστημάτων | 52 |
| 5.1.1 | Στατικά και δυναμικά διακριτά συστήματα | 52 |
| 5.1.2 | Χρονικώς μεταβαλλόμενα και χρονικώς αμετάβλητα διακριτά συστήματα | 53 |
| 5.1.3 | Γραμμικά και μη γραμμικά διακριτά συστήματα | 54 |
| 5.1.4 | Αιτιατά και μη αιτιατά διακριτά συστήματα | 56 |
| 5.1.5 | Ευσταθή και ασταθή διακριτά συστήματα | 56 |
| 5.2 | Διασύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου | 57 |
| 5.3 | Χρονικώς αμετάβλητα γραμμικά διακριτά συστήματα | 59 |
| 5.3.1 | Παραδείγματα υπολογισμού της συνέλιξης | 59 |
| 5.3.2 | Ιδιότητες της συνέλιξης | 61 |
| 5.3.3 | Αιτιατά και ευσταθή χρονικώς αμετάβλητα γραμμικά συστήματα | 66 |
| 5.3.4 | Συνέλιξη και μετασχηματισμός Fourier | 68 |
| 5.4 | Συστήματα διακριτού χρόνου και εξισώσεις διαφορών | 75 |
| 5.4.1 | Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές | 80 |
| 5.5 | Υλοποίηση διακριτών συστημάτων | 87 |
| 6 | Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό | 91 |
| 6.1 | Δειγματοληψία αναλογικού σήματος | 92 |
| 6.1.1 | Ασαφείς συχνοτικές αναπαραστάσεις διακριτών σημάτων | 93 |
| 6.1.2 | Το θεώρημα της δειγματοληψίας | 96 |
| 6.2 | Κβαντισμός του δειγματοληφθέντος διακριτού σήματος | 101 |
| 6.3 | Κωδικοποίηση του κβαντισμένου διακριτού σήματος | 107 |
| 7 | Ανάπτυγμα Fourier | 107 |

| | | |
|----|--|-----|
| 8 | Μετασχηματισμός Fourier | 109 |
| 9 | Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier | 110 |
| 10 | Fast Fourier Transform, FFT | 112 |
| 11 | Μετασχηματισμός Fourier σε μεγαλύτερο πλήθος διαστάσεων | 116 |
| 12 | Ο μετασχηματισμός Z | 118 |
| 13 | Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z | 120 |
| 14 | Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z | 120 |
| 15 | Πόλοι και μηδενικές τιμές του μετασχηματισμού Z | 121 |
| 16 | Ο μετασχηματισμός Z^+ (One-sided Z transform) | 125 |
| 17 | Η συσχέτιση του μετασχηματισμού Fourier με το μετασχηματισμό Z | 126 |
| 18 | Η συνάρτηση συστήματος (System Function) | 127 |
| 19 | Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z (z domain) | 128 |
| 20 | Συχνοτική ανάλυση σημάτων και συστημάτων | 130 |
| 21 | Συχνοτική ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου | 131 |
| 22 | Συχνοτική ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου | 132 |
| 23 | Ταξινόμηση σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων | 133 |
| 24 | Η συνάρτηση συχνοτικής απόκρισης των διακριτών συστημάτων | 134 |
| 25 | Υπολογισμός της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης | 138 |
| 26 | Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων | 140 |
| 27 | Τα βασικά χαρακτηριστικά των ψηφιακών εικόνων | 143 |
| 28 | Τα βασικά στάδια της επεξεργασίας εικόνας | 146 |
| 29 | Η δομή των αρχείων BMP | 147 |
| 30 | Διανυσματική αναπαράσταση χρωμάτων εικόνων | 154 |
| 31 | Ανίχνευση ακμών | 155 |
| 32 | Εξαγωγή χρώματος | 156 |
| 33 | Μετατροπή έγχρωμης εικόνας σε εικόνα gray-scale | 157 |
| 34 | Βασικοί Μετασχηματισμοί χρωμάτων | 159 |
| 35 | Μεταβολή του μεγέθους της εικόνας | 162 |
| 36 | Περιστροφή της εικόνας | 166 |
| 37 | Μίξη Χρωμάτων (Blending) | 169 |
| 38 | Εισαγωγή στα βασικά ψηφιακά φίλτρα | 174 |
| 39 | Συμπίεση εικόνας - ο αλγόριθμος JPEG | 180 |

1 Πρόλογος

Στόχος αυτών των σημειώσεων αποτελεί η κάλυψη των διδακτικών αναγκών του μαθήματος *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος και Εικόνας* που αποτελεί μάθημα επιλογής του Ζ' εξαμήνου του Τμήματος Πληροφορικής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης. Σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών του Τμήματος, ο στόχος του μαθήματος είναι η εξοικείωση των φοιτητών με τις βασικές μεθόδους και τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την ψηφιακή επεξεργασία μονοδιάστατων και διδιάστατων σημάτων. Τα πιο σημαντικά από τα θέματα που συζητούνται και αναλύονται είναι οι μετασχηματισμοί σήματος και εικόνας, οι πιο σημαντικές κατηγορίες φίλτρων (γραμμικά, μη γραμμικά, προσαρμοστικά, χωρικά), τεχνικές κωδικοποίησης σήματος και εικόνας, πρότυπα συμπίεσης (MP3, JPEG κλπ) καθώς επίσης τεχνικές κατάτμησης και επανόρθωσης εικόνας. Μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος, οι φοιτητές αναμένεται να:

- έχουν καλή γνώση των βασικών θεμάτων επεξεργασίας μονοδιάστατου και διδιάστατου σήματος
- έχουν καλή γνώση των βασικών εννοιών και περιοχών εφαρμογής της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και εικόνας
- κατανοούν τη λειτουργία των βασικών πολυμεσικών προτύπων κωδικοποίησης σήματος και εικόνας
- είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την προγραμματιστική τους εμπειρία για την ανάπτυξη προγραμμάτων επεξεργασίας σήματος και εικόνας
- είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αλγορίθμους επεξεργασίας σήματος και εικόνας και κατάλληλες τεχνικές για να επιλύσουν συγκεκριμένα προβλήματα.

Σε μια συνοπτική περιγραφή, το περιεχόμενο του μαθήματος αποτελείται από τις επόμενες θεματικές ενότητες:

- Εισαγωγή στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος και εικόνας: γενική περιγραφή, σχετικοί τομείς μελέτης και έρευνας
- Βασικά θέματα: διακριτά σήματα, διακριτά συστήματα, δειγματοληψία, κβαντισμός, διακριτή συνέλιξη, διακριτή συσχέτιση, χωρική συχνότητα, εικονοστοιχεία, μάσκα, επίπεδα του γκρι, κλιμάκωση.
- Βασικοί μετασχηματισμοί: μετασχηματισμός Z, διακριτός μετασχηματισμός Fourier στη μια και στις δύο διαστάσεις, διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου, βασικές ιδιότητες μετασχηματισμών.
- Θόρυβος: είδη θορύβου, ομοιόμορφος θόρυβος, Gaussian noise, θόρυβος αλατοπίπερου, κλπ. Στατιστική περιγραφή θορύβου.
- Γραμμικά φίλτρα: κρουστική απόκριση, ευστάθεια, φίλτρα πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης, απόκριση συχνότητας, είδη φίλτρων (βαθυπερατά, υψιπερατά και ζωνοπερατά φίλτρα).
- Ειδικά φίλτρα για εικόνες: χωρικά φίλτρα, μορφολογικά φίλτρα, μη γραμμικά και προσαρμοστικά φίλτρα, φίλτρο μεσαίου, ζυγισμένου μεσαίου, μεγίστου, ελαχίστου και ενδιάμεσου, προσαρμοστικό φίλτρο ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος.
- Κατάτμηση εικόνας: βέλτιστη κατωφλίωση, πολυεπίπεδη κατωφλίωση, ανίχνευση σημείων, ανίχνευση ακμών.
- Επεξεργασία έγχρωμης εικόνας: χρωματικό πρότυπο RGB και YIQ, διάγραμμα χρωματότητας C.I.E., απεικόνιση πραγματικού χρώματος, ψευδοχρωματική απόκριση, διόρθωση χρωματικού κορεσμού και τόνου.
- Κωδικοποίηση και συμπίεση σήματος και εικόνας: πρότυπα κωδικοποίησης MP3, JPEG, MPEG.

Ένας δόκιμος ορισμός που θα μπορούσε να περιγράψει με αρκετή δόση ακρίβειας την ψηφιακή επεξεργασία σήματος (Digital Signal Processing, DSP), χαρακτηρίζει αυτή την ερευνητική περιοχή ως το σύνολο των μαθηματικών εργαλείων, αλγορίθμων και τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία σημάτων - δηλαδή πειραματικών καταγεγραμμένων δεδομένων που προκύπτουν από εφαρμογές του πραγματικού κόσμου - εφόσον αυτά μετασχηματιστούν σε ψηφιακή μορφή. Ιστορικά, το πεδίο της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος γνώρισε μεγάλη άνθηση σε μια εποχή που όλα τα μαθηματικά εργαλεία που είναι αναγκαία για την υλοποίηση των κατάλληλων τεχνικών και μεθόδων είχαν υλοποιηθεί. Αυτά τα εργαλεία περιελάμβαναν μεταξύ των άλλων τις συναρτήσεις συνεχών μεταβλητών και τις διαφορικές εξισώσεις που αναπτύχθηκαν το 17^ο αιώνα, τις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης και παρεμβολής που δημιουργήθηκαν τον επόμενο αιώνα από μαθηματικούς όπως ο Euler, ο Bernoulli και ο Lagrange και τη θεωρία του Fourier σύμφωνα με την οποία μια οποιαδήποτε συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής μπορεί να αναπτυχθεί ως γραμμικός συνδυασμός άπειρων στο πλήθος αρμονικών συναρτήσεων.

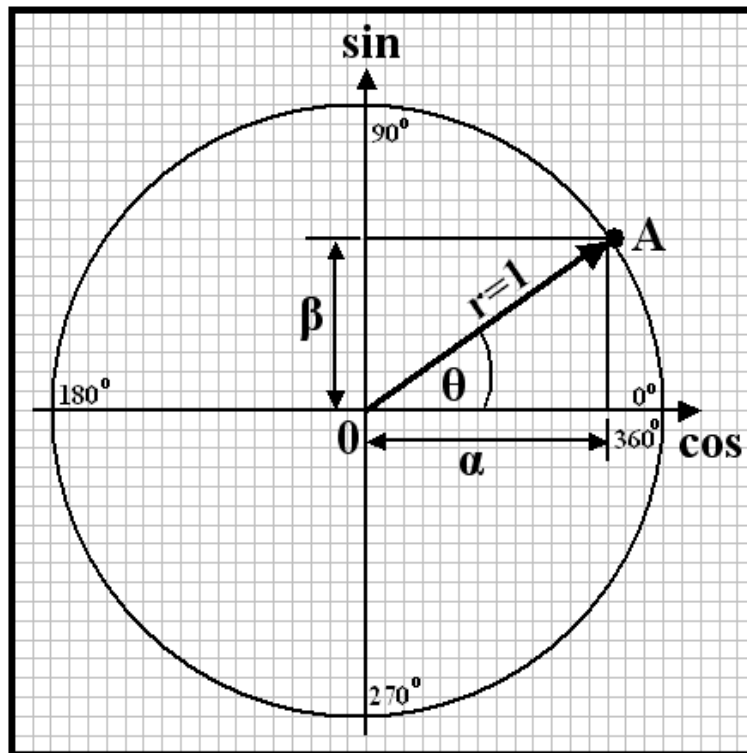
Αν και στα μέσα του προηγούμενου αιώνα οι πρώτοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές είχαν κάνει την εμφάνισή τους, η επεξεργασία των σημάτων εξακολουθούσε να γίνεται με αναλογικά συστήματα που στηριζόταν τόσο σε ηλεκτρονικές όσο και σε μηχανικές συνιστώσες. Ωστόσο οι πλούσιες δυνατότητες που προσέφεραν οι νέες υπολογιστικές διατάξεις έδωσαν σημαντική ώθηση στην ανάπτυξη της νέας αυτής τεχνολογίας καθώς πλέον ήταν δυνατή η προσομοίωση και η μελέτη των συστημάτων επεξεργασίας των σημάτων πριν την πραγματική υλοποίησή τους. Σημαντική θέση στην ιστορία της ψηφιακής επεξεργασίας κατέχει επίσης το έτος 1965 που σηματοδοτεί την υλοποίηση του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) από τους Cooley και Tukey. Αυτός ο μετασχηματισμός έδωσε τεράστια ώθηση στην τεχνολογία της ψηφιακής επεξεργασίας καθώς ελλάττωσε κατά πολλές τάξεις μεγέθους το χρόνο που απαιτείται για την πραγματοποίηση του μετασχηματισμού Fourier και την αποκάλυψη του φασματικού περιεχομένου των σημάτων εισόδου. Τα επόμενα έτη, ο μετασχηματισμός FFT υλοποιήθηκε σε επίπεδο υλικού με αποτέλεσμα την περαιτέρω αύξηση της ταχύτητάς του και την υλοποίηση πολλών μεθόδων και εφαρμογών οι οποίες αν και είχαν σχεδιαστεί πριν πολλά χρόνια εν τούτοις δεν είχαν υλοποιηθεί ποτέ καθώς είχαν χαρακτηριστεί πρακτικά ανεφάρμοστες. Οι εφαρμογές αυτού του είδους πρωτοεμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1970 όταν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές καθιερώθηκαν ως βασικά εργαλεία καταγραφής και επεξεργασίας δεδομένων και χρησιμοποιήθηκαν για την επεξεργασία σημάτων radar και sonar καθώς και δεδομένων προερχόμενων από ακτινογραφίες και εικόνες ιατρικού περιεχομένου. Στη συνέχεια, που το κόστος των ηλεκτρονικών υπολογιστών μειώθηκε σημαντικά, οι τεχνικές DSP εμφανίστηκαν σε εμπορικές εφαρμογές ευρείας χρήσεως, ενώ στις μέρες μας χρησιμοποιούνται σε συσκευές και διατάξεις που αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο της καθημερινής μας ζωής όπως είναι τα κινητά τηλέφωνα και οι φορητές συσκευές αναπαραγωγής αρχείων MP3. Μιλώντας γενικά, οι εφαρμογές DSP έχουν συμβάλει στην εξέλιξη ενός μεγάλου αριθμού επιστημονικών και ερευνητικών θεματικών περιοχών, οι πιο σημαντικές από τις οποίες, μεταξύ των άλλων, περιλαμβάνουν:

- Χωρικές εφαρμογές όπου οι τεχνικές DSP χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση και συμπίεση εικόνων που απεικονίζουν χωρικά δεδομένα καθώς και την ανάλυση σημάτων που καταγράφονται από αισθητήρες.
- Ιατρικές εφαρμογές όπου οι τεχνικές DSP συμβάλλουν στην πραγματοποίηση διαγνώσεων από εικόνες αξονικών και μαγνητικών τομογράφων, στην ανάλυση σημάτων που προέρχονται από εγκεφαλογραφήματα και ηλεκτροκαρδιογραφήματα καθώς και στην αποθήκευση και ανάκτηση εικόνων ιατρικού περιεχομένου.
- Εμπορικές εφαρμογές όπου οι τεχνικές DSP επιτρέπουν τη συμπίεση εικόνας και ήχου για τη χρήση τους σε πολυμεσικές εφαρμογές, την ανάπτυξη ειδικών εφφέ για κινηματογραφικές ταινίες και την πραγματοποίηση τηλεδιασκέψεων δια της χρήσεως τεχνολογίας video.
- Εφαρμογές τηλεφωνίας, όπου οι τεχνικές DSP χρησιμοποιούνται για τη συμπίεση φωνής και δεδομένων, την ελάττωση της ηχούς, την πολυπλεξία σημάτων και την απομάκρυνση των ανεπιθύμητων συχνοτήτων.
- Στρατιωτικές εφαρμογές, όπου οι τεχνικές DSP επιτρέπουν την ανάλυση σημάτων προερχόμενα από radar και sonar και διασφαλίζουν την ασφάλεια των επικοινωνιών δια της χρήσεως των κατάλληλων αλγορίθμων κρυπτογράφησης δεδομένων.
- Βιομηχανικές εφαρμογές, όπου οι τεχνικές DSP χρησιμοποιούνται στη διεξαγωγή ερευνών κοιτασμάτων ορυκτών και πετρελαίου, στον έλεγχο και τη διαχείριση διεργασιών πάσης φύσεως και στην ανάπτυξη εργαλείων σχεδίασης και εφαρμογών CAD.
- Επιστημονικές εφαρμογές, όπου οι τεχνικές DSP επιτρέπουν την καταγραφή και ανάλυση δεδομένων προερχόμενων από σειсмоγράφους και τη φασματική ανάλυση πειραματικώς καταγεγραμμένων χρονοσειρών, ενώ χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα και σε εφαρμογές μοντελοποίησης και προσομοίωσης.

Ολοκληρώνουμε αυτή συνοπτική εισαγωγή στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος με την παρατήρηση πως οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές που χρησιμοποιεί βρίσκουν εφαρμογή και σε άλλες επιστημονικές περιοχές που επικαλύπτονται με αυτή όπως είναι η θεωρία τηλεπικοινωνιών, η αριθμητική ανάλυση, η αναλογική επεξεργασία σήματος, τα αναλογικά και ψηφιακά ηλεκτρονικά και η στατιστική.

2 Μαθηματικό υπόβαθρο και χρήσιμα εργαλεία

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η συνοπτική παρουσίαση εισαγωγικών έννοιών από τα μαθηματικά και τη στατιστική, η πολύ καλή γνώση των οποίων θεωρείται αναγκαία προϋπόθεση για την επιτυχή κατανόηση της ύλης που ακολουθεί. Αυτές οι εισαγωγικές έννοιες περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών και των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής, θεμελιώδεις έννοιες της τριγωνομετρίας, στατιστικά μεγέθη που περιγράφουν μονοδιάστατα σήματα και συνοπτική περιγραφή σειρών πεπερασμένων και απείρων όρων. Αυτή η εισαγωγική ύλη παρουσιάζεται με συνοπτικό τρόπο στις σελίδες που ακολουθούν.



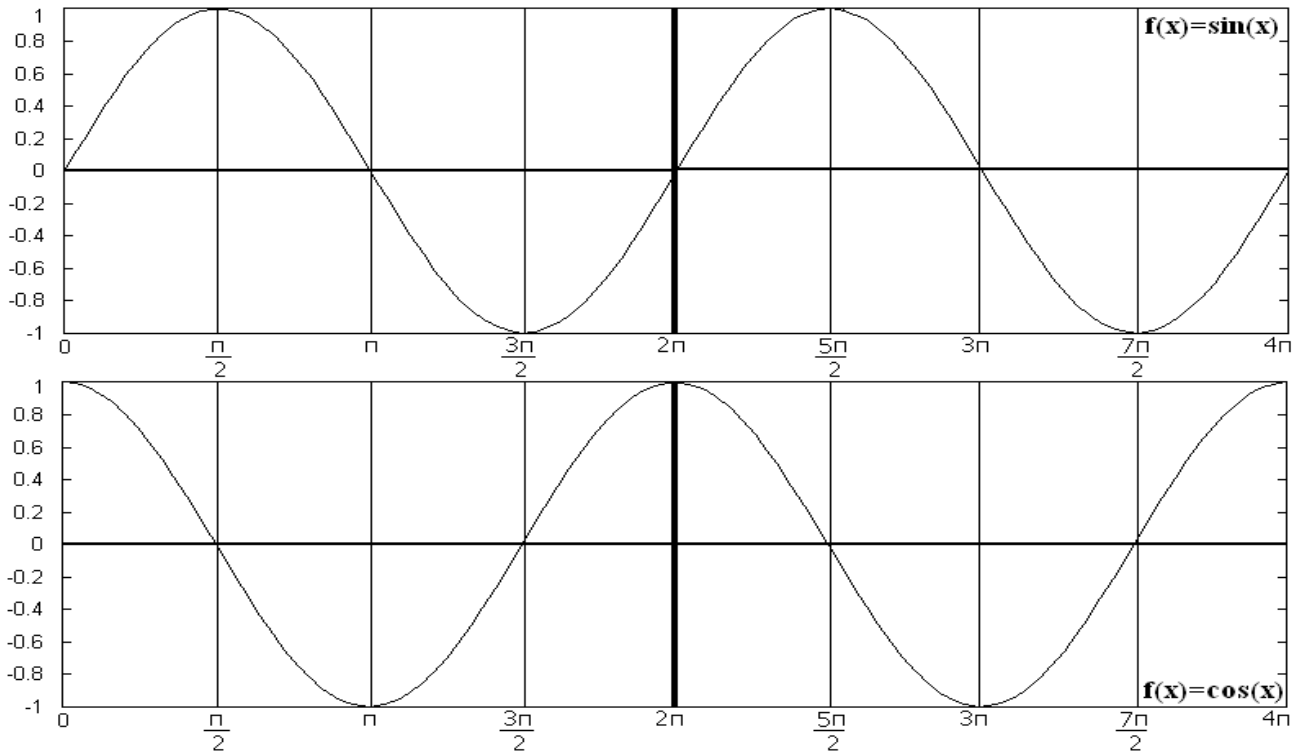
Σχήμα 1: Ο τριγωνομετρικός κύκλος

2.1 Τριγωνομετρικά μεγέθη

Όπως είναι γνωστό από τη γεωμετρία, εάν θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σκαλινό τρίγωνο με μήκη κάθετων πλευρών x και y και μήκος υποτείνουσας r , το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ϑ που ορίζεται από τη μεγάλη κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα δίδονται από τις σχέσεις $\sin \vartheta = y/r$ και $\cos \vartheta = x/r$. Οι άλλες δύο βασικές συναρτήσεις που ορίζονται για μία τέτοια γωνία, είναι οι συναρτήσεις της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης που ορίζονται από τις σχέσεις $\tan \vartheta = \sin \vartheta / \cos \vartheta = y/x$ και $\cot \vartheta = \cos \vartheta / \sin \vartheta = x/y$.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου συνήθως αναπαρίστανται με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου που έχει ακτίνα ίση με τη μονάδα και κέντρο την αρχή O ενός συστήματος συντεταγμένων ο οριζόντιος άξονας του οποίου αναπαριστά το συνημίτονο ενώ ο κατακόρυφος άξονας αναπαριστά το ημίτονο. Αυτό σημαίνει πως αν θεωρήσουμε ένα σημείο A επί της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου, το συνημίτονο της γωνίας ϑ που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα OA και τον οριζόντιο άξονα ισούται με την προβολή α αυτού του τμήματος επί του οριζοντίου άξονα, ενώ το ημίτονο αυτής της γωνίας ορίζεται από την προβολή του ευθυγράμμου τμήματος επί του κατακόρυφου άξονα. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 1. Εάν εφαρμόσουμε το πυθαγόριο θεώρημα για το ορθογώνιο τρίγωνο που ορίζεται από τις δύο προβολές και το ευθύγραμμο τμήμα OA , θα λάβουμε $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ ή ισοδύναμα $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$ (αφού $r = 1$) που είναι μία από τις θεμελιώδεις ταυτότητες της τριγωνομετρίας. Από το παραπάνω σχήμα αποδεικνύεται εύκολα επίσης πως η συνάρτηση του ημιτόνου είναι μία περιττή συνάρτηση (δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\sin(-x) = -\sin x$) ενώ η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι μία άρτια συνάρτηση (δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\cos(-x) = \cos x$).

Οι θεμελιώδεις συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι περιοδικές συναρτήσεις με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ ενώ ανάμεσά τους υφίσταται διαφορά φάσης ίση με $\pi/2$. Αυτές οι ιδιότητες της περιοδικότητας περιγράφονται



Σχήμα 2: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου

από τις μαθηματικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(x) &= \cos(x + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sin(x) &= \sin(x + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(x) &= \cos[x + (2n + 1)\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sin(x) &= -\sin[x + (2n + 1)\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται η μεταβλητή x , ωστόσο συνήθως οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου χρησιμοποιούνται για την περιγραφή χρονικά μεταβαλλόμενων σημάτων στα οποία ως ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται ο χρόνος t . Σε αυτές τις περιπτώσεις προχωρούμε στην αντικατάσταση $x = \omega t$ όπου $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα του σήματος. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε αργότερα.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου παρουσιάζονται στο σχήμα 2. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε πως οι συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2π , έχουν διαφορά φάσης ίση με $\pi/2$ και πλάτος ίσο με τη μονάδα.

Ακολουθούν κατηγορίες τριγωνομετρικών ταυτοτήτων αρκετοί από τους οποίους χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στους αλγόριθμους ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και εικόνας.

(1) Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\begin{array}{lll}
\sin x = 1/\csc x & \text{και αντίστροφα} & \csc x = 1/\sin x \\
\cos x = 1/\sec x & \text{και αντίστροφα} & \sec x = 1/\cos x \\
\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{\sin x}{\cos x} & \text{και} & \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
\sin^2 x + \cos^2 x = 1 & 1 + \tan^2 x = \sec^2 x & 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \\
\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} & \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} & \tan x = \pm\sqrt{\sec^2 x - 1} \\
\cot x = \pm\sqrt{\csc^2 x - 1} & \sec x = \pm\sqrt{\tan^2 x + 1} & \csc x = \pm\sqrt{\cot^2 x + 1} \\
\sin x = \cos(90^\circ - x) = +\sin(180^\circ - x) & \text{και} & \cos x = \sin(90^\circ - x) = -\cos(180^\circ - x) \\
\tan x = \cot(90^\circ - x) = -\tan(180^\circ - x) & \text{και} & \cot x = \tan(90^\circ - x) = -\cot(180^\circ - x)
\end{array}$$

(2) Τύποι αναγωγής

$$\begin{array}{l}
\sin \alpha = +\cos(\alpha - 90^\circ) = -\sin(\alpha - 180^\circ) = -\cos(\alpha - 270^\circ) \\
\cos \alpha = -\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos(\alpha - 180^\circ) = +\sin(\alpha - 270^\circ) \\
\tan \alpha = -\cot(\alpha - 90^\circ) = +\tan(\alpha - 180^\circ) = -\cot(\alpha - 270^\circ) \\
\cot \alpha = -\tan(\alpha - 90^\circ) = +\cot(\alpha - 180^\circ) = -\tan(\alpha - 270^\circ) \\
\sec \alpha = -\csc(\alpha - 90^\circ) = -\sec(\alpha - 180^\circ) = +\csc(\alpha - 270^\circ) \\
\csc \alpha = +\sec(\alpha - 90^\circ) = -\csc(\alpha - 180^\circ) = -\sec(\alpha - 270^\circ)
\end{array}$$

(3) Σχέσεις γινομένων

$$\begin{array}{l}
\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha, \quad \tan \alpha = \sin \alpha \sec \alpha \\
\cot \alpha = \cos \alpha \csc \alpha, \quad \sec \alpha = \csc \alpha \tan \alpha, \quad \csc \alpha = \sec \alpha \cot \alpha
\end{array}$$

(4) Σχέσεις αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

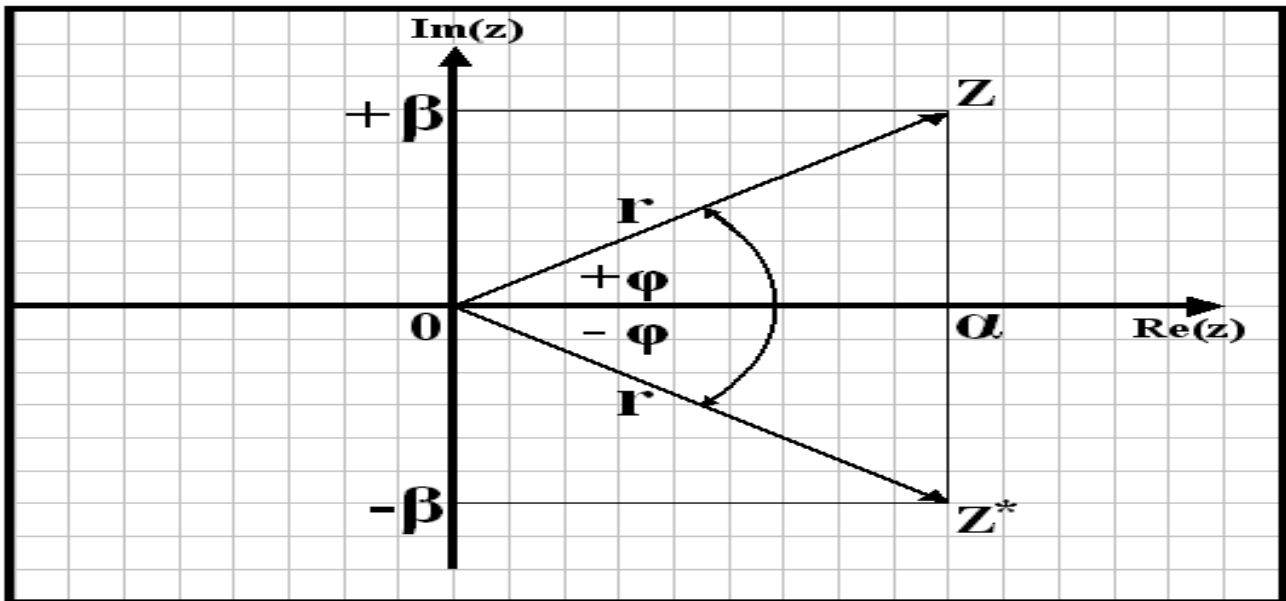
$$\begin{array}{ll}
\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, & \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, & \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, & \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\
\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \beta \cot \alpha - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}, & \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \beta \cot \alpha + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}
\end{array}$$

(5) Μετασχηματισμοί γινομένων σε αθροίσματα ή διαφορές

$$\begin{array}{ll}
\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta), & \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\
\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta), & \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)
\end{array}$$

(6) Σχέσεις αθροισμάτων και διαφορών

$$\begin{array}{ll}
\sin \alpha + \sin \beta = +2 \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right], & \sin \alpha - \sin \beta = +2 \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \\
\cos \alpha + \cos \beta = +2 \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right], & \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \\
\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, & \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\
\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, & \cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}
\end{array}$$



Σχήμα 3: Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού επί του μιγαδικού επιπέδου

(7) Οι τύποι της μισής γωνίας

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\end{aligned}$$

(8) Οι τύποι της διπλάσιας γωνίας

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}, & \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, & \cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha} \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

2.2 Η βασική θεωρία των μιγαδικών αριθμών

Σύμφωνα με την επιστήμη των μαθηματικών, ένας μιγαδικός αριθμός z έχει τη μορφή $z = \alpha + i\beta$ όπου οι παράμετροι $\alpha = \text{Re}(z)$ και $\beta = \text{Im}(z)$ εκφράζουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού αντίστοιχα, ενώ η ποσότητα i ορίζεται από τη σχέση $i = \sqrt{-1}$. Μια εναλλακτική γραφή για αυτή την ποσότητα είναι η $z = (\alpha, \beta)$ στην οποία η παράσταση (α, β) νοείται ως διατεταγμένο ζεύγος (ο χαρακτηρισμός αυτού του ζεύγους ως διατεταγμένου, δικαιολογείται από το γεγονός πως αν θεωρήσουμε το ζεύγος (β, α) , αυτό αναπαριστά τον μιγαδικό αριθμό $z = \beta + i\alpha$, ο οποίος προφανώς είναι διαφορετικός από τον αρχικό). Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως διάνυσμα $\vec{z} = (\alpha, \beta)$ και να απεικονισθεί σε ένα ειδικό τύπο επιπέδου που ονομάζεται μιγαδικό επίπεδο. Αυτό το επίπεδο περιγράφεται ως ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο, ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται πραγματικός άξονας και χρησιμοποιείται για την απεικόνιση του πραγματικού μέρους ενός μιγαδικού αριθμού, ενώ ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται φανταστικός άξονας και χρησιμοποιείται για την απεικόνιση του φανταστικού του μέρους. Η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού επί του μιγαδικού επιπέδου παρουσιάζεται στο σχήμα 1.

Μορφές αναπαράστασης μιγαδικών αριθμών: Η γραφή ενός μιγαδικού αριθμού στη μορφή $z = \alpha + i\beta$ συνιστά την επονομαζόμενη τετραγωνική γραφή, υπάρχουν όμως και πολλοί άλλοι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης. Εάν ορίσουμε τις ποσότητες $\alpha = r\cos\varphi$ και $\beta = r\sin\varphi$ - αυτές οι εξισώσεις δεν είναι τίποτε περισσότερο από τις εξισώσεις μετατροπής των καρτεσιανών σε πολικές συντεταγμένες - και αντικαταστήσουμε στην τετραγωνική μορφή του μιγαδικού αριθμού, αυτός γράφεται ως $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ η οποία είναι γνωστή ως τριγωνομετρική ή πολική μορφή. Σε αυτή τη μορφή οι παράμετροι $r = |z|$ και φ αναφέρονται

στο μέτρο και τη φάση του μιγαδικού αριθμού και δίδονται από τις σχέσεις $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και $\varphi = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$ όπως πάρα πολύ εύκολα μπορεί να αποδειχθεί. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του Euler $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ η πολική μορφή ανάγεται στην έκφραση $z = re^{i\varphi}$ που συνιστά την επονομαζόμενη εκθετική μορφή. Ένας τελευταίος τρόπος αναπαράστασης ενός μιγαδικού αριθμού είναι η αναπαράσταση μέτρου - φάσης που έχει τη μορφή $z = r\angle\varphi$ με τα μεγέθη r και φ να ορίζονται με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως.

Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί: Θεωρώντας ένα μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + i\beta$, μπορούμε να ορίσουμε το συζυγή αριθμό του από τη σχέση $z^* = \alpha - i\beta$, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα πως ο συζυγής μιγαδικός αριθμός προκύπτει από τον αρχικό αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού του μέρους. Από την παραπάνω έκφραση δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως η τριγωνομετρική μορφή του συζυγούς μιγαδικού αριθμού είναι η $z^* = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ ενώ η εκθετική μορφή του είναι η $z^* = re^{-i\varphi}$. Επομένως, η διανυσματική αναπαράσταση αυτών των δύο αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο, θα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο διανυσμάτων συμμετρικών ως προς τον πραγματικό άξονα. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 1.

Οι βασικές πράξεις των μιγαδικών αριθμών: Σε πλήρη αναλογία με το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών υποστηρίζει τις τέσσερις θεμελιώδεις πράξεις που ορίζονται για τους πραγματικούς αριθμούς και οι οποίες είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Θεωρώντας δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ και $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, οι τέσσερις αυτές πράξεις ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\text{Πρόσθεση: } z_1 + z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$$

$$\text{Αφαίρεση: } z_1 - z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + i(\beta_1 - \beta_2)$$

$$\text{Πολλαπλασιασμός: } z_1 * z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

$$\text{Διαίρεση: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2)}{(\alpha_2 + i\beta_2)(\alpha_2 - i\beta_2)} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i\frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$$

Από τις τέσσερις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε πως το αποτέλεσμα των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων είναι και το ίδιο μιγαδικός αριθμός. Εάν εφαρμόσουμε αυτές τις πράξεις ανάμεσα σε ένα μιγαδικό αριθμό και τον συζυγή του οδηγούμαστε σε ένα πλήθος από χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι η πράξη της πρόσθεσης θα οδηγήσει στο αποτέλεσμα $z + z^* = (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = 2\alpha$ από όπου προκύπτει πως $\alpha = (z + z^*)/2$. Επομένως, το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού προκύπτει από το ημιάθροισμα αυτού του αριθμού και του συζυγούς του. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, από την πράξη της αφαίρεσης, προκύπτει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού ως $\beta = (z - z^*)/2i$. Τέλος εάν εφαρμόσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού θα λάβουμε $zz^* = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$, ήτοι, το γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού με το συζυγή του, ισούται με το τετράγωνο του μέτρου του. Είναι προφανές πως τα μέτρα των δύο αυτών αριθμών είναι ίσα μεταξύ τους, καθώς δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι $|z^*| = \sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|$.

Είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως η παραπάνω ιδιότητα της συζυγίας μπορεί να επεκταθεί στο άθροισμα, στο γινόμενο και στο πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών, και επομένως μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ και $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$.

Η πραγματοποίηση των βασικών αριθμητικών πράξεων διευκολύνεται σημαντικά μετασχηματίζοντας τους μιγαδικούς αριθμούς που χρησιμοποιούμε, στην εκθετική τους μορφή. Χρησιμοποιώντας λοιπόν ένα συμβολισμό της μορφής $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ και $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ και $z_1/z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})/(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$. Όσον αφορά δε, τον αντίστροφο ενός μιγαδικού αριθμού $z = re^{i\varphi}$, αυτός, σε πολική μορφή θα δίδεται από τη σχέση $(1/z) = (1/r)e^{-i\varphi}$, ενώ σε τετραγωνική μορφή θα γράφεται ως

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Πράξη ύψωσης σε δύναμη: Σε πλήρη αναλογία με τους πραγματικούς αριθμούς, οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να υψωθούν σε οποιαδήποτε δύναμη, πράξη, η οποία ορίζεται εύκολα μεταφέροντας το μιγαδικό αριθμό στην πολική του μορφή. Θεωρώντας για παράδειγμα το μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, η ύψωσή του στη δύναμη υπ' αριθμόν k θα οδηγήσει στο αποτέλεσμα $z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi} = r^k [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)]$. Από την άλλη πλευρά, εάν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική έκφραση του μιγαδικού αριθμού $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, η ύψωση στην υπ' αριθμόν k δύναμη θα οδηγήσει στο αποτέλεσμα $z^k = r^k (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k$. Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες εκφράσεις για την ποσότητα r^k δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε την ισχύ της σχέσεως $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)$ που είναι γνωστή ως ο κανόνας του De' Moivre.

Ρίζες μιγαδικών αριθμών: προκειμένου να ορίσουμε τις ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως όσον αφορά την τριγωνομετρική ή την εκθετική του αναπαράσταση, αυτή δεν είναι μονοσήμαντη αλλά υπάρχουν άπειρες γωνίες που προσδιορίζουν τη θέση του επί του μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η ιδιότητα στηρίζεται στο γεγονός πως οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi = 360^\circ$ και επομένως ικανοποιούν τις σχέσεις $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2n\pi)$ και $\sin \varphi = \sin(\varphi + 2n\pi)$. Θεωρώντας λοιπόν τον μιγαδικό

αριθμό $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ αυτός μπορεί ισodύναμα να αναπαρασταθεί και με τη μορφή $z = re^{i(\varphi+2n\pi)} = [\cos(\varphi + 2n\pi) + i \sin(\varphi + 2n\pi)]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Στηρίζόμενοι στην παραπάνω ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε τη ρίζα k τάξεως ενός μιγαδικού αριθμού z από τη σχέση

$$z_k = \sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{re^{i(\varphi+2n\pi)}} = \sqrt[k]{r} [e^{i(\varphi+2n\pi)}]^{1/k} = \sqrt[k]{r} \exp\left(i \frac{\varphi + 2n\pi}{k}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Από την παραπάνω σχέση δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\varphi}$ υπάρχουν k ρίζες k τάξεως οι οποίες προκύπτουν από την παραπάνω σχέση για τις τιμές $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την παραπάνω διαδικασία, ας υπολογίσουμε τις κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z = 125e^{i75^\circ}$. Υπάρχουν τρεις τέτοιες ρίζες οι οποίες προκύπτουν από την παραπάνω σχέση για τιμές του $n = 0, 1, 2$ και οι οποίες υπολογίζονται ως

$$z_1 = \sqrt[3]{125} \exp\left(i \frac{75^\circ}{3}\right) = 5e^{i25^\circ} \quad z_2 = \sqrt[3]{125} \exp\left(i \frac{75^\circ + 360^\circ}{3}\right) = 5e^{i145^\circ} \quad z_3 = \sqrt[3]{125} \exp\left(i \frac{75^\circ + 720^\circ}{3}\right) = 5e^{i265^\circ}$$

Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο μιγαδικών αριθμών: Ας θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ και $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ και έστω ϑ είναι η γωνία που ορίζεται από τα διανύσματα που τους περιγράφουν στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό (ή βαθμωτό) και το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο των δύο αριθμών από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} z_1 \circ z_2 &= |z_1||z_2| \cos \vartheta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = \operatorname{Re}(z_1^* z_2) = \frac{1}{2}(z_1^* z_2 + z_1 z_2^*) \\ z_1 \times z_2 &= |z_1||z_2| \sin \vartheta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = \frac{1}{2i}(z_1^* z_2 - z_1 z_2^*) \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Εάν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $z_1^* z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1||z_2|e^{i\vartheta}$.

Λογάριθμοι μιγαδικών αριθμών: ο φυσικός λογάριθμος ενός μιγαδικού αριθμού προκύπτει πάρα πολύ εύκολα μεταφέροντάς τον στην εκθετική του μορφή $z = re^{i\varphi}$. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση θα λάβουμε

$$\ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + \ln(e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

Από το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε προκύπτει το συμπέρασμα πως ο φυσικός λογάριθμος ενός μιγαδικού αριθμού είναι και ο ίδιος ένας μιγαδικός αριθμός.

2.3 Παραδείγματα χρήσης μιγαδικών αριθμών

Μετά τη συνοπτική περιγραφή της βασικής θεωρίας που συσχετίζεται με τους μιγαδικούς αριθμούς ακολουθούν ορισμένες υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις προκειμένου ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με τον τρόπο χρήσης τους.

Άσκηση 1 Να γίνουν οι πράξεις (α) $(3 + 2i) + (-7 - i)$ και (β) $(2 - 3i)(4 + 2i)$

Απάντηση: Είναι (α) $(3+2i)+(-7-i) = (3-7)+i(2-1) = -4+i$ και (β) $(2-3i)(4+2i) = 2*4+2*2i-3*4i-3*2i^2 = 8+4i-12i+6 = (8+6)+i(4-12) = 14-8i$.

Άσκηση 2 Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$ και $z_3 = 7 - 3i$. Να αποδειχθεί η ισχύς της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας για τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Απάντηση: Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό πως η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης περιγράφονται από τις εξισώσεις $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ και $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (5 + 3i) + (-1 + 2i) = (5 - 1) + i(3 + 2) = 4 + 5i \quad \text{και} \\ z_2 + z_1 &= (-1 + 2i) + (5 + 3i) = (-1 + 5) + i(2 + 3) = 4 + 5i \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(5 + 3i) + (-1 + 2i)] + (7 - 3i) = [(5 - 1) + 7] + i[(3 + 2) - 3] = 11 + 2i \quad \text{και} \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (5 + 3i) + [(-1 + 2i) + (7 - 3i)] = [5 + (-1 + 7)] + i[3 + (2 - 3)] = 11 + 2i \end{aligned}$$

από όπου αποδεικνύεται η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης. Από την άλλη πλευρά, η αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού περιγράφονται από τις εξισώσεις $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ και $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (5 + 3i)(-1 + 2i) = 5 * (-1) + 5 * 2i + 3 * (-1)i + 3 * 2i^2 = -5 + 10i - 3i - 6 = -11 + 7i \quad \text{και} \\ z_2 * z_1 &= (-1 + 2i)(5 + 3i) = (-1) * 5 + (-1) * 3i + 2 * 5i + 2 * 3i^2 = -5 - 3i + 10i - 6 = -11 + 7i \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και

$$\begin{aligned} (z_1 * z_2) * z_3 &= [(5 + 3i)(-1 + 2i)](7 - 3i) = [5 * (-1) + 5 * 2i + 3 * (-1)i + 3 * 2i^2](7 - 3i) = \\ &= (-5 + 10i - 3i - 6)(7 - 3i) = (-11 + 7i)(7 - 3i) = (-11) * 7 + (-1) * (-3)i + 7 * 7i - 21i^2 = \\ &= -77 + 33i + 49i + 21 = -56 + 82i \quad \text{και} \\ z_1 * (z_2 * z_3) &= (5 + 3i)[(-1 + 2i)(7 - 3i)] = (5 + 3i)[(-1) * 7 + (-1) * (-3)i + 2 * 7i + 2 * (-3)i^2] = \\ &= (5 + 3i)(-7 + 3i + 14i + 6) = (5 + 3i)(-1 + 17i) = 5 * (-1) + 5 * 17i + (3i) * (-1) + 3 * 17i^2 = \\ &= -5 + 85i - 3i - 51 = -56 + 82i \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Η ισχύς αυτών των ιδιοτήτων για τους μιγαδικούς αριθμούς είναι αναμενόμενη αφού στην πραγματικότητα αυτές εφαρμόζονται στα πραγματικά και στα φανταστικά μέρη των αριθμών που ως πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες.

Άσκηση 3 Να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων α και β έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $3\alpha + 2i\beta - i\alpha + 5b = 7 + 5i$.

Απάντηση: Είναι $3\alpha + 2i\beta - i\alpha + 5b = 7 + 5i = (3\alpha + 5b) + i(2\beta - \alpha) = 7 + 5i$. Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέλη των δύο αριθμών οδηγούμαστε στο σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων $3\alpha + 5b = 7$ και $2\beta - \alpha = 5$ με λύση $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Άσκηση 4 Να αποδειχθεί ότι $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ και $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Απάντηση: (α) Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα καθώς είναι

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2) \Rightarrow (z_1 + z_2)^* = (\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2) \quad \text{και} \\ z_1^* + z_2^* &= (\alpha_1 - i\beta_1) + (\alpha_2 - i\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned}$$

και επομένως $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

(β) Είναι $z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$ και επομένως

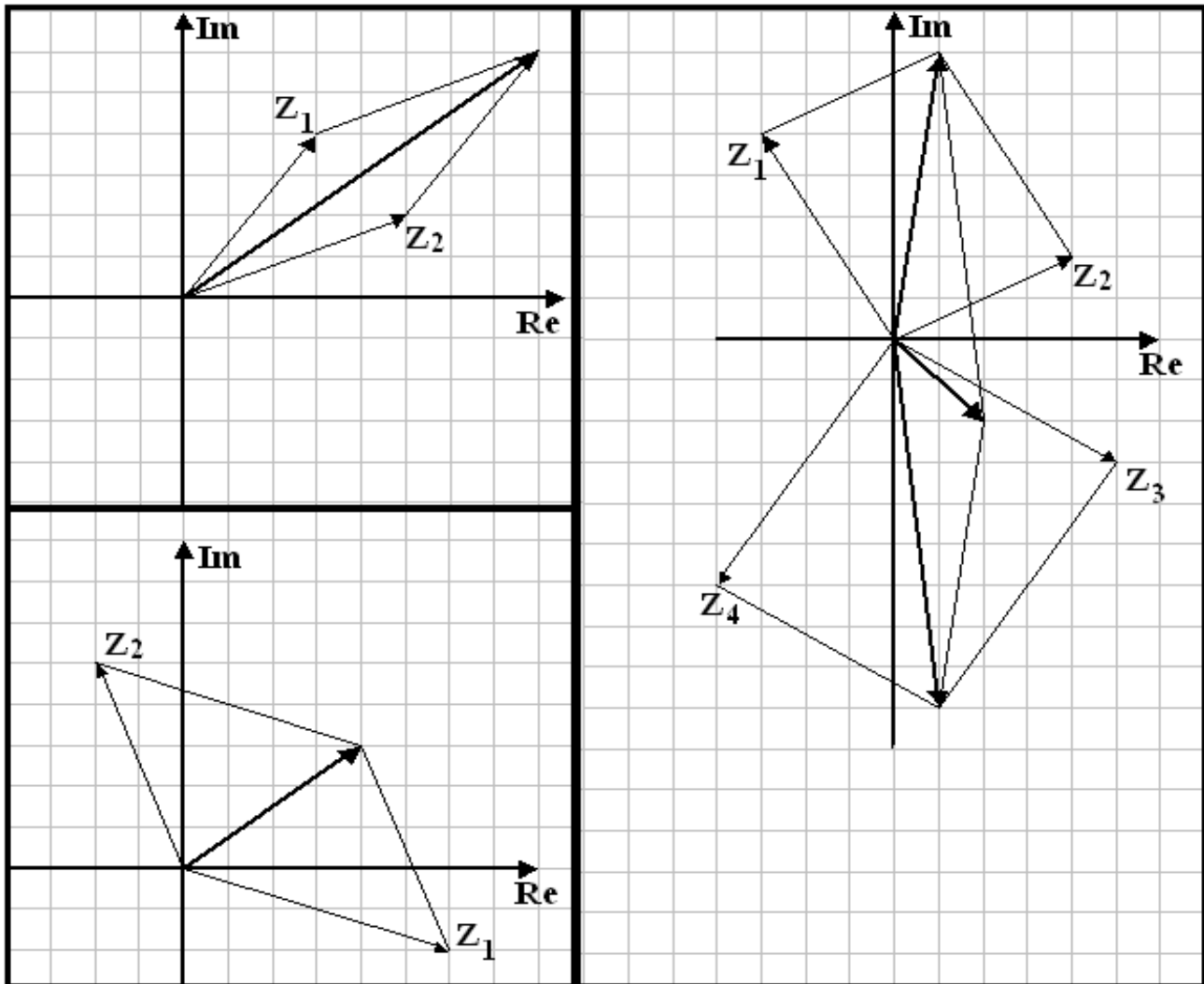
$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2} = \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} = \\ &= \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2} = \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \beta_1^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = |z_1| |z_2| \end{aligned}$$

που αποδεικνύει και το ζητούμενο.

Άσκηση 5 Να γίνουν οι πράξεις (α) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$, (β) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ και (γ) $(-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i)$ δια της αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών επί του μιγαδικού επιπέδου και της προσθέσεώς τους ως διανύσματα.

Απάντηση: (α) Η πραγματοποίηση των παραπάνω πράξεων με διανυσματικό τρόπο απεικονίζεται στο σχήμα 2. Οι φοιτητές καλούνται (α) να συσχετίσουν την κάθε παράσταση με το σωστό σχήμα (β) σε κάθε σχήμα να προσδιορίσουν το διάνυσμα που αναπαριστά τον κάθε μιγαδικό αριθμό (γ) να εκφράσουν το αποτέλεσμα της κάθε πρόσθεσης στη μορφή $z = \alpha + i\beta$ και (δ) να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα πραγματοποιώντας τις πράξεις με το συνήθη αλγεβρικό τρόπο.

Άσκηση 6 Να μετατραπούν οι μιγαδικοί αριθμοί (α) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$, (β) $z_2 = -5 + 5i$, (γ) $z_3 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ και (δ) $z_4 = -3i$ στην πολική και στην εκθετική τους μορφή και να αναπαρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο.



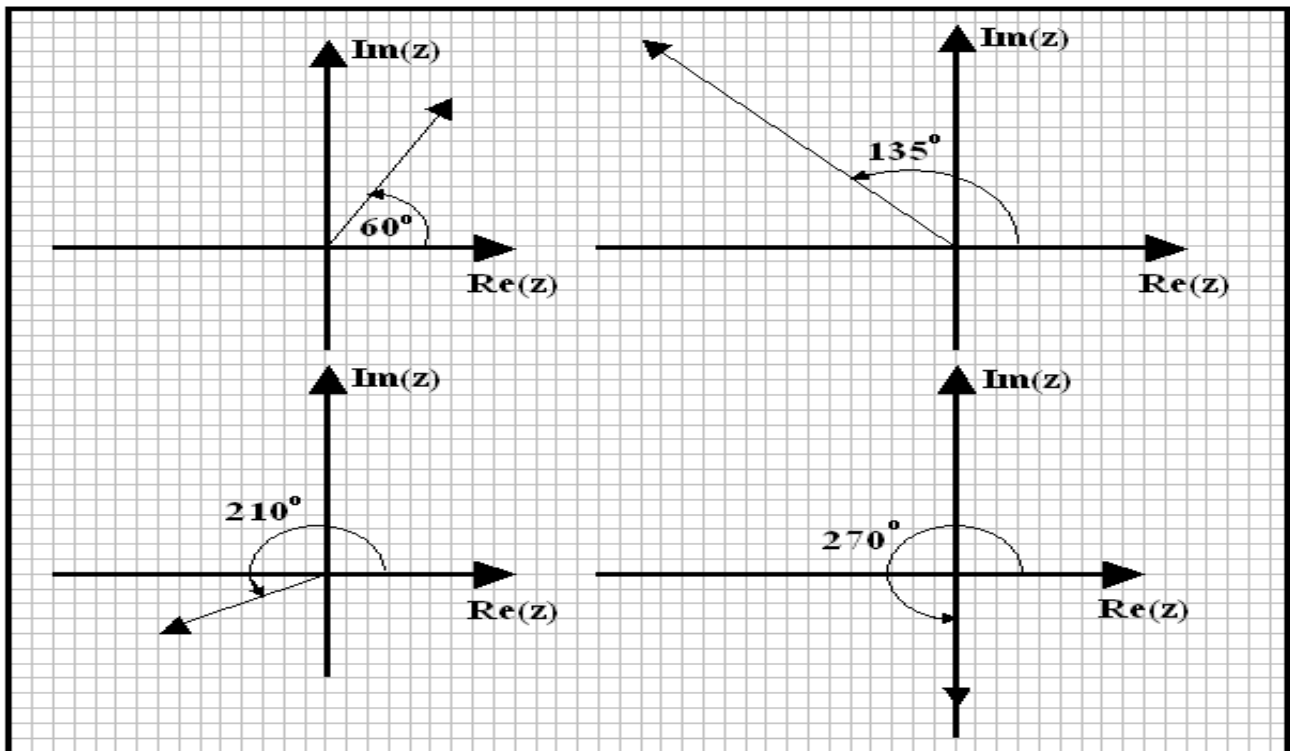
Σχήμα 4: Διανυσματική πρόσθεση μιγαδικών αριθμών επί του μιγαδικού επιπέδου

Απάντηση: (α) Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό πως η πολική και η εκθετική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\beta$ είναι η $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ και $z = re^{i\varphi}$ αντίστοιχα, όπου $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και $\varphi = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

- Για το μιγαδικό αριθμό $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$: είναι $\alpha = 2$ και $\beta = 2\sqrt{3}$ και επομένως $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ και $\varphi = \tan^{-1}[2\sqrt{3}/2] = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3 = 60^\circ$. Θα είναι λοιπόν $z_1 = 4e^{i60^\circ} = 4[\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ)]$.
- Για το μιγαδικό αριθμό $z_2 = -5 + 5i$: είναι $\alpha = -5$ και $\beta = 5$ και επομένως $r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 * 25} = 5\sqrt{2}$ και $\varphi = \tan^{-1}[5/(-5)] = \tan^{-1}(-1) = 3\pi/4 = 135^\circ$. Θα είναι λοιπόν $z_2 = 2\sqrt{5}e^{i135^\circ} = 2\sqrt{5}[\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ)]$.
- Για το μιγαδικό αριθμό $z_3 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$: είναι $\alpha = -\sqrt{6}$ και $\beta = -\sqrt{2}$ και επομένως $r = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = \sqrt{2 * 4} = 2\sqrt{2}$. Θα είναι λοιπόν $\varphi = \tan^{-1}[(-\sqrt{2})/(-\sqrt{6})] = \tan^{-1}[\sqrt{2}/(\sqrt{2}\sqrt{3})] = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = 7\pi/6 = 210^\circ$ και επομένως $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i210^\circ} = 2\sqrt{2}[\cos(210^\circ) + i \sin(210^\circ)]$.
- Για το μιγαδικό αριθμό $z_4 = -3i$: είναι $\alpha = 0$ και $\beta = -3$ και επομένως $r = \sqrt{(-3)^2} = 3$ και $\varphi = \tan^{-1}[(-3)/0] = \tan^{-1}(\infty) = 3\pi/2 = 270^\circ$. Θα είναι λοιπόν $z_4 = 3e^{i270^\circ} = 3[\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ)]$.

Η αναπαράσταση των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο παρουσιάζεται στο σχήμα 3.

Άσκηση 7 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ και $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Να αποδειχθεί ότι $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ και $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.



Σχήμα 5: Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών επί του μιγαδικού επιπέδου

Απάντηση: (α) Η απόδειξη αυτών των δύο ταυτοτήτων μπορεί να γίνει πάρα πολύ εύκολα με απευθείας πολλαπλασιασμό και διαίρεση των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 . Θα είναι λοιπόν

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

και με παρόμοιο τρόπο

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{r_2 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{r_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ = \frac{r_1}{r_2} [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Οι παραπάνω ταυτότητες μπορούν να αποδειχθούν πολύ πιο εύκολα αν εκφράσουμε τους δύο μιγαδικούς αριθμούς στην εκθετική τους μορφή, δηλαδή τους γράψουμε ως $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ και $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Θα είναι λοιπόν $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ και $z_1/z_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = (r_1/r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Άσκηση 8 Να αποδειχθεί ότι $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ και $\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$.

Απάντηση: (α) Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό πως $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ και $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ (οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως σχέσεις του Euler). Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη θα λάβουμε $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ από όπου προκύπτει ότι $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ ενώ αφαιρώντας κατά μέλη θα λάβουμε $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ από όπου προκύπτει πως $\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$.

Άσκηση 9 Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z_1 = -1 + i$, οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z_2 = -15 - 8i$ και οι ρίζες τετάρτης τάξεως του μιγαδικού αριθμού $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$.

Απάντηση: (α) Το μέτρο και η φάση του μιγαδικού αριθμού z_1 υπολογίζονται ως $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\varphi = \tan^{-1}(-1) = 3\pi/4 = 135^\circ$ και επομένως ο εν λόγω αριθμός στην πολική του μορφή θα γράφεται ως

$z_1 = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i135^\circ}$. Σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες σελίδες, υπάρχουν τρεις κυβικές ρίζες για το μιγαδικό αριθμό z_1 οι οποίες ορίζονται ως

$$z_n = (\sqrt{2})^{1/3} \exp \left[i \left(\frac{(3\pi/4) + 2\pi n}{3} \right) \right] = \sqrt[3]{2} \exp \left(i \frac{3\pi + 8\pi n}{12} \right) \quad n = 0, 1, 2$$

και έχουν τις τιμές

$$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/4)} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i(11\pi/12)} \quad z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i(19\pi/12)}$$

(β) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z_2 υπολογίζεται ως $r = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ και επομένως ο εν λόγω αριθμός μπορεί να γραφεί ως $z_2 = 17(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 17e^{i(\varphi + 2\pi n)}$ όπου $\cos \varphi = -15/17$ και $\sin \varphi = -8/17$ όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί απεικονίζοντας το μιγαδικό αριθμό z_2 στο μιγαδικό επίπεδο. Επομένως οι δύο τετραγωνικές ρίζες που διαθέτει θα είναι οι $z_n = \sqrt{17} \exp[i(\varphi + 2\pi n)/2]$ ($n = 0, 1$) και θα υπολογίζονται ως

$$z_0 = \sqrt{17}e^{i(\varphi/2)} = \sqrt{17} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{και} \quad z_1 = \sqrt{17}e^{i[(\varphi/2) + \pi]} = -\sqrt{17}e^{i(\varphi/2)} = -\sqrt{17} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

αφού από την τριγωνομετρία είναι γνωστό πως

$$\exp \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) = \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} = -(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}) = -\exp \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές των ποσοτήτων $\cos(\varphi/2)$ και $\sin(\varphi/2)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν πως γνωρίζουμε τις τιμές του $\cos \varphi$ και του $\sin \varphi$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους της μισής γωνίας

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \quad \text{και} \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$$

και χρησιμοποιώντας τις τιμές $\cos \varphi = -15/17$ και $\sin \varphi = -8/17$ βρίσκουμε ότι $\cos(\varphi/2) = \pm(1/\sqrt{17})$ και $\sin(\varphi/2) = \pm(4/\sqrt{17})$. Προκειμένου να επιλέξουμε το σωστό πρόσημο για αυτές τις δύο ποσότητες θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν πως αφού η γωνία φ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο, η γωνία $\varphi/2$ θα πρέπει να βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο στο οποίο το συνημίτονο παίρνει αρνητικές τιμές ενώ το ημίτονο παίρνει θετικές τιμές. Θα είναι λοιπόν $\cos(\varphi/2) = -(1/\sqrt{17})$ και $\sin(\varphi/2) = 4/\sqrt{17}$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις ορισμού των δύο τετραγωνικών ριζών, θα λάβουμε

$$z_0 = \sqrt{17} \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + i \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = -1 + 4i \quad \text{και} \quad z_1 = -\sqrt{17} \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + i \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 1 - 4i$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

(γ) α) Το μέτρο και η φάση του μιγαδικού αριθμού z_3 υπολογίζονται ως $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ και $\varphi = \tan^{-1}[(-2)/(-2\sqrt{3})] = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = 7\pi/6 = 210^\circ$ (όπως προκύπτει από τη θέση του μιγαδικού αριθμού επί του μιγαδικού επιπέδου) και επομένως ο εν λόγω αριθμός στην πολική του μορφή θα γράφεται ως $z_3 = 4e^{i(7\pi/6)} = 4e^{i(210^\circ + 2\pi n)}$. Σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες σελίδες, υπάρχουν τέσσερις ρίζες τετάρτης τάξεως για το μιγαδικό αριθμό z_3 οι οποίες ορίζονται ως

$$z_n = \sqrt[4]{4} \exp \left[i \left(\frac{(7\pi/6) + 2\pi n}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \exp \left(i \frac{7\pi + 12\pi n}{24} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

και έχουν τις τιμές

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i(7\pi/24)} \quad z_1 = \sqrt{2}e^{i(19\pi/24)} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i(31\pi/24)} \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i(43\pi/24)}$$

Άσκηση 10 Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 - 4i$ και $z_2 = -4 + 3i$. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $z_1 \circ z_2$ και το εξωτερικό γινόμενο $z_1 \times z_2$.

Απάντηση: Είναι $z_1^* = 3 + 4i$ και επομένως $z_1^* z_2 = (3 + 4i)(-4 + 3i) = -12 + 9i - 16i - 12 = -24 - 7i$. Θα είναι λοιπόν (σύμφωνα με τη θεωρία) $z_1 \circ z_2 = \text{Re}(z_1^* z_2) = -24$ και $z_1 \times z_2 = \text{Im}(z_1^* z_2) = -7$.

2.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στηριζόμενοι στις υποδειγματικές λύσεις των ασκήσεων της προηγούμενης ενότητας να επιλύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις:

- Εάν $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ και $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ να υπολογίσετε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων: (α) $z_1^2 + 2z_1 - 3$, (β) $|2z_2 - 3z_1|^2$, (γ) $(z_3 - z_3^*)^5$, (δ) $|z_1 z_2^* + z_2 z_1^*|$, (ε) $|(z_1 + z_2 + 1)/(z_1 - z_2 + i)|$, (στ) $(1/2)[(z_3/z_3^*) + (z_3^*/z_3)]$, (ζ) $|z_1^2 + (z_2^*)^2|^2 + |(z_3^*)^2 - z_2^2|$, (η) $Re(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$, (θ) $Im(z_1 z_2 / z_3)$.
- Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις αναλυτικά και γραφικά (δηλαδή αναπαριστώντας τους μιγαδικούς αριθμούς στο μιγαδικό επίπεδο): (α) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$, (β) $3(1 + 2i) - 2(2 - 3i)$, (γ) $3(1 + i) + 2(4 - 3i) - (2 + 5i)$, (δ) $(7 + i) - (4 - 2i)$, (ε) $(1/2)(4 - 3i) + (3/2)(5 + 2i)$.
- Εκφράστε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική και πολική μορφή: (α) $2 - 2i$, (β) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, (γ) $-i$, (δ) -4 , (ε) $-2\sqrt{3} - 2i$, (στ) $\sqrt{2}i$, (ζ) $(\sqrt{3}/2) - (3/2)i$.
- Δείξτε ότι $r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2} = r_3 e^{i\varphi_3}$ όπου

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{και} \quad \varphi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2} \right)$$

- Υπολογίστε αναλυτικά τις παρακάτω ρίζες και προσδιορίστε γραφικά τα σημεία που παριστάνουν: (α) $(2\sqrt{3} - 2i)^{1/2}$, (β) $(-4 + 4i)^{1/5}$, (γ) $(2 + 2\sqrt{3}i)^{1/3}$, (δ) $(-16i)^{1/4}$, (ε) $(64)^{1/6}$.
- Εάν $z_1 = 2 + 5i$ και $z_2 = 3 - i$ να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων: (α) $z_1 \circ z_2$, (β) $z_1 \times z_2$, (γ) $z_1 \circ z_1$, (δ) $z_2 \times z_1$, (ε) $|z_1 \circ z_2|$, (στ) $|z_1 \times z_2|$, (ζ) $|z_1 \circ z_1|$, (η) $|z_2 \times z_1|$
- Εάν $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ και $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ να αποδειχθεί ότι $z_1 \circ z_2 = r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ και $z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.
- Να αποδειχθεί ότι πάνω στην περιφέρεια $z = Re^{i\theta}$ είναι $|e^{iz}| = e^{-R \sin \theta}$.
- Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 5 - 12i$ και $z_2 = 8 + 4\sqrt{5}i$.
- Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z_1 = -11 - 2i$.

2.5 Βιβλιοθήκη διαχείρισης μιγαδικών αριθμών

Ο κώδικας που ακολουθεί - σε γλώσσα C - υλοποιεί τις θεμελιώδεις πράξεις που συσχετίζονται με τους μιγαδικούς αριθμούς και παρουσιάζει ένα απλό παράδειγμα χρήσης τους.

```

/* COMPLEX.C: A library for complex number manipulation
#include <stdio.h> #include <math.h>

typedef struct Complex {
    double realPart;
    double imaginaryPart;
} Complex;

Complex SetValues (double Re, double Im) {
    Complex retVal;
    retVal.realPart = Re;
    retVal.imaginaryPart = Im;
    return (retVal); }

double Real (Complex Z) {
    return Z.realPart; }

double Imaginary (Complex Z) {
    return Z.imaginaryPart; }

```

```

double Magnitude (Complex Z) {
    return (sqrt(pow(Z.realPart,2)+
        pow(Z.imaginaryPart,2))); }

double Phase (Complex Z) {
    return (((!Z.realPart)&&!Z.imaginaryPart)?0:
        atan2 (Z.imaginaryPart, Z.realPart)); }

Complex Addition (Complex Z1, Complex Z2) {
    return SetValues (Z1.realPart+Z2.realPart,
        Z1.imaginaryPart+Z2.imaginaryPart); }

Complex Subtraction (Complex Z1, Complex Z2) {
    return SetValues (Z1.realPart+Z2.realPart,
        Z1.imaginaryPart-Z2.imaginaryPart); }

Complex Multiplication (Complex Z1, Complex Z2) {
    return SetValues (Z1.realPart*Z2.realPart-
        Z1.imaginaryPart*Z2.imaginaryPart,
        Z1.realPart*Z2.imaginaryPart-
        Z1.imaginaryPart*Z2.realPart); }

Complex Division (Complex Z1, Complex Z2) {
    return SetValues (((Z1.realPart*Z2.realPart+
        Z1.imaginaryPart*Z2.imaginaryPart)/Magnitude(Z2)),
        ((Z1.imaginaryPart*Z2.realPart-Z1.realPart*
        Z2.imaginaryPart)/Magnitude(Z2))); }

void main (void) {
    Complex a = SetValues (2,3), b = SetValues (3,-1);
    double mag1 = Magnitude (a), mag2 = Magnitude (b);
    double ph1 = Phase (a), ph2 = Phase (b);
    Complex z1 = Addition (a,b), z2 = Subtraction (a, b);
    Complex z3 = Multiplication (a,b), z4 = Division (a,b);
    printf ("Complex a => Magnitude = %.6f,
        Phase = %.6f\n", mag1, ph1);
    printf ("Complex b => Magnitude = %.6f,
        Phase = %.6f\n", mag2, ph2);
    printf ("Complex a = %.6f %+.2.6f i\n", Real(a), Imaginary(a));
    printf ("Complex b = %.6f %+.2.6f i\n", Real(b), Imaginary(b));
    printf ("Complex z1 = %.6f %+.2.6f i\n", Real(z1), Imaginary(z1));
    printf ("Complex z2 = %.6f %+.2.6f i\n", Real(z2), Imaginary(z2));
    printf ("Complex z3 = %.6f %+.2.6f i\n", Real(z3), Imaginary(z3));
    printf ("Complex Z4 = %.6f %+.2.6f i\n", Real(z4), Imaginary(z4)); }

```

Να εμπλουτίσετε την παραπάνω βιβλιοθήκη με κώδικα που θα υλοποιεί τις υπόλοιπες πράξεις που δύνανται να εφαρμοστούν επί των μιγαδικών αριθμών (π.χ. εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο, αντίστροφος μιγαδικού αριθμού, πράξη ύψωσης σε δύναμη, κ.λ.π).

2.6 Συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής

Σε πλήρη αναλογία με τις γνωστές μας συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, μια συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής ορίζεται ως $w = f(z)$ με τους αριθμούς w και z να ανήκουν στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών. Εάν εκφράσουμε αυτούς τους αριθμούς στην τετραγωνική τους μορφή, δηλαδή γράψουμε $z = \alpha + i\beta$ και $w = u + iv$, η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή $w = u + iv = f(z) = f(\alpha + i\beta) = f(\alpha, \beta)$ από όπου προκύπτει πως $u = u(\alpha, \beta)$ και $v = v(\alpha, \beta)$. Σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της επιστρεφόμενης τιμής είναι συνάρτηση του πραγματικού και του φανταστικού μέλους του ορίσματος εισόδου, κάτι που βέβαια είναι αναμενόμενο.

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής οι οποίες αποτελούν γενικεύσεις των αντίστοιχων πραγματικών συναρτήσεων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις που έχουν τη μορφή $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = P(z)$, τις ρητές συναρτήσεις που ορίζονται ως $w = P(z)/Q(z)$ όπου οι συναρτήσεις $P(z)$ και $Q(z)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις με $Q(z) \neq 0$ και τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ και $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων είναι οι ακολουθίες μιγαδικών αριθμών οι οποίες συμβολίζονται ως $f(n)$ ή u_n και είναι συνάρτηση της θετικής ακέραιας μεταβλητής n .

Είναι προφανές πως εφ' όσον οι μιγαδικές συναρτήσεις αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων πραγματικών συναρτήσεων, χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ιδιότητες με αυτές. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό ας δείξουμε ότι $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ κάτι, που είναι γνωστό πως ισχύει και για την περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{\alpha_1 + i\beta_1} e^{\alpha_2 + i\beta_2} = e^{\alpha_1} (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1) e^{\alpha_2} (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2) = \\ &= e^{\alpha_1 + \alpha_2} (\cos \beta_1 \cos \beta_2 + i \cos \beta_1 \sin \beta_2 + i \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2) = \\ &= e^{\alpha_1 + \alpha_2} [\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \sin(\beta_1 + \beta_2)] = e^{\alpha_1 + \alpha_2} e^{i(\beta_1 + \beta_2)} = e^{[(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)]} = e^{i(z_1 + z_2)} \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται πως $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ όπως ακριβώς ισχύει και για την περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^z e^{-z}}{4} + \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2e^z e^{-z}}{4i^2} = \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^z e^{-z} - e^{2z} - e^{-2z} + 2e^z e^{-z}}{4} = \frac{2 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Ως ένα τελευταίο παράδειγμα ας αποδείξουμε ότι $\sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2$, ταυτότητα που ισχύει και για την περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2i} = \\ &= \frac{1}{2i} (\cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 - \cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 + \\ &+ i \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2) = \frac{2i(\cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2)}{2i} = \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2 \end{aligned}$$

Άσκηση 11 Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές επίλυσης των προηγούμενων παραδειγμάτων να αποδείξετε ότι: (α) $|e^z| = e^{\alpha}$ και $|e^{iz}| = e^{-\beta}$ όπου $z = \alpha + i\beta$, (β) $e^{(z_1/z_2)} = e^{z_1/z_2}$, (γ) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$, $\tan(-z) = -\tan z$ και (δ) $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$, $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$.

2.7 Εξισώσεις διαφορών και τεχνικές επίλυσής τους

Ας θεωρήσουμε την αμφίπλευρη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών

$$\{\dots, y(-2), y(-1), y(0), y(1), y(2), \dots, y(n-1), y(n)\}$$

και έστω πως υπάρχει μία σχέση μεταξύ των όρων της με τη μορφή $f[y(n+r), y(n+r-1), \dots, y(n-1), y(n)] = 0$. Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται εξίσωση διαφορών και κάθε ακολουθία παρόμοια με αυτή που ορίσαμε προηγουμένως, ονομάζεται λύση αυτής της εξίσωσης. Οι εξισώσεις διαφορών αποτελούν βασικά μαθηματικά εργαλεία για τη μελέτη των αναδρομικών συστημάτων διακριτού χρόνου και για το λόγο αυτό στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές από τις ιδιότητες που τις περιγράφουν.

Σε μία εξίσωση διαφορών, η ποσότητα $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ είναι γνωστή ως πρώτη διαφορά, με τον τελεστή Δ να ονομάζεται τελεστής διαφοράς. Ένας ακόμη σημαντικός τελεστής που χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε εξισώσεις αυτού του τύπου είναι ο τελεστής της διαφοράς προς τα εμπρός που ορίζεται ως $E y_n = y_{n+1}$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις θα λάβουμε $(1 + \Delta)y_n = y_{n+1} = E y_n$ από όπου προκύπτει πως οι δύο προαναφερόμενοι τελεστές συσχετίζονται δια μέσου της εξίσωσης $E = 1 + \Delta$. Έχοντας ορίσει την πρώτη διαφορά, μπορούμε να ορίσουμε τη δεύτερη διαφορά ως $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$ και επαγωγικά τη διαφορά m -οστής τάξεως ως $\Delta^m y_n = \Delta(\Delta^{m-1} y_n)$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες $E^2 y_n = E(E y_n) = E y_{n+1} = y_{n+2}$ και στη γενική περίπτωση $E^m y_n = E(E^{m-1} y_n) = y_{n+m}$.

2.7.1 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξεως

Μια εξίσωση διαφορών της μορφής

$$\alpha_r(n)y(n+r) + \alpha_{r-1}(n)y(n+r-1) + \dots + \alpha_1(n)y(n+1) + \alpha_0(n)y(n) = f(n)$$

ονομάζεται γραμμική εξίσωση διαφορών τάξεως r . Εάν στην παραπάνω γενική εξίσωση θέσουμε $r = 1$ προκύπτει η γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως

$$\alpha_1(n)y(n+1) = -\alpha_0(n)y(n) + f(n) \Rightarrow y(n+1) = -\frac{\alpha_0(n)}{\alpha_1(n)}y(n) + \frac{f(n)}{\alpha_1(n)} = p(n)y(n) + q(n)$$

όπου $p(n) = -[\alpha_0(n)/\alpha_1(n)]$ και $q(n) = [f(n)/\alpha_1(n)]$ η λύση της οποίας αποδεικνύεται πως δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} p(j) \right) y(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j) \right) q(k)$$

Εάν ισχύει η σχέση $q(k) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) η παραπάνω εξίσωση διαφορών ονομάζεται ομογενής εξίσωση και η λύση της έχει τη μορφή

$$y(n) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} p(j) \right) y(1)$$

Άσκηση 12 Να επιλυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(n+1) = \frac{n}{n+1}y(n) + n \quad (n \geq 1)$$

Απάντηση: Η γραμμική εξίσωση διαφορών προς επίλυση έχει τη μορφή $y(n+1) = p(n)y(n) + q(n)$ με $p(n) = n/(n+1)$ και $q(n) = n$. Θα είναι λοιπόν

$$\prod_{j=1}^{n-1} p(j) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \dots \frac{n-2}{n-1} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j) = \prod_{k-1}^{n-1} \frac{j}{j+1} = \frac{k+1}{k+2} \frac{k+2}{k+3} \frac{k+3}{k+4} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{k+1}{n}$$

και επειδή $q(k) = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) το δεύτερο μέλος της λύσης της εξίσωσης διαφορών θα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j) \right) q(k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{n} k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right] = \frac{1}{3}(n^2 - 1) \end{aligned}$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης διαφορών θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \frac{1}{n}y(1) + \frac{1}{3}(n^2 - 1) \quad (n \geq 1)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

2.7.2 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών ανωτέρας τάξεως

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη λύση γραμμικών εξισώσεων διαφορών ανωτέρας τάξεως θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας μεταξύ ακολουθιών. Θεωρώντας λοιπόν δύο ακολουθίες $x(n)$ και $y(n)$, αυτές θα θεωρούνται γραμμικώς εξαρτημένες εάν υπάρχουν σταθερές C_1 και C_2 διάφορες του μηδενός τέτοιες ώστε $C_1x(n) + C_2y(n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Στην αντίθετη περίπτωση οι δύο ακολουθίες ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ένα σημαντικό μέγεθος που χρησιμοποιείται πάρα πολύ συχνά για το χαρακτηρισμό διακριτών ακολουθιών, είναι η ορίζουσα του Casorati η οποία ορίζεται ως

$$C[x(n), y(n)] = \begin{vmatrix} x(n) & y(n) \\ x(n+1) & y(n+1) \end{vmatrix}$$

και χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η ορίζουσα του Wronskie για τον χαρακτηρισμό των λύσεων $y_1(x)$ και $y_2(x)$ μιας διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως ως γραμμικώς ανεξάρτητες. Εάν θεωρήσουμε μία πλήρη εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξεως της μορφής $y_{n+2} + p(n)y(n+1) + q(n)y(n) = f(n)$ ($q(n) \neq 0$) και δύο λύσεις της $y_1(n)$ και $y_2(n)$, τότε αυτές οι δύο λύσεις θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες όταν η ορίζουσα του Casorati είναι διάφορη του μηδενός, ιδιότητα που σε μαθηματική διατύπωση γράφεται ως $C[y_1, y_2(n)] \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (που προκύπτει από την πλήρη εξίσωση θέτοντας $f(n) = 0$) είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός της μορφής $y(n) = C_1y_1(n) + C_2y_2(n)$ με τις σταθερές C_1 και C_2 να προσδιορίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών. Έχοντας προσδιορίσει τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσδιορίσουμε μία οποιαδήποτε μερική λύση $y_p(n)$ της ανίστοιχης πλήρους εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης θα προκύπτει από το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης και της μερικής λύσης της πλήρους εξίσωσης, η σε μαθηματική γραφή, $y(n) = C_1y_1(n) + C_2y_2(n) + y_p(n)$.

Μετά τη συνοπτική περιγραφή της γραμμικής ανεξαρτησίας ακολουθιών ας δούμε τώρα με ποιο τρόπο είναι δυνατή η επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών ανωτέρας τάξεως. Στην περιγραφή που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών δευτέρας τάξεως (η γενίκευση της μεθοδολογίας για εξισώσεις μεγαλύτερης τάξεως είναι προφανής) ενώ για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε πως οι συντελεστές των όρων της εξίσωσης διαφορών είναι σταθεροί (οι περίπτωση μεταβλητών συντελεστών δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την ενότητα). Σύμφωνα με τη θεωρία που συσχετίζεται με τις μεθόδους επίλυσης εξισώσεων διαφορών, μια ομογενής γραμμική εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξεως της μορφής

$$y(n+2) + \alpha_1y(n+1) + \alpha_0y(n) = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R, \alpha_2 \neq 0)$$

επιδέχεται εκθετικές λύσεις της μορφής $y(n) = \lambda^n$, όπου λ πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Θα είναι λοιπόν $y(n+1) = \lambda^{n+1}$, $y(n+2) = \lambda^{n+2}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\lambda^{n+2} + \alpha_1\lambda^{n+1} + \alpha_2\lambda^n = 0 \quad \text{ή διαιρώντας με το } \lambda^n \quad \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μία πολυωνυμική δευτεροβάθμια εξίσωση με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \alpha_1^2 - 4\alpha_2$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}$$

η φύση και τα χαρακτηριστικά των οποίων καθορίζουν και τη μορφή της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης διαφορών. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Οι δύο ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις που προκύπτουν από αυτές είναι οι $y_1(n) = \lambda_1^n$ και $y_2(n) = \lambda_2^n$ και επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα έχει τη μορφή $y(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.
- Οι δύο ρίζες είναι ίσες μεταξύ τους ($\lambda_1 = \lambda_2$). Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις που προκύπτουν από τη διπλή ρίζα λ_1 είναι οι $y_1(n) = \lambda_1^n$ και $y_2(n) = n\lambda_1^n$ και επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα είναι η $y(n) = C_1\lambda_1^n + nC_2\lambda_1^n = (C_1 + nC_2)\lambda_1^n$.
- Οι δύο ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $\lambda_1 = \alpha + i\beta = re^{i\vartheta}$ και $\lambda_2 = \alpha - i\beta = re^{-i\vartheta}$ όπου $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\cos \vartheta = \alpha/r$ και $\sin \vartheta = \beta/r$ ($-\pi \leq \vartheta \leq \pi$). Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} y(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(\alpha + i\beta)^n + C_2(\alpha - i\beta)^n = C_1r^n e^{in\vartheta} + C_2r^n e^{-in\vartheta} = \\ &= r^n [C_1(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)) + C_2(\cos(n\vartheta) - i\sin(n\vartheta))] = \\ &= r^n [(C_1 + C_2)\cos(n\vartheta) + i(C_1 - C_2)\sin(n\vartheta)] = r^n (A \cos(n\vartheta) + B \sin(n\vartheta)) \end{aligned}$$

όπου $A = C_1 + C_2$ και $B = i(C_1 - C_2)$. Στην παραπάνω έκφραση οι σταθερές C_1 και C_2 είναι πραγματικοί αριθμοί αν και γενικά μπορεί να είναι και μιγαδικές ποσότητες - στην τελευταία περίπτωση η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών δίδεται από κάποιες άλλες εκφράσεις που προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο.

Άσκηση 13 Να επιλυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - y(n+1) - 12y(n) = 0$$

Απάντηση: Θεωρώντας εκθετική λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ η εξίσωση διαφορών γράφεται ως $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$. Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4(-12) = 1 + 48 = 49$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 + 7}{2} = 4 \text{ και } \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η $y(n) = C_1(-3)^n + C_2(4)^n$.

Άσκηση 14 Να επιλυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 0$$

Απάντηση: Θεωρώντας εκθετική λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ η εξίσωση διαφορών γράφεται ως $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4*9 = 0$ και διαθέτει μια διπλή ρίζα την $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\beta/2\alpha = 3$. Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η $y(n) = C_1(3)^n + nC_2(3)^n = (C_1 + nC_2)(3)^n$.

Άσκηση 15 Να επιλυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) + 2y(n+1) + 2y(n) = 0$$

Απάντηση: Θεωρώντας εκθετική λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ η εξίσωση διαφορών γράφεται ως $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 8 = -4$ και διαθέτει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

Παρατηρούμε πως το μέτρο των συζυγών μιγαδικών είναι $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ενώ είναι $\cos \vartheta = -1/\sqrt{2}$ και $\sin \vartheta = -1/\sqrt{2}$ από όπου προκύπτει πως $\vartheta = 3\pi/4$. Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε προηγουμένως, η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει τη μορφή

$$y(n) = (\sqrt{2})^n \left[C_1 \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right]$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Μετά τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης θα πρέπει να προσδιορίσουμε μία μερική λύση της πλήρους εξίσωσης έτσι ώστε να καταλήξουμε στη γενική λύση της ως το άθροισμα των δύο παραπάνω λύσεων. Οι μεθοδολογίες και οι τεχνικές με τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτή τη γενική λύση παρουσιάζονται σε επόμενο κεφάλαιο όπου οι εξισώσεις διαφορών παρουσιάζονται εκ νέου μαζί με τα αναδρομικά συστήματα διακριτού χρόνου των οποίων αποτελούν βασικά εργαλεία μελέτης. Ας σημειωθεί εδώ, πως στη γενική περίπτωση μιας πλήρους γραμμικής εξίσωσης διαφορών δευτέρας τάξεως της μορφής $y(n+2) + \alpha_1 y(n+1) + \alpha_2 y(n) = f(n)$ με τη συνάρτηση $f(n)$ να έχει τη μορφή

$$f(n) = \sum_i P_i(n) (\beta_i)^n [A_i \cos(\gamma_i n) + B_i \sin(\gamma_i n)]$$

όπου $P_i(n)$ πολυώνυμο του n και A_i, B_i, β_i και γ_i σταθερές ποσότητες, η μερική λύση της πλήρους εξίσωσης έχει τη μορφή

$$\gamma(n) = \sum_i (n)^{\rho_i} (\beta_i)^n [A_i(n) \cos(\gamma_i n) + B_i(n) \sin(\gamma_i n)]$$

όπου $A_i(n)$ και $B_i(n)$ πολυώνυμα του n ίδιου βαθμού με τα $P_i(n)$ ενώ η τιμή της παραμέτρου ρ_i είναι ίση με το μηδέν ή ίση με τη μονάδα ανάλογα με το εάν η ποσότητα $\beta_i (\cos \gamma_i + i \sin \gamma_i)$ είναι ή δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0$ αντίστοιχα. Ωστόσο στην πράξη η μορφή της συνάρτησης $f(n)$ είναι γενικά πιο απλή. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, εάν η μορφή συνάρτησης $f(n)$ ανήκει σε κάποιες συγκεκριμένες κατηγορίες (π.χ. εκθετική, πολυωνυμική, κλπ) τότε η μερική λύση έχει παρόμοια μορφή και επομένως είναι σχετικά εύκολο να προσδιοριστεί.

2.8 Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

Αν και η δημιουργία γραφικών παραστάσεων των δεδομένων που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα σύνολο διαφορετικών προγραμμάτων και μέσα από μια πληθώρα εφαρμογών, εν τούτοις στα εργαστήρια του μαθήματος συνίσταται η χρήση της εφαρμογής GNUPLOT, ενός ελεύθερου προγράμματος που επιτρέπει τη σχεδίαση και προεπισκόπηση διαγραμμάτων και γραφικών παραστάσεων μέσα από ένα περιβάλλον που στηρίζεται στη χρήση γραμμής εντολών (command line environment).

Η αναλυτική περιγραφή του προγράμματος GNUPLOT θα συμπεριληφθεί σε μεταγενέστερη βελτιωμένη έκδοση των σημειώσεων του μαθήματος, και για την ώρα θα δοθεί απλά μια συνοπτική περιγραφή. Στο πρώτο βήμα της διαδικασίας θα πρέπει να εγκατασταθεί το GNUPLOT στον υπολογιστή μας - εφόσον δεν είναι διαθέσιμο. Στην περίπτωση αυτή το πρόγραμμα μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση www.neural.uom.gr και στη σελίδα `dspir_lab` μαζί με το εγχειρίδιο χρήστη, το συνοπτικό οδηγό αναφοράς και το αρχείο βοήθειας της εφαρμογής τα οποία θα επιτρέψουν την εξοικίωση του χρήστη με την εφαρμογή. Μετά την εγκατάσταση του προγράμματος μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε τρέχοντας την εφαρμογή `wgnupl32.exe` από τον κατάλογο στον οποίο την έχουμε εγκαταστήσει.

Η πιο σημαντική από τις εντολές της εφαρμογής είναι η εντολή `plot` η οποία επιτρέπει τη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων τόσο από κατάλληλα ορισμένες συναρτήσεις όσο και από αρχεία δεδομένων. Η πιο απλή κλήση της εντολής είναι η `plot f(x)` η οποία σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Γράφοντας για παράδειγμα στη γραμμή εντολών την εντολή `plot sin(x)` και πατώντας το Enter εμφανίζεται ένα άλλο παράθυρο που περιέχει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου. Η εντολή `plot f(x)=sin(x*a)`, $a=0.2$ εκτυπώνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sin(0.2*x)$ ενώ η εντολή `plot sin(x*a)`, $a=0.2$, `sin(x*a)`, $a=0.4$, `sin(x)` έχει ως αποτέλεσμα την εκτύπωση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\sin(0.2*x)$, $\sin(0.4*x)$ και $f(x)$. Με τον ίδιο τρόπο, η εντολή `plot sin(x)`, `cos(x)`, `sqrt(x)` έχει ως αποτέλεσμα την ταυτόχρονη εκτύπωση των συναρτήσεων του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της τετραγωνικής ρίζας.

Η τελευταία δυνατότητα του GNUPLOT όσον αφορά τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, συσχετίζεται με τις παραμετρικές γραφικές παραστάσεις που επιτρέπουν τον καθορισμό της περιοχής τιμών για τις παραμέτρους των συναρτήσεων προς απεικόνιση. Για παράδειγμα η εντολή `plot [t=1:10][-pi:pi*2] tan(t)` προκαλεί τη σχεδίαση της συνάρτησης της εφαπτομένης με τη βοηθητική μεταβλητή t να παίρνει τιμές στο διάστημα $[1, 10]$ ενώ η τιμή της συνάρτησης περιορίζεται στο διάστημα $[-\pi : \pi * 2]$. Παρατηρούμε πως η σταθερά $\pi = 3.1415926535897932384626433.....$ είναι γνωστή στο GNUPLOT και δεν χρειάζεται να ορισθεί εκ νέου.

Άσκηση: Στα πλαίσια εξοικείωσης με το πρόγραμμα σχεδίασης GNUPLOT πληκτρολογήστε στη γραμμή εντολών της εφαρμογής τις επόμενες εντολές, και σχολιάστε την έξοδο που παράγεται από αυτές.

1. `plot cos(x)`
2. `plot [-10:30] sin(pi*x)/(pi*x)`
3. `plot [t=-10:30] sin(pi*t)/(pi*t)`
4. `plot [-pi:pi][-3:3] tan(x), 1/x`
5. `plot [:200][-pi:] exp(sin(x))`

Η δεύτερη ενδιαφέρουσα (και πιο σημαντική) ιδιότητα της εφαρμογής GNUPLOT είναι η δυνατότητά της να δημιουργεί γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων που βρίσκονται αποθηκευμένα σε αρχεία κειμένου. Τα δεδομένα που περιέχονται σε αυτά τα αρχεία θα πρέπει να είναι ταξινομημένα σε γραμμές και στήλες, χαρακτηριστικό, που δίνει τη δυνατότητα να σχεδιαστούν τα δεδομένα της μιας στήλης σε σχέση με τα δεδομένα μιας άλλης στήλης. Η πιο απλή κλήση της εντολής `plot` στην περίπτωση αυτή έχει τη μορφή `plot "filename.ext"` όπου `filename.ext` είναι το όνομα του αρχείου που περιέχει τα δεδομένα που θέλουμε να απεικονίσουμε. Προκειμένου για παράδειγμα να απεικονίσουμε τα δεδομένα που περιλαμβάνονται στο αρχείο `c:\dsp\signal.dat` δεν έχουμε παρά να γράψουμε `plot "c:\dsp\signal.dat"`. Εναλλακτικά μπορούμε να μεταφερθούμε στον κατάλογο `c:\dsp` γράφοντας `"cd c:\dsp"` και από εκεί να καλέσουμε την εντολή `plot` με τη μορφή `plot signal.dat`. Η χρήση της εντολής `cd` είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις κατά τις οποίες τα αρχεία δεδομένων βρίσκονται αρκετά βαθιά στο δέντρο καταλόγων του λειτουργικού συστήματος, και επομένως θα πρέπει να μεταφερθούμε στον κατάλογο που τα περιέχει για να μπορέσουμε στη συνέχεια να τα εκτυπώσουμε. Εάν δεν γνωρίζουμε το όνομα του καταλόγου στον οποίο βρισκόμαστε, μπορούμε να ανακτήσουμε αυτή την πληροφορία χρησιμοποιώντας την εντολή `pwd` (print working directory).

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το αρχείο δεδομένων περιέχει περισσότερες από μια στήλες δεδομένων, μπορούμε να καθορίσουμε τις στήλες που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε στη σχεδίαση, χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη λέξη `using`. Για παράδειγμα η εντολή `plot "signal.dat" using 2:1` εκτυπώνει τα δεδομένα της δεύτερης στήλης του αρχείου σε σχέση με τα δεδομένα της πρώτης στήλης. Αυτή είναι και η προεπιλεγμένη συμπεριφορά της εντολής εάν

δεν καθορίσουμε τις θέσεις των στηλών. Αντίθετα εάν θέλουμε να εκτυπώσουμε τα δεδομένα μιας και μοναδικής στήλης (π.χ. της στήλης υπ αριθμόν M) θα πρέπει να καλέσουμε την εντολή με τη μορφή `plot "signals.dat" using M` όπου η παράμετρος M περιέχει τη θέση της στήλης μέσα στο αρχείο.

Άσκηση: Δημιουργήστε ένα αρχείο δεδομένων που να είναι διατεταγμένα σε αρκετές γραμμές και στήλες (εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο `signals.dat`) από τη σελίδα του μαθήματος. Στη συνέχεια καλέστε τις εντολές `plot "signals.dat" using 2:1`, `plot "signals.dat" using 1:2`, `plot "signals.dat" using 3:3` και `plot "signals.dat" using 3` και σχολιάστε το αποτέλεσμα της χρήσης τους.

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από την κλήση των παραπάνω εντολών, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως κάθε ζεύγος (x, y) απεικονίζεται επί του διαγράμματος ως ένα απλό σημείο. Εναλλακτικά μπορούμε αντί για τα σημεία να εμφανίσουμε μόνο τις γραμμές που τα ενώνουν ή ακόμη, να εμφανίσουμε τόσο τις γραμμές όσο και τα ίδια τα σημεία. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε τη δεσμευμένη λέξη `with mode` όπου το όρισμα `mode` καθορίζει τον τρόπο εμφάνισης της καμπύλης. Οι πιο συνηθισμένες από τις τιμές που παίρνει αυτό το όρισμα είναι οι συμβολοσειρές `lines`, `points` και `linespoints` οι οποίες προκαλούν την εμφάνιση μόνο των σημείων, μόνο των γραμμών που τα ενώνουν ή και των δύο. Οι υπόλοιπες τιμές έχουν ως αποτέλεσμα την εκτύπωση της γραφικής παράστασης με διαφορετικό σε κάθε περίπτωση τρόπο και η αναλυτική περιγραφή τους βρίσκεται στα αρχεία βοήθειας της εφαρμογής.

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας το αρχείο πολλαπλών στηλών της προηγούμενης άσκησης να εκτελέσετε από τη γραμμή εντολών της εφαρμογής τις εντολές

1. `plot "signals.dat" using 1:2 with points`
2. `plot "signals.dat" using 3:2 with lines`
3. `plot "signals.dat" using 3:1 with linespoints`
4. `plot "signals.dat" using 2 with lines`
5. `plot "signals.dat" using 3 with linespoints`

και να σχολιάσετε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν.

Η άλλη ενδιαφέρουσα δυνατότητα που έχουμε στη διάθεσή μας, είναι να μην χρησιμοποιήσουμε το σύνολο των δεδομένων για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης, αλλά μόνο ένα μέρος αυτών. Έτσι η εντολή `set xrange [100:350]` υπαγορεύει στην εφαρμογή να σχεδιάσει μόνο εκείνα τα σημεία για τα οποία οι τετμημένες x βρίσκονται από την υπ' αριθμόν 100 μέχρι την υπ' αριθμόν 350 θέση της στήλης που αντιστοιχεί στον άξονα των x . Το ποια θα είναι αυτή η στήλη εξαρτάται από τον τρόπο κλήσης της εντολής `plot`. Για παράδειγμα η εντολή `plot "signals.dat" using 3:1 with lines` σχεδιάζει τα δεδομένα της στήλης 3 ως προς τα δεδομένα της στήλης 1. Επομένως η στήλη 1 αντιστοιχεί στον άξονα των x ενώ η στήλη 3 αντιστοιχεί στον άξονα των y . Καλώντας λοιπόν την εντολή `set xrange[100:350]` υπαγορεύουμε στο πρόγραμμα σχεδίασης να εμφανίσει τα ζεύγη (x, y) μόνο για τα σημεία των οποίων η τετμημένη x βρίσκεται ανάμεσα στις θέσεις 100 και 350 της στήλης 1. Με εντελώς ανάλογο τρόπο η κλήση της εντολής `set yrange [min, max]` επιτρέπει τον περιορισμό των τιμών της στήλης οι τιμές της οποίας αντιστοιχούν στον άξονα των y .

Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις η κλήση των εντολών `set xrange` και `set yrange` προηγείται της κλήσης της εντολής `plot` έτσι ώστε αυτή να σχεδιάσει μόνο τις καθοριζόμενες σε κάθε περίπτωση περιοχές. Εάν καλέσουμε πρώτα την εντολή `plot` και στη συνέχεια προχωρήσουμε στον καθορισμό των παραπάνω περιοχών, θα πρέπει να ξανακαλέσουμε εν νέου την εντολή για να σχεδιάσει εκ νέου την καθορισμένη περιοχή. Εναλλακτικά μπορούμε να καλέσουμε την εντολή `replot` η οποία επαναλαμβάνει την τελευταία διαδικασία σχεδίασης και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχεδιάσει τα σημεία που προκύπτουν μετά τον καθορισμό των νέων περιοχών.

Το τελευταίο σημαντικό χαρακτηριστικό της εφαρμογής αφορά το χρώμα σχεδίασης και το σχήμα και μέγεθος των συμβόλων που θα χρησιμοποιηθούν για να απεικονίσουν το κάθε σημείο. Αυτά τα δύο ορίσματα είναι αχέραιοι αριθμοί που τοποθετούνται αμέσως μετά τον τύπο της γραφικής παράστασης όπως αυτός καθορίζεται από τη δεσμευμένη λέξη `with`. Για παράδειγμα η εντολή `plot "signals.dat" using 2:1 with linespoints 8 6` σχεδιάζει τις γραμμές με μαύρο χρώμα και για το κάθε σημείο χρησιμοποιείται το σύμβολο `*`. Χρησιμοποιώντας άλλες αχέραιες τιμές για αυτές τις δύο παραμέτρους, μπορούμε να ορίσουμε το κατάλληλο σε κάθε περίπτωση χρώμα και σύμβολο, έτσι ώστε να πληρούνται οι ανάγκες που υφίστανται σε κάθε περίπτωση. Προκειμένου να εμφανίσουμε τη λίστα με τις διαθέσιμες τιμές για αυτές τις παραμέτρους, δεν έχουμε παρά να καλέσουμε την εντολή `test` από τη γραμμή εντολών της εφαρμογής. Η έξοδος της εντολής είναι ένας κατάλογος από όλους τους διαθέσιμους τύπους γραμμής και συμβόλων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων.

Η πλήρης σύνταξη λοιπόν της εντολής plot έχει τη μορφή plot "filename.ext" using M:N with style lineStyle pointStyle όπου filename.ext είναι το όνομα του αρχείου κειμένου που περιέχει τα δεδομένα προς απεικόνιση, M και N είναι οι αριθμοί των στηλών τα δεδομένα των οποίων θα εκτυπωθούν σε μορφή ζευγών (x, y) , style είναι το είδος της εκτύπωσης (δηλαδή μόνο σημεία, μόνο γραμμές, ή και σημεία και γραμμές) - και άλλα πολλά - και lineStyle και pointStyle είναι το χρώμα της γραμμής και το είδος του συμβόλου που θα χρησιμοποιηθεί κατά τη διαδικασία της εκτύπωσης.

Μετά τη συνοπτική παρουσίαση της εντολής plot ας περάσουμε τώρα σε άλλες ενδιαφέρουσες και χρήσιμες εντολές. Η εντολή set title titleString επιτρέπει την απόδοση ενός τίτλου στο τρέχον γράφημα. Έτσι γράφοντας set title "Signal Power Spectrum" και πατώντας το Enter επιβάλλουμε την εμφάνιση του τίτλου Signal Power Spectrum στο επάνω μέρος του γραφήματος. Για να καθορίσουμε ετικέτες για τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα χρησιμοποιούμε τις εντολές set xlabel labelText και set ylabel labelText αντίστοιχα. Γράφοντας για παράδειγμα set xlabel "Frequency" και set ylabel "Power" επιβάλλουμε την εμφάνιση των συμβολοσειρών Frequency και Power ως ετικέτες για τον οριζόντιο και για τον κατακόρυφο άξονα. Παρατηρούμε πως η ετικέτα του κατακόρυφου άξονα γράφεται και αυτή κατακόρυφα, αποδίδοντας έτσι στο διάγραμμα μια επαγγελματική όψη. Παρατηρούμε πως οι ετικέτες των δύο αξόνων εμφανίζονται κεντραρισμένες ως προς τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα. Εάν θέλουμε να μετακινήσουμε τις ετικέτες σε άλλο σημείο καλούμε τις εντολές με δύο επιπλέον ορίσματα xoffset και yoffset. Τα ορίσματα αυτά παίρνουν ακέραιες τιμές που καθορίζουν τη νέα θέση της ετικέτας σε θέση με την τρέχουσα. Έτσι η εντολή set xlabel "Frequency" 10, -2 θα εμφανίζει την ετικέτα του οριζοντίου άξονα μετατοπισμένη κατά 10 χαρακτήρες προς τα αριστερά και κατά 2 χαρακτήρες προς τα κάτω. Εάν θέλουμε να καταργήσουμε τις ετικέτες των αξόνων του γραφήματος, καλούμε τις εντολές χωρίς ορίσματα. Έτσι η εντολή set xlabel αρχικοποιεί την ετικέτα του οριζοντίου άξονα, αποδίδοντας σε αυτή τη μηδενική συμβολοσειρά (null string).

Σε ορισμένες περιπτώσεις (και όπου αυτό είναι επιθυμητό) μπορούμε να εμφανίσουμε στην επιφάνεια του διαγράμματος ένα πλέγμα (grid). Για να το κάνουμε αυτό εκτελούμε την εντολή set grid από τη γραμμή εντολών της εφαρμογής. Εάν το πλέγμα υπάρχει και θέλουμε να το απομακρύνουμε, καλούμε την εντολή set nogrid. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν το πλέγμα χρησιμοποιείται ή όχι, χρησιμοποιώντας την εντολή show grid. Εάν το πλέγμα είναι ενεργοποιημένο, η εντολή θα μας εμφανίσει το μήνυμα grid is ON, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα εμφανιστεί το μήνυμα grid is OFF.

Η τελευταία εντολή του GNU PLOT που θα μας απασχολήσει για την ώρα είναι η εντολή set key x,y η οποία εμφανίζει για κάθε καμπύλη που σχεδιάζεται, μια μικρή ετικέτα που περιέχει πληροφορίες σχετικά με αυτή την καμπύλη. Αυτή η ετικέτα περιέχει το όνομα του αρχείου που περιέχει τα δεδομένα προς απεικόνιση και στις πιο πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται στο επάνω δεξιά μέρος του γραφήματος. Εάν επιθυμούμε να τοποθετήσουμε την ετικέτα σε κάποια άλλη θέση μπορούμε να το κάνουμε, αποδίδοντας τις κατάλληλες τιμές στις μεταβλητές x και y . Εάν θέλουμε να απενεργοποιήσουμε τελείως την εμφάνιση αυτής της ετικέτας χρησιμοποιούμε την εντολή set nokey. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν αυτή η ετικέτα είναι ενεργοποιημένη, καλώντας την εντολή show key. Εάν η ετικέτα πρόκειται να εμφανιστεί, θα λάβουμε το μήνυμα key is ON, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα εμφανιστεί το μήνυμα key is OFF.

Αν και σε κάθε περίπτωση μπορούμε να καλέσουμε όλες αυτές τις εντολές μια προς μια από τη γραμμή εντολών της εφαρμογής, έχουμε τη δυνατότητα αν το επιθυμούμε, να τις τοποθετήσουμε όλες μαζί σε ένα αρχείο κειμένου και να τις εκτελέσουμε σε ένα και μόνο βήμα, καλώντας το αρχείο μέσα από την εφαρμογή. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται δια της χρήσης της εντολής load η οποία συντάσσεται με τη μορφή load fileName, όπου fileName είναι το όνομα του αρχείου που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε.

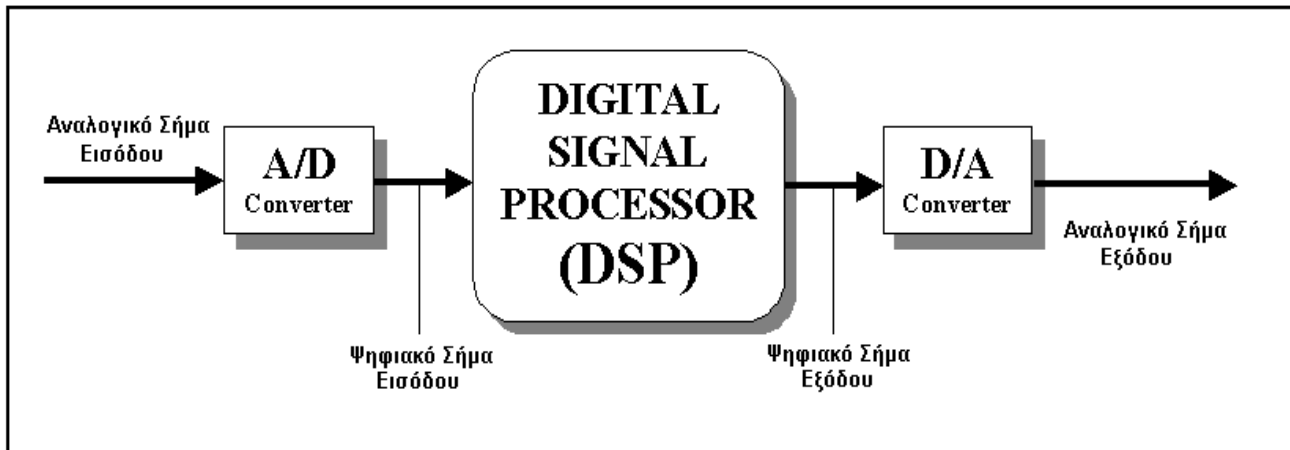
```
set title "Variation of signal amplitude as a function of time"
set xlabel "Amplitude" set ylabel "Time" set grid set nokey set
xrange [50:100] plot "signals.dat" using 3 with linespoints 8, 6
```

3 Εισαγωγικές έννοιες - Σήματα και Συστήματα

Ένα σήμα (signal) ορίζεται ως μια φυσική ποσότητα που μεταβάλλεται συναρτήσει του χώρου και του χρόνου ή σε συνάρτηση με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή ή πλήθος μεταβλητών. Από τη μαθηματική σκοπιά του θέματος, το σήμα περιγράφεται ως μια συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$S_1(t) = 5t \quad (1)$$

$$S_2(t) = 20t^2 \quad (2)$$



Σχήμα 6: Τυπική δομή συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας σήματος

περιγράφουν δύο σήματα εκ των οποίων το πρώτο μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο ενώ το δεύτερο είναι ανάλογο του τετραγώνου του χρόνου. Τέλος η συνάρτηση

$$S(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2 \quad (3)$$

περιγράφει ένα σήμα που είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταξύ τους μεταβλητών x και y , οι οποίες μπορεί να αναπαριστούν τις συντεταγμένες x και y ενός επιπέδου.

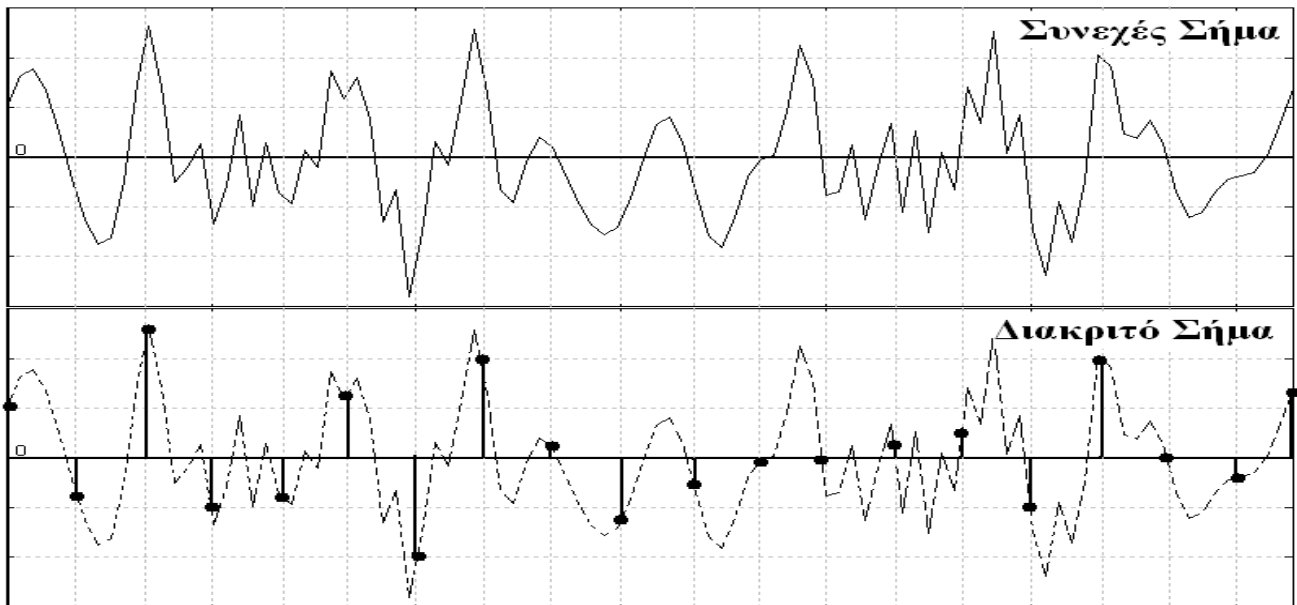
Από την άλλη πλευρά ένα σύστημα (system) μπορεί να ορισθεί ως μία φυσική διάταξη που πραγματοποιεί επί του σήματος κάποια συγκεκριμένη μορφή επεξεργασίας. Ένα κλασσικό παράδειγμα συστήματος είναι ένα φίλτρο το οποίο εφαρμόζεται επί του σήματος προκειμένου να απομακρύνει το θόρυβο που περιλαμβάνεται σε αυτό. Η διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα διέρχεται από ένα σύστημα είναι γνωστή ως επεξεργασία σήματος. Ανάλογα με τον τύπο της επεξεργασίας που πραγματοποιεί το σύστημα πάνω στο διερχόμενο σήμα, αυτό μπορεί να είναι γραμμικό ή μη γραμμικό. Είναι προφανές πως η έννοια του συστήματος δεν περιορίζεται μόνο σε φυσικές διατάξεις - ένα σύστημα μπορεί να είναι και μια συνάρτηση ή ένα τμήμα κώδικα γραμμένο σε μία γλώσσα προγραμματισμού που πραγματοποιεί κάποια μορφή επεξεργασίας επί του εισερχόμενου σήματος.

3.1 Αναλογικά και Ψηφιακά Σήματα και Συστήματα

Ένα σήμα μπορεί να είναι τόσο αναλογικό όσο και ψηφιακό. Τα αναλογικά σήματα είναι συναρτήσεις συνεχούς μεταβλητής (όπως είναι ο χώρος και ο χρόνος) και συνήθως παίρνουν τιμές που ανήκουν σε μία συνεχή περιοχή τιμών. Τέτοιου είδους σήματα μπορούν να επεξεργαστούν άμεσα από αναλογικά συστήματα (δηλαδή φίλτρα ή αναλυτές συχνοτήτων). Επομένως στην περίπτωση αυτή τόσο το σήμα όσο και το σύστημα που το επεξεργάζεται χαρακτηρίζονται ως αναλογικά. Είναι προφανές πως το αναλογικό σήμα μπορεί να επεξεργαστεί στην τρέχουσα αναλογική μορφή του χωρίς καμιά ενδιάμεση επεξεργασία.

Εάν το σύστημα είναι ψηφιακό, η επεξεργασία του αναλογικού σήματος γίνεται με ψηφιακές μεθόδους και απαιτείται προγενέστερη μετατροπή του σε ψηφιακή μορφή. Η μετατροπή αυτή γίνεται από την κατάλληλη διάταξη. Εάν το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι σε αναλογική μορφή, εφαρμόζουμε την αντίστροφη διαδικασία. Η τυπική δομή ενός συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας σήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 6.

Τυπικό παράδειγμα ενός αναλογικού σήματος είναι μια διαφορά δυναμικού που χαρακτηρίζει τη λειτουργία κάποιου ηλεκτρικού κυκλώματος. Αυτή η διαφορά δυναμικού δύναται να καταμετρηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και να εξαρτάται εκτός από το χρόνο και από άλλες παραμέτρους και φυσικά μεγέθη όπως είναι η πίεση και η θερμοκρασία. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, προκειμένου αυτό το σήμα να μετατραπεί από αναλογικό σε ψηφιακό, θα πρέπει να υποστεί τη διαδικασία του κβαντισμού που συνίσταται στην καταμέτρηση του πλάτους του σήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές οι οποίες συνήθως απέχουν μεταξύ τους ίσες χρονικές αποστάσεις. Εάν $x_a(t)$ είναι το αναλογικό σήμα ενώ το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές καταμετρήσεις είναι ίσο με T_s , το διακριτό σήμα ορίζεται ως $x(n) = x_a(nT_s)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, το σήμα δεν θα μπορεί πλέον να περιγραφεί από μία συνεχή συνάρτηση του χρόνου αλλά από την ακολουθία διακριτών τιμών $x(n)$ που θα έχει προκύψει από την παραπάνω διαδικασία. Ας σημειωθεί πως αυτή η διαδικασία του κβαντισμού δεν εφαρμόζεται μόνο για την ανεξάρτητη μεταβλητή που περιγράφει το σήμα, αλλά και για το πλάτος του, διαδικασία που θα περιγραφεί αναλυτικά στη συνέχεια. Στην πραγματικότητα, το ψηφιακό σήμα ορίζεται ως ένα σήμα διακριτού χρόνου το οποίο είναι κβαντισμένο ως προς το πλάτος του.



Σχήμα 7: Παράδειγμα συνεχούς σήματος και του ισοδύναμου διακριτού σήματος

Στο σχήμα 7 παρουσιάζεται παράδειγμα συνεχούς σήματος και του ισοδύναμου διακριτού σήματος που προκύπτει μετά τη διαδικασία του κβαντισμού. Παρατηρούμε πως στη διακριτή περίπτωση το πλάτος του σήματος δεν ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή όπως προηγουμένως αλλά μόνο σε εκείνες τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες έλαβε χώρα η καταμέτρηση της τιμής του. Περισσότερες λεπτομέρειες για τα διακριτά σήματα και τη διαδικασία του κβαντισμού θα παρουσιαστούν σε επόμενες ενότητες.

Η επεξεργασία των κβαντισμένων σημάτων διακριτού χρόνου γίνεται από διακριτά συστήματα τα οποία δέχονται ως είσοδο ένα διακριτό σήμα $x[n]$ και παράγουν στην έξοδο ένα δεύτερο διακριτό σήμα $y[n]$. Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει πως αν $\{x[0], x[1], x[2], \dots\}$ είναι η διακριτή ακολουθία εισόδου, τότε το διακριτό σύστημα θα δημιουργήσει τη διακριτή ακολουθία εξόδου $\{y[0], y[1], y[2], \dots\}$. Αυτή η σχέση που υφίσταται ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ο πιο απλός εκ των οποίων είναι ο καθορισμός της μαθηματικής σχέσης που υφίσταται ανάμεσά τους. Εάν για παράδειγμα ένα διακριτό σύστημα περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση $y[n] = 2x[n] - 1$, τότε η απόκριση του συστήματος στην ακολουθία εισόδου $\{3, -2, 7, 9, 1\}$ θα είναι η ακολουθία εξόδου $\{5, -5, 13, 17, 1\}$.

3.2 Κατηγορίες σημάτων

Ανάλογα με τη φύση τους και τα χαρακτηριστικά που τα περιγράφουν τα σήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε πολλές κατηγορίες, οι πιο σημαντικές από τις οποίες είναι οι εξής:

- **Πολυδιάστατα σήματα και σήματα πολλών καναλιών:** Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα σήμα μπορεί να είναι συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα το σήμα $x(t) = \cos(\omega)t$ ορίζεται στο χώρο της μιας διάστασης. Στη γενική περίπτωση κατά την οποία το σήμα περιγράφεται από μια συνάρτηση M μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_M λέμε πως το σήμα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη M διαστάσεων (M dimensional signal).

Από την άλλη πλευρά, η κάθε μια από τις μεταβλητές του σήματος, μπορεί να είναι βαθμωτό, μιγαδικό ή ακόμη και διανυσματικό μέγεθος. Για παράδειγμα το σήμα

$$S_1(t) = A \sin(3\pi t) \quad (4)$$

είναι συνάρτηση του βαθμωτού μεγέθους t , ενώ το σήμα

$$S_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A \cos(3\pi t) + jA \sin(3\pi t) \quad (5)$$

είναι μιγαδικής φύσεως, αφού περιέχει τη μιγαδική μονάδα j . Σε άλλες πάλι περιπτώσεις το σήμα περιέχει συνιστώσες οι οποίες δημιουργούνται από διαφορετικές πηγές ή καταμετρώνται από πολλές μετρητικές διατάξεις ή αισθητήρες. Τυπικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας σημάτων είναι τα κύματα που προκαλούνται από την

επιτάχυνση του εδάφους κατά τη διάρκεια της εκδήλωσης σεισμικής δραστηριότητας. Οι έρευνες έχουν δείξει πως τα κύματα αυτά αποτελούνται από τρεις συνιστώσες, εκ των οποίων ή μία είναι εγκάρσια, η δεύτερη διαμήκης και η τρίτη χαρακτηρίζεται ως επιφανειακή συνιστώσα. Εάν περιγράψουμε αυτές τις τρεις συνιστώσες με τα μονοδιάστατα σήματα $S_1(t)$, $S_2(t)$ και $S_3(t)$, είναι προφανές πως το συνολικό κύμα θα είναι ένα διάνυσμα της μορφής

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Τα σήματα αυτά ονομάζονται και σήματα πολλών καναλιών (multichannel signals) διότι οι συνιστώσες τους προέρχονται από πολλές διαφορετικές πηγές, ή όπως λέμε στην ορολογία των σημάτων, από πολλά διαφορετικά κανάλια.

- **Σήματα συνεχούς χρόνου και σήματα διακριτού χρόνου:** Το βασικό χαρακτηριστικό των σημάτων συνεχούς χρόνου, είναι πως αυτά ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή και παίρνουν τιμές που ανήκουν σε ένα συνεχές διάστημα (α, β) - το διάστημα αυτό μπορεί να είναι και το $(-\infty, +\infty)$. Από τη μαθηματική σκοπιά του θέματος, τα σήματα αυτού του είδους περιγράφονται από μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$, π.χ. $x(t) = \cos(\pi t)$.

Από την άλλη πλευρά, τα σήματα διακριτού χρόνου ορίζονται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές οι οποίες δεν είναι υποχρεωτικό να απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (αν και συνήθως αυτό συμβαίνει). Στην περίπτωση αυτή το σήμα περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής $x(t_n)$ (όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) και επομένως είναι συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n .

- **Σήματα συνεχών τιμών και σήματα διακριτών τιμών :** οι τιμές ενός σήματος συνεχούς ή διακριτού χρόνου μπορεί να είναι και οι ίδιες συνεχείς ή διακριτές. Πιο συγκεκριμένα, εάν το σήμα παίρνει όλες τις πιθανές τιμές σε μια πεπερασμένη ή άπειρη περιοχή τιμών, ονομάζεται σήμα συνεχών τιμών. Στην αντίθετη περίπτωση κατά την οποία το σήμα παίρνει ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών τιμών, ονομάζεται σήμα διακριτών τιμών. Επειδή η παραπάνω διάκριση αφορά τόσο τα σήματα συνεχούς χρόνου όσο και τα σήματα διακριτού χρόνου, είναι προφανές, πως υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες σημάτων: (α) σήματα συνεχούς χρόνου και συνεχών τιμών, (β) σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτών τιμών, (γ) σήματα διακριτού χρόνου και συνεχών τιμών και (δ) σήματα διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών. Τα ψηφιακά σήματα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, ανήκουν στην τέταρτη από τις παραπάνω κατηγορίες, είναι δηλαδή σήματα διακριτού χρόνου που παίρνουν διακριτές τιμές. Όπως θα δούμε δε σε επόμενη ενότητα, η μετατροπή ενός σήματος από σήμα συνεχών τιμών σε σήμα διακριτών τιμών, είναι γνωστή ως κβαντισμός (quantization).
- **Ντετερμινιστικά σήματα και τυχαία σήματα:** ένα σήμα ονομάζεται ντετερμινιστικό, όταν μπορεί να περιγραφεί με μοναδικό τρόπο από μία επακριβώς καθορισμένη μαθηματική έκφραση, από ένα πίνακα δεδομένων, ή από κάποιο γνωστό κανόνα. Το σήμα θεωρείται ντετερμινιστικό υπό την έννοια η γνώση του κανόνα που καθορίζει τη χρονική του εξέλιξη, επιτρέπει τον υπολογισμό της τιμής του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

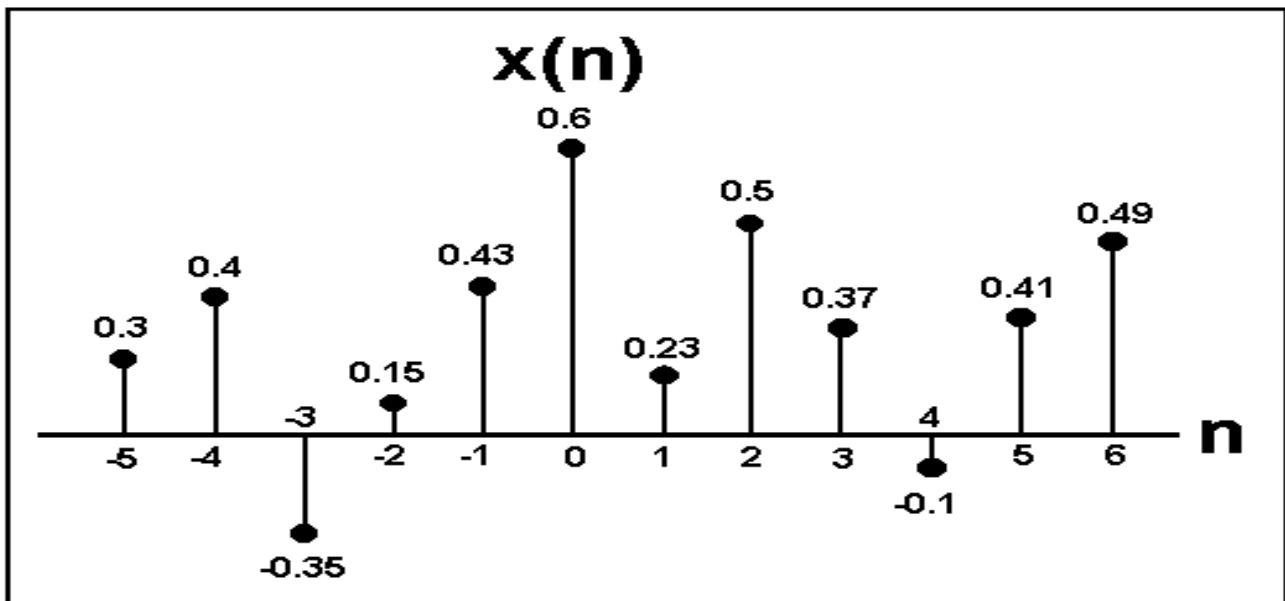
Από την άλλη πλευρά, εάν το σήμα δεν μπορεί να περιγραφεί με ικανοποιητικό βαθμό ακριβείας από μια επαρκώς καθορισμένη μαθηματική έκφραση, ή αυτή η περιγραφή είναι πάρα πολύ πολύπλοκη έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, το σήμα χαρακτηρίζεται ως τυχαίο. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε πως το σήμα εξελίσσεται στο χρόνο με τρόπο ο οποίος δεν είναι γνωστός.

4 Σήματα διακριτού χρόνου ή διακριτά σήματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα διακριτό σήμα $x(n)$ ορίζεται ως μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης ακέραιας μεταβλητής n - η απαίτηση της ακέραιας μεταβλητής είναι υποχρεωτική καθώς τα διακριτά σήματα δεν ορίζονται για τιμές του n που δεν είναι ακέραιες. Αυτή η μεταβλητή δεν είναι υποχρεωτικό να αναπαριστά το χρόνο αλλά ένα οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος (π.χ. κάποια απόσταση) αν και στη γενική περίπτωση εκφράζει συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Τυπικό παράδειγμα διακριτού σήματος απεικονίζεται στο σχήμα 8. Εκτός από αυτόν τον γραφικό τρόπο αναπαράστασης, ένα διακριτό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί με κάποιον από τους ακόλουθους τρόπους:

- **Συναρτησιακή αναπαράσταση (functional representation)**, στην οποία καθορίζουμε την τιμή του σήματος για την κάθε περιοχή τιμών του n , για παράδειγμα

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{για } n = 1, 3 \\ 4, & \text{για } n = 2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (7)$$



Σχήμα 8: Τυπικό παράδειγμα διακριτού σήματος

- Αναπαράσταση σε μορφή πίνακα (functional representation) όπου καθορίζουμε την ίδια πληροφορία, καταχωρώντας αυτές τις τιμές σε κατάλληλα διαμορφωμένο πίνακα:

| | | | | | | | | |
|--------|-----|---|---|---|---|---|---|-----|
| n | ... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| $x(n)$ | ... | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | ... |

- Ακολουθιακή αναπαράσταση (sequential representation) όπου καταγράφουμε τις διακριτές τιμές του σήματος υπό μορφή ακολουθίας και χρησιμοποιούμε το σύμβολο (\uparrow) για να υποδηλώσουμε την αρχή του σήματος, δηλαδή το πλάτος που αντιστοιχεί στην τιμή $n = 0$:

$$x(n) = \{ \dots, 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \}$$

\uparrow

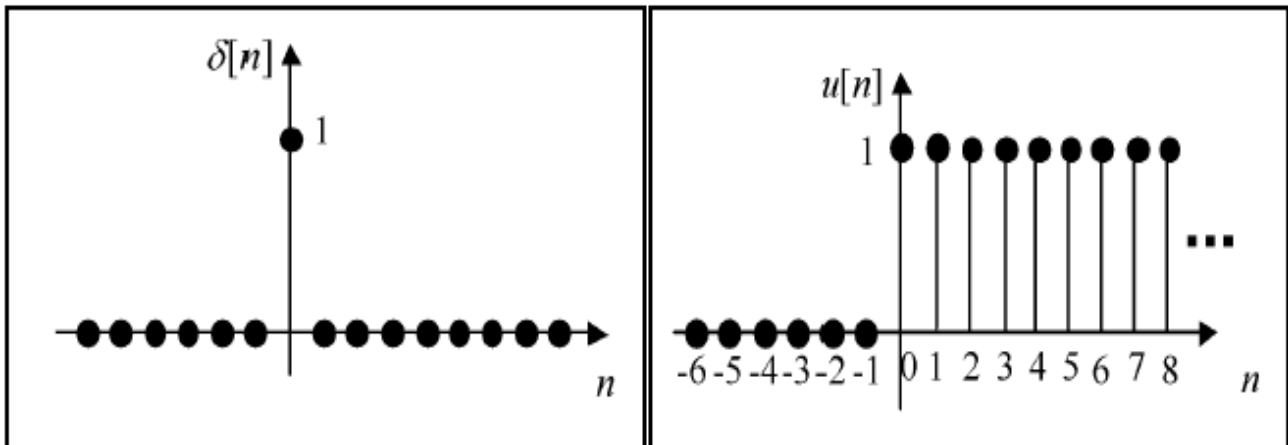
Εάν το μήκος του διακριτού σήματος είναι πεπερασμένο, το σήμα μπορεί να γραφεί και σε διανυσματική μορφή ως $\vec{x}(n) = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(N)]^T$ όπου N το πλήθος των δεδομένων του σήματος και T ο τελεστής του ανάστροφου πίνακα. Αν και μιλώντας γενικά οι τιμές που περιλαμβάνονται σε ένα διακριτό σήμα είναι πραγματικές, εν τούτοις κανείς δεν απαγορεύει τη χρήση μιγαδικών διακριτών σημάτων. Αυτά τα σήματα ορίζονται από μία εξίσωση της μορφής $z(n) = \alpha(n) + i\beta(n) = \text{Re}[z(n)] + i\text{Im}[z(n)]$ ή ισοδύναμα, $z(n) = |z(n)|\exp(i\varphi[z(n)])$ όπου κατά τα γνωστά, το πλάτος και η φάση των μιγαδικών ποσοτήτων για κάθε τιμή της μεταβλητής n ορίζονται ως $|z(n)| = \sqrt{\{\text{Re}[z(n)]\}^2 + \{\text{Im}[z(n)]\}^2}$ και $\varphi[z(n)] = \tan^{-1}\{\text{Im}[z(n)]/\{\text{Re}[z(n)]\}$ αντίστοιχα.

Σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των σημάτων διακριτού χρόνου, παίζουν οι συναρτήσεις της μοναδιαίας διακριτής ώσης (ή διακριτής συνάρτησης δ) (unit impulse response) και της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος (unit step function) οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{οποδήποτε αλλού} \end{cases} = u(n) - u(n-1) \quad \text{και} \quad u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{οποδήποτε αλλού} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)$$

αντίστοιχα από όπου παρατηρούμε πως η κάθε μία συνάρτηση μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της άλλης. Αποδεικνύεται πως κάθε διακριτό σήμα $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα άπειρων μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων οι οποίες είναι πολλαπλασιασμένες με ένα συντελεστή βάρους που αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του σήματος. Η ιδιότητα αυτή σε μαθηματική μορφή αποδίδεται από την εξίσωση

$$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(0) + x(1)\delta(n-1) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (8)$$



Σχήμα 9: Οι διακριτές συναρτήσεις της μοναδιαίας ώσης $\delta(n)$ και της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος $u(n)$

Η τελευταία χρήσιμη συνάρτηση που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στο πεδίο των διακριτών σημάτων είναι η εκθετική ακολουθία η οποία ορίζεται ως $x(n) = \alpha^n$ όπου η παράμετρος α μπορεί να είναι πραγματική ή μιγαδική. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση ορισμού αυτής της παραμέτρου ως $\alpha = \exp(i\omega_0)$ όπου η ποσότητα ω_0 νοείται ως παράμετρος του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή $x(n) = [\exp(i\omega_0)]^n = \exp(in\omega_0) = \cos(n\omega_0) + i\sin(n\omega_0)$ και είναι γνωστή ως μιγαδική εκθετική ακολουθία.

Οι θεμελιώδεις διακριτές συναρτήσεις της μοναδιαίας ώσης $\delta(n)$ και της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος $u(n)$ παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.

Άσκηση 16 Να αποδείξετε ότι

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad \text{και} \quad u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

Απάντηση: Από τον ορισμό της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος είναι προφανές ότι

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(n-1) = \begin{cases} 1 & n-1 > 0 \Rightarrow n > 1 \\ 1 & n-1 = 0 \Rightarrow n = 1 \\ 0 & n-1 < 0 \Rightarrow n < 1 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad u(n-1) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις θα λάβουμε

$$u(n) - u(n-1) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \delta(n)$$

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την ιδιότητα της συνάρτησης δ να έχει τιμή ίση με τη μονάδα για την τιμή $n = 0$ και μηδενική τιμή οπουδήποτε αλλού. Θα είναι λοιπόν

$$\sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} = u(n) \quad \text{και} \quad \text{ομοίως} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} = u(n)$$

Η μοναδιαία συνάρτηση βήματος χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $u(-n) = 1 - u(n)$ από όπου προκύπτει ότι $u(n) + u(-n) = 1$
- $u(+\infty) = 1$ και $u(-\infty) = 0$
- $\int_0^n u(s) ds = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \int_0^n ds = t & n \geq 0 \end{cases} = nu(n)$

4.1 Ταξινόμηση διακριτών σημάτων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις τρεις διαφορετικές κατηγορίες στις οποίες μπορεί να ταξινομηθεί ένα σύστημα διακριτού χρόνου με κριτήριο τις ιδιότητες που το περιγράφουν. Ένα τέτοιο σήμα μπορεί να χαρακτηριστεί ως σήμα ενέργειας ή σήμα ισχύος, ως περιοδικό ή απεριοδικό, και ως συμμετρικό ή αντισυμμετρικό. Στις επόμενες παραγράφους θα περιγράψουμε συνοπτικά τις τρεις αυτές κατηγορίες διακριτών σημάτων.

4.1.1 Σήματα ενέργειας και σήματα ισχύος

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη θεωρία των διακριτών σημάτων, η ενέργεια E ενός διακριτού σήματος $x(n)$, ορίζεται ως

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (9)$$

και μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Εάν η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη - ισχύει δηλαδή η σχέση $0 < E < \infty$ - το διακριτό σήμα $x(n)$ ονομάζεται σήμα ενέργειας (energy signal). Σε ορισμένες περιπτώσεις για την ενέργεια E του σήματος $x(n)$ χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός E_x .

Αν και ένα διακριτό σήμα $x(n)$ μπορεί να χαρακτηρίζεται από άπειρη ενέργεια E , εν τούτοις, η μέση ισχύς του (average power) μπορεί να είναι πεπερασμένη. Αυτή η ισχύς ορίζεται ως

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \right) \quad (10)$$

Εάν λοιπόν ορίσουμε την ενέργεια του σήματος επί του πεπερασμένου διαστήματος τιμών $-N \leq n \leq N$, δηλαδή γράψουμε

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (11)$$

είναι προφανές ότι η συνολική ενέργεια θα δίδεται από τη σχέση

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \quad (12)$$

ενώ η μέση ισχύς θα είναι

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} E_N \right) \quad (13)$$

Εάν η ενέργεια E του σήματος είναι πεπερασμένη, η ισχύς του, P , θα είναι ίση με το μηδέν ($P = 0$). Αντίθετα, εάν η ενέργεια E απειρίζεται, η ισχύς P μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Στην περίπτωση κατά την οποία η ισχύς P είναι πεπερασμένη, το διακριτό σήμα $x(n)$ ονομάζεται σήμα ισχύος (power signal).

Άσκηση 17 Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ισχύς ενός σήματος δίδεται από τη σχέση $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$. Εάν το διακριτό σήμα $x(n)$ έχει ως άρτια συνιστώσα τη $x_e(n) = (1/2)^{|n|}$ (οι έννοιες της άρτιας και της περιττής συνιστώσας περιγράφονται στη συνέχεια) ενώ η ισχύς του είναι ίση με $P = 5$, να βρεθεί η τιμή της περιττής συνιστώσας.

Απάντηση: (α) Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως το διακριτό σήμα $x(n)$ ορίζεται ως το άθροισμα $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού της ισχύος του, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_e(n) + x_o(n)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n)$$

Επειδή όμως το σήμα $x_e(n)$ χαρακτηρίζεται από άρτια συμμετρία ενώ το σήμα $x_o(n)$ χαρακτηρίζεται από περιττή συμμετρία, το γινόμενο τους $x_e(n)x_o(n)$ θα είναι περιττή ακολουθία και σύμφωνα με τη βασική θεωρία θα είναι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$. Επομένως η παραπάνω εξίσωση θα λάβει τη μορφή

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n) = P_e + P_o$$

ήτοι, η συνολική ισχύς ενός σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων της άρτιας και της περιττής συνιστώσας του.

Ο υπολογισμός της ισχύος της άρτιας συνιστώσας είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί, καθώς η αναλυτική της έκφραση είναι γνωστή. Θα είναι λοιπόν

$$P_e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2|n|} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = -1 + 2 \frac{1}{1 - (1/4)} = \frac{5}{3}$$

Επομένως η ισχύς της περιττής συνιστώσας θα δίδεται από τη σχέση $P_o = P - P_e = 5 - (5/3) = 10/3$.

Άσκηση 18 Δίδεται το διακριτό σήμα $x(n) = (3/2)^n u(-n)$. Να υπολογιστούν οι τιμές των μεγεθών $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$ και $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$.

Απάντηση: Ο υπολογισμός των ζητούμενων ποσοτήτων οδηγεί στα επόμενα αποτελέσματα:

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n) = \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - (2/3)} = 3 \quad \text{και}$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} u(-n) = \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1 - (4/9)} = \frac{9}{5}$$

4.1.2 Περιοδικά σήματα και απεριοδικά σήματα

Ένα διακριτό σήμα $x(n)$ ονομάζεται περιοδικό (periodic) με περίοδο N ($N > 0$) αν και μόνο αν

$$x(n + N) = x(n) \quad \forall n \quad (14)$$

Στην περίπτωση αυτή, η μικρότερη τιμή της παραμέτρου N για την οποία ικανοποιείται η παραπάνω σχέση, ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος (fundamental period) του σήματος. Αντίθετα, εάν δεν υπάρχει τιμή του N που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση, το σήμα ονομάζεται μη περιοδικό (non periodic) ή απεριοδικό (aperiodic). Αποδεικνύεται πως όλα τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος (power signals).

Είναι προφανές πως αν η περίοδος ενός σήματος είναι ίση με N , τότε το εν λόγω σήμα έχει ως περιόδους και τις ποσότητες mN $m = 1, 2, 3, \dots$ με τη μικρότερη από αυτές να αποτελεί και τη θεμελιώδη περίοδο. Εάν θεωρήσουμε δύο περιοδικά σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ με τιμές περιόδων N_1 και N_2 αντίστοιχα, τότε τα σήματα $x_1(n) + x_2(n)$ και $x_1(n) \cdot x_2(n)$ είναι και αυτά περιοδικά με τιμή περιόδου $N = (N_1 N_2) / MK\Delta(N_1, N_2)$ όπου $MK\Delta(N_1, N_2)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των ακέραιων αριθμών N_1 και N_2 .

Παράδειγμα 1 Δίδονται τα επόμενα σήματα διακριτού χρόνου

$$x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right), \quad x(n) = \operatorname{Re}\left\{\exp\left(i\frac{n\pi}{12}\right)\right\} + \operatorname{Im}\left\{\exp\left(i\frac{n\pi}{18}\right)\right\}, \quad x(n) = \sin(\pi + 0.2n), \quad x(n) = \exp\left(i\frac{n\pi}{17}\right)$$

Να διαπιστωθεί αν είναι περιοδικά ή όχι, και αν ναί, να υπολογιστεί η τιμή της περιόδου του.

Απάντηση: Οι παραπάνω ασκήσεις επιλύονται λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός πως οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$ και επομένως ικανοποιούν τις σχέσεις $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ και $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

$$(\alpha) \quad x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{8} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{8} + \frac{16\pi}{8}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{8}(n + 16)\right] = x(n + 16) \Rightarrow N = 16$$

(β) Από τη βασική θεωρία των μιγαδικών αριθμών δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{n\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) \Rightarrow \operatorname{Re}\left\{\exp\left(i\frac{n\pi}{12}\right)\right\} = \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) \quad \text{και} \\ \exp\left(i\frac{n\pi}{18}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right) \Rightarrow \operatorname{Im}\left\{\exp\left(i\frac{n\pi}{18}\right)\right\} = \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right) \end{aligned}$$

Επομένως το σήμα προς χαρακτηρισμό θα δίδεται από τη σχέση

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)$$

και προκειμένου να βρούμε την περίοδό του θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις περιόδους των συνιστωσών $x_1(n)$ και $x_2(n)$ δια της εφαρμογής της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε:

$$(1) x_1(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{12} + \frac{24\pi}{12}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{12}(n + 24)\right] = x_1(n + 24) \Rightarrow N = 24$$

$$(2) x_2(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{18} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{18} + \frac{36\pi}{18}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{18}(n + 36)\right] = x_2(n + 36) \Rightarrow N = 36$$

Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώνουμε πως οι συνιστώσες $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι περιοδικά διακριτά σήματα με τιμές περιόδων $N_1 = 24$ και $N_2 = 36$ αντίστοιχα. Επομένως, σύμφωνα με τη θεωρία, το σήμα $x(n)$ θα είναι και αυτό περιοδικό με τιμή περιόδου $N = (N_1 N_2) / MK\Delta(N_1, N_2) = (24 * 36) / 12 = 72$.

(γ) Προκειμένου το σήμα $x(n)$ να είναι περιοδικό, θα πρέπει να υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός N τέτοιος ώστε

$$x(n) = x(n + N) \Rightarrow \sin(\pi + 0.2n) = \sin[\pi + 0.2(n + N)] = \sin(\pi + 0.2n + 0.2N)$$

Όμως ως γνωστόν η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$ και επομένως θα πρέπει να είναι $\sin(\pi + 0.2n) = \sin(\pi + 0.2n + 2m\pi)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με εκείνη που καταλήξαμε προηγουμένως προκύπτει το συμπέρασμα πως για να ισχύει η παραπάνω ταυτότητα θα πρέπει η ποσότητα $0.2N$ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , ήτοι $0.2N = 2m\pi \Rightarrow N = 10m\pi$. Ωστόσο, ως γνωστόν, η σταθερά π είναι άρρητος αριθμός και επομένως δεν υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός N που να ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Ως εκ τούτου, το διακριτό σήμα που δίδεται από την εξίσωση $x(n) = \sin(\pi + 0.2n)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ) Το διακριτό σήμα $x(n)$ αποτελεί γινόμενο της μορφής $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ με τα σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ να δίδονται από τις σχέσεις $x_1(n) = \exp[i(n\pi/16)]$ και $x_2(n) = \cos(n\pi/17)$. Επομένως προκειμένου να υπολογίσουμε την περίοδό του, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις περιόδους N_1 και N_2 των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$ αντίστοιχα. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \exp\left(i\frac{n\pi}{16}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{16}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{16} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{16} + 2\pi\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{16} + \frac{32\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{16} + \frac{32\pi}{16}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{16}(n + 32)\right] + i\sin\left[\frac{\pi}{16}(n + 32)\right] = \exp\left[i\frac{(n + 32)\pi}{16}\right] \\ &= x(n + 32) \text{ και επομένως το σήμα } x_1(n) \text{ είναι περιοδικό με τιμή περιόδου } N_1 = 32 \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, για το σήμα $x_2(N)$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{17} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{17} + \frac{34\pi}{17}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{17}(n + 34)\right] = x(n + 34) \Rightarrow N = 34$$

Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώνουμε πως οι συνιστώσες $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι περιοδικά διακριτά σήματα με τιμές περιόδων $N_1 = 32$ και $N_2 = 34$ αντίστοιχα. Επομένως, σύμφωνα με τη θεωρία, το σήμα $x(n)$ θα είναι και αυτό περιοδικό με τιμή περιόδου $N = (N_1 N_2) / MK\Delta(N_1, N_2) = (32 * 34) / 2 = 544$.

Άσκηση 19 Δίδονται τα διακριτά σήματα: (α) $x(n) = \cos(0.01\pi n)$, (β) $x(n) = \cos(30\pi n/105)$, (γ) $x(n) = \cos(3\pi n)$, (δ) $x(n) = \sin(3n)$, (ε) $x(n) = 3\cos[5n + (\pi/6)]$, (στ) $x(n) = 2\exp\{j[(n/6) - \pi]\}$, (ζ) $x(n) = \cos(n/8)\cos(n\pi/8)$ και (η) $x(n) = \cos(n\pi/2) - \sin(n\pi/8) + 3\cos[(n\pi/4) + (\pi/3)]$. Για κάθε σήμα να εξετάσετε εάν είναι περιοδικό, και εάν ναι, να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδος του.

Άσκηση 20 Να αποδείξετε πως η θεμελιώδης περίοδος N_p των σημάτων $s_k(n) = \exp(i2\pi kn/N)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) δίδεται από τη σχέση $N_p = N / MK\Delta(N, k)$ όπου $MK\Delta(N, k)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών N και k . Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδο της παραπάνω ομάδας σημάτων για τις τιμές $N = 7$ και $N = 16$.

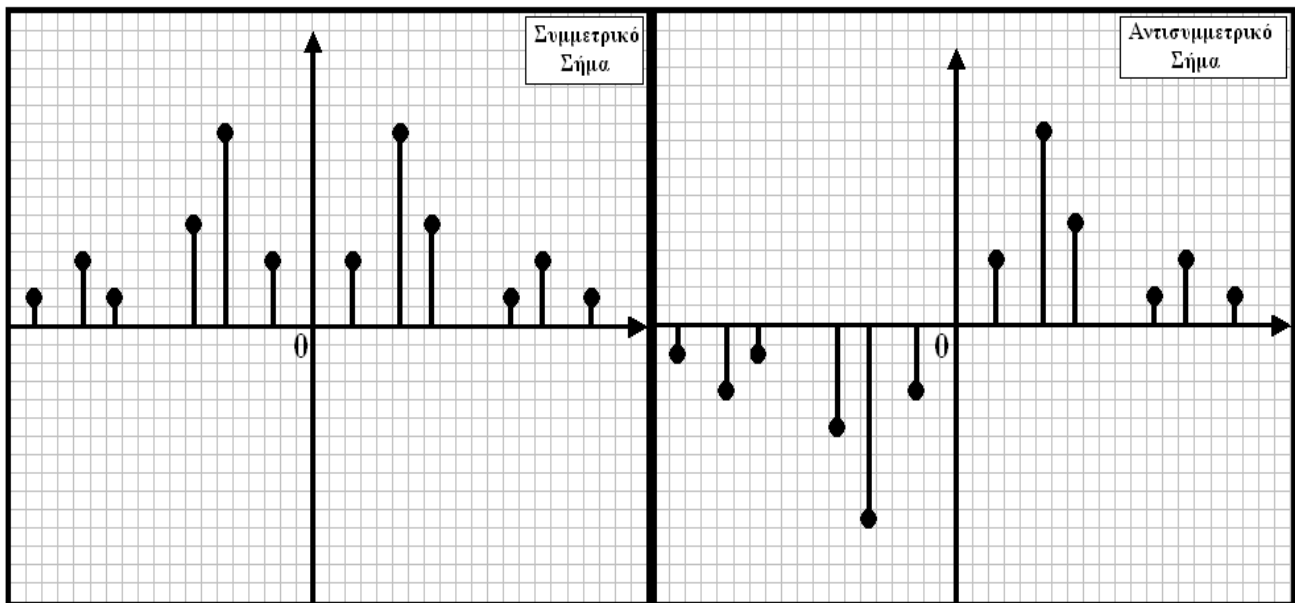
4.1.3 Συμμετρικά σήματα και αντισυμμετρικά σήματα

Ένα σήμα πραγματικών τιμών (real-valued signal) ονομάζεται συμμετρικό (symmetric) ή άρτιο (even), εάν ικανοποιείται η σχέση

$$x(-n) = x(n) \quad \forall n \quad (15)$$

Από την άλλη πλευρά, εάν το σήμα $x(n)$ είναι τέτοιο ώστε

$$x(-n) = -x(n) \quad \forall n \quad (16)$$



Σχήμα 10: Παράδειγμα άρτιου (συμμετρικού) και περιττού (αντισυμμετρικού) σήματος

το σήμα ονομάζεται αντισυμμετρικό (antisymmetric) ή περιττό (odd). Στην τελευταία περίπτωση είναι προφανές ότι $x(0) = 0$.

Αποδεικνύεται πως κάθε διακριτό σήμα $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο διακριτών σημάτων εκ των οποίων το ένα είναι συμμετρικό και το άλλο αντισυμμετρικό. Εάν $x_e(n)$ και $x_o(n)$ είναι δύο τέτοια σήματα, είναι προφανές πως αυτά θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad \text{και} \quad x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

Εάν λοιπόν προσθέσουμε κατά μέλη, θα καταλήξουμε στην εξίσωση $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$, ήτοι, το αυθαίρετο διακριτό σήμα $x(n)$, μπορεί να περιγραφεί ως το άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας αντισυμμετρικής συνιστώσας. Τυπικό παράδειγμα άρτιου (συμμετρικού) και περιττού (αντισυμμετρικού) σήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 9. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε πως τα άρτια σήματα είναι συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα ενώ τα περιττά σήματα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 2 Δίδονται τα επόμενα σήματα διακριτού χρόνου $x(n) = u(n)$ και $x(n) = \alpha^n u(n)$. Να προσδιοριστεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα τους.

Απάντηση: Απο την αναλυτική μορφή της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(-n) = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases}$$

Επομένως η άρτια συνιστώσα του σήματος $x(n) = u(n)$ θα δίδεται από τη σχέση

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] = \frac{1}{2}[u(n) + u(-n)] = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1/2 & n < 0 \end{cases}$$

ή σε ισοδύναμη γραφή

$$x_e(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1/2 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \begin{cases} 1/2 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, η περιττή συνιστώσα του σήματος $x(n) = u(n)$ θα δίδεται από τη σχέση

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] = \frac{1}{2}[u(n) - u(-n)] = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} - \frac{1}{2} \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} +1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \text{sgn}(n)$$

όπου $\text{sgn}(x)$ η συνάρτηση προσήμου η οποία επιστρέφει την τιμή +1 για θετικό όρισμα, την τιμή 0 για μηδενικό όρισμα και την τιμή -1 για αρνητικό όρισμα.

Παρόμοια είναι και η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε για την περίπτωση του σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$. Έτσι, η άρτια συνιστώσα του δίδεται από τη σχέση

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[\alpha^n u(n) + \alpha^{-n} u(-n)] = \frac{1}{2} \alpha^n \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \alpha^{-n} \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha^n/2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ \alpha^{-n}/2 & n < 0 \end{cases}$$

- αφού για $n = 0$ είναι $x_e(0) = (\alpha^0 + \alpha^{-0})/2 = (1 + 1)/2 = 1$ - ή σε ισοδύναμη γραφή

$$x_e(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \alpha^{|n|}/2 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \alpha^{|n|} + \begin{cases} 1/2 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \alpha^{|n|} + \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \alpha^{|n|} + \frac{1}{2} \delta(n)$$

Τέλος, όσον αφορά την περιττή συνιστώσα, αυτή εύκολα υπολογίζεται ως

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[\alpha^n u(n) - \alpha^{-n} u(-n)] = \frac{1}{2} \alpha^n \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} - \frac{1}{2} \alpha^{-n} \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \alpha^n \begin{cases} +1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \alpha^{|n|} \text{sgn}(n)$$

4.2 Θεμελιώδεις πράξεις με διακριτά σήματα

Έχοντας δημιουργήσει ένα διακριτό σήμα $x(n)$, μπορούμε στη συνέχεια να το επεξεργαστούμε με τρόπο ώστε να καλύπτονται οι απαιτήσεις που υφίστανται σε κάθε περίπτωση. Υπάρχουν πολλές μορφές μετασχηματισμών που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω σε ένα διακριτό σήμα, οι πιο χαρακτηριστικές από τις οποίες περιλαμβάνουν τη χρονική μετατόπιση (time shift) του σήματος, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των δειγμάτων του καθώς και την αλλαγή της τιμής του πλάτους του. Σε μια πιο λεπτομερή περιγραφή, οι βασικοί τύποι μετασχηματισμών που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω σε ένα διακριτό σήμα $x(n)$, είναι οι εξής:

- **Μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής n :** ένα διακριτό σήμα $x(n)$, μπορεί να μετατοπιστεί στο χρόνο, αντικαθιστώντας την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής n με την τιμή $(n - k)$ όπου το k είναι μια ακέραια ποσότητα. Εάν η τιμή του k είναι θετική, αυτή η χρονική μετατόπιση αντιστοιχεί σε χρονική καθυστέρηση του σήματος κατά k χρονικές μονάδες, ενώ εάν το k λάβει αρνητικές τιμές, η διαδικασία της χρονικής μετατόπισης γίνεται προς τα εμπρός και το σήμα προχωρά στο χρόνο κατά $|k|$ χρονικές μονάδες. Είναι προφανές πως η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε σήματα τα οποία έχουν ήδη καταγραφεί και βρίσκονται αποθηκευμένα στη μνήμη ή σε κάποιο αρχείο ενός υπολογιστικού συστήματος. Αντίθετα εάν το σήμα που θεωρούμε δημιουργείται σε πραγματικό χρόνο ως το αποτέλεσμα της καταγραφής της τιμής κάποιας μέτρησης, η παραπάνω διαδικασία είναι πρακτικά ανεφάρμοστη διότι συνίσταται στην πρόβλεψη της τιμής μελλοντικών μετρήσεων που βέβαια είναι αδύνατη.

Ένας άλλος ενδιαφέρων μετασχηματισμός αυτού του τύπου, είναι η αντικατάσταση της τιμής της μεταβλητής n με την τιμή $-n$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ο σχηματισμός του κατοπτρικού διακριτού σήματος ως προς την αρχή $n = 0$.

- **Κλιμάκωση του πλάτους του σήματος (amplitude scaling):** η κλιμάκωση (scaling) του πλάτους του σήματος κατά μία σταθερά A , λαμβάνει χώρα πολλαπλασιάζοντας την τιμή κάθε δείγματος του σήματος με την τιμή της σταθεράς A . Το νέο σήμα που θα προκύψει με τον τρόπο αυτό, θα δίδεται επομένως από τη σχέση

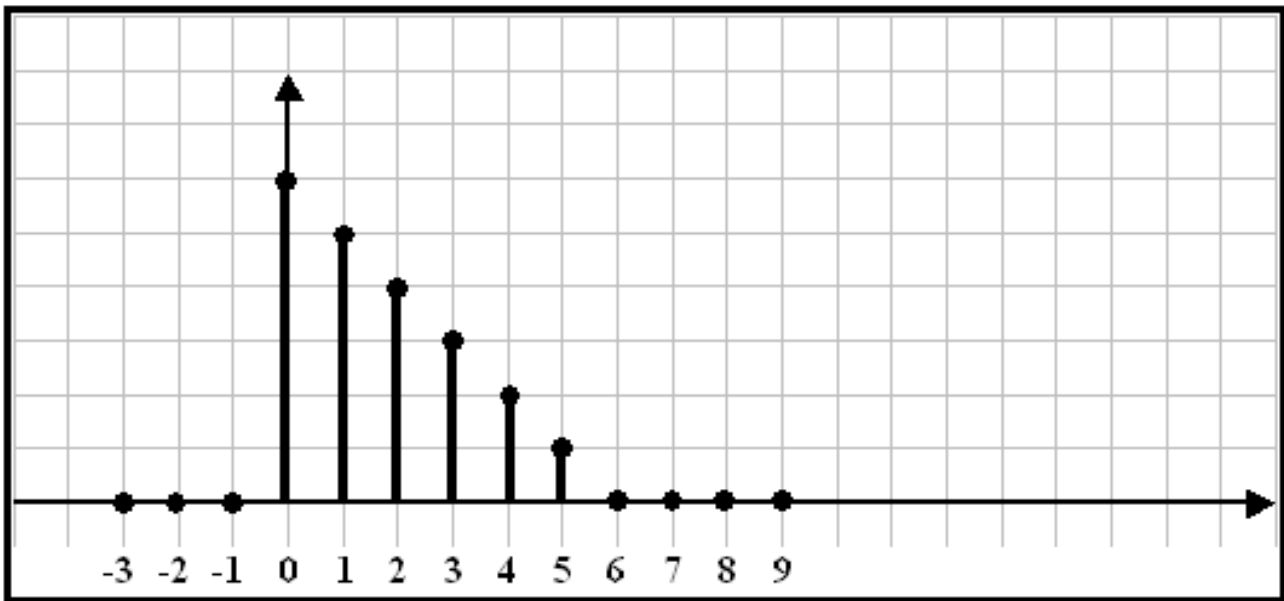
$$y(n) = Ax(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (17)$$

- **Πρόσθεση σημάτων (signal addition):** το άθροισμα δύο διακριτών σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$ ορίζεται ως ένα νέο διακριτό σήμα $y(n)$, τέτοιο ώστε, η τιμή του κάθε δείγματος που περιλαμβάνεται σε αυτό, να ισούται με το άθροισμα των τιμών των αντίστοιχων δειγμάτων των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$. Επομένως το ψηφιακό σήμα $y(n)$ θα ικανοποιεί τη σχέση

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (18)$$

- **Πολλαπλασιασμός σημάτων (signal multiplication):** το γινόμενο δύο διακριτών σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$ ορίζεται ως ένα νέο διακριτό σήμα $y(n)$, τέτοιο ώστε, η τιμή του κάθε δείγματος που περιλαμβάνεται σε αυτό, να ισούται με το γινόμενο των τιμών των αντίστοιχων δειγμάτων των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$. Επομένως το ψηφιακό σήμα $y(n)$ θα ικανοποιεί τη σχέση

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (19)$$



Σχήμα 11: Το περιεχόμενο του διακριτού σήματος $x(n) = u(6 - n)[u(n) - u(n - 6)]$

Άσκηση 21 Δίδεται το διακριτό σήμα $x(n) = (6 - n)[u(n) - u(n - 6)]$ όπου $u(n)$ η μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Να σχεδιαστούν οι διακριτές ακολουθίες (α) $y_1(n) = x(4 - n)$ και (β) $y_2(n) = x(2n - 3)$.

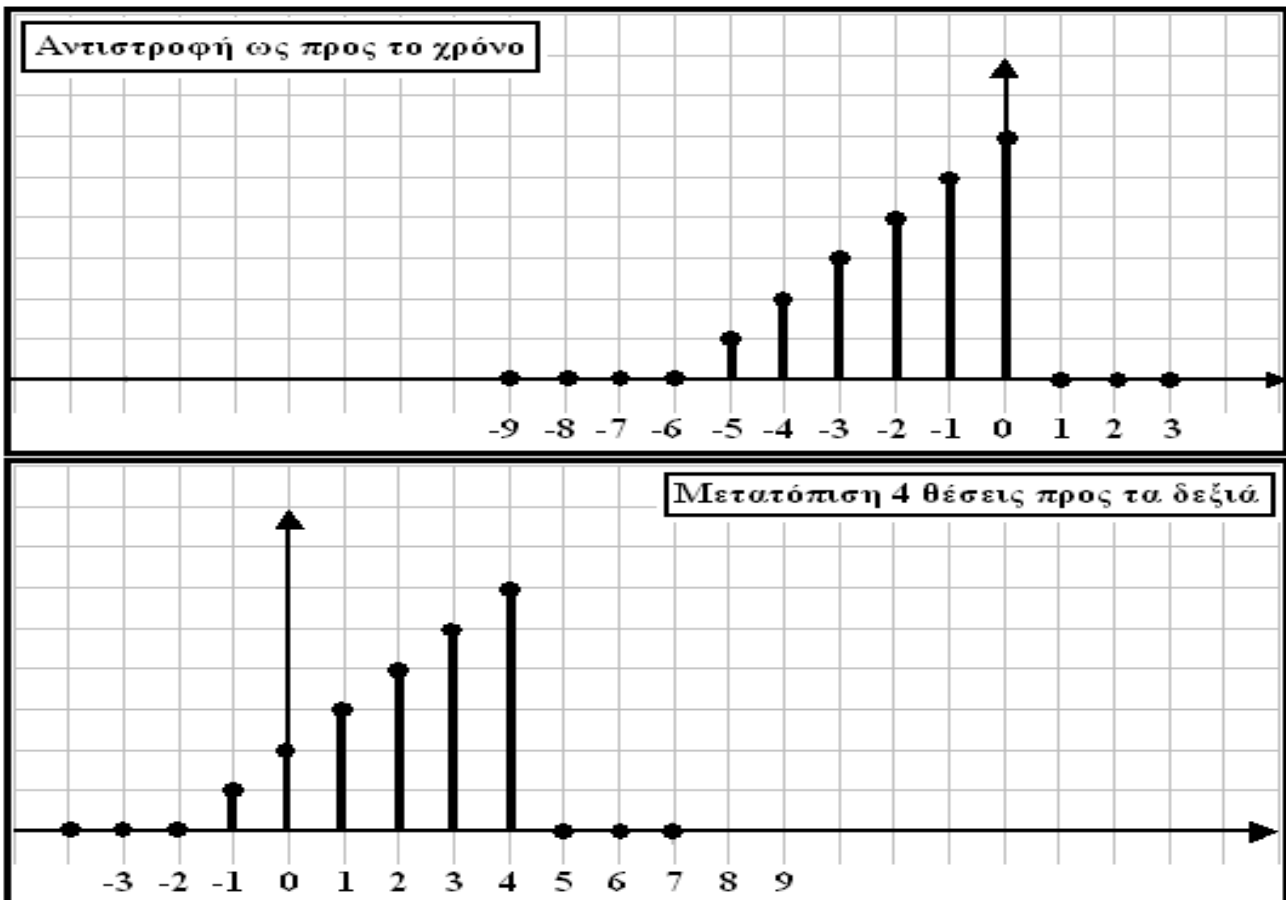
Απάντηση: (α) Στο πρώτο βήμα της διαδικασίας ως προσδιορίσουμε το περιεχόμενο της δεδομένης διακριτής ακολουθίας, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τις διάφορες τιμές του n . Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \text{για } n = -3 : x(n) = (6 + 3)[u(-3) - u(-9)] = 0 \\
 & \text{για } n = -2 : x(n) = (6 + 2)[u(-2) - u(-8)] = 0 \\
 & \text{για } n = -1 : x(n) = (6 + 1)[u(-1) - u(-7)] = 0 \\
 & \text{για } n = +0 : x(n) = (6 + 0)[u(+0) - u(-6)] = 6 \\
 & \text{για } n = +1 : x(n) = (6 - 1)[u(+1) - u(-5)] = 5 \\
 & \text{για } n = +2 : x(n) = (6 - 2)[u(+2) - u(-4)] = 4 \\
 & \text{για } n = +3 : x(n) = (6 - 3)[u(+3) - u(-3)] = 3 \\
 & \text{για } n = +4 : x(n) = (6 - 4)[u(+4) - u(-2)] = 2 \\
 & \text{για } n = +5 : x(n) = (6 - 5)[u(+5) - u(-1)] = 1 \\
 & \text{για } n = +6 : x(n) = (6 - 6)[u(+6) - u(+0)] = 0 \\
 & \text{για } n = +7 : x(n) = (6 - 7)[u(+7) - u(+1)] = 0 \\
 & \text{για } n = +8 : x(n) = (6 - 8)[u(+8) - u(+2)] = 0 \\
 & \text{για } n = +9 : x(n) = (6 - 9)[u(+9) - u(+3)] = 0 \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Από τα περιεχόμενα του παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε πως το σήμα $x(n)$ έχει τιμή ίση με το μηδέν για τις τιμές $n \in (-\infty, +1]$ (αφού τα ορίσματα της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος είναι αρνητικά και επομένως η τιμή της είναι ίση με το μηδέν), λαμβάνει μη μηδενική τιμή για τις τιμές $n \in [0, 5]$ ενώ έχει τιμή ίση με το μηδέν για τις τιμές $n \in [6, +\infty)$ (αφού τα ορίσματα της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος είναι θετικά και η εν λόγω συνάρτηση για κάθε ένα από αυτά έχει τιμή ίση με τη μονάδα). Η γραφική παράσταση του διακριτού σήματος $x(n)$ με τα περιεχόμενα που προσδιορίσαμε παραπάνω παρουσιάζεται στο σχήμα 9.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε το διακριτό σήμα $y_1(n)$ θα πρέπει να παρατηρήσουμε πως αυτό προκύπτει από το σήμα $x(n)$ δια της εφαρμογής επί αυτού δύο μετασχηματισμών: (α) μιας αντιστροφής ως προς το χρόνο έτσι ώστε να λάβουμε το κατοπτρικό διακριτό σήμα ως προς την αρχή $n = 0$ και (β) μιας μετατόπισης κατά τέσσερα βήματα προς τα δεξιά προκειμένου να λάβουμε το τελικό σήμα εξόδου (στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν

εφαρμόζαμε πρώτα τη μετατόπιση κατά τέσσερις μονάδες προς τα αριστερά ακολουθούμενη από την αντιστροφή ως προς το χρόνο). Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 10.



Σχήμα 12: Η διαδικασία δημιουργίας του διακριτού σήματος $y_1(n)$.

Από την άλλη πλευρά, η δημιουργία του διακριτού σήματος y_2 στηρίζεται στην πραγματοποίηση τριών διαδικασιών, η πιο ενδιαφέρουσα από τις οποίες είναι ο υποδιπλασιασμός της συχνότητας του σήματος εισόδου. Πράγματι, αγνοώντας προς στιγμήν την ύπαρξη του όρου (-3) που παραπέμπει σε χρονική μετατόπιση και υπολογίζοντας τα δείγματα εξόδου για τις διάφορες τιμές του n , θα λάβουμε τις αντιστοιχίες $y(0) \rightarrow x(0)$, $y(1) \rightarrow x(2)$, $y(3) \rightarrow x(4)$, $y(3) \rightarrow x(6)$, κ.ο.κ. Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει πως για να λάβουμε το σήμα εξόδου θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τους άρτιους όρους του αρχικού σήματος αγνοώντας τους περιτούς όρους. Με άλλα λόγια θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τα μισά δείγματα της ακολουθίας εισόδου, γεγονός που οδηγεί στον υποδιπλασιασμό της συχνότητας του διακριτού σήματος. Μετά την πραγματοποίηση αυτής της διαδικασίας το μόνο που έχουμε να κάνουμε προκειμένου να λάβουμε το τελικό σήμα εξόδου, είναι να μετατοπίσουμε το σήμα κατά τρεις θέσεις προς τα δεξιά προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή χρονική υστέρηση. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας απεικονίζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 11.

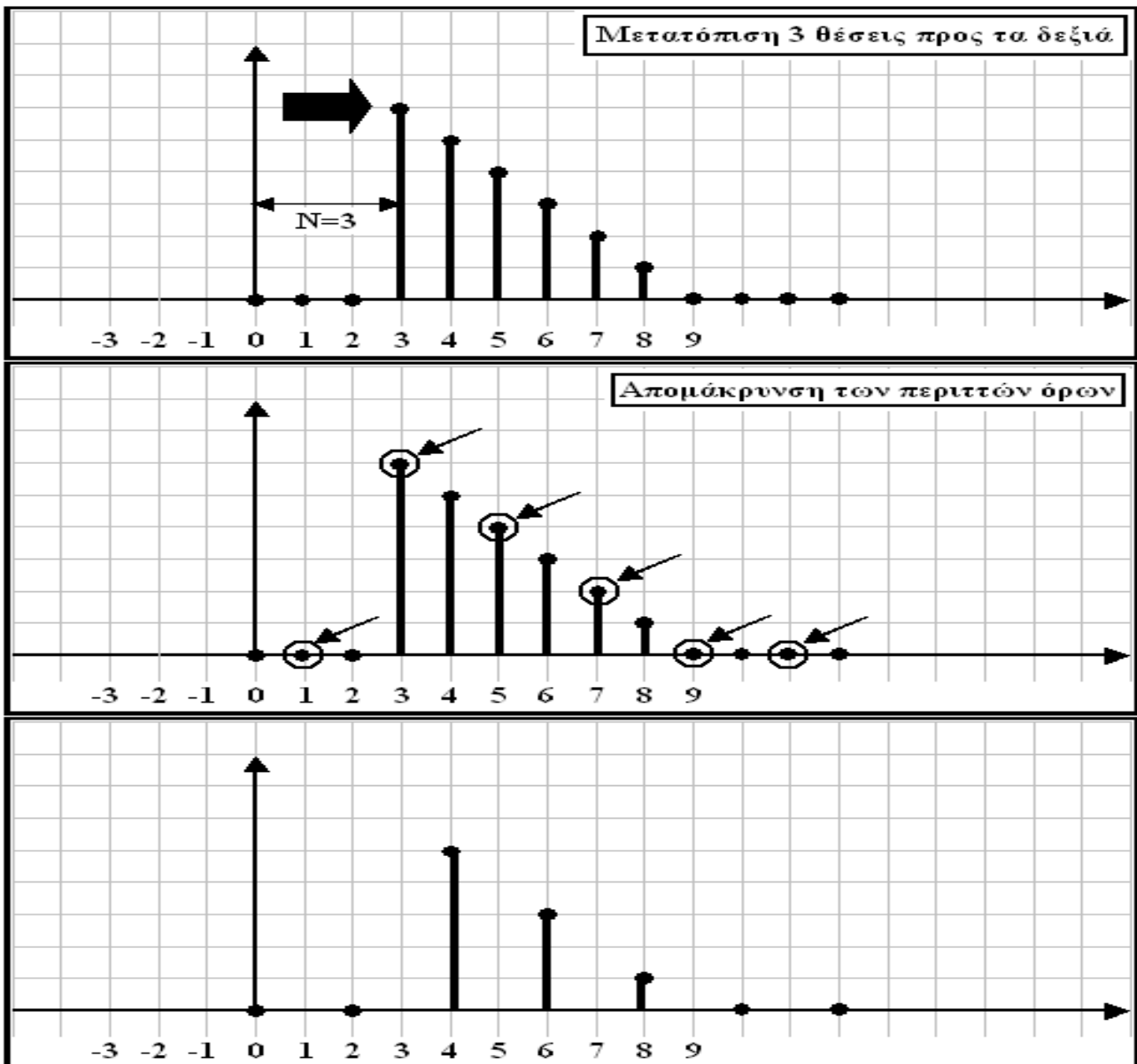
Άσκηση 22 Δίδεται το διακριτό σήμα

$$x(n) = \begin{cases} 1 + (n/3) & -3 \leq n \leq -1 \\ 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τις τιμές του σήματος για την περιοχή τιμών του n $[-5, +5]$ και σχεδιάστε το σήμα (β) Εκφράστε το σήμα συναρτήσει των θεμελιωδών ακολουθιών $\delta(n)$ και $u(n)$. Σχεδιάστε το σήμα $x(2n - 4)$.

4.3 Η έννοια της συχνότητας στα συνεχή και στα διακριτά σήματα

Από την επιστήμη της Φυσικής είναι γνωστό πως η έννοια της συχνότητας αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό των περιοδικών κινήσεων και εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων του περιοδικού φαινομένου στη μονάδα του χρόνου.



Σχήμα 13: Η διαδικασία δημιουργίας του διακριτού σήματος $y_2(n)$.

Η μονάδα μέτρησης αυτού του μεγέθους είναι το Hertz (Hz) που νοείται ως μονάδα αντίστροφου χρόνου (sec^{-1}). Είναι προφανές, πως επειδή ο χρόνος χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο στα συνεχή και στα διακριτά σήματα, αυτή η διάκριση θα επηρεάσει και τον τρόπο ορισμού και χρήσης του μεγέθους της συχνότητας.

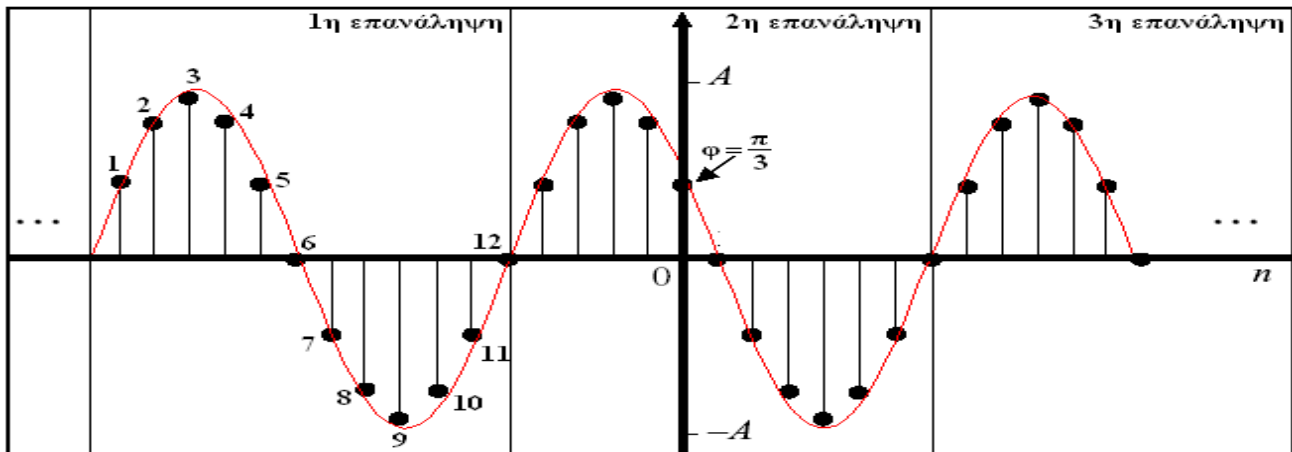
Ας ξεκινήσουμε την περιγραφή μας θεωρώντας για λόγους απλότητας ένα συνεχές ημιτονοειδές σήμα που περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (-\infty < t < \infty)$$

Στην παραπάνω περιγραφή το μέγεθος A εκφράζει το πλάτος του σήματος, το σύμβολο ω αναφέρεται στην κυκλική του συχνότητα και μετρείται σε μονάδες radians per second ενώ η παράμετρος φ αναφέρεται στη φάση του σήματος. Η κυκλική συχνότητα ω συσχετίζεται με τη συχνότητα f δια μέσου της σχέσεως $\omega = 2\pi f$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η συχνότητα και η περίοδος ενός περιοδικού σήματος είναι αντιστρόφως ανάλογες - δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση $f = 1/T$ - η παραπάνω σχέση μπορεί να πάρει και μία από τις μορφές

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad \text{και} \quad x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$$

Υπάρχουν τρεις ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν τα συνεχή ημιτονοειδή σήματα και οι οποίες σε γενικές γραμμές είναι οι ακόλουθες:



Σχήμα 14: Τυπικό παράδειγμα διακριτής ημιτονοειδούς ακολουθίας.

- Για κάθε τιμή της συχνότητας f , το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα καθώς είναι $fT = 1$ και επομένως

$$x(t+T) = A \cos[2\pi f(t+T) + \varphi] = A \cos(2\pi ft + 2\pi fT + \varphi) = A \cos[(2\pi ft + \varphi) + 2\pi] = A \cos(2\pi ft + \varphi) = x(t)$$

- Συνεχή ημιτονοειδή σήματα με διαφορετικές τιμές συχνότητας είναι διαφορετικά και διακριτά μεταξύ τους.
- Η αύξηση της συχνότητας f οδηγεί στην αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης του σήματος, καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλήρων επαναλήψεων στη μονάδα του χρόνου.

Από την άλλη πλευρά, ένα διακριτό ημιτονοειδές σήμα ορίζεται ως

$$x(n) = A \cos(\omega n + \varphi) \quad (-\infty < n < \infty)$$

όπου τα σύμβολα A και φ αναφέρονται ξανά στο πλάτος και τη φάση του σήματος, ενώ $\omega = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα που αυτή τη φορά μετρείται σε μονάδες radians per sample. Τυπικό παράδειγμα τέτοιου σήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 12. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε πως ένα χρονικό διάστημα μιας περιόδου περιέχει 12 δείγματα του σήματος, ητοι, η συχνότητά του θα είναι $f = 1/12$, τιμή που οδηγεί σε κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f = \pi/6$. Από το ίδιο σχήμα διαπιστώνουμε επίσης πως το σήμα χαρακτηρίζεται από ύπαρξη φάσης $\varphi = \pi/3$ και επομένως περιγράφεται από την εξίσωση $x(n) = A \cos[(n\pi)/6 + \pi/3] = A \cos[\pi(n+2)/6]$.

Τα ημιτονοειδή διακριτά σήματα χαρακτηρίζονται από τις επόμενες τρεις ιδιότητες:

- Ένα διακριτό ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό εάν η συχνότητά του είναι ρητός αριθμός. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα, ας θεωρήσουμε ένα διακριτό ημιτονοειδές σήμα της μορφής $x(n) = A \cos(2\pi fn + \varphi)$. Προκειμένου αυτό το σήμα να είναι περιοδικό με περίοδο N θα πρέπει κατά τα γνωστά να ισχύει η σχέση $x(n) = x(n+N) \forall N$. Θα είναι λοιπόν

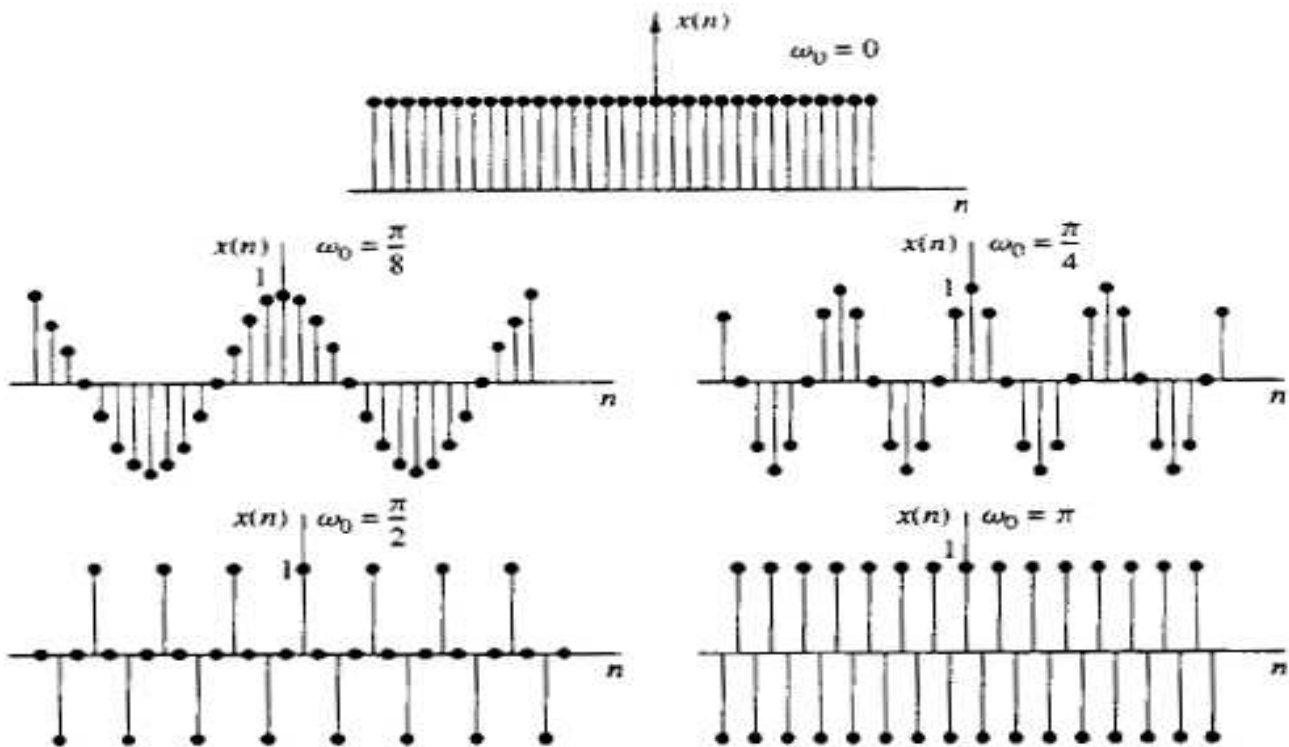
$$x(n+N) = A \cos[2\pi f(n+N) + \varphi] = A \cos(2\pi fn + 2\pi fN + \varphi)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την εξίσωση ορισμού του σήματος $x(n)$ είναι προφανές πως για να ισχύει η ιδιότητα της περιοδικότητας $x(n) = x(n+N)$ θα πρέπει να είναι $2\pi fN = 2k\pi$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, η τελευταία σχέση γράφεται

$$x(n+N) = A \cos(2\pi fn + 2\pi fN + \varphi) = A \cos(2\pi fn + 2k\pi + \varphi) = A \cos[(2\pi fn + \varphi) + 2k\pi] = A \cos(2\pi fn + \varphi) = x(n)$$

και επομένως το σήμα είναι περιοδικό. Για να ισχύσει όμως κάτι τέτοιο θα πρέπει να είναι $f = k/N$, ήτοι, η συχνότητα του σήματος να είναι ένας ρητός αριθμός (να μπορεί δηλαδή να γραφεί ως το πηλίκο δύο ακεραίων αριθμών).

- Τα διακριτά ημιτονοειδή σήματα των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π είναι ταυτόσημα και επομένως δεν δύνανται να διακριθούν μεταξύ τους. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα και στηρίζεται στο γεγονός πως οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι περιοδικές με περίοδο $2k\pi$



Σχήμα 15: Μεταβολή του ρυθμού των ταλαντώσεων με την κυκλική συχνότητα διακριτού ημιτονοειδούς σήματος

($k = 0, 1, 2, \dots$). Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό ένα σήμα $x_1(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi)$ και ένα δεύτερο σήμα $x_2(n) = \cos(\omega_2 n + \varphi)$ τέτοιο ώστε $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$x_2(n) = \cos(\omega_2 n + \varphi) = \cos[(\omega_1 + 2\pi)n + \varphi] = \cos[(\omega_1 n + \varphi) + 2\pi n] = \cos(\omega_1 n + \varphi) = x_1(n)$$

και επομένως τα δύο σήματα είναι ταυτόσημα και δεν μπορούν να διακριθούν. Γενικεύοντας το παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση πως όλες οι ημιτονοειδείς διακριτές ακολουθίες $x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \varphi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) όπου $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$ ($-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$) είναι ταυτόσημες και δεν μπορούν να διακριθούν η μία από την άλλη. Από την άλλη πλευρά ωστόσο, είναι προφανές πως αυτό δεν συμβαίνει για τις διακριτές ακολουθίες με συχνότητες στο διάστημα $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (ή ισοδύναμα $-1/2 \leq f \leq 1/2$) οι οποίες είναι μοναδικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Εκείνο που συμβαίνει στην πράξη είναι να θεωρούνται οι ακολουθίες με συχνότητες $|\omega| \leq \pi$ (ή ισοδύναμα $|f| \leq 1/2$) ως οι γνήσιες ακολουθίες και όλες οι υπόλοιπες, με συχνότητες στο διάστημα $|\omega| > \pi$ (ή ισοδύναμα $|f| > 1/2$) ως ψευδή αντίγραφα (aliases) των γνήσιων ακολουθιών.

- Ο υψηλότερος ρυθμός ταλάντωσης για μία διακριτή ημιτονοειδή ακολουθία επιτυγχάνεται όταν $\omega = \pi$ (ή $\omega = -\pi$) ή ισοδύναμα ($f = 1/2$) (ή $f = -1/2$). Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα θεωρώντας ένα διακριτό σήμα της μορφής $x(n) = \cos(\omega n)$ και εξετάζοντας τη συμπεριφορά του καθώς η κυκλική του συχνότητα μεταβάλλεται από 0 έως π . Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε πως για τις τιμές της κυκλικής συχνότητας $\omega \in \{0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi\}$ οι τιμές της συχνότητας $f = \omega/2\pi$ είναι οι $\{0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2\}$ ενώ οι τιμές της περιόδου $N = 2\pi/\omega$ είναι οι $\{\infty, 16, 8, 4, 2\}$. Επομένως, η μικρότερη περίοδος - δηλαδή η μεγαλύτερη συχνότητα - αντιστοιχούν στην τιμή της κυκλικής συχνότητας $\omega = \pi$. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 13.

Από την άλλη πλευρά ωστόσο, θα πρέπει να αναφερθεί πως σε αντίθεση με τα συνεχή σήματα στα οποία η αύξηση της συχνότητας οδηγεί πάντα σε μείωση της περιόδου του σήματος, στα διακριτά σήματα, αυτό δεν ισχύει πάντα καθώς ο δείκτης n μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες και όχι πραγματικές τιμές. Στο προηγούμενο παράδειγμα, εάν η τιμή της κυκλικής συχνότητας συνεχίσει να αυξάνεται και να παίρνει τιμές στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ θα παρατηρήσουμε πως ο αριθμός των ταλαντώσεων κάποια στιγμή θα αρχίσει να ελαττώνεται. Αυτή η ελάττωση είναι συνέπεια της δεύτερης ιδιότητας των διακριτών σημάτων, σύμφωνα με την οποία δύο διακριτά σήματα των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ποσότητα που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , είναι ταυτόσημα, δηλαδή δεν δύναται να διακριθούν μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, εάν η κυκλική συχνότητα του

σήματος προσεγγίσει την τιμή $\omega = 2\pi$, η συμπεριφορά του σήματος θα είναι παρόμοια με εκείνη του σήματος με συχνότητα $\omega = 0$. Εάν η συχνότητα λάβει την τιμή $\omega = 2\pi + \varepsilon$ όπου ε μία πολύ μικρή θετική ποσότητα, τότε το πλήθος των ταλαντώσεων θα είναι ίσο με εκείνο του σήματος με συχνότητα $\omega = \varepsilon$, δηλαδή μικρότερο σε σχέση με το αρχικό.

Από την παραπάνω συζήτηση γίνεται εύκολα αντιληπτή η μεγάλη διαφορά που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των συνεχών και διακριτών σημάτων λόγω της διακριτής φύσεως της μεταβλητής n . Γενικεύοντας το προηγούμενο παράδειγμα και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη ιδιότητα των διακριτών σημάτων και το γεγονός πως ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος ρυθμός ταλάντωσης αντιστοιχούν στις τιμές $n = 0$ και $n = \pi$ αντίστοιχα, μπορούμε να διατυπώσουμε το συμπέρασμα πως οι συχνότητες που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά της συχνότητας $\omega_0 = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) θεωρούνται χαμηλές συχνότητες και οδηγούν σε αργές ταλαντώσεις, ενώ οι συχνότητες που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά της συχνότητας $\omega_0 = (2k + 1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) θεωρούνται υψηλές συχνότητες και οδηγούν σε πολύ γρήγορες ταλαντώσεις.

Άσκηση 23 Να υπολογιστεί η περίοδος του σήματος $x(n) = \cos(n\pi/4)$. Στη συνέχεια να αυξηθεί η συχνότητα του από $\omega_1 = \pi/4 = 2\pi/8$ σε $\omega_2 = 3\pi/8$ και να υπολογισθεί η νέα περίοδος του σήματος. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας στον τρόπο χρήσης της έννοιας της συχνότητας στα συνεχή και στα διακριτά σήματα με την παρατήρηση πως η απαίτηση της απόδοσης ακέραιων τιμών στη διακριτή μεταβλητή n , καθιστά μη περιοδικά, σήματα που στην συνεχή τους μορφή αποτελούν κλασσικά παραδείγματα περιοδικών σημάτων. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το διακριτό σήμα $x(n) = \cos(n)$. Για να είναι περιοδικό αυτό το σήμα με τιμή περιόδου ίση με N θα πρέπει να υπάρχει ακέραια μεταβλητή N τέτοια ώστε $x(n) = x(n+N)$ ή ισοδύναμα $\cos(n) = \cos(n+N)$. Είναι προφανές όπως πως δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός N που να πληρεί την παραπάνω ιδιότητα και επομένως το διακριτό σήμα $x(n) = \cos(n)$ δεν είναι περιοδικό, κάτι που ισχύει για το συνεχές ισοδύναμό του που ως γνωστόν είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π .

4.4 Η συνεχής και η διακριτή συνάρτηση μοναδιαίας ώσης

Η συνεχής συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή συνάρτηση δ , αποτελεί μία από τις κλασσικές συναρτήσεις της Φυσικής και χρησιμοποιείται πάρα πολύ συχνά σε αλγορίθμους και εφαρμογές επεξεργασίας σήματος. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πολλές φορές και συνάρτηση του Dirac προς τιμήν του Άγγλου Φυσικού Paul A.M. Dirac (1902-1984) που τη χρησιμοποίησε συστηματικά στις έρευνές του στο χώρο της Κβαντικής Φυσικής. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad \text{ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα} \quad \int \delta(t) dt = 1$$

Είναι προφανές πως καμία συνάρτηση δεν μπορεί να ικανοποιήσει τέτοιες ιδιότητες και πράγματι η συνάρτηση δ δεν θεωρείται μαθηματική συνάρτηση με τη συνήθη έννοια του όρου.

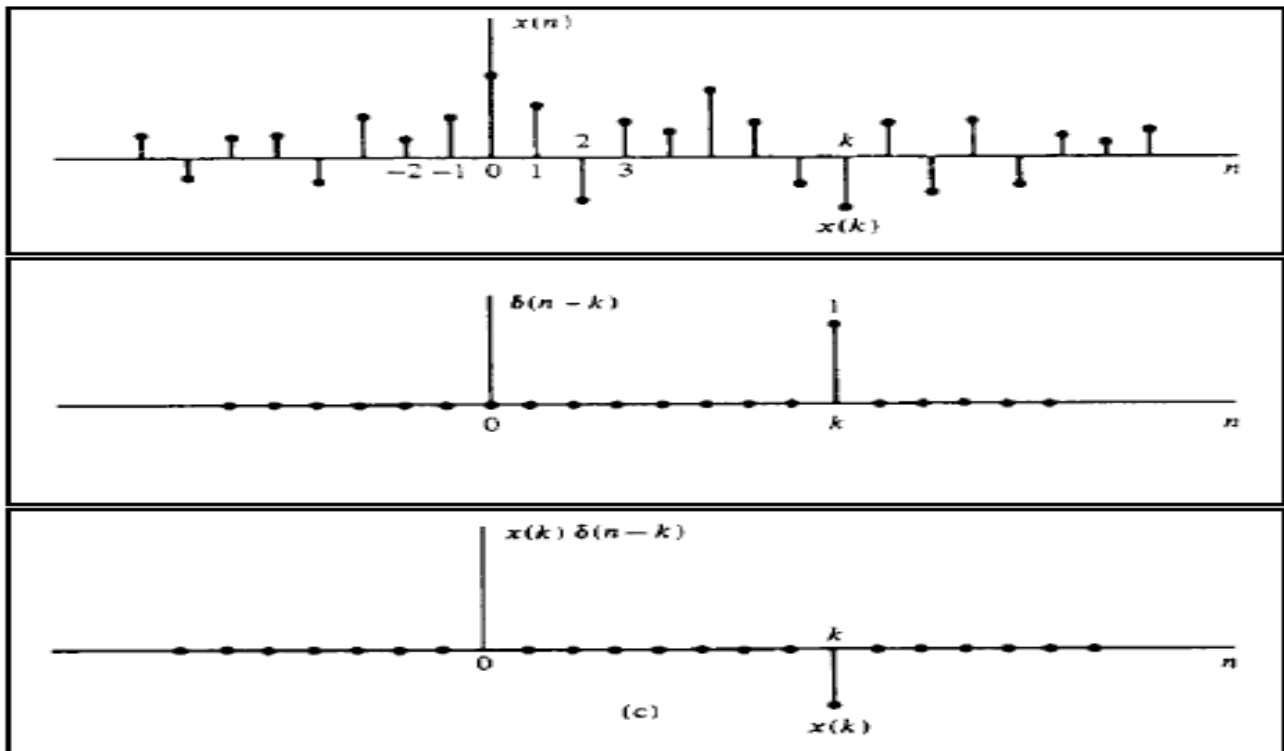
Η συνεχής συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ικανοποιεί ένα σύνολο ιδιοτήτων οι πιο σημαντικές από τις οποίες είναι οι εξής (οι ιδιότητες παρατίθενται χωρίς απόδειξη):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\delta(t) - \delta(t - \tau)}{\tau} & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= f(t_0) & \delta(\alpha t) &= \frac{1}{|\alpha|} \delta(t) \\ \delta(t_0) f(t) &= f(t_0) \delta(t_0) & \delta_1(t - t_1) \delta_2(t - t_2) &= \delta[t - (t_1 + t_2)] \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, η διακριτή συνάρτηση μοναδιαίας ώσης, ορίζεται όπως έχουμε ήδη αναφέρει από τη σχέση

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή θεωρείται πάρα πολύ χρήσιμη στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος, καθώς αποδεικνύεται πως οποιοδήποτε διακριτό σήμα με άπειρο πλήθος μη μηδενικών τιμών μπορεί να αναπτυχθεί σε μια ακολουθία χρονικών μετατοπισμένων συναρτήσεων μοναδιαίας ώσης με άπειρο πλήθος στοιχείων. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, ας θεωρήσουμε το σήμα $x_k(n) = \delta(n - k)$ που ορίζεται ως η συνάρτηση δ μετατοπισμένη προς τα πίσω κατά k χρονικές μονάδες. Είναι προφανές, πως αυτό το σήμα θα έχει μηδενικές τιμές σε όλες τις χρονικές στιγμές, εκτός από τη στιγμή $n = k$ στην οποία θα έχει τιμή ίση με τη μονάδα (αυτή η ιδιότητα προκύπτει απευθείας από τον ορισμό της διακριτής συνάρτησης της μοναδιαίας ώσης). Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε το σήμα $x(n)$ με το σήμα $\delta(n - k)$ - υπενθυμίζουμε από τη βασική θεωρία πως ο πολλαπλασιασμός αυτός θα οδηγήσει στη δημιουργία ενός

Σχήμα 16: Πολλαπλασιασμός του διακριτού σήματος $x(n)$ με το σήμα $\delta(n-k)$

νέου διακριτού σήματος κάθε στοιχείο του οποίου θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στοιχείων των δύο σημάτων - είναι προφανές πως το αποτέλεσμα αυτής της πράξης θα είναι ένα νέο σήμα που θα έχει μηδενικές τιμές σε όλες τις χρονικές στιγμές εκτός από τη στιγμή $n = k$ στην οποία θα έχει τιμή ίση με $x(k)$, όπου $x(k)$ είναι η τιμή του σήματος $x(n)$ τη χρονική στιγμή k . Αυτή η πράξη παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 15.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές πως αν πολλαπλασιάσουμε το διακριτό σήμα $x(n)$ με τη συνάρτηση $\delta(n-k)$ ανακτήσουμε την τιμή του δείγματος του $x(n)$ που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $n = k$. Το γεγονός αυτό σε μαθηματική διατύπωση γράφεται ως $x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k)$. Εάν πραγματοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία για μια άλλη τιμή χρονικής μετατόπισης, m , θα ανακτήσουμε την τιμή του δείγματος $x(m)$, αφού θα είναι $x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m)$. Γενικεύοντας το παραπάνω συμπέρασμα για μια αυθαίρετη τιμή χρονικής υστέρησης μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό πως εάν πολλαπλασιάσουμε το διακριτό σήμα με μια χρονικώς μετατοπισμένη συνάρτηση δ θα λάβουμε την τιμή του σήματος που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή της μετατόπισης.

Εάν λοιπόν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για όλες τις δυνατές τιμές της χρονικής μετατόπισης k στο διάστημα $-\infty < k < \infty$ το αποτέλεσμα θα είναι η ανάκτηση του συνόλου των σημείων του διακριτού σήματος $x(n)$. Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει πως το διακριτό σήμα $x(n)$ μπορεί να ορισθεί από μία εξίσωση της μορφής

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Άσκηση 24 Δίδεται το διακριτό σήμα

$$x(n) = \{2, 4, 0, 3\}$$

↑

Να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων μοναδιαίας ώσης.

Απάντηση: Με απευθείας εφαρμογή της σχέσης που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, θα λάβουμε

$$x(n) = \sum_{k=-1}^2 x(k)\delta(n-k) = x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) = 2\delta(n+1) + 4\delta(n) + 3\delta(n-2)$$

Άσκηση 25 Δίδεται το διακριτό σήμα

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός χρονικώς μετατοπισμένων μοναδιαίων συναρτήσεων βήματος.

Απάντηση: Με απευθείας εφαρμογή της σχέσης που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, θα λάβουμε

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

Είναι όμως $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} x(n) &= u(n) - u(n-1) + 2[u(n-1) - u(n-2)] + 3[u(n-2) - u(n-3)] = \\ &= u(n) - u(n-1) + 2u(n-1) - 2u(n-2) + 3u(n-2) - 3u(n-3) = \\ &= u(n) + u(n-1) + u(n-2) - 3u(n-3) \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4.5 Βασικές συναρτήσεις διαχείρισης διακριτών σημάτων

Η διαχείριση των δεδομένων ενός σήματος στη γλώσσα προγραμματισμού C++ μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ενός συνόλου συναρτήσεων που πραγματοποιούν τις βασικές πράξεις με σήματα. Οι πράξεις αυτές περιλαμβάνουν τη δημιουργία του σήματος, την αποθήκευσή του σε κάποιο αρχείο του συστήματος, την ανάγνωση του περιεχομένου του από κάποιο αρχείο και την εκτύπωση των τιμών που περιλαμβάνονται σε αυτό. Η περιγραφή που ακολουθεί στις επόμενες παραγράφους αφορά τη χρήση μονοδιάστατων σημάτων οι τιμές των οποίων αποθηκεύονται σε αρχεία δεδομένων, μια τιμή σε κάθε γραμμή.

Η δημιουργία των δεδομένων ενός σήματος είναι μια διαδικασία που εξαρτάται κάθε φορά από το είδος του σήματος που πρόκειται να δημιουργήσουμε. Προκειμένου για παράδειγμα να κατασκευάσουμε ένα σήμα οι τιμές του οποίου δίδονται από την εξίσωση $x(n) = \sin((2\pi n)/N) + \theta$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα κώδικα της μορφής

```
#include <math.h>

#define PI 4*atan(1.0) #define LENGTH 1000 #define THETA PI/4

int main (void) {
    int counter;
    double x1 [LENGTH] , x2 [LENGTH];
    for (counter=0; counter<LENGTH; counter++) {
        x1 [ counter]=sin ((2*PI*counter)/(double)LENGTH+THETA);
        x2 [ counter]=cos ((2*PI*counter)/(double)LENGTH+THETA); }
    return (0); }
```

όπου υποθέτουμε πως το σήμα περιλαμβάνει 1000 διακριτές τιμές ενώ η γωνία θ έχει τιμή ίση με $\pi/4$ - αυτό είναι ένα κλασικό παράδειγμα διακριτού σήματος με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Στη γενική περίπτωση ωστόσο το σήμα μπορεί να είναι οποιοδήποτε ανάλογο με την εξίσωση ορισμού του. Το τελικό αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας, είναι η πλήρωση των θέσεων ενός μονοδιάστατου πίνακα με τις τιμές του σήματος. Για να αποθηκεύσουμε αυτές τις τιμές σε ένα αρχείο κειμένου και με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε γραμμή του αρχείου να καταχωρείται μια και μόνη τιμή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση SaveSignal τυπική μορφή της οποίας παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```
int SaveSignal (double * buffer , LTYPE samples , char * fName) {
    LTYPE counter;
    fstream fin;
    fin.open(fName, ios::out);
    if (fin.fail()) return(-1);
```

```

fin.seekp(0, ios::beg);
for (counter=0;counter<samples;counter++)
    fin << setiosflags( ios::showpoint | ios::fixed )
        << buffer[counter] << endl;
fin.close();
return (0); }

```

Στην παραπάνω συνάρτηση οι τιμές του σήματος βρίσκονται αποθηκευμένες στον μονοδιάστατο πίνακα που φέρει το όνομα `buffer` και έχει μήκος `samples`. Το όνομα του αρχείου στο οποίο θα αποθηκεύσουμε το περιεχόμενο του σήματος καταχωρείται στη μεταβλητή `fName`. Στην παραπάνω συνάρτηση - καθώς και σε όλες θα ακολουθήσουν - ο τύπος δεδομένων `LTYPE` έχει προκύψει από τον τύπο `int` μέσω της εντολής `typedef int LTYPE`. Αυτή η προσέγγιση ακολουθείται προκειμένου οι εφαρμογές να είναι σε θέση να υποστηρίξουν απεριόριστο πλήθος δεδομένων: εάν σε κάποια περίπτωση ζητούμε να διαχειρισθούμε δεδομένα το πλήθος των οποίων είναι μεγαλύτερο από 32767 - που είναι η μέγιστη τιμή που αντιστοιχεί σε μία ακέραια μεταβλητή - μπορούμε να αλλάξουμε τον τύπο του `LTYPE` από `int` σε `long` χρησιμοποιώντας την εντολή `typedef int LTYPE`. Τυπικό παράδειγμα χρήσης της εντολής `SaveSignal` είναι η κλήση της με τη μορφή `SaveSignal(xValues, 5000, "xValues.dat")` η οποία αποθηκεύει τις 5000 τιμές που βρίσκονται αποθηκευμένες στο μονοδιάστατο πίνακα `xValues` στο αρχείο κειμένου `xValues.dat`.

Η δεύτερη βασική συνάρτηση που θα πρέπει να υλοποιήσουμε είναι αυτή που διαβάζει δεδομένα από αρχεία του συστήματος. Η επιτυχής λειτουργία αυτής της συνάρτησης προϋποθέτει πως η αποθήκευση των δεδομένων σε αυτά τα αρχεία, ακολουθεί τη σύμβαση που έχουμε καθορίσει στην προηγούμενη παράγραφο - μια τιμή σε κάθε γραμμή. Η συνάρτηση `LoadSignal` που επιτρέπει την ανάγνωση των τιμών ενός μονοδιάστατου σήματος από ένα αρχείο του σκληρού δίσκου, ακολουθεί στη συνέχεια:

```

double * LoadSignal (char * fName, LTYPE * code) {
    ifstream fin; double * buffer;
    LTYPE counter, lines=GetDataPoints(fName);;
    if (lines==(−1)) * code = −1;
    fin.open(fName, ios::in);
    if (fin.fail()) * code = −1;
    fin.seekp(0, ios::beg);
    buffer = (double *) malloc (lines*sizeof(double));
    if (!buffer) * code = −2;
    for (counter=0;counter<lines;counter++)
        fin >> buffer[counter];
    fin.close();
    * code = lines;
    return (buffer); }

```

Παρατηρώντας τη συνάρτηση `LoadSignal` δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε τον τρόπο λειτουργίας της: η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα το όνομα του αρχείου από το οποίο θα διαβάσει τα δεδομένα του σήματος. Στη συνέχεια καλεί τη συνάρτηση `GetDataPoints` για να ανακτήσει το πλήθος των δεδομένων του αρχείου - η συνάρτηση αυτή θα μελετηθεί στη συνέχεια - και προχωρεί στη δέσμευση της κατάλληλης ποσότητας μνήμης ανάλογα με το πλήθος των δεδομένων που πρόκειται να διαβάσει. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, ανοίγει το αρχείο δεδομένων, αντιγράφει τα περιεχόμενά του στις θέσεις του μονοδιάστατου πίνακα που έχει δεσμεύσει, και επιστρέφει ένα δείκτη (pointer) στην πρώτη θέση αυτού του πίνακα. Τυπικό παράδειγμα χρήσης αυτής της συνάρτησης είναι η κλήση της με τη μορφή `buffer=LoadSignal("signal.dat", &lines)`, η οποία καταχωρεί τα περιεχόμενα του αρχείου δεδομένων `signal.dat` στις θέσεις του πίνακα `buffer` και επιστρέφει το πλήθος των γραμμών που διάβασε στη μεταβλητή `lines`. Εάν η παραπάνω διαδικασία δεν είναι επιτυχής, η μεταβλητή `lines` δεν περιέχει το πλήθος των δεδομένων του αρχείου, αλλά ένα κωδικό σφάλματος. Αυτός ο κωδικός έχει την τιμή (−1) εάν το αρχείο δεν υπάρχει ή δεν μπορεί να ανοίξει για κάποιο λόγο, και την τιμή (−2) εάν δεν υπάρχει διαθέσιμη μνήμη για την ανάγνωση των περιεχομένων του αρχείου.

Η συνάρτηση `GetDataPoints` που χρησιμοποιείται για να ανακτήσει το πλήθος των δεδομένων του αρχείου, δεν κάνει τίποτε άλλο από το να μετρά το πλήθος των χαρακτήρων αλλαγής γραμμής ('\n') που περιλαμβάνονται σε αυτό - είναι προφανές πως για να εφαρμοσθεί με επιτυχία αυτή τη διαδικασία θα πρέπει τα δεδομένα να είναι οργανωμένα με τον τρόπο που προαναφέραμε (μια τιμή σε κάθε γραμμή). Το πρωτότυπο της συνάρτησης έχει τη μορφή `int GetDataPoints(char * fName)` όπου `fName` είναι το όνομα του αρχείου, το πλήθος δεδομένων του οποίου επιθυμούμε να μετρήσουμε. Η συνάρτηση επιστρέφει το πλήθος των γραμμών που διάβασε, ή τον κωδικό σφάλματος (−1) εφ' όσον το αρχείο δεν υπάρχει ή δεν μπορεί να ανοίξει για κάποιο λόγο. Όσον αφορά τον πηγαίο κώδικα της συνάρτησης, αυτός σε γενικές γραμμές είναι ο εξής:

```

int GetDataPoints (char * fName) {
    int lines = 0;
    char strVal [512];
    fstream fin;
    fin.open(fName, ios::in);
    if (fin.fail()) return (-1);
    fin.seekp(0, ios::beg);
    while (!fin.eof()) {
        fin.getline (strVal, 512, '\n');
        lines++;
    }
    fin.close();
    lines --;
    return lines; }

```

Τυπικό παράδειγμα χρήσης της συνάρτησης GetDataPoints είναι η κλήση της με τη μορφή `lines = GetDataPoints("signal.dat")` η οποία καταμετρά το πλήθος των δεδομένων του αρχείου `signal.dat` και καταχωρεί το αποτέλεσμα στη μεταβλητή `lines`.

Μια άλλη χρήσιμη συνάρτηση που είναι καλό να αναφερθεί είναι η συνάρτηση `PrintSignal` η οποία εκτυπώνει τα περιεχόμενα του σήματος στην οθόνη του χρήστη (η εκτύπωση αυτή γίνεται σε κατάσταση κειμένου). Ο πηγαίος κώδικας της συνάρτησης `PrintSignal` σε γενικές γραμμές έχει την ακόλουθη μορφή:

```

void PrintSignal (double * buffer , LTYPE samples ,
                 LTYPE position) {
    int counter;
    if (position < 0) position = 0;
    if (position > samples) position = samples;
    for (counter=0; counter < position; counter++)
        printf (" Buffer[%04d]=%.6f\n" , counter , buffer[counter]); }

```

Μελετώντας τον παραπάνω κώδικα δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως η βασική της λειτουργία είναι η εκτύπωση ενός μέρους ή όλου του πίνακα δεδομένων. Το πλήθος των στοιχείων που θα εκτυπωθούν καταχωρείται στη μεταβλητή `position`, ενώ το συνολικό πλήθος των δεδομένων του πίνακα `buffer` καταχωρείται στη μεταβλητή `samples`. Εάν η τιμή που καταχωρείται στη μεταβλητή `position` είναι αρνητική ή μεγαλύτερη από το πλήθος των δειγμάτων, αναπροσαρμόζεται ανάλογα έτσι ώστε να αποφύγουμε την προσπέλαση απαγορευμένων θέσεων μνήμης που θα οδηγήσει σε λάθη χρόνου εκτέλεσης (run time errors). Τυπικό παράδειγμα χρήσης της συνάρτησης `PrintSignal` είναι η κλήση της με τη μορφή `PrintSignal(buffer, 5000, 100)` η οποία εκτυπώνει τις τιμές των 100 πρώτων δειγμάτων του πίνακα `buffer` που περιέχει συνολικά 5000 δείγματα.

Η τελευταία συνάρτηση που αναφέρεται στο σημείο αυτό είναι η `FreeBuffer` η οποία αποδεσμεύει την ποσότητα μνήμης που είχε δεσμευτεί από την `LoadSignal` κατά την ανάγνωση των δεδομένων κάποιου σήματος. Η συνάρτηση περιέχει μια απλή κλήση της `free` και για το λόγο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απελευθερώσει οποιαδήποτε ποσότητα μνήμης έχει δεσμευτεί από την κλήση της συνάρτησης `malloc`. Επομένως η υλοποίηση αυτής της συνάρτησης έχει τη μορφή

```

void FreeBuffer (double * buffer) {
    if (buffer) free(buffer); }

```

όπου `buffer` είναι ένας δείκτης προς την ποσότητα μνήμης που πρόκειται να αποδεσμεύσουμε και η οποία σε προγενέστερο στάδιο της διαδικασίας είχε δεσμευτεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `malloc`. Έτσι η εντολή `FreeBuffer(buffer)` απελευθερώνει την περιοχή μνήμης που είχε δεσμευτεί από την εντολή `buffer=LoadSignal("signal.dat", &lines)` η οποία μετέφερε τα περιεχόμενα του αρχείου δεδομένων `signal.dat` στις θέσεις του μονοδιάστατου πίνακα `buffer`.

Το σύνολο όλων αυτών των στοιχειωδών συναρτήσεων - μαζί με όσες άλλες κριθούν αναγκαίες - μπορούν να τοποθετηθούν στο αρχείο `Utils.cpp` ο οποίο θα πρέπει να καλείται μέσα από τα προγράμματα που θέλουν να χρησιμοποιήσουν κάποια από αυτές τις συναρτήσεις. Το αρχείο αυτό παρουσιάζεται στη συνέχεια μαζί με τις αναγκαίες εντολές του προπεξεργαστή, ενώ περιέχει και τη συνάρτηση `main` μέσα από την οποία γίνεται μια επίδειξη του τρόπου κλήσης ορισμένων από τις εντολές που έχουμε περιγράψει σε αυτή την ενότητα.

```

// Utils.cpp

```

```

// Basic Input-Output routines for discrete signals

#include <iostream.h> #include <fstream.h> #include <iomanip.h>
#include <stdio.h> #include <stdlib.h>

// change typedef to support more samples

typedef int LTYPE;

// SaveSignal stores the data values found in 'buffer', to
// 'fName' data file. 'Samples' is the number of data to be
// stored. It returns 0 on success or (-1) on failure

int SaveSignal (double * buffer, LTYPE samples, char * fName) {
    LTYPE counter;
    fstream fin;
    fin.open(fName, ios::out);
    if (fin.fail()) return(-1);
    fin.seekp(0, ios::beg);
    for (counter=0;counter<samples;counter++)
        fin << setiosflags(ios::showpoint|ios::fixed)
            << buffer[counter] << endl;
    fin.close();
    return (0); }

// GetDataPoints counts the number of data in a data file by
// counting the number of newLine characters ('\n'). It returns
// the number of lines on success or (-1) on failure

int GetDataPoints (char * fName) {
    int lines = 0;
    char strVal [512];
    fstream fin;
    fin.open(fName, ios::in);
    if (fin.fail()) return (-1);
    fin.seekp(0, ios::beg);
    while (!fin.eof()) {
        fin.getline (strVal, 512, '\n');
        lines++; }
    fin.close();
    lines --;
    return lines; }

// LoadSignal opens the 'fName' data file and loads the stored
// data values to a memory buffer. The function returns a pointer
// to the allocated memory and an operation code in 'code argument':
// this code is equal to (-1) if file could not be opened, equal to
// (-2) if there is not enough memory to store the data and 0 on success.

double * LoadSignal (char * fName, LTYPE * code) {
    fstream fin; double * buffer;
    LTYPE counter, lines=GetDataPoints(fName);;
    if (lines==(-1)) * code = -1;
    fin.open(fName, ios::in);
    if (fin.fail()) * code = -1;
    fin.seekp(0, ios::beg);
    buffer = (double *) malloc (lines*sizeof(double));
    if (!buffer) * code = -2;

```

```

for (counter=0;counter<lines;counter++)
    fin >> buffer[counter];
fin.close();
* code = lines;
return (buffer); }

// Free Buffer frees the memory buffer allocated by the LoadData -
// or any other memory allocation function

void FreeBuffer (double * buffer) {
    if (buffer) free(buffer); }

// PrintSignal prints in the computer screen the data values of the
// first 'position' samples of the 'buffer' whose length is 'samples'

void PrintSignal (double * buffer, LTYPE samples, LTYPE position)
{
    int counter;
    if (position<0) position = 0;
    if (position>samples) position = samples;
    for (counter=0;counter<position;counter++)
        printf (" Buffer[%04d]=%.6f\n", counter, buffer[counter]); }

int main () {
    double * x;
    LTYPE counter,
    lines; x = LoadSignal ("Signal.dat", &lines);
    PrintSignal (x, lines, 30);
    FreeBuffer (x);
    return (0); }

```

4.6 Στατιστικές ιδιότητες μονοδιάστατων διακριτών σημάτων

Αμέσως μετά τη δημιουργία των δεδομένων του σήματος εισόδου μπορούμε να προχωρήσουμε στο χαρακτηρισμό του και στην περιγραφή των ιδιοτήτων που το περιγράφουν. Αυτή η περιγραφή θα παρουσιαστεί σε επόμενες ενότητες και θα περιλαμβάνει τον υπολογισμό των τιμών για ένα σύνολο χαρακτηριστικών παραμέτρων που συσχετίζονται με τα μονοδιάστατα σήματα. Μια ενδιαφέρουσα ομάδα τέτοιων ιδιοτήτων είναι ορισμένες στατιστικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν κάθε μονοδιάστατη ακολουθία δεδομένων. Εάν x_1, x_2, \dots, x_N είναι οι τιμές των δειγμάτων του μονοδιάστατου σήματος, μπορούμε να ορίσουμε τα στατιστικά μεγέθη του μέσου όρου (mean) \bar{x} , της διακύμανσης (variance) $Var(x_1, x_2, \dots, x_N)$, της τυπικής απόκλισης (standard deviation) $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_N)$, της μέσης απόκλισης (average deviation) $ADev(x_1, x_2, \dots, x_N)$, της λοξότητας (skewness) $Skew(x_1, x_2, \dots, x_N)$ και της κύρτωσης (kurtosis) $Kurt(x_1, x_2, \dots, x_N)$ τα οποία δίδονται από τις σχέσεις

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad Var(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sqrt{Var(x_1, x_2, \dots, x_N)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$ADev(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| \quad Skew(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right]^3$$

$$Kurt(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right]^4 \right\} - 3$$

Είναι προφανές πως ο υπολογισμός των τιμών για αυτές τις ιδιότητες δεν είναι γενικά δύσκολος καθώς το μόνο που απαιτεί είναι ο υπολογισμός των αθροισμάτων που περιλαμβάνονται στις παραπάνω σχέσεις. Στην επόμενη παράγραφο δίδεται ο πηγαίος κώδικας στη γλώσσα C που υλοποιεί τις στατιστικές ιδιότητες που περιγράψαμε προηγουμένως.

```

/* STAT.C: Statistical Signal Properties */
#include <math.h> #include <stdio.h>

typedef int LTYPE;

double Mean (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    if (length <= 0) return (-1);
    for (counter=0; counter < length; counter++)
        sum += buffer [counter];
    return (sum / (double) length); }

double Var (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    double mean = Mean (buffer , length);
    if (length <= 0) return (-1);
    for (counter=0; counter < length; counter++)
        sum += pow ((buffer [counter] - mean), 2);
    return (sum / (double) (length - 1)); }

double SDev (double * buffer , LTYPE length) {
    if (length <= 0) return (-1);
    else return (sqrt (Var (buffer , length))); }

double ADev (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    if (length <= 0) return (-1);
    double mean = Mean (buffer , length);
    for (counter=0; counter < length; counter++)
        sum += fabs (buffer [counter] - mean);
    return (sum / (double) length); }

double Skew (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    if (length <= 0) return (-1);
    double mean = Mean (buffer , length);
    double sDev = SDev (buffer , length);
    for (counter=0; counter < length; counter++)
        sum += pow (((buffer [counter] - mean) / sDev), 3);
    return (sum / (double) length); }

double Kurt (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    if (length <= 0) return (-1);
    double mean = Mean (buffer , length);
    double sDev = SDev (buffer , length);
    for (counter=0; counter < length; counter++)
        sum += pow (((buffer [counter] - mean) / sDev), 4);
    return ((sum / (double) length) - 3); }

```

4.7 Συσχέτιση και αυτοσυσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

Ας θεωρήσουμε δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $x(n)$ και $y(n)$ οι οποίες αντιστοιχούν σε σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένης ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή, ο βαθμός ομοιότητας των δύο σημάτων περιγράφεται

ποσοτικά από το μέγεθος της συσχέτισης (crosscorrelation ή απλά correlation) το οποίο δίδεται από τη σχέση

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

ή ισοδύναμα

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Ο δείκτης l στον παραπάνω συμβολισμό, ορίζεται ως η χρονική μετατόπιση (time shift ή lag), ενώ οι δείκτες x και y , υποδηλώνουν τις ακολουθίες τιμών τις οποίες συσχετίζουμε. Η σειρά με την οποία γράφονται αυτοί οι δείκτες, καθορίζουν και τη διεύθυνση κατά την οποία η μία ακολουθία μετατοπίζεται σε σχέση με την άλλη.

Εάν αντιστρέψουμε τους ρόλους των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ - και επομένως αντιστρέψουμε και τη σειρά των δεικτών x και y - θα λάβουμε την ακολουθία

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n)$$

από όπου προκύπτει ότι $r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$. Επομένως οι δύο αυτές ακολουθίες συσχέτισης παρέχουν ακριβώς την ίδια πληροφορία όσον αφορά το βαθμό συσχέτισης των ακολουθιών $x(n)$ και $y(n)$.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία τα δύο σήματα ταυτίζονται - ισχύει δηλαδή η σχέση $x(n) = y(n)$ - το παραπάνω μέγεθος ονομάζεται αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) και δίδεται από τη σχέση

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)x(n)$$

Τέλος, εάν το μήκος των ακολουθιών $x(n)$ και $y(n)$ είναι πεπερασμένο και ίσο με N (αυτό σημαίνει πως ισχύει η σχέση $x(n) = y(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$) οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)y(n-l) \quad \text{και} \quad r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-l)$$

όπου $i = l$ και $k = 0$ για $l \geq 0$ και $i = 0$ και $k = l$ για $l < 0$.

Οι παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούνται στην περίπτωση σημάτων ενέργειας ενώ για διακριτά σήματα ισχύος, η συσχέτιση και η αυτοσυσχέτιση ορίζονται ως

$$r_{xy}(l) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)y(n-l) \quad \text{και} \quad r_{xx}(l) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)x(n-l)$$

αντίστοιχα. Ειδικότερα, εάν οι ακολουθίες $x(n)$ και $y(n)$ είναι περιοδικά διακριτά σήματα με περίοδο N , οι παραπάνω μέσες τιμές για το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται με εκείνες που υπολογίζονται για διάστημα μιας περιόδου και οι παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν τη μορφή

$$r_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l) \quad \text{και} \quad r_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l)$$

Αποδεικνύεται πως στην περίπτωση των περιοδικών σημάτων, τόσο οι συσχέτιση όσο και η αυτοσυσχέτιση είναι περιοδικές ακολουθίες με περίοδο ίση με την περίοδο των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$.

4.7.1 Ιδιότητες της συσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης

Προκειμένου να παρουσιάσουμε τις ιδιότητες των ακολουθιών της συσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης, ας θεωρήσουμε δύο ακολουθίες πεπερασμένης ενέργειας $x(n)$ και $y(n)$ και το γραμμικό τους συνδυασμό $\alpha x(n) + \beta y(n-l)$ όπου α και β αυθαίρετες σταθερές και l το σύμβολο της χρονικής μετατόπισης. Στην περίπτωση αυτή, η ενέργεια του σήματος που προκύπτει από τον παραπάνω γραμμικό συνδυασμό, θα δίδεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha x(n) + \beta y(n-l)]^2 = \alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + \beta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l) + 2\alpha\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

Είναι όμως

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-0) = r_{xx}(0) = E_x$$

ενώ με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-l)y(n-l) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} y(n')y(n') = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} y(n')y(n'-0) = r_{yy}(0) = E_y$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι ποσότητες E_x και E_y αναφέρονται στις ενέργειες των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ αντίστοιχα, ενώ στη δεύτερη εξίσωση έγινε (για λόγους καλύτερης κατανόησης) αλλαγή του δείκτη από $(n-l)$ σε n' . Επομένως, η ενέργεια του γραμμικού συνδυασμού $\alpha x(n) + \beta y(n-l)$ θα δίδεται τελικά από τη σχέση

$$E = \alpha^2 r_{xx}(0) + \beta^2 r_{yy}(0) + 2\alpha\beta r_{xy}(l) \geq 0 \quad (22)$$

ή ισοδύναμα

$$E = \alpha^2 E_x + \beta^2 E_y + 2\alpha\beta r_{xy}(l) \geq 0 \quad (23)$$

Υποθέτοντας πως η παράμετρος β είναι διάφορη του μηδενός, μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ανίσωσης με την ποσότητα β^2 . Στην περίπτωση αυτή, θα λάβουμε

$$r_{xx}(0) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2r_{xy}(l) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + r_{yy}(0) \geq 0 \quad (24)$$

Θέτοντας $\xi = \alpha/\beta$ οδηγούμαστε στη δευτεροβάθμια ανίσωση

$$r_{xx}(0)\xi^2 + 2r_{xy}(l)\xi + r_{yy}(0) \geq 0 \quad (25)$$

με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4r_{xy}^2(l) - 4r_{xx}(0)r_{yy}(0) \leq 0$ από όπου προκύπτει ότι

$$4[r_{xy}^2(l) - r_{xx}(0)r_{yy}(0)] \leq 0 \quad (26)$$

Επομένως η ακολουθία της συσχέτισης $r_{xy}(l)$ θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |r_{xy}(l)| \leq \sqrt{E_x E_y}$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα πως η αυτοσυσχέτιση $r_{xy}(l)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή (που ισούται με την ενέργεια του σήματος E), για τιμή της χρονικής μετατόπισης $l = 0$. Αυτό ασφαλώς είναι αναμενόμενο, διότι για αυτή την τιμή του l , τα σήματα $x(n)$ και $x(n-l)$ είναι ταυτόσημα, και επομένως χαρακτηρίζονται από το μέγιστο βαθμό ομοιότητας.

Είναι σημαντικό επίσης να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως εάν λάβει χώρα κλιμάκωση (scaling) κάποιας (ή και των δύο) από τις ακολουθίες $x(n)$ και $y(n)$, το σχήμα της ακολουθίας συσχέτισης δεν μεταβάλλεται, και μόνο τα πλάτη κλιμακώνονται ανάλογα. Επειδή αυτή η κλιμάκωση δεν εξυπηρετεί σε τίποτε (καθώς η πληροφορία που μεταφέρεται από το σήμα είναι η ίδια) αποτελεί κοινή πρακτική να κανονικοποιούμε τις τιμές των ακολουθιών της συσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης, διαιρώντας τις με τη μεγαλύτερη από αυτές. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνει χώρα αναγωγή των τιμών των εν λόγω ακολουθιών, στο διάστημα $[-1, +1]$. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στις προηγούμενες ενότητες, η μέγιστη τιμή της ακολουθίας συσχέτισης είναι η $r_{xy}^{max} = \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}$, ενώ η μέγιστη τιμή της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης, είναι η $r_{xx}^{max} = r_{xx}(0)$. Επομένως, οι κανονικοποιημένες ακολουθίες της συσχέτισης και της αυτοσυσχέτισης, θα δίδονται από τις εξισώσεις

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \quad \text{και} \quad \rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}}$$

αντίστοιχα.

Τέλος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση της συσχέτισης $r_{xy}(l)$, ικανοποιεί τη συνθήκη $r_{xy}(l) = r_{xy}(-l)$. Για $x(n) = y(n)$, η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή $r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα πως η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση (even function). Αυτό σημαίνει πως για να υπολογίσουμε την ακολουθία της αυτοσυσχέτισης, αρκεί να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης $r_{xx}(l)$ για την περιοχή τιμών $l \geq 0$.

4.7.2 Παράδειγμα υπολογισμού της ακολουθίας συσχέτισης

Προκειμένου να κατανοήσουμε τη διαδικασία υπολογισμού των τιμών της ακολουθίας συσχέτισης, ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες των πραγματικών αριθμών

$$\begin{aligned}x(n) &= \{\dots, 0, 0, 2, -1, 3, +7, \mathbf{1}, +2, -3, 0, 0, \dots\} \text{ και} \\y(n) &= \{\dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \mathbf{4}, 1, -2, 5, 0, 0, \dots\}\end{aligned}$$

όπου οι τιμές που είναι γραμμένες με έντονη γραφή, αντιστοιχούν σε τιμή του δείκτη $n = 0$ (η σύμβαση αυτή θα χρησιμοποιηθεί και στο υπόλοιπο τμήμα του παραδείγματος). Ο υπολογισμός τιμών της ακολουθίας $r_{xy}(l)$ να λάβει χώρα με βάση την εξίσωση ορισμού του μεγέθους της συνέλιξης. Για $l = 0$ αυτή η εξίσωση θα λάβει τη μορφή

$$r_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) \quad (27)$$

Το αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι η ακολουθία τιμών

$$v_0(n) = \{\dots, 0, 0, 0, 2, 1, 6, -14, \mathbf{4}, 2, 6, 0, 0, \dots\}$$

το άθροισμα των οποίων είναι ίσο με $r_{xx}(0) = 7$.

Για θετικές τιμές της χρονικής μετατόπισης l ($l > 0$), μετατοπίζουμε το σήμα $y(n)$ προς τα δεξιά σε σχέση με το σήμα $x(n)$ κατά l χρονικές μονάδες, υπολογίζουμε την ακολουθία των γινομένων $v_l(n) = x(n)y(n-l)$, και στη συνέχεια αθροίζουμε αυτές τις τιμές. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία, οδηγούμαστε στα ακόλουθα αποτελέσματα, όσον αφορά τις τιμές της συσχέτισης των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ που αντιστοιχούν σε θετικές τιμές της παραμέτρου l .

$$\begin{aligned}r_{xy}(1) &= +13 & r_{xy}(2) &= -18 & r_{xy}(3) &= +16 & r_{xy}(4) &= -07 \\r_{xy}(5) &= +05 & r_{xy}(6) &= -03 & r_{xy}(l) &= 0 & \text{για } l &\geq 7\end{aligned}$$

Για αρνητικές τιμές της χρονικής μετατόπισης l ($l < 0$), μετατοπίζουμε το σήμα $y(n)$ προς τα αριστερά σε σχέση με το σήμα $x(n)$ κατά l χρονικές μονάδες, υπολογίζουμε ξανά την ακολουθία των γινομένων $v_l(n)$, και στη συνέχεια αθροίζουμε αυτές τις τιμές. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία, οδηγούμαστε στα ακόλουθα αποτελέσματα, όσον αφορά τις τιμές της συσχέτισης των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές της παραμέτρου l .

$$\begin{aligned}r_{xy}(-1) &= +00 & r_{xy}(-2) &= +33 & r_{xy}(-3) &= -14 & r_{xy}(-4) &= +36 \\r_{xy}(-5) &= +19 & r_{xy}(-6) &= -09 & r_{xy}(-7) &= +10 & r_{xy}(l) &= 0 \text{ για } l \leq -8\end{aligned}$$

Επομένως, τελικά, η ακολουθία συσχέτισης των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ θα περιλαμβάνει τις τιμές

$$r_{xy}(l) = \{10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, \mathbf{7}, 13, -18, 16, -7, 5, -3\}$$

Άσκηση 26 Να υπολογισθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$ ($0 < \alpha < 1$ και $-\infty < n < \infty$) που απεικονίζεται στην εικόνα (α) του σχήματος 16.

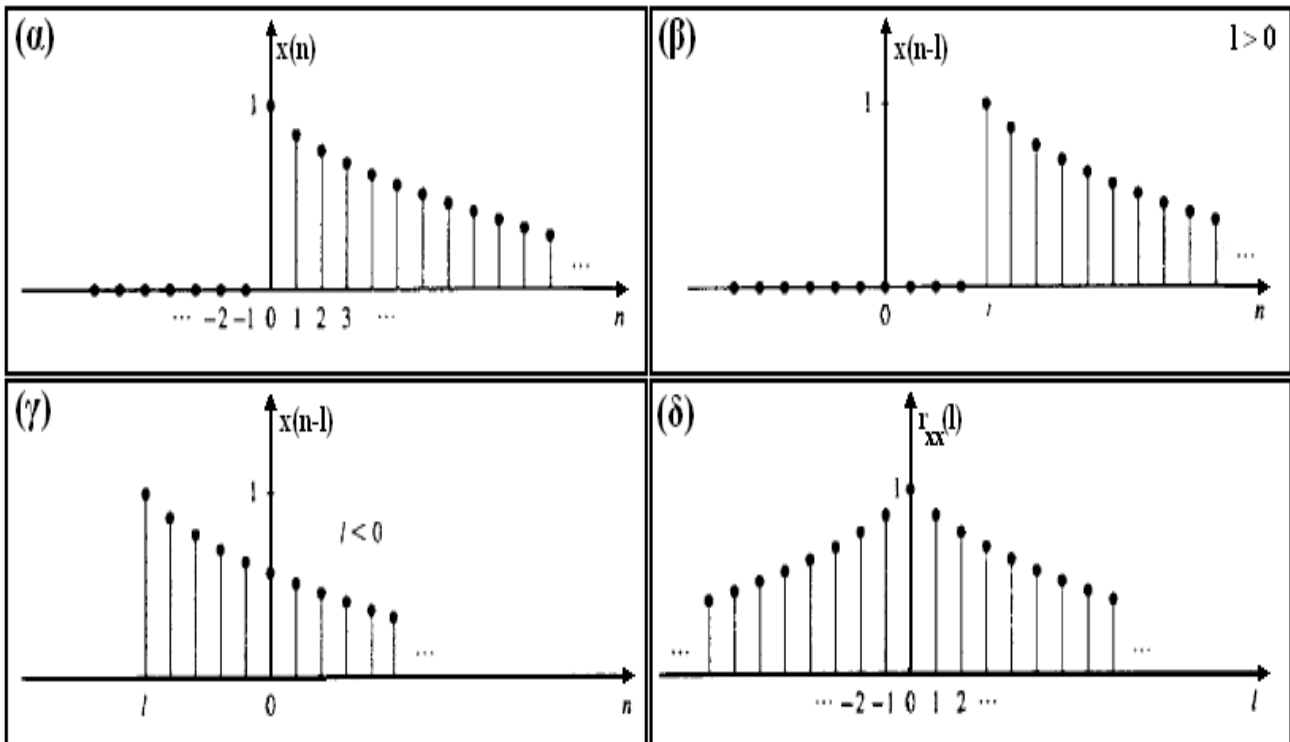
Απάντηση: Για τον υπολογισμό της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης θα λάβουμε υπ' όψιν τις περιπτώσεις $l \geq 0$ και $l < 0$ και τη μορφή των αντίστοιχων διακριτών σημάτων $x(n-l)$ όπως αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 16. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

- Περίπτωση 1η ($l \geq 0$): Από την εικόνα (β) του σχήματος διαπιστώνουμε πως η πρώτη μη μηδενική τιμή του μετατοπισμένου προς τα δεξιά σήματος $x(n-l)$ αντιστοιχεί στη θέση $n = l$ που θα αποτελεί και το κάτω όριο του αθροίσματος στην εξίσωση ορισμού της αυτοσυσχέτισης. Θα είναι επομένως

$$r_{xx} = \sum_{n=l}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=l}^{\infty} \alpha^n \alpha^{n-l} = \sum_{n=l}^{\infty} \alpha^n \alpha^n \alpha^{-l} = \alpha^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} (\alpha^2)^n$$

Επειδή η παράμετρος α ορίζεται στο διάστημα $0 < \alpha < 1$ η παραπάνω σειρά συγκλίνει σε πεπερασμένη τιμή. Ανατρέχοντας σε ένα μαθηματικό τυπολόγιο διαπιστώνουμε ότι $\sum_{n=l}^{\infty} (\alpha^2)^n = (\alpha^{2l})/(1 - \alpha^2)$ και επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται

$$r_{xx}(l) = \alpha^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} (\alpha^2)^n = \alpha^{-l} \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{2l} = \frac{\alpha^l}{1 - \alpha^2}$$



Σχήμα 17: Υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης του διακριτού σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$

- Περίπτωση 2η ($l < 0$): Από την εικόνα (γ) του σήματος διαπιστώνουμε πως η πρώτη μη μηδενική τιμή της παράστασης $x(n-l)$ αντιστοιχεί στην τιμή $n=0$ που θα αποτελεί και το κάτω όριο του αθροίσματος στην εξίσωση ορισμού της αυτοσυσχέτισης. Θα είναι επομένως

$$r_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \alpha^{n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \alpha^n \alpha^{-l} = \alpha^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^2)^n = \frac{\alpha^{-l}}{1-\alpha^2}$$

(το τελευταίο άθροισμα προκύπτει ως μερική περίπτωση του προηγούμενου που αντιστοιχεί στην τιμή $l=0$).

Συνδυάζοντας λοιπόν τα αποτελέσματα που λάβαμε για τις παραπάνω δύο περιπτώσεις οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$r_{xx}(l) = \frac{\alpha^{|l|}}{1-\alpha^2} \quad (-\infty < l < \infty) \quad (0 < \alpha < 1)$$

Το διακριτό σήμα της αυτοσυσχέτισης $r_{xx}(l)$ απεικονίζεται στην εικόνα (δ) του σήματος 16.

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε πως για $l=0$ θα είναι $r_{xx}(0) = 1/(1-\alpha^2)$. Επομένως η κανονικοποιημένη ακολουθία αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$ θα υπολογίζεται ως

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} = \frac{\alpha^{|l|/(1-\alpha^2)}}{1/(1-\alpha^2)} = \alpha^{|l|}$$

Άσκηση 27 Να υπολογισθούν οι ακολουθίες συσχέτισης και αυτοσυσχέτισης $r_{xx}(l)$ και $r_{xy}(l)$ των διακριτών σημάτων

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n_0 - N \leq n \leq n_0 + N \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad \text{και} \quad y(n) = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 28 Να υπολογισθούν οι ακολουθίες συσχέτισης και αυτοσυσχέτισης $r_{xx}(l)$ και $r_{xy}(l)$ των διακριτών σημάτων $x(n) = \{1, 2, 1, 1\}$ και $y(n) = \{1, 1, 2, 1\}$ όπου ο αριθμός με την έντονη γραφή είναι η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή $n=0$.

Άσκηση 29 Να προσδιοριστεί η κανονικοποιημένη ακολουθία αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$q(n) = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

5 Συστήματα διακριτού χρόνου

Τα συστήματα διακριτού χρόνου (discrete time systems) ορίζονται ως ειδικές μονάδες υλικού ή λογισμικού (δηλαδή διατάξεις ή αλγόριθμοι) που πραγματοποιούν συγκεκριμένες μορφές επεξεργασίας επί ενός διακριτού σήματος, με τη βοήθεια κάποιων κανόνων. Το διακριτό σήμα επί του οποίου εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός, ονομάζεται είσοδος (input) ή διέγερση (excitation) του συστήματος, ενώ το σήμα που προκύπτει μετά την εφαρμογή της διαδικασίας, είναι γνωστό ως έξοδος (output) ή αποκριση (response). Εάν $x(n)$ είναι το σήμα εισόδου του συστήματος, και $y(n)$ είναι το αντίστοιχο σήμα εξόδου, μπορούμε να συσχετίσουμε τα δύο αυτά σήματα μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$y(n) \equiv T[x(n)] \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad x(n) \mapsto y(n)$$

όπου το σύμβολο T - που ορισμένες φορές ονομάζεται τελεστής (operator) - συμβολίζει το μετασχηματισμό που εφαρμόζεται πάνω στο σήμα εισόδου.

Η μαθηματική περιγραφή ενός συστήματος διακριτού χρόνου, περιλαμβάνει μεταξύ άλλων την ταυτοποίηση της μαθηματικής έκφρασης ή κανόνα που συσχετίζει την είσοδο του συστήματος με την έξοδο που προκύπτει από αυτό. Αυτός ο τύπος περιγραφής (input-output description) είναι και η μόνη πληροφορία που χρειάζεται να γνωρίζουμε για ένα σύστημα προκειμένου να το χρησιμοποιήσουμε, ενώ οι λεπτομέρειες της εσωτερικής του δομής, συνήθως δεν είναι γνωστές, ή απλά αγνοούνται. Με άλλα λόγια, το σύστημα λειτουργεί ως ένα μαύρο κουτί που δέχεται κάποια είσοδο και παράγει κάποια έξοδο χωρίς να γνωρίζουμε τίποτα για τον εσωτερικό τρόπο λειτουργίας του.

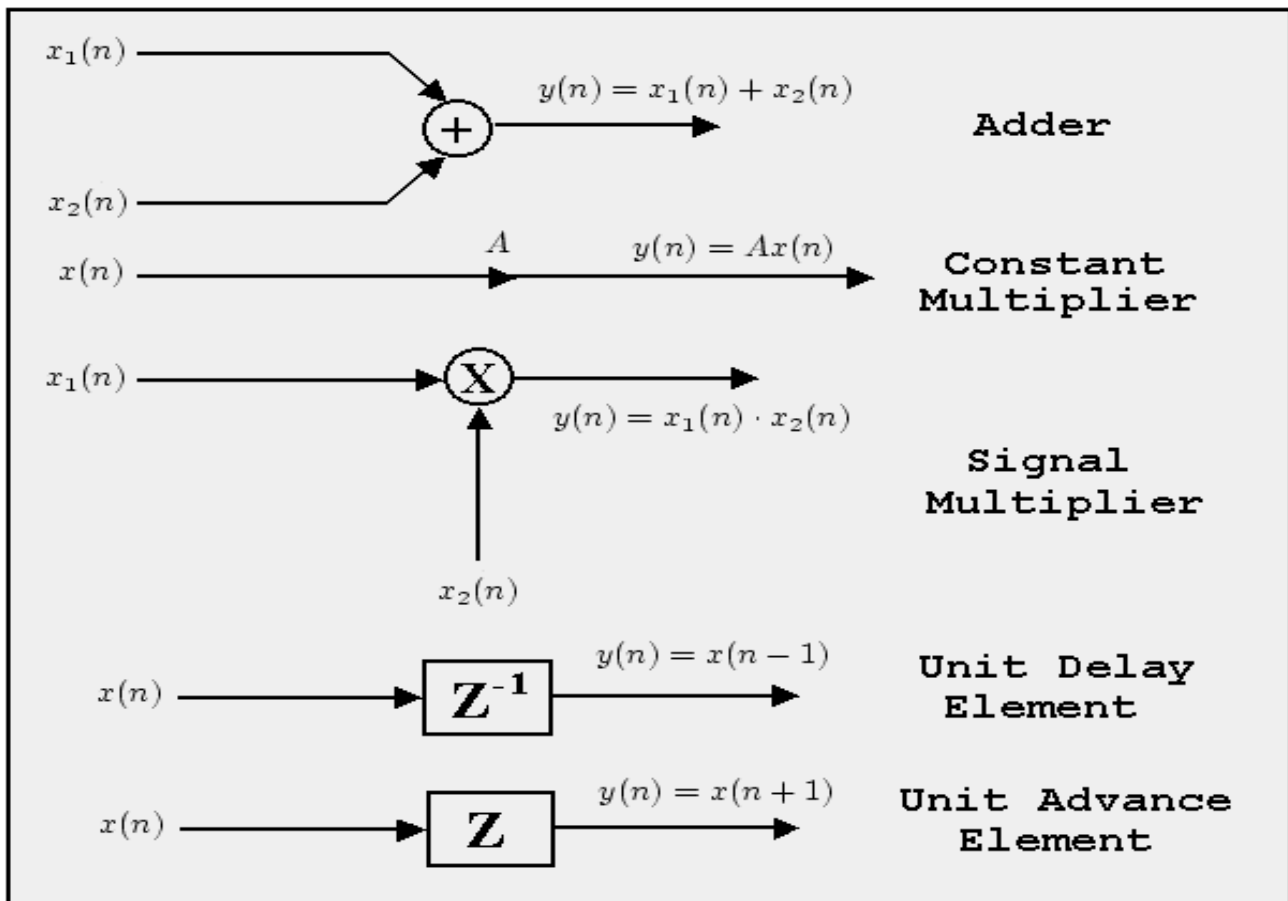
Τυπικό παράδειγμα διακριτού συστήματος η περιγραφή του οποίου στηρίζεται στον καθορισμό της συσχέτισης εισόδου - εξόδου, είναι ένας συσσωρευτής (accumulator) που χαρακτηρίζεται από μία εξίσωση της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \quad (28)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, ο συσσωρευτής προσθέτει την τρέχουσα τιμή της εισόδου του στην προηγούμενη τιμή της εξόδου του, διαδικασία που έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό του αθροίσματος του συνόλου των τιμών εισόδου που διαβιβάζονται προς αυτόν.

Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής της δομής και λειτουργίας ενός συστήματος διακριτού χρόνου είναι τα σχηματικά διαγράμματα (block diagrams) που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις δομικές μονάδες ενός τέτοιου συστήματος. Αυτές οι δομικές μονάδες (τυπικά παραδείγματα των οποίων παρουσιάζονται στο σχήμα 18) πραγματοποιούν τις στοιχειώδεις μορφές επεξεργασίας επί του διακριτού σήματος εισόδου και σε γενικές γραμμές είναι οι ακόλουθες:

- Αθροιστής σημάτων (adder): η βασική λειτουργία του αθροιστή συνίσταται στην πρόσθεση των τιμών των δύο διακριτών σημάτων που δέχεται στην είσοδό του. Εάν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι τιμές αυτών των σημάτων τη χρονική στιγμή n , τότε η έξοδος του αθροιστή θα είναι το σήμα $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$. Με άλλα λόγια ο αθροιστής πραγματοποιεί την πράξη της πρόσθεσης σημάτων που είναι μια από τις θεμελιώδεις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω στα διακριτά σήματα.
- Πολλαπλασιαστής σήματος με σταθερά (constant multiplier): η βασική λειτουργία αυτής της δομικής μονάδας είναι να πολλαπλασιάζει την τρέχουσα τιμή του σήματος εισόδου με την τιμή της σταθεράς που έχει καθορισθεί κατά το στάδιο του σχεδιασμού του. Επομένως η έξοδος αυτής της μονάδας θα είναι η $y(n) = Ax(n)$ όπου A σταθερά τιμή και $x(n)$ η είσοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή n . Είναι προφανές πως η λειτουργία αυτού του τύπου πολλαπλασιαστή είναι η κλιμάκωση πλάτους του τρέχοντος σήματος εισόδου.
- Πολλαπλασιαστής σημάτων (signal multiplier): η βασική λειτουργία του πολλαπλασιαστή σημάτων συνίσταται στον πολλαπλασιασμό των τιμών των δύο διακριτών σημάτων που δέχεται στην είσοδό του. Εάν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι τιμές αυτών των σημάτων τη χρονική στιγμή n , τότε η έξοδος του πολλαπλασιαστή θα είναι το σήμα $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$. Με άλλα λόγια ο πολλαπλασιαστής πραγματοποιεί την πράξη του πολλαπλασιασμού σημάτων που είναι μια από τις θεμελιώδεις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω στα διακριτά σήματα.
- Στοιχείο μοναδιαίας χρονικής υστέρησης (unit delay element): η βασική λειτουργία αυτού του στοιχείου είναι η χρονική μετατόπιση του σήματος εισόδου κατά μια χρονική μονάδα. Αυτή η μετατόπιση γίνεται προς τα πίσω και για το λόγο αυτό νοείται ως χρονική υστέρηση (time delay). Επομένως η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή n θα έχει τη μορφή $y(n) = x(n - 1)$.
- Στοιχείο μοναδιαίας χρονικής προώθησης (unit advance element): η βασική λειτουργία αυτού του στοιχείου είναι η χρονική μετατόπιση του σήματος εισόδου κατά μια χρονική μονάδα. Ωστόσο στην προκειμένη περίπτωση, αυτή η μετατόπιση δεν γίνεται προς τα πίσω αλλά προς τα εμπρός και για το λόγο αυτό νοείται ως χρονική



Σχήμα 18: Οι θεμελιώδεις δομικές μονάδες ενός τυπικού διακριτού συστήματος

προώθηση. Επομένως η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή n θα έχει τη μορφή $y(n) = x(n+1)$. Υπενθυμίζουμε πως αυτού του είδους η προώθηση μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε διακριτά σήματα τα οποία έχουν ήδη καταγραφεί και αποθηκευτεί σε κάποια μονάδα, ενώ σε περιπτώσεις καταγραφής δειγμάτων σε πραγματικό χρόνο, είναι πρακτικά ανεφάρμοστη.

Είναι προφανές πως σε κάθε αναπαράσταση εισόδου - εξόδου ενός διακριτού συστήματος, αντιστοιχεί και μία σχηματική αναπαράσταση που περιγράφει τη λειτουργία του συστήματος με τη βοήθεια των στοιχειωδών δομικών μονάδων. Για παράδειγμα, το σχηματικό διάγραμμα του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \quad (29)$$

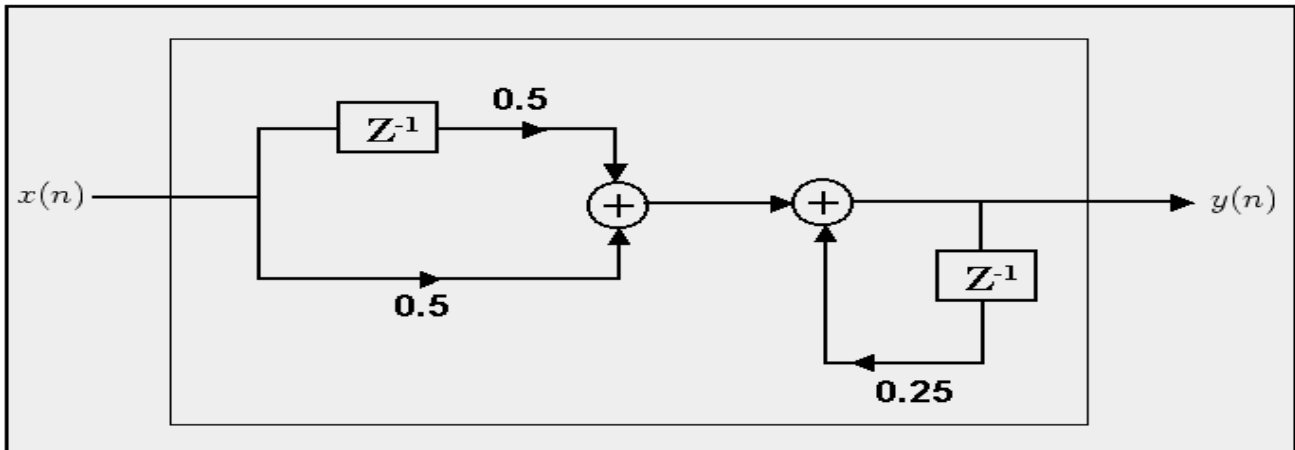
είναι αυτό που αναπαρίσταται στο σχήμα 19.

5.1 Είδη και κατηγορίες διακριτών συστημάτων

Ανάλογα με τη φύση τους και τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν τη λειτουργία τους, τα συστήματα διακριτού χρόνου μπορούν να διαχωριστούν σε πολλές κατηγορίες οι πιο σημαντικές από τις οποίες είναι οι εξής:

5.1.1 Στατικά και δυναμικά διακριτά συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται στατικό (static) όταν η έξοδος του, $y(n)$, τη χρονική στιγμή n , εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο του συστήματος, $x(n)$ και όχι από εισόδους που αντιστοιχούν σε προγενέστερες ή μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. Στην αντίθετη περίπτωση, το σύστημα ονομάζεται δυναμικό (dynamic). Εάν η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή n εξαρτάται από τις N προηγούμενες εισόδους του, το σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μνήμης χρονικής διάρκειας N . Είναι προφανές πως για τα στατικά συστήματα ισχύει η σχέση $N = 0$ και επομένως τα συστήματα αυτού του τύπου χαρακτηρίζονται από απουσία μνήμης (memoryless). Εάν η



Σχήμα 19: Σχηματικό διάγραμμα τυπικού διακριτού συστήματος

παράμετρος N παίρνει πεπερασμένες τιμές (ισχύει δηλαδή η σχέση $0 < N < \infty$) το σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό σύστημα πεπερασμένης μνήμης (finite memory) ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα έχει άπειρη μνήμη (infinite memory).

Παραδείγματα στατικών συστημάτων είναι αυτά που δίδονται από τις σχέσεις $y(n) = ax(n)$ και $y(n) = nx(n) + \beta x^3(n)$. Στα συστήματα αυτά, η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή n , εξαρτάται μόνο από την τιμή της αντίστοιχης εισόδου. Αντίθετα, τα συστήματα

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^n x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$$

χαρακτηρίζονται ως δυναμικά συστήματα, γιατί η έξοδος τους τη χρονική στιγμή n , εξαρτάται και από εισόδους που αντιστοιχούν σε προγενέστερες χρονικές στιγμές. Από αυτά τα δυναμικά συστήματα, τα δύο πρώτα χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πεπερασμένης μνήμης - με διάρκεια 1 και n αντίστοιχα - ενώ το τρίτο σύστημα χαρακτηρίζεται ως ένα δυναμικό σύστημα άπειρης μνήμης.

5.1.2 Χρονικώς μεταβαλλόμενα και χρονικώς αμετάβλητα διακριτά συστήματα

Ένα δυναμικό σύστημα θεωρείται αναλλοίωτο ως προς το χρόνο (time invariant) όταν η συσχέτιση που υφίσταται ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδό του, δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα χαρακτηρίζεται ως χρονικά μεταβαλλόμενο διακριτό σύστημα (time variant system).

Σε ένα πιο αυστηρό μαθηματικό ορισμό, ένα σύστημα T θεωρείται αναλλοίωτο ως προς το χρόνο, αν και μόνο αν η ισχύς της σχέσης $y(n) = Tx(n)$ προϋποθέτει και την ισχύ της σχέσης $y(n-k) = T[x(n-k)]$ για κάθε διακριτό σήμα $x(n)$ και για κάθε ακέραιο αριθμό k .

Προκειμένου να κατανοήσουμε την έννοια του χρονικώς μεταβαλλόμενου και του χρονικώς αμετάβλητου διακριτού συστήματος ας θεωρήσουμε το σύστημα του συσσωρευτή που παρουσιάσαμε προηγουμένως και το οποίο περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής $y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$. Προκειμένου το σύστημα αυτό να είναι χρονικώς αμετάβλητο θα πρέπει η συσχέτιση T που υφίσταται ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο, να μην μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, δηλαδή με άλλα λόγια, εάν επιστρέψουμε k χρονικές μονάδες προς τα πίσω να εξακολουθεί η έξοδος του, $y(n-k)$ να δίδεται από τη σχέση $y(n-k) = T[x(n-k)]$. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε πως κάτι τέτοιο πράγματι ισχύει, αφού είναι

$$T[x(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{n-k} x(k) \quad \text{και} \quad y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n-k} x(k) = T[x(n,k)]$$

Επομένως, το σύστημα του συσσωρευτή είναι ένα χρονικώς αμετάβλητο διακριτό σύστημα.

Ας εφαρμόσουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία για το διακριτό σύστημα του συμπιεστή (compressor) που περιγράφεται από την εξίσωση εισόδου-εξόδου $y(n) = x(Mn)$ ($-\infty < n < \infty$). Η λειτουργία αυτού του διακριτού

συστήματος είναι να αγνοεί τα πρώτα $(M - 1)$ δείγματα μιας ομάδας M δειγμάτων και να αποθηκεύει μόνο το υπ' αριθμόν M δείγμα. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία χαρακτηρισμού διαπιστώνουμε πως $T[x(n - k)] = x(Mn - k)$ ενώ $y(n - k) = x[M(n - k)] \neq T[x(n - k)]$. Με άλλα λόγια, η συσχέτιση που υφίσταται ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο δεν είναι σταθερή σε συνάρτηση με το χρόνο και επομένως το διακριτό σύστημα του συμπίεστη είναι ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο διακριτό σύστημα.

Άσκηση 30 Δίδονται τα διακριτά συστήματα (α) $y(n) = x(n) - x(n - 1)$, (β) $y(n) = nx(n)$, (γ) $y(n) = x(-n)$ και (δ) $y(n) = x(n) \cos(\omega n)$. Για κάθε ένα από αυτά να προσδιορίσετε εάν αυτό είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο ή χρονικώς αμετάβλητο.

Απάντηση: Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη φύση του καθενός από τα παραπάνω συστήματα, θα πρέπει να διαβιβάσουμε στο σύστημα μία είσοδο $x(n)$ προκειμένου να λάβουμε την αντίστοιχη έξοδο $y(n)$ και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την έξοδο $y(n, k) = T[x(n - k)]$ που προκύπτει από την είσοδο $x(n - k)$, δηλαδή εκείνη που χαρακτηρίζεται από χρονική υστέρηση k μονάδων σε σχέση με την προηγούμενη. Εάν ισχύει η σχέση $y(n, k) = y(n - k)$, το σύστημα θα είναι χρονικώς αμετάβλητο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία για κάθε ένα από τα διακριτά συστήματα που έχουν δοθεί, θα λάβουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) Είναι $y(n, k) = T[x(n - k)] = x(n - k) - x(n - k - 1)$ και $y(n - k) = x(n - k) - x(n - k - 1) = y(n, k)$.

Επομένως το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο.

(β) Είναι $y(n, k) = T[x(n - k)] = nx(n - k)$ και $y(n - k) = (n - k)x(n - k) \neq y(n, k)$. Επομένως το σύστημα είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο.

(γ) Είναι $y(n, k) = T[x(n - k)] = x(-n - k)$ και $y(n - k) = x[-(n - k)] = x(k - n) \neq y(n, k)$. Επομένως το σύστημα είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο.

(δ) Είναι $y(n, k) = T[x(n - k)] = x(n - k) \cos(\omega n)$ και $y(n - k) = x(n - k) \cos[\omega(n - k)] \neq y(n, k)$. Επομένως το σύστημα είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 31 Δίδεται το σύστημα διακριτού χρόνου $y(n) = T[x(n)] = x(n^2)$. (α) Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο (β) Προκειμένου να τεκμηριώσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα χρησιμοποιήστε ως είσοδο στο σύστημα το διακριτό σήμα

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και πραγματοποιήστε τις ακόλουθες ενέργειες:

1. Σχεδιάστε το σήμα $x(n)$
2. Προσδιορίστε και σχεδιάστε το σήμα $y(n) = T[x(n)]$
3. Σχεδιάστε το σήμα $y'_2(n) = y(n - 2)$
4. Προσδιορίστε και σχεδιάστε το σήμα $x_2(n) = x(n - 2)$
5. Προσδιορίστε και σχεδιάστε το σήμα $y_2(n) = T[x_2(n)]$
6. Συγκρίνετε τα σήματα $y_2(n)$ και $y(n - 2)$. Τι παρατηρείτε;

(γ) Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για τα διακριτά συστήματα $y(n) = T[x(n)] = x(n) - x(n - 1)$ και $y(n) = T[x(n)] = nx(n)$.

5.1.3 Γραμμικά και μη γραμμικά διακριτά συστήματα

Ένα διακριτό σύστημα χαρακτηρίζεται ως γραμμικό (linear) αν και μόνο αν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας (superposition principle). Σύμφωνα με την αρχή αυτή η απόκριση του συστήματος στο μέσο άθροισμα (weighted sum) των σημάτων εισόδου είναι ίση με το μέσο άθροισμα των αποκρίσεων του συστήματος σε κάθε σήμα ξεχωριστά. Θεωρώντας για παράδειγμα δύο σήματα εισόδου $x_1(n)$ και $x_2(n)$, η αρχή της επαλληλίας διατυπώνεται με τη μορφή

$$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 T x_1(n) + \alpha_2 T x_2(n) \quad (30)$$

για οποιαδήποτε σήματα εισόδου $x_1(n)$ και $x_2(n)$ και για οποιεσδήποτε σταθερές α_1 και α_2 . Εάν η παραπάνω ιδιότητα δεν ικανοποιείται, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό (nonlinear).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού του διακριτού σήματος

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (31)$$

μπορούμε να γράψουμε την έξοδο του γραμμικού συστήματος με τη μορφή

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (32)$$

αφού οι συντελεστές $x(k)$ είναι σταθεροί. Εάν ορίσουμε ως $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$ την απόκριση του συστήματος στη μοναδιαία διακριτή ώση κατά τη χρονική στιγμή $n = k$, τότε η έξοδος του συστήματος θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (33)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως το άθροισμα της υπέρθεσης.

Παράδειγμα γραμμικού διακριτού συστήματος είναι το διακριτό σύστημα του συσσωρευτή που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, εάν στο διακριτό αυτό σύστημα διαβιβάσουμε δύο οποιεσδήποτε εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτές θα είναι οι έξοδοι $y_1(n)$ και $y_2(n)$ οι οποίες ορίζονται ως

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) \quad \text{και} \quad y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε πως το σύστημα είναι γραμμικό, θα πρέπει να δείξουμε πως η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ είναι η έξοδος $y_3(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$ για οποιεσδήποτε τιμές των αυθαίρετων σταθερών α και β . Θα είναι λοιπόν

$$y_3(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_3(k) = \sum_{k=-\infty}^n [\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)] = \alpha \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) + \beta \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

και επομένως το σύστημα του συσσωρευτή είναι ένα διακριτό γραμμικό σύστημα.

Από την άλλη πλευρά, παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος είναι το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(n) = \log_{10}(|x(n)|)$. Προκειμένου να αποδείξουμε τη μη γραμμική φύση αυτού του συστήματος, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τουλάχιστον ένα σύνολο εισόδων - εξόδων που να μην είναι συμβατές με την αρχή της επαλληλίας. Ως ένα τέτοιο σύνολο, ας θεωρήσουμε τις εισόδους $x_1(n) = 1$ και $x_2(n) = 10$ για τις οποίες οι αντίστοιχες έξοδοι του συστήματος είναι οι $y_1(n) = \log_{10}(|1|) = 0$ και $y_2(n) = \log_{10}(|10|) = 1$. Παρατηρώντας πως οι δύο αυτές εισόδους συνδέονται με τη σχέση $x_2(n) = 10x_1(n)$, οι αντίστοιχες έξοδοι του συστήματος εφόσον αυτό ήταν γραμμικό, θα έπρεπε να ικανοποιούσαν την εξίσωση $y_2(n) = 10y_1(n)$. Αυτό όμως είναι κάτι που προφανώς δεν ισχύει, ήτοι, το εν λόγω σύστημα αποτελεί ένα μη γραμμικό διακριτό σύστημα.

Άσκηση 32 Δίδονται τα διακριτά συστήματα (α) $y(n) = nx(n)$, (β) $y(n) = x(n^2)$, (γ) $y(n) = x^2(n)$, (δ) $y(n) = Ax(n) + B$ και (ε) $y(n) = e^{x(n)}$. Για κάθε ένα από αυτά να προσδιορίσετε εάν αυτό είναι γραμμικό ή μη γραμμικό.

Απάντηση: Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το κριτήριο χαρακτηρισμού ενός διακριτού συστήματος ως γραμμικού ή μη γραμμικού είναι η ισχύς ή όχι της αρχής της επαλληλίας σύμφωνα με την οποία η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ είναι η έξοδος $\alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$. Αναλυτικά λοιπόν και για την κάθε περίπτωση, έχουμε:

(α) Η απόκριση του συστήματος στις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι έξοδοι $y_1(n) = nx_1(n)$ και $y_2(n) = nx_2(n)$. Θεωρώντας τη συνδυασμένη είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτή είναι η έξοδος $y_3(n) = nx_3(n) = n[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha[nx_1(n)] + \beta[nx_2(n)] = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$. Επομένως, το σύστημά μας είναι ένα γραμμικό διακριτό σύστημα.

(β) Η απόκριση του συστήματος στις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι έξοδοι $y_1 = x_1(n^2)$ και $y_2 = x_2(n^2)$. Θεωρώντας τη συνδυασμένη είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτή είναι η έξοδος $y_3(n) = x_3(n^2) = \alpha x_1(n^2) + \beta x_2(n^2) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$. Επομένως, το σύστημά μας είναι ένα γραμμικό διακριτό σύστημα.

(γ) Η απόκριση του συστήματος στις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι έξοδοι $y_1(n) = x_1^2(n)$ και $y_2(n) = x_2^2(n)$. Θεωρώντας τη συνδυασμένη είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτή είναι η έξοδος

$y_3(n) = x_3^2(n) = [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]^2 = \alpha^2 x_1^2(n) + \beta^2 x_2^2(n) + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) = \alpha^2 y_1(n) + \beta^2 y_2(n) + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n)$. Επομένως, το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό διότι δεν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας.

(δ) Η απόκριση του συστήματος στις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι έξοδοι $y_1(n) = Ax_1(n) + B$ και $y_2(n) = Ax_2(n) + B$. Θεωρώντας τη συνδυασμένη είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτή είναι η έξοδος $y_3(n) = Ax_3(n) + B = A[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] + B = A\alpha x_1(n) + A\beta x_2(n) + B$. Επομένως, το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό διότι δεν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας.

(ε) Η απόκριση του συστήματος στις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι οι έξοδοι $y_1(n) = e^{x_1(n)}$ και $y_2(n) = e^{x_2(n)}$. Θεωρώντας τη συνδυασμένη είσοδο $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$, η απόκριση του συστήματος σε αυτή είναι η έξοδος $y_3(n) = e^{x_3(n)} = e^{[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]} = e^{\alpha x_1(n)} e^{\beta x_2(n)} = [e^{x_1(n)}]^\alpha [e^{x_2(n)}]^\beta = [y_1(n)]^\alpha [y_2(n)]^\beta$. Επομένως, το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό διότι δεν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας.

5.1.4 Αιτιατά και μη αιτιατά διακριτά συστήματα

Ένα διακριτό σύστημα λέγεται αιτιατό (causal), όταν η έξοδος $y(n)$ του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή n , εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο του συστήματος, $x(n)$, καθώς και από εκείνες τις εισόδους που αντιστοιχούν σε προγενέστερες χρονικές στιγμές $[x(n-1), x(n-2), x(n-3), \dots]$ αλλά όχι και από τις μελλοντικές εισόδους του συστήματος $[x(n+1), x(n+2), x(n+3), \dots]$. Επομένως, σε μαθηματική περιγραφή, η έξοδος ενός αιτιατού συστήματος έχει τη μορφή

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), x(n-3), \dots] \quad (34)$$

όπου F αυθαίρετη συνάρτηση.

Στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημα δεν ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, ονομάζεται μη αιτιατό (noncausal). Η έξοδος ενός μη αιτιατού συστήματος δεν εξαρτάται μόνο από τις προγενέστερες, αλλά και από τις μεταγενέστερες εισόδους του. Είναι προφανές, πως σε μια εφαρμογή επεξεργασίας σήματος πραγματικού χρόνου, τα συστήματα αυτού του είδους δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, γιατί είναι αδύνατο να προβλέψουμε τις τιμές των μετρήσεων που θα πραγματοποιηθούν στο μέλλον. Αντίθετα, εάν το σήμα έχει ήδη καταγραφεί και αποθηκευθεί σε κάποιο αρχείο, είναι δυνατή η δημιουργία και χρήση μη αιτιατών συστημάτων, καθώς όλες οι τιμές του σήματος είναι διαθέσιμες.

Άσκηση 33 Δίδονται τα διακριτά συστήματα (α) $y(n) = x(n) - x(n-1)$, (β) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$, (γ) $y(n) = \alpha x(n)$, (δ) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$, (ε) $y(n) = x(n^2)$, (στ) $y(n) = x(2n)$ και (ζ) $y(n) = x(-n)$. Για κάθε ένα από αυτά να προσδιορίσετε εάν αυτό είναι αιτιατό ή μη αιτιατό διακριτό σύστημα.

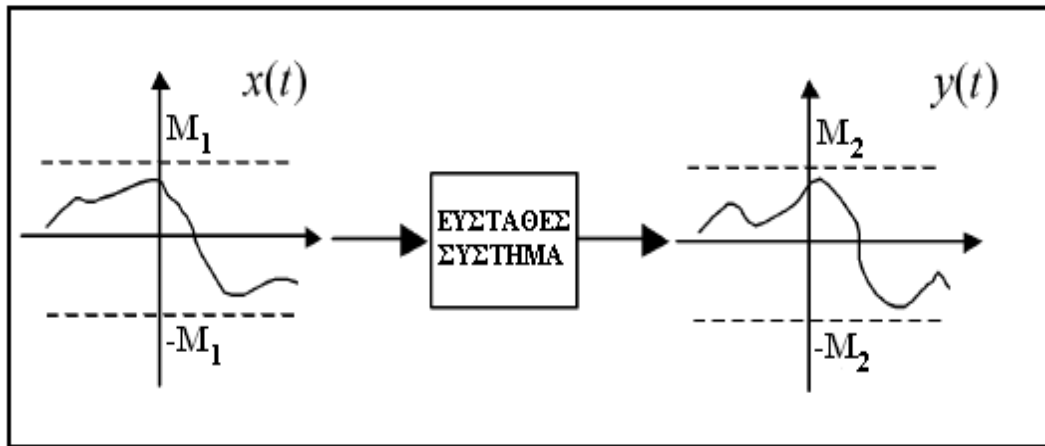
Απάντηση: Δια της παραπομπής του στον ορισμό ενός αιτιατού διακριτού συστήματος δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως τα συστήματα (α), (β) και (γ) είναι αιτιατά συστήματα - αφού η έξοδός τους σε κάθε χρονική στιγμή n είναι συνάρτηση της αντίστοιχης τρέχουσας εισόδου καθώς και προγενέστερων εισόδων - ενώ τα συστήματα (δ), (ε) και (στ) είναι μη αιτιατά, αφού η τρέχουσα έξοδος είναι συνάρτηση μεταγενέστερων εξόδων. Τέλος, το διακριτό σύστημα (ζ), είναι και αυτό μη αιτιατό, αφού για αρνητικές τιμές του n , συμπεριφέρεται όπως και τα προηγούμενα μη αιτιατά συστήματα (για παράδειγμα, για $n = -1$ είναι $y(-1) = x(1)$, δηλαδή, η τρέχουσα έξοδος εξαρτάται από μεταγενέστερη είσοδο του συστήματος).

5.1.5 Ευσταθή και ασταθή διακριτά συστήματα

Ένα διακριτό σύστημα θεωρείται ασταθές όταν είναι φραγμένο και ως προς την είσοδο και ως προς την έξοδο (Bounded Input Bounded Output (BIBO)) δηλαδή όταν για κάθε φραγμένη είσοδο παράγει πάντα μια φραγμένη έξοδο. Σύμφωνα με τη μαθηματική θεωρία που χαρακτηρίζει τη λειτουργία αυτών των συστημάτων, για να είναι φραγμένη η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$, θα πρέπει να υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί M_1 και M_2 , τέτοιοι ώστε $|x(n)| \leq M_1 < \infty$ και $|y(n)| \leq M_2 < \infty$ (για κάθε τιμή της παραμέτρου n). Εάν το σύστημα μας πληρεί αυτή την ιδιότητα είναι φραγμένο, και επομένως, ευσταθές (stable), ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα χαρακτηρίζεται ως ασταθές (unstable).

Είναι σημαντικό να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως η έννοια της ευστάθειας παίζει καθοριστικό ρόλο στη σωστή λειτουργία των συστημάτων διακριτού χρόνου: ένα ασταθές σύστημα χαρακτηρίζεται συνήθως από προβληματική και ακραία συμπεριφορά, γεγονός που το καθιστά ακατάλληλο για χρήση σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις. Η συμπεριφορά ενός ευσταθούς διακριτού συστήματος παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Άσκηση 34 Δίδονται τα διακριτά συστήματα (α) $y(n) = x^2(n)$, (β) $y(n) = e^{x(n)}/x(n-1)$, (γ) $y(n) = \cos(x(n))$, (δ) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ και (ε) $y(n) = \log(1 + |x(n)|)$. Για κάθε ένα από αυτά να προσδιορίσετε εάν αυτό είναι ευσταθές ή ασταθές διακριτό σύστημα.



Σχήμα 20: Η διαβίβαση φραγμένης εισόδου σε ένα ευσταθές σύστημα έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή φραγμένης εξόδου.

Απάντηση: Σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε προηγουμένως, ένα διακριτό σύστημα είναι ευσταθές εάν μια φραγμένη είσοδος έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση φραγμένης εξόδου και ασταθές στην αντίθετη περίπτωση. Εάν εφαρμόσουμε αυτό το κριτήριο για κάθε ένα από τα παραπάνω διακριτά συστήματα, θα λάβουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) Εάν στην είσοδο του συστήματος διαβιβαστεί μία οποιαδήποτε φραγμένη είσοδος $x(n)$ τέτοια ώστε $|x(n)| < M$, η έξοδος του συστήματος θα είναι και αυτή φραγμένη καθώς $|y(n)| = |x(n)|^2 < M^2$. Επομένως, το σύστημα είναι ευσταθές.

(β) Ας υποθέσουμε πως ως είσοδο στο σύστημα διαβιβάζουμε τη διακριτή συνάρτηση της μοναδιαίας ώσης, $\delta(n)$. Η συνάρτηση αυτή ως γνωστόν έχει τιμή ίση με τη μονάδα στη θέση $n = 0$ και μηδενική τιμή σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις. Εάν αυτή η συνάρτηση διέλθει από το σύστημα, η έξοδος του θα απειρίζεται για όλες τις τιμές εκτός από την τιμή $n = 1$ (όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς) και επομένως το σύστημα είναι ασταθές.

(γ) Το σύστημα είναι ευσταθές αφού από την τριγωνομετρία είναι γνωστό πως $|\cos[x(n)]| \leq 1 \forall x(n)$.

(δ) Εάν στο σύστημα διαβιβάζουμε τη μοναδιαία συνάρτηση βήματος $u(n)$ για τιμές $n < 0$, η έξοδος του συστήματος θα έχει τη μορφή $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n u(k) = n + 1$. Παρατηρούμε πως αν και η είσοδος του συστήματος είναι φραγμένη, η έξοδος του δεν ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα και επομένως το σύστημα είναι ασταθές.

(ε) Προκειμένου να επιλύσουμε την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε τη μαθηματική σχέση $\log(1 + x) \leq x$ που χαρακτηρίζει τη λογαριθμική συνάρτηση. Εάν στο σύστημα διαβιβάζουμε μια οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο $x(n)$ τέτοια ώστε $|x(n)| \leq M$, η έξοδος του συστήματος θα είναι και αυτή φραγμένη καθώς θα είναι $|y(n)| = |\log(1 + |x(n)|)| \leq 1 + |x(n)| < 1 + M$. Επομένως, το σύστημά μας είναι ευσταθές.

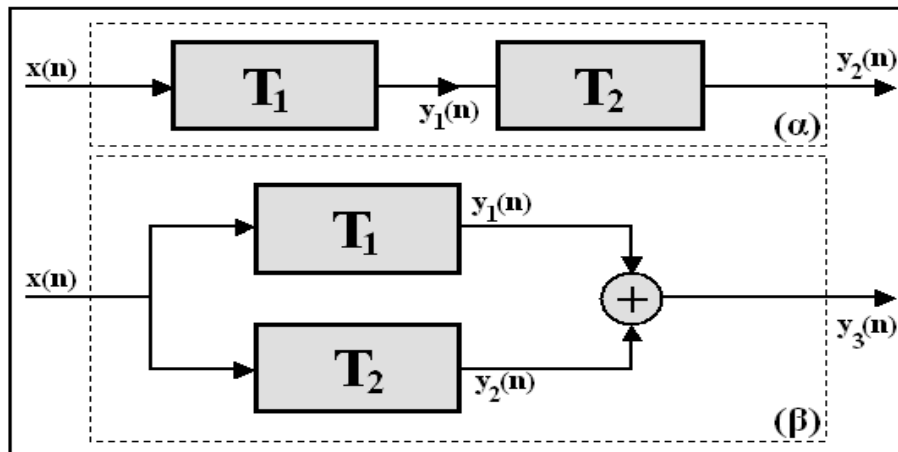
Άσκηση 35 Δίδονται τα συστήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{array}{lll}
 y(n) = x(2 - n) & y(n) = [x(n)] & y(n) = [x(n)] + 1 \\
 y(n) = |x(n)| & y(n) = x(n)u(n) & y(n) = x(n) + nx(n + 1) \\
 y(n) = x(2n) & y(n) = x(-n) & y(n) = \text{sgn}(x(n)) \\
 y(n) = \cos[x(n)] & y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k) & y(n) = x(n) \cos(\omega n)
 \end{array}$$

(στις παραπάνω εξισώσεις ο τελεστής $[\]$ επιστρέφει το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού ενώ η συνάρτηση sign επιστρέφει το πρόσημο του ορίσμά της ή την τιμή μηδέν εάν το όρισμά της έχει μηδενική τιμή). Για κάθε ένα από τα παραπάνω διακριτά συστήματα να εξετάσετε αν είναι (α) στατικό ή δυναμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο ή χρονικά αμετάβλητο, (γ) γραμμικό ή μη γραμμικό, (δ) αιτιατό ή μη αιτιατό και (ε) ευσταθές ή ασταθές.

5.2 Διασύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες χρησιμοποιούμε περισσότερα από ένα συστήματα διακριτού χρόνου προκειμένου να υλοποιήσουμε τις επιθυμητές σε κάθε περίπτωση διαδικασίες, υπάρχει η δυνατότητα να τα συνδέσουμε μεταξύ τους έτσι ώστε να δημιουργήσουμε μεγαλύτερα και πιο πολύπλοκα συστήματα. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι διασύνδεσης διακριτών συστημάτων: (α) σύνδεση σε σειρά στην οποία τα συστήματα συνδέονται με τέτοιο τρόπο



Σχήμα 21: Διασύνδεση συστημάτων διακριτού χρόνου σε σειρά (εικόνα α) και παράλληλα (εικόνα β)

ώστε η έξοδος του ενός συστήματος να γίνεται είσοδος στο άλλο σύστημα και (β) παράλληλη σύνδεση στην οποία τα δύο συστήματα δέχονται την ίδια είσοδο και λειτουργούν παράλληλα και χωρίς να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Αυτοί οι δύο διαφορετικοί τύποι διασύνδεσης παρουσιάζονται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 20.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη σχέση εισόδου-εξόδου που υφίσταται στην περίπτωση της διασύνδεσης σε σειρά, ας θεωρήσουμε δύο διακριτά συστήματα που υλοποιούν τους μετασχηματισμούς T_1 και T_2 . Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως η έξοδος του πρώτου συστήματος θα είναι η $y_1(n) = T_1[x(n)]$ ενώ η έξοδος του δεύτερου συστήματος (το οποίο δέχεται ως είσοδο την έξοδο του πρώτου συστήματος) θα είναι η

$$y_2(n) = T_2[y_1(n)] = T_2[T_1[x(n)]] = T_c[x(n)]$$

όπου ο μετασχηματισμός T_c του σύνθετου συστήματος ορίζεται ως $T_c = T_2T_1$. Αν και στη γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός T_2T_1 δεν είναι ο ίδιος με το μετασχηματισμό T_1T_2 , εν τούτοις αποδεικνύεται πως αν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι χρονικώς αμετάβλητα γραμμικά συστήματα, οι παραπάνω μετασχηματισμοί ταυτίζονται, ενώ το σύνθετο σύστημα που υλοποιεί το μετασχηματισμό $T_c = T_1T_2 = T_2T_1$, είναι και αυτό χρονικώς αμετάβλητο γραμμικό σύστημα.

Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση της παράλληλης σύνδεσης, τα στοιχειώδη συστήματα T_1 και T_2 λειτουργούν παράλληλα και η απόκρισή τους στην κοινή είσοδο $x(n)$ που δέχονται είναι οι έξοδοι $y_1(n) = T_1[x(n)]$ και $y_2(n) = T_2[x(n)]$ αντίστοιχα. Όσον αφορά την έξοδο του σύνθετου συστήματος που προκύπτει από τη διασύνδεση των δύο συστημάτων, αυτή - όπως εύκολα προκύπτει από τη μελέτη του σχήματος - είναι το άθροισμα των εξόδων των δύο συστημάτων και επομένως θα υπολογίζεται ως

$$y_3(n) = y_1(n) + y_2(n) = T_1[x(n)] + T_2[x(n)] = (T_1 + T_2)[x(n)] = T_p[x(n)]$$

όπου ο μετασχηματισμός T_p που υλοποιείται από το σύνθετο σύστημα ορίζεται ως $T_p = T_1 + T_2$.

Άσκηση 36 Δίδονται δύο συστήματα διακριτού χρόνου T_1 και T_2 που συνδέονται σε σειρά σύμφωνα με το σχήμα που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Στηριζόμενοι στη θεωρία που περιγράφει τον τρόπο σύνδεσής τους να αποφανθείτε για το εάν η κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι ορθή ή εσφαλμένη.

- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι γραμμικά τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι γραμμικό διακριτό σύστημα.
- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι χρονικώς αμετάβλητα τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι χρονικώς αμετάβλητο διακριτό σύστημα.
- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι αιτιατά τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι αιτιατό διακριτό σύστημα.
- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα, τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο διακριτό σύστημα.
- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι μη γραμμικά τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι μη γραμμικό διακριτό σύστημα.

- Εάν τα συστήματα T_1 και T_2 είναι ευσταθή τότε και το σύστημα που προκύπτει από τη σύνδεσή τους είναι ευσταθές διακριτό σύστημα.

Άσκηση 37 Τρία διακριτά συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n) = \delta(n)$, $h_2(n) = h(n)$ και $h_3(n) = h(n)$ συνδέονται σε σειρά. (α) Να βρεθεί η απόκριση του σύνθετου συστήματος (β) Εάν αλλάξει η σειρά της διασύνδεσης των στοιχειωδών συστημάτων, η κρουστική απόκριση του σύνθετου συστήματος θα μεταβληθεί ή θα παραμείνει αμετάβλητη;

5.3 Χρονικώς αμετάβλητα γραμμικά διακριτά συστήματα

Μια ειδική κατηγορία συστημάτων διακριτού χρόνου, είναι εκείνα που είναι τόσο γραμμικά, όσο και αμετάβλητα ως προς τη μετατόπιση (Linear Shift Invariant Systems (LSI Systems) ή Linear Time Invariant Systems (LTI Systems)). Η ιδιότητά τους αυτή μας επιτρέπει να συνδυάσουμε την εξίσωση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (35)$$

που ισχύει για τα γραμμικά συστήματα με την εξίσωση $h_k(n) = h(n-k)$ (η εξίσωση αυτή προκύπτει από την ιδιότητα των αμετάβλητων ως προς τη μετατόπιση διακριτών συστημάτων σύμφωνα με την οποία εάν $h(n) = T[\delta(n)]$ τότε $h(n-k) = T[\delta(n-k)] = h_k(n)$) και να περιγράψουμε την έξοδο ενός τέτοιου συστήματος μέσω μιας εξίσωσης της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (36)$$

Η παραπάνω σχέση που είναι γνωστή και ως το άθροισμα της συνέλιξης (convolution sum) μπορεί να γραφεί και ως

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (37)$$

όπου το σύμβολο (*) αντιστοιχεί στον τελεστή της συνέλιξης (convolution), ενώ η ακολουθία των τιμών $h(n)$ ονομάζεται μοναδιαία κρουστική απόκριση. Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος αμετάβλητου ως προς τη μετατόπιση σε οποιαδήποτε είσοδο $x(n)$, μπορεί να ταυτοποιηθεί πλήρως, εφ' όσον είναι γνωστή η κρουστική απόκριση $h(n)$.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ έχουν πεπερασμένο μήκος M , η συνέλιξη ανάμεσά τους ορίζεται από τη σχέση

$$(x * h)(j) = \sum_{k=-(M/2)+1}^{M/2} x(k)h(j-k) \quad (38)$$

Εάν τώρα η κρουστική απόκριση $h(n)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές στην περιοχή $-(M/2) \leq k \leq (M/2)$ όπου το M παίρνει αρκετά μεγάλες τιμές, τότε αυτή η απόκριση είναι γνωστή ως πεπερασμένη κρουστική απόκριση (Finite Impulse Response, FIR), με διάρκεια M .

Τέλος, εάν οι συναρτήσεις $x(n)$ και $h(n)$ δεν είναι συνεχείς αλλά διακριτές, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το σύμβολο του αθροίσματος στην εξίσωση ορισμού της συνέλιξης, με την εξίσωση του ολοκληρώματος. Επομένως η συνέλιξη ανάμεσα στις συναρτήσεις συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $h(t)$ θα δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (39)$$

5.3.1 Παραδείγματα υπολογισμού της συνέλιξης

Σύμφωνα με την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης ενός χρονικώς αμετάβλητου γραμμικού διακριτού συστήματος, η έξοδος ενός τέτοιου συστήματος σε ακολουθία εισόδου $x(n)$ τη χρονική στιγμή $n = n_0$ θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k)$$

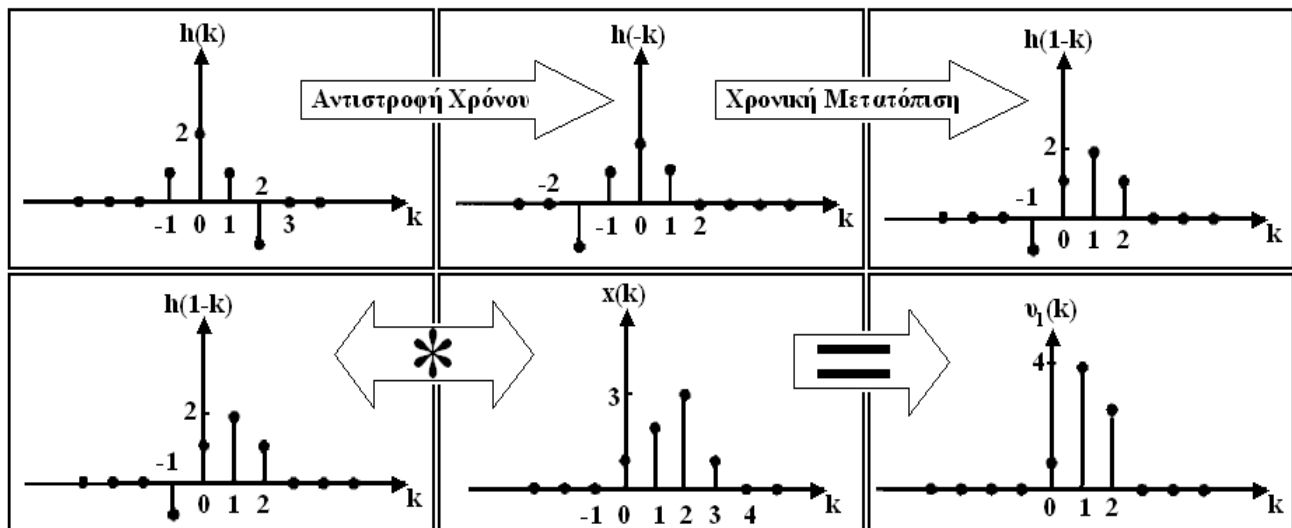
όπου $h(n)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος η οποία όπως έχει ήδη αναφερθεί, ορίζεται ως η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος που διαβιβάζεται σε αυτό είναι η διακριτή μοναδιαία ώση. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, η διαδικασία υπολογισμού της εξόδου $y(n_0)$ απαιτεί την πραγματοποίηση των ακόλουθων διαδικασιών:

- Αντιστροφή της κρουστικής απόκρισης $h(k)$ ως προς το χρόνο, έτσι ώστε να λάβουμε την αντεστραμμένη ακολουθία $h(-k)$.
- Χρονική μετατόπιση της αντεστραμμένης ακολουθίας κατά n_0 χρονικές μονάδες προς τα δεξιά (για θετικές τιμές του n_0) ή προς τα αριστερά (για αρνητικές τιμές του n_0) έτσι ώστε να δημιουργήσουμε το σήμα $h(n_0 - k)$.
- Πολλαπλασιασμό των διακριτών σημάτων $x(k)$ και $h(n_0 - k)$ δείγμα προς δείγμα. Με τον τρόπο αυτό θα λάβουμε μία νέα διακριτή ακολουθία $v_{n_0}(k)$ κάθε δείγμα της οποίας θα προκύπτει ως το γινόμενο των αντίστοιχων δειγμάτων των διακριτών σημάτων $x(k)$ και $h(n_0 - k)$. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στον προσδιορισμό των αντίστοιχων δειγμάτων ιδιαίτερα σε ακολουθίες πεπερασμένου μήκους που δεν αντιστοιχούν στην ίδια χρονική στιγμή έναρξης
- Πρόσθεση των τιμών των στοιχείων της διακριτής ακολουθίας $v_{n_0}(k)$ έτσι ώστε να υπολογίσουμε την τιμή της επιθυμητής εξόδου του συστήματος $y(n_0)$.

Εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει να εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε χρονική στιγμή n στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την παραπάνω διαδικασία, ας θεωρήσουμε ένα διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$ και ας προσδιορίσουμε την έξοδό του όταν διαβιβάζεται σε αυτό το διακριτό σήμα εισόδου $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$. Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας θα λάβει χώρα ως εξής:

- Υπολογισμός της εξόδου $y(0)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $n_0 = 0$:
 1. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση ως προς το χρόνο λαμβάνοντας το σήμα $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 2. Μετατοπίζουμε το διακριτό σήμα $h(-k)$ κατά $n_0 = 0$ χρονικές μονάδες λαμβάνοντας το σήμα $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 3. Πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων $x(k)$ και $h(k - n_0)$ λαμβάνοντας το σήμα $v_{n_0} = \{1 * 2, 2 * 1, 3 * 0, (-1) * 0\} = \{2, 2, 0, 0\}$.
 4. Πρόσθεση των στοιχείων της ακολουθίας v_{n_0} για να λάβουμε την έξοδο $y(0)$. Θα είναι λοιπόν $y(0) = 2 + 2 + 0 + 0 = 4$.
- Υπολογισμός της εξόδου $y(1)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $n_0 = 1$:
 1. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση ως προς το χρόνο λαμβάνοντας το σήμα $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 2. Μετατοπίζουμε το διακριτό σήμα $h(-k)$ κατά $n_0 = 1$ χρονικές μονάδες λαμβάνοντας το σήμα $h(1 - k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 3. Πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων $x(k)$ και $h(k - n_0)$ λαμβάνοντας το σήμα $v_{n_0} = \{1 * 1, 2 * 2, 3 * 1, 1 * 0\} = \{1, 4, 3, 0\}$.
 4. Πρόσθεση των στοιχείων της ακολουθίας v_{n_0} για να λάβουμε την έξοδο $y(1)$. Θα είναι λοιπόν $y(1) = 1 + 4 + 3 + 0 = 8$.
- Υπολογισμός της εξόδου $y(2)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $n_0 = 2$:
 1. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση ως προς το χρόνο λαμβάνοντας το σήμα $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 2. Μετατοπίζουμε το διακριτό σήμα $h(-k)$ κατά $n_0 = 2$ χρονικές μονάδες λαμβάνοντας το σήμα $h(2 - k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 3. Πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων $x(k)$ και $h(k - n_0)$ λαμβάνοντας το σήμα $v_{n_0} = \{(-1) * 1 + 1 * 2 + 2 * 3 + 1 * 1\} = \{-1, 2, 6, 1\}$.
 4. Πρόσθεση των στοιχείων της ακολουθίας v_{n_0} για να λάβουμε την έξοδο $y(2)$. Θα είναι λοιπόν $y(2) = -1 + 2 + 6 + 1 = 8$.
- Υπολογισμός της εξόδου $y(3)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $n_0 = 3$:
 1. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση ως προς το χρόνο λαμβάνοντας το σήμα $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$.
 2. Μετατοπίζουμε το διακριτό σήμα $h(-k)$ κατά $n_0 = 2$ χρονικές μονάδες λαμβάνοντας το σήμα $h(3 - k) = \{0, -1, 1, 2\}$.
 3. Πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων $x(k)$ και $h(k - n_0)$ λαμβάνοντας το σήμα $v_{n_0} = \{1 * 0, (-1) * 2, 1 * 3, 2 * 1\} = \{0, -2, 3, 2\}$.



$$v_1(k) = \{\dots, 0, 1, 4, 3, 0, 0, 0, 0, \dots\} \Rightarrow y(1) = 1 + 4 + 3 = 8$$

Σχήμα 22: Διαγραμματικός υπολογισμός της εξόδου διακριτού συστήματος

4. Πρόσθεση των στοιχείων της ακολουθίας v_{n_0} για να λάβουμε την έξοδο $y(3)$. Θα είναι λοιπόν $y(2) = 0 - 2 + 3 + 2 = 3$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για άλλες τιμές του n υπολογίζουμε τις τιμές $y(4) = -2$ και $y(5) = -1$. Διαπιστώνουμε ακόμη πως για τιμές $n_0 > 5$ τα δύο σήματα είναι ξένα μεταξύ τους και επομένως όλοι οι όροι της ακολουθίας v_{n_0} (και προφανώς το άθροισμά τους) έχουν μηδενική τιμή. Επομένως στην περιοχή τιμών $n_0 > 5$ θα είναι $y(n_0) = 0$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί και για τον υπολογισμό της εξόδου του συστήματος για αρνητικές τιμές του n_0 - στην περίπτωση αυτή όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μετατόπιση της ακολουθίας της κρουστικής απόκρισης θα πραγματοποιηθεί προς τα αριστερά. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως για $n = -1$ η έξοδος του συστήματος είναι η $y(-1) = 1$ ενώ για την περιοχή τιμών $n < -1$ είναι $y(n) = 0$. Επομένως η έξοδος του συστήματος για όλη την περιοχή τιμών $(-\infty < n < \infty)$ θα είναι $y(n) = \{\dots, 0, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$.

Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού της εξόδου $y(n)$ του διακριτού συστήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί και με διαγραμματικό τρόπο απεικονίζοντας τα σήματα της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με το συνήθη τρόπο αναπαράστασης των διακριτών σημάτων. Η διαγραμματική διαδικασία υπολογισμού της εξόδου $y(1)$ του ανωτέρω διακριτού συστήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 21.

Ο επόμενος πίνακας περιέχει τη συνέλιξη ανάμεσα σε γνωστά διακριτά σήματα που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά ως είσοδοι σε συστήματα διακριτού χρόνου.

Στις σελίδες που ακολουθούν θα δοθούν πολλά παραδείγματα αναλυτικού υπολογισμού της συνέλιξης ανάμεσα σε διακριτά σήματα. Σε αυτές τις διαδικασίες ιδιαίτερα χρήσιμες είναι αρκετές μαθηματικές σχέσεις υπολογισμού σειρών πεπερασμένων και απείρων όρων οι πιο σημαντικές εκ των οποίων παρουσιάζονται στη συνέχεια.

5.3.2 Ιδιότητες της συνέλιξης

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο, η συνέλιξη είναι ένας γραμμικός τελεστής, και επομένως θα χαρακτηρίζεται από την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα.

Αντιμεταθετική ιδιότητα: σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, η σειρά με την οποία εκτελείται η πράξη της συνέλιξης ανάμεσα σε δύο ακολουθίες, δεν έχει καμιά σημασία. Αυτή η ιδιότητα σε μαθηματική μορφή εκφράζεται ως

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (40)$$

Σε μια ισοδύναμη διατύπωση, η αντιμεταθετική ιδιότητα υποδηλώνει πως ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$ και με είσοδο $x(n)$, συμπεριφέρεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως ένα σύστημα με είσοδο $h(n)$ και κρουστική απόκριση $x(n)$.

Πίνακας 1: Η συνέλιξη μεταξύ γνωστών σημάτων διακριτού χρόνου

| $x_1(n)$ | $x_2(n)$ | $x_1(n) * x_2(n)$ |
|--|----------------------------|--|
| $x(n)$ | $\delta(n - N)$ | $x(n - N)$ |
| $e^{\lambda n} u(n)$ | $u(n)$ | $\frac{1 - e^{\lambda n}}{-\lambda} u(n)$ |
| $u(n)$ | $u(n)$ | $nu(n)$ |
| $e^{\lambda_1 n} u(n)$ | $e^{\lambda_2 n} u(n)$ | $\frac{e^{\lambda_1 n} - e^{\lambda_2 n}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(n) \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ |
| $e^{\lambda n} u(n)$ | $e^{\lambda n} u(n)$ | $ne^{\lambda n} u(n)$ |
| $ne^{\lambda n} u(n)$ | $e^{\lambda n} u(n)$ | $\frac{1}{2} n^2 e^{\lambda n} u(n)$ |
| $n^N u(n)$ | $e^{\lambda n} u(n)$ | $\frac{N! e^{\lambda n}}{\lambda^{N+1}} u(n) - \sum_{k=0}^N \frac{N! n^{N-k}}{\lambda^{k+1} (N-k)!} u(n)$ |
| $n^M u(n)$ | $n^N u(n)$ | $\frac{M! N!}{(N+M+1)!} n^{M+N+1} u(n)$ |
| $ne^{\lambda_1 n} u(n)$ | $e^{\lambda_2 n} u(n)$ | $\frac{e^{\lambda_2 n} - e^{\lambda_1 n} + (\lambda_1 - \lambda_2) n e^{\lambda_1 n}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} u(n)$ |
| $n^M e^{\lambda n} u(n)$ | $n^N e^{\lambda n} u(n)$ | $\frac{M! N!}{(N+M+1)!} n^{M+N+1} e^{\lambda n} u(n)$ |
| $n^M e^{\lambda_1 n} u(n)$ | $n^N e^{\lambda_1 n} u(n)$ | $\sum_{k=0}^M \frac{(-1)^k M! (N+k)! t^{M-k} e^{\lambda_1 n}}{k! (M-k)! (\lambda_1 - \lambda_2)^{M+k+1}} u(n) +$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k N! (M+k)! t^{N-k} e^{\lambda_2 n}}{k! (N-k)! (\lambda_2 - \lambda_1)^{N+k+1}} u(n) \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ |
| $e^{-\alpha n} \cos(\beta n + \vartheta) u(n)$ | $e^{\lambda n} u(n)$ | $\frac{\cos(\vartheta - \varphi) e^{\lambda n} - e^{\alpha n} \cos(\beta n + \vartheta - \varphi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} u(n)$ όπου $\varphi = \tan^{-1} \left[-\frac{\beta}{\alpha + \lambda} \right]$ |
| $e^{\lambda_1 n} u(n)$ | $e^{\lambda_2 n} u(-n)$ | $\frac{e^{\lambda_1 n} u(n) + e^{\lambda_2 n} u(-n)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (Re\{\lambda_2\} > Re\{\lambda_1\})$ |
| $e^{\lambda_1 n} u(-n)$ | $e^{\lambda_2 n} u(-n)$ | $\frac{e^{\lambda_1 n} - e^{\lambda_2 n}}{\lambda_2 - \lambda_1} u(-n)$ |

Προκειμένου να αποδείξουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα θα πρέπει να ξεκινήσουμε από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

και να αλλάξουμε το βωβό δείκτη του αθροίσματος από k σε m με τους δύο δείκτες να συσχετίζονται δια μέσου της σχέσεως $m = n - k$. Θα είναι τότε $k = n - m$ και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

όπου στο δεύτερο άθροισμα έχουμε αλλάξει το βωβό δείκτη του αθροίσματος από m σε k .

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει το συμπέρασμα πως η έξοδος του συστήματος θα είναι παρόμοια με εκείνη που θα προκύψει εάν διατηρήσουμε αναλλοίωτη την ακολουθία της κρουστικής απόκρισης και εφαρμόσουμε τις πράξεις της χρονικής αντιστροφής και χρονικής μετατόπισης πάνω στο διακριτό σήμα εισόδου. Η αντιμεταθετική ιδιότητα παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στην εικόνα (α) του σχήματος 23.

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που είναι σημαντικό να αναφερθεί, είναι η διαπίστωση πως αν και οι έξοδοι των δύο παραπάνω συστημάτων - δηλαδή εκείνου που δέχεται είσοδο $x(n)$ και έχει κρουστική απόκριση $h(n)$ και εκείνου που έχει κρουστική απόκριση $x(n)$ και δέχεται είσοδο $h(n)$ - είναι ταυτόσημες, εν τούτοις, οι ακολουθίες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των σημάτων $x(n)$ και $h(n)$ δεν είναι οι ίδιες αλλά - όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί - δίδονται από τις σχέσεις

$$v_n(k) = x(k)h(n-k) \quad \text{και} \quad \omega_n(k) = x(n-k)h(k)$$

Πίνακας 2: Σειρές πεπερασμένων και απείρων όρων

| | |
|--|---|
| $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad \alpha < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} n\alpha^n = \frac{(N-1)\alpha^{N+1} - N\alpha^N + \alpha}{(1 - \alpha)^2}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad \alpha < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$ | $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$ |

Επειδή δε οι δύο ακολουθίες συσχετίζονται ως

$$v_n(k) = x(k)h(n-k) = x[n - (n-k)]h(n-k) = \omega_n(n-k)$$

η έξοδος του διακριτού συστήματος μπορεί να λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_n(n-k)$$

Άσκηση 38 Να αποδείξετε στην πράξη την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης θεωρώντας τα διακριτά σήματα $h_1(n) = (1/2)^n u(n)$ και $h_2(n) = (1/4)^n u(n)$.

Απάντηση: Προκειμένου να αποδείξουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης θα πρέπει να δείξουμε ότι $h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

$$h_1(n) * h_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u(n-k)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ είναι $u(k) = 0$ ενώ για $k > n$ είναι $u(n-k) = 0$. Επομένως η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$h_1(n) * h_2(n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n 2^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n (2^{n+1} - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad n \geq 0$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο έχουμε

$$h_2(n) * h_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k)h_1(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k u(k) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k)$$

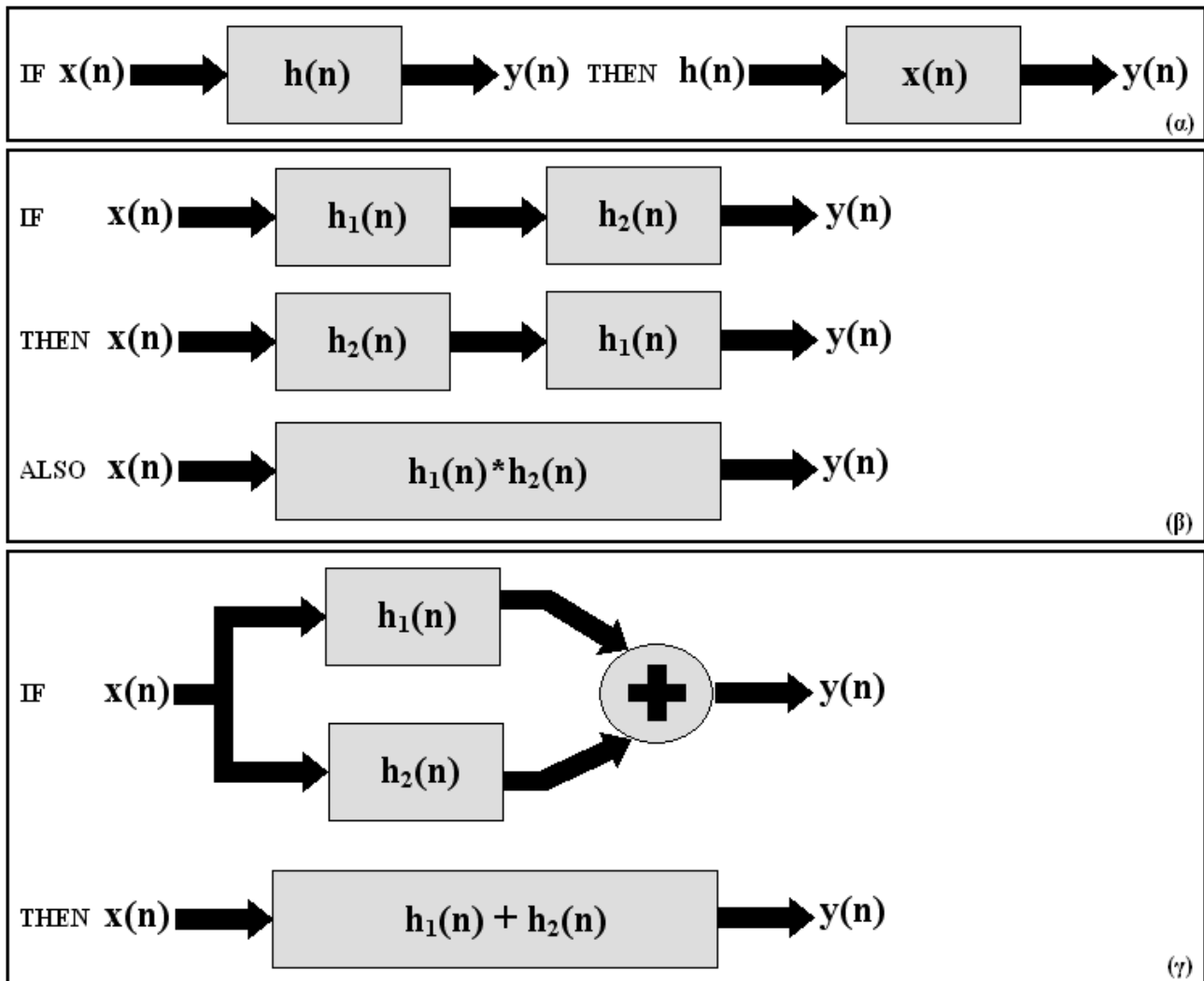
Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της προηγούμενης περίπτωσης μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$\begin{aligned} h_2(n) * h_1(n) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)}\right] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα: η ιδιότητα αυτή της συνέλιξης περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \quad (41)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$ συνδεθούν σε σειρά, το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει ως κρουστική απόκριση τη συνέλιξη μεταξύ των $h_1(n)$ και $h_2(n)$. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται διαγραμματικά στην εικόνα (β) του σχήματος 23. Γενικεύοντας την παραπάνω ιδιότητα για την περίπτωση L διακριτών συστημάτων που συνδέονται στη σειρά, μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση πως η κρουστική απόκριση του σύνθετου συστήματος που προκύπτει από την παραπάνω σύνθεση θα δίδεται από τη



Σχήμα 23: Διαγραμματική αναπαράσταση των βασικών ιδιοτήτων της συνέλιξης

σχέση $h(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n) * \dots * h_L(n)$. Σε μια τέτοια περίπτωση, η προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης μας επιτρέπει να συνδέσουμε τα επιμέρους συστήματα σε σειρά με όποια διάταξη επιθυμούμε καθώς όλες αυτές οι διαφορετικές διατάξεις σύνδεσης είναι μεταξύ τους ισοδύναμες και οδηγούν στην ίδια έξοδο.

Προκειμένου να αποδείξουμε την προσεταιριστική ιδιότητα ας γράψουμε τις παραστάσεις $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$ και $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης. Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος ας θέσουμε

$$x(n) * h_1(n) = y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_1(n-k)$$

Θα είναι τότε

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = y_1(n) * h_2(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1(l)h_2(n-l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_1(l-k) \right) h_2(n-l)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, για το δεξί μέλος θα έχουμε

$$h_1(n) * h_2(n) = y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k)$$

και

$$x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = x(n) * y_2(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y_2(n-l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k-l) \right)$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την ισχύ της προσεταιριστικής ιδιότητας θα πρέπει να δείξουμε πως οι σχέσεις που εξαγάγαμε για τα δύο μέλη της ταυτίζονται μεταξύ τους, ή ισοδύναμα ότι

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-k-l) \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_1(l-k) \right) h_2(n-l)$$

Για να το κάνουμε αυτό ας προχωρήσουμε σε αλλαγή του βωβού δείκτη από k σε q , θέτοντας $q = l + k$. Θα είναι τότε

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-k-l) \right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} h_1(q-l) h_2(n-q) \right) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(l) h_1(q-l) h_2(n-q) = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) h_1(q-l) h_2(n-q) = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) h_1(q-l) \right) h_2(n-q) \end{aligned}$$

Εάν στο τελευταίο άθροισμα προχωρήσουμε σε ταυτόχρονη αλλαγή των βωβών δεικτών από q σε l και από l σε k θα λάβουμε

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-k-l) \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_1(l-k) \right) h_2(n-l)$$

ή ισοδύναμα $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Επιμεριστική ιδιότητα: η ιδιότητα αυτή της συνέλιξης περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (42)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, εάν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$ συνδεθούν παράλληλα, το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει ως κρουστική απόκριση το άθροισμα των $h_1(n)$ και $h_2(n)$.

Η επιμεριστική ιδιότητα αποδεικνύεται πάρα πολύ εύκολα από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) [h_1(n-k) + h_2(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) h_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) h_2(n-k) = \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

Γενικεύοντας το παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση πως η απόκριση ενός σύνθετου συστήματος που προκύπτει από την παράλληλη σύνδεση L διακριτών συστημάτων με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n), h_2(n), h_3(n), \dots, h_L(n)$ σε σήμα εισόδου $x(n)$, θα δίδεται από τη σχέση $y(n) = h(n) * x(n)$ όπου $h(n) = \sum_{j=1}^L h_j(n) = h_1(n) + h_2(n) + \dots + h_L(n)$. Αυτή η κατάσταση για πλήθος διακριτών συστημάτων $L = 2$ απεικονίζεται με διαγραμματικό τρόπο στην εικόνα (β) του σχήματος 23.

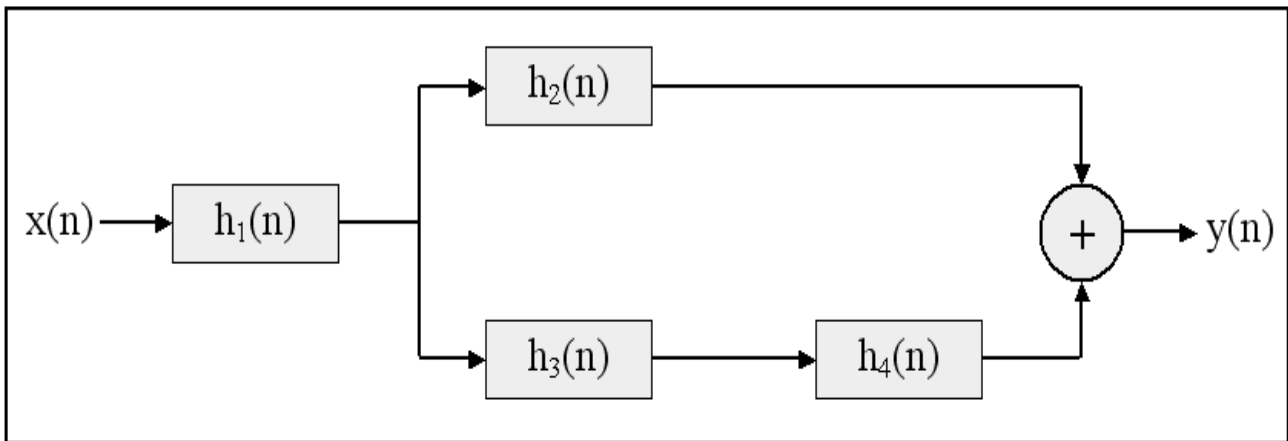
Άσκηση 39 Δίδονται τα διακριτά σήματα

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \quad h_2(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) \quad h_3(n) = 5nu(n)$$

Να αποδείξετε στην πράξη την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα υπολογίζοντας τις ποσότητες $[h_1(n) * h_2(n)] * h_3(n)$, $h_1(n) * [h_2(n) * h_3(n)]$, $h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n)]$ και $h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n)$.

Άσκηση 40 Ας θεωρήσουμε τη συνδεσμολογία των γραμμικών και χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων του σχήματος 24.

- Να εκφράσετε την κρουστική απόκριση του σύνθετου συστήματος ως συνάρτηση των κρουστικών αποκρίσεων $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ και $h_4(n)$.



Σχήμα 24: Παράδειγμα διασύνδεσης γραμμικών και χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων

- Να προσδιορίσετε τη συναρτησιακή μορφή της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ όταν οι κρουστικές αποκρίσεις των τριών στοιχειωδών συστημάτων δίδονται από τις σχέσεις

$$h_1(n) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\} \quad h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n) \quad h_4(n) = \delta(n-2)$$

- Να προσδιορίσετε την απόκριση του σύνθετου συστήματος όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα $x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$

5.3.3 Αιτιατά και ευσταθή χρονικώς αμετάβλητα γραμμικά συστήματα

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα, η έξοδος ενός αιτιατού συστήματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο καθώς και από εισόδους που έχουν διαβιβασθεί στο σύστημα σε προηγούμενες χρονικές στιγμές $n \leq n_0$. Εάν επιπλέον το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο ως προς το χρόνο τότε η έξοδος του τη χρονική στιγμή n_0 θα δίδεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

Επειδή όμως το σύστημά μας είναι αιτιατό, η έξοδος του θα πρέπει να δίδεται μόνο από το δεύτερο άθροισμα που περιέχει μόνο την τρέχουσα και τις προηγούμενες εισόδους του. Αντίθετα, το πρώτο άθροισμα δεν θα πρέπει να υφίσταται, καθώς οι τιμές $x(n_0 - k)$ που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του δείκτη k αναφέρονται σε μελλοντικές εισόδους του συστήματος η ύπαρξη των οποίων καθιστά το σύστημα μη αιτιατό. Είναι προφανές πως για να απομακρύνουμε το πρώτο άθροισμα από την παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να επιβάλλουμε τον περιορισμό $h(k) = 0$ για $k < 0$, συνθήκη, που συνιστά και τη βασική προϋπόθεση που θα πρέπει να πληροί ένα σύστημα για να είναι αιτιατό. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή n θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n - k)$$

Εάν σε ένα αιτιατό σύστημα διαβιβασθεί ως είσοδος ένα αιτιατό σήμα, δηλαδή μια διακριτή ακολουθία $x(n)$ με μηδενικές τιμές για $n > 0$ και μηδενικές τιμές για $n < 0$, τα όρια στα παραπάνω αθροίσματα θα περιοριστούν ακόμη περισσότερο και η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n - k) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n - k)$$

Μετά την περιγραφή των αιτιατών χρονικώς αμετάβλητων γραμμικών συστημάτων ας περιγράψουμε τώρα τη συμπεριφορά ενός γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου διακριτού συστήματος που χαρακτηρίζεται από ευσταθή συμπεριφορά. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε ένα τέτοιο σύστημα η διαβίβαση φραγμένης εισόδου θα οδηγήσει στην

εμφάνιση φραγμένης εξόδου, ιδιότητα που μαθηματικώς διατυπώνεται ως $|x(n)| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y(n)| \leq M_y < \infty$. Εάν το ευσταθές σύστημα είναι ένα γραμμικό σύστημα αμετάβλητο ως προς το χρόνο η έξοδος του θα δίδεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

και επομένως το μέτρο της θα ικανοποιεί την ιδιότητα

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

(αφού η είσοδος του είναι φραγμένη και επομένως θα είναι $|x(n)| \leq M_x \forall n \in N$). Επομένως ένα γραμμικό και αμετάβλητο ως προς το χρόνο διακριτό σύστημα είναι ευσταθές όταν το άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων της κρουστικής του απόκρισης είναι πεπερασμένο. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς, πως αυτή η συνθήκη - η οποία σε μαθηματική διατύπωση γράφεται ως $S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ - δεν είναι μόνο ικανή αλλά και αναγκαία καθώς αποδεικνύεται πως εάν είναι $S_h = \infty$ υπάρχει τουλάχιστον μία φραγμένη είσοδος για την οποία η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη. Ως μία τέτοια είσοδος θεωρήσουμε το διακριτό σήμα

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(n)}{|h(n)|} & h(n) \neq 0 \\ 0 & h(n) = 0 \end{cases}$$

όπου $h^*(n)$ είναι η μιγαδική συζυγής ακολουθία της κρουστικής απόκρισης $h(n)$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως για τη χρονική στιγμή $n = 0$ η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη καθώς

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = S_h = \infty$$

και επομένως το σύστημά μας δεν είναι ευσταθές.

Άσκηση 41 Να προσδιορίσετε την περιοχή τιμών της παραμέτρου α για την οποία το γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n) = \alpha^n u(n)$ είναι ευσταθές.

Απάντηση: Προκειμένου να αποδείξουμε πως το σύστημα είναι ευσταθές να πρέπει να δείξουμε πως ικανοποιεί τη συνθήκη ευστάθειας $S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$. Ωστόσο, επειδή το σύστημά μας είναι αιτιατό (αφού η τρέχουσα έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο) το κάτω όριο στο παραπάνω άθροισμα θα έχει τιμή $k_{min} = 0$ και επομένως η συνάρτηση $u(n)$ θα έχει τιμή ίση με τη μονάδα. Επομένως η συνθήκη ευστάθειας θα λάβει τη μορφή

$$S_h = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha^k u(n)| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = 1 + |\alpha| + |\alpha|^2 + |\alpha|^3 + \dots = \frac{1}{1-|\alpha|}$$

όπως εύκολα προκύπτει χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο από το μαθηματικό τυπολόγιο. Είναι προφανές πως η παραπάνω σειρά συγκλίνει όταν ισχύει η σχέση $|\alpha| < 1$. Επομένως το σύστημά μας είναι ευσταθές όταν ισχύει η συνθήκη $|\alpha| < 1$ και ασταθές στην αντίθετη περίπτωση.

Άσκηση 42 Να προσδιορίσετε την περιοχή τιμών των παραμέτρων α και β για τις οποίες το γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ \beta^n & n < 0 \end{cases}$$

είναι ευσταθές.

Απάντηση: Στην προκειμένη περίπτωση το σύστημά μας δεν είναι αιτιατό και η συνθήκη ευστάθειας θα λάβει τη μορφή

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\beta|^n + \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^n$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την περιοχή τιμών της μεταβλητής β για την οποία το πρώτο άθροισμα συγκλίνει, μπορούμε να γράψουμε το εν λόγω άθροισμα με τη μορφή

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |\beta|^n = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta|^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta|^n} = \frac{1}{|\beta|} \left(1 + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\beta|^2} + \frac{1}{|\beta|^3} + \dots \right) = \gamma(1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \dots) = \frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

όπως προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο. Προκειμένου να συγκλίνει η παραπάνω σειρά θα πρέπει να είναι $\gamma = (1/|\beta|) < 1$ ή ισοδύναμα $|\beta| > 1$. Όσον αφορά το δεύτερο άθροισμα, αυτό χρησιμοποιήθηκε και στην προηγούμενη άσκηση όπου είδαμε πως η σειρά που προκύπτει από αυτό συγκλίνει για την περιοχή τιμών $|\alpha| < 1$. Επομένως για να είναι ευσταθές το σύστημά μας, θα πρέπει οι συνθήκες $|\alpha| < 1$ και $|\beta| > 1$ να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

5.3.4 Συνέλιξη και μετασχηματισμός Fourier

Σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης (convolution theorem), ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης δύο συναρτήσεων είναι ίσος με το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier της κάθε συνάρτησης ξεχωριστά. Εάν λοιπόν $X(f)$ και $H(f)$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $h(t)$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης θα ισχύει η σχέση

$$x * h \Leftrightarrow X(f)H(f) \quad (43)$$

όπου το σύμβολο (\rightarrow) αναφέρεται στον ευθύ μετασχηματισμό Fourier ενώ το σύμβολο (\leftarrow) αναφέρεται στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι συναρτήσεις x και h είναι συναρτήσεις διακριτού χρόνου, το θεώρημα της συνέλιξης διατυπώνεται με την ακόλουθη μορφή: εάν η συνάρτηση $x(n)$ είναι περιοδική με περίοδο N έτσι ώστε να καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$, τότε η διακριτή της συνέλιξη με μια διακριτή πεπερασμένη κρουστική απόκριση διάρκειας N , συσχετίζεται με τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier X_n και H_n των συναρτήσεων $x(n)$ και $h(n)$ αντίστοιχα, μέσω της σχέσης

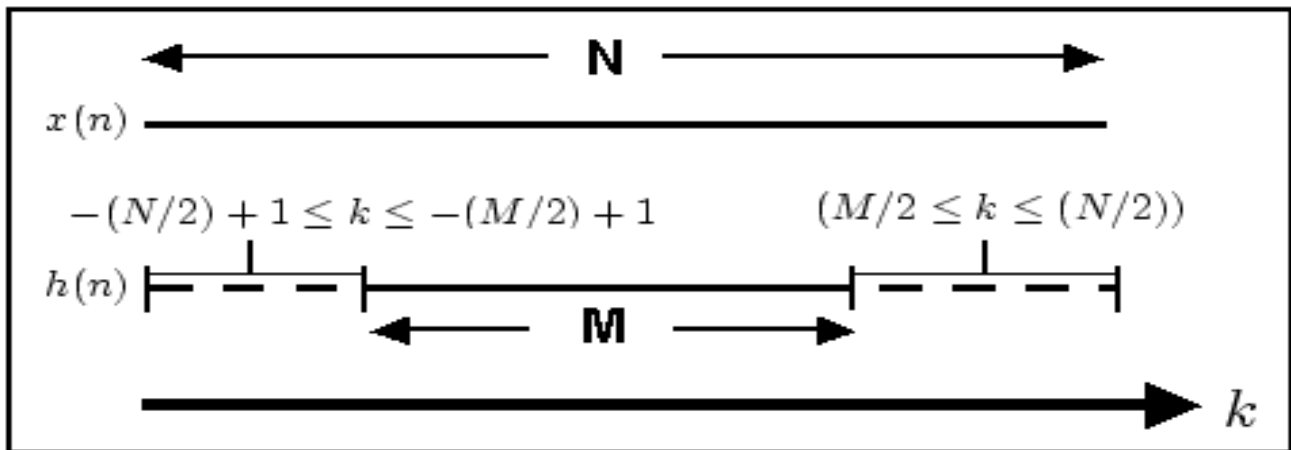
$$\sum_{k=-(N/2)+1}^{(N/2)} h(j-k)x(k) \Leftrightarrow H_n X_n \quad (44)$$

όπου ξανά το σύμβολο (\rightarrow) αναφέρεται στον ευθύ μετασχηματισμό Fourier ενώ το σύμβολο (\leftarrow) αναφέρεται στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Το βασικό χαρακτηριστικό του διακριτού θεωρήματος συνέλιξης είναι η υπόθεση της ισχύος δύο βασικών ιδιοτήτων: (α) η διακριτή συνάρτηση $x(n)$ θεωρείται περιοδική με περίοδο N και (β) η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ είναι ίση με την περίοδο (δηλαδή το πλήθος δεδομένων) της συνάρτησης $x(n)$. Αυτές όμως οι δύο ιδιότητες, συνήθως δεν ισχύουν στην πράξη. Σε μια πραγματική κατάσταση, η καταγραφή των δεδομένων δεν αναδεικνύει κανένα ίχνος περιοδικότητας, με αποτέλεσμα τη δημιουργία χρονοσειρών πεπερασμένου μήκους οι οποίες δεν είναι περιοδικές. Από την άλλη πλευρά, η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης, M , είναι συνήθως πολύ μικρότερη από το πλήθος των δεδομένων που συσχετίζονται με τη συνάρτηση $x(n)$.

Από την παραπάνω συζήτηση είναι προφανές, πως για να εφαρμόσουμε το διακριτό θεώρημα της συνέλιξης σε μια πραγματική κατάσταση, θα πρέπει να πραγματοποιηθούν ορισμένες διαδικασίες. Για παράδειγμα, εάν η διάρκεια M της κρουστικής απόκρισης είναι πολύ μικρότερη από το πλήθος N των δεδομένων της συνάρτησης $x(n)$, μπορούμε να προσθέσουμε μηδενικά στα δύο άκρα της ακολουθίας $h(n)$, έτσι ώστε το μήκος της να γίνει ίσο με το μήκος της ακολουθίας $x(n)$. Αυτό σε μαθηματική διατύπωση σημαίνει πως θα πρέπει να ισχύει η σχέση $h(n) = 0$ για τις περιοχές $(M/2 \leq k \leq (N/2))$ και $-(N/2) + 1 \leq k \leq -(M/2) + 1$. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 25.

Η παραπάνω τεχνική θα εφαρμοσθεί με επιτυχία στην περίπτωση κατά την οποία η χρονοσειρά που συσχετίζεται με τη συνάρτηση $x(n)$, είναι περιοδική με περίοδο N . Εάν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, τότε η έξοδος του συστήματος (και πιο συγκεκριμένα το πρώτο στοιχείο της συνέλιξης $x(n) * h(n)$) υφίσταται αλλοίωση λόγω των τιμών που βρίσκονται καταχωρημένες στις τελευταίες θέσεις του πίνακα $x[n]$, και οι οποίες είναι οι x_{N-1}, x_{N-2} , κ.λ.π. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές με την τιμή 0 έτσι ώστε να απομακρύνουμε τις αλλοιώσεις που οφείλονται στην απουσία περιοδικότητας. Όσον αφορά το πλήθος των στοιχείων στα οποία θα αποδώσουμε την τιμή 0, αυτό εξαρτάται από τη μέγιστη τιμή του αρνητικού δείκτη για την οποία η κρουστική απόκριση του συστήματος έχει μη μηδενική τιμή. Εάν για παράδειγμα η τιμή $h(-3)$ είναι μη μηδενική ενώ όλες οι προηγούμενες τιμές ($h(-4), h(-5), h(-6), \dots$) είναι ίσες με το μηδέν, τότε θα πρέπει να μηδενίσουμε τις τιμές $x(N-3), x(n-2)$ και $x(n-1)$. Μιλώντας γενικά, εάν K είναι το πλήθος των μηδενικών που θα πρέπει να



Σχήμα 25: Προσαρμογή του μήκους της χρουστικής απόκρισης $h(n)$ έτσι ώστε να εξισωθεί με το μήκος της διακριτής συνάρτησης $x(n)$

προσθέσουμε στην χρουστική απόκριση για να καταστήσουμε τη διάρκειά της, M , ίση με το πλήθος των δειγμάτων, N , τότε το πραγματικό πλήθος των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό της συνέλιξης, είναι ίσο με $N - K - 1$.

Μετά την πραγματοποίηση της παραπάνω διαδικασίας, η διακριτή συνάρτηση $x(n)$ περιέχει ένα πλήθος πραγματικών δεδομένων (ορισμένα από τα οποία έχουν μηδενικές τιμές σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο), ενώ η χρουστική απόκριση $h(n)$ έχει και αυτή διαμορφωθεί ανάλογα, έτσι ώστε η διάρκειά της να είναι ίση με το πλήθος των δεδομένων της συνάρτησης $x(n)$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη των διακριτών συναρτήσεων $x(n)$ και $h(n)$ με τον εξής τρόπο: (α) για κάθε μια από τις συναρτήσεις $x(n)$ και $h(n)$, υπολογίζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (β) Πολλαπλασιάζουμε τους δύο μετασχηματισμούς Fourier στοιχείο με στοιχείο και (γ) εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier επί του παραπάνω γινομένου. Το αποτέλεσμα της τελευταίας διαδικασίας, είναι η συνέλιξη $x(n) * h(n)$.

Είναι προφανές πως επειδή οι συντελεστές Fourier είναι μιγαδικοί αριθμοί, το γινόμενο των δύο μετασχηματισμών Fourier για τις συναρτήσεις $x(n)$ και $h(n)$, θα είναι και αυτό ένας πίνακας μιγαδικών αριθμών. Μιλώντας γενικά, εάν a και b είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με πραγματικά μέρη $Re[a]$ και $Re[b]$ και φανταστικά μέρη $Im[a]$ και $Im[b]$, το γινόμενό τους θα είναι ένας μιγαδικός αριθμός c , με πραγματικό μέρος $Re[c] = Re[a]Re[b] - Im[a]Im[b]$ και φανταστικό μέρος $Im[c] = Re[a]Im[b] + Im[a]Re[b]$. Αυτές οι εξισώσεις θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν κατά τον υπολογισμό του γινομένου των δύο μετασχηματισμών Fourier.

Άσκηση 43 Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(n) = u(n)$$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k)u(n-k)$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε πως για $k < 0$ το παραπάνω άθροισμα μηδενίζεται αφού είναι $u(k) = 0$ ενώ το ίδιο ισχύει και για $k > n \Rightarrow n - k < 0$ αφού τότε θα είναι $u(n-k) = 0$.

Από την άλλη πλευρά, για $n \geq 0$ θα είναι $u(n) = 1$ και η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις θα λάβουμε την εξίσωση

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u(n)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 44 Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων

$$x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-6} u(n) \quad \text{και} \quad h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-3)$$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-6} u(k) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k-3)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το κάτω όριο του αθροίσματος θα γίνει $k=0$ - αφού για $k < 0$ είναι $u(k) = 0$ - ενώ το άνω όριο του αθροίσματος θα γίνει $k = n-3$ - αφού για $k > n-3$ θα είναι $u(n-k-3) = 0$. Επομένως η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-6} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = 6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \\ &= 6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - (1/2)^{n-2}}{1 - (1/2)} = 2 * 6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

για την περιοχή τιμών $n \geq 3$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 45 Να υπολογισθεί η έξοδος ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου διακριτού συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = u(-n-1)$, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί το διακριτό σήμα $x(n) = -n3^n u(-n)$.

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k3^k u(-k) u(-n-1-k)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε πως η συνάρτηση $u(-k)$ έχει μηδενική τιμή για $k > 0$ ενώ το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $u(-n-1-k)$ και για την περιοχή τιμών $k < n+1$. Επομένως η έξοδος του συστήματος θα έχει μη μηδενική τιμή στην περιοχή $n+1 \leq k \leq 0$ ($n \leq -2$) για την οποία θα είναι $u(-k) = u(-n-1-k) = 1$ και θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=n+1}^0 -k3^k = \sum_{m=0}^{-n-1} m \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{(-n-1)(1/3)^{-n+1} + n(1/3)^{-n} + (1/3)}{[1 - (1/3)]^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(2n-1)^{-n} \quad (n \leq 2)$$

όπου προχωρήσαμε στην αλλαγή του βωβού δείκτη από $-k$ σε m και υπολογίσαμε το άθροισμα της εξίσωσης χρησιμοποιώντας το μαθηματικό τυπολόγιο των προηγούμενων σελίδων.

Άσκηση 46 Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων

$$x(n) = (0.9)^n u(n) \quad \text{και} \quad h(n) = nu(n)$$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0.9)^k u(k)(n-k)u(n-k)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ θα είναι $u(k) = 0$ ενώ για $k > n$ είναι $u(n-k) = 0$. Επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται με τη μορφή

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n (n-k)(0.9)^k = n \sum_{k=0}^n (0.9)^k - \sum_{k=0}^n k(0.9)^k = n \frac{1 - (0.9)^{n+1}}{1 - 0.9} - \frac{n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9}{(1 - 0.9)^2} = \\ &= 10n[1 - (0.9)^{n+1}] - 100[n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9] = [10n - 90 + 90(0.9)^n]u(n) \end{aligned}$$

όπου ξανά ο υπολογισμός των αθροισμάτων έγινε χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες εξισώσεις του μαθηματικού τυπολογίου.

Άσκηση 47 Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad \text{και} \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n-101)]$$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα έχουμε

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k [u(k) - u(k-101)] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ είναι $u(k) = 0$ ενώ για $k > 100$ είναι $u(k-101) = 0$. Επομένως η έξοδος του συστήματος θα λαμβάνει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $0 \leq k \leq 100$ και θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k)$$

Η τελευταία σχέση περιέχει τη συνάρτηση βήματος $u(n-k)$ η οποία θα έχει τιμή $u = 0$ ή $u = 1$ ανάλογα με το διάστημα τιμών στο οποίο αναφερόμαστε. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- $n < 0$: σε αυτή την περιοχή τιμών θα είναι $n-k < 0$ (αφού είναι $0 \leq k \leq 100$) και επομένως το άθροισμα μηδενίζεται.
- $0 \leq n \leq 100$: σε αυτή την περιοχή τιμών η συνάρτηση $u(n-k)$ είναι ίση με τη μονάδα για $k \leq n$ ενώ έχει μηδενική τιμή για $k > n$. Θα είναι λοιπόν

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - (2/3)} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

- $n > 100$: σε αυτή την περιοχή τιμών η συνάρτηση $u(n-k)$ έχει τιμή ίση με τη μονάδα για κάθε k στο διάστημα $[0, 100]$ και επομένως η έξοδος του συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 - (2/3)^{101}}{1 - (2/3)} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{101}\right]$$

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες εξισώσεις οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] & 0 \leq n \leq 100 \\ 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{101}\right] & n > 100 \end{cases}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

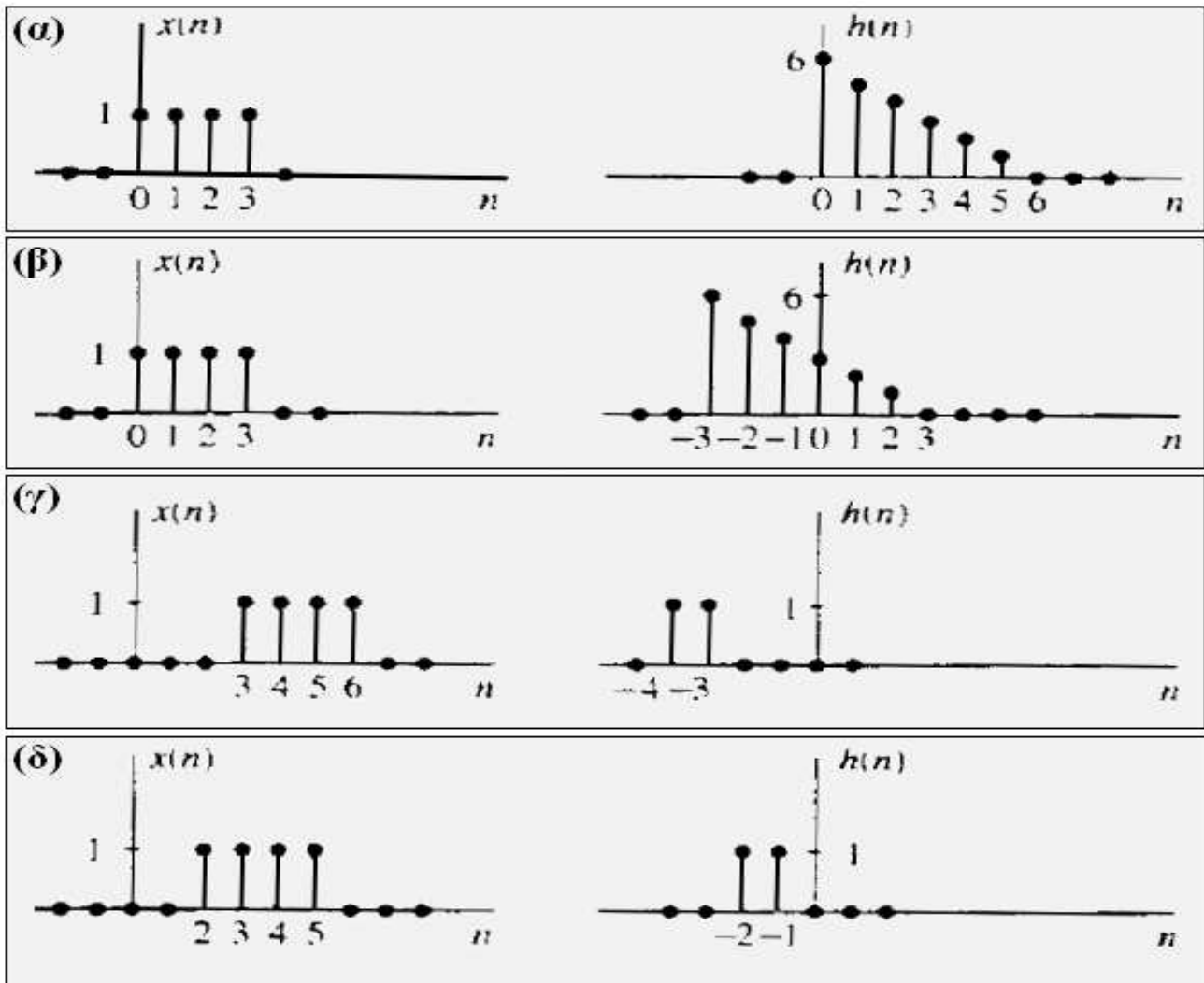
Άσκηση 48 Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(n)$ και $h(n)$ που απεικονίζονται στις εικόνες (α), (β), (γ) και (δ) του σχήματος 23.

Άσκηση 49 Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n & -3 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad \text{και} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Απάντηση: Από τις εξισώσεις ορισμού των δύο σημάτων δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως αυτά θα περιέχουν τις τιμές $x(n) = \{\alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \mathbf{1}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\}$ και $h(n) = \{\mathbf{1}, 1, 1, 1, 1\}$ με τον αριθμό με την έντονη γραφή να αντιστοιχεί στην τιμή $n = 0$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$



Σχήμα 26: Ζεύγη διακριτών σημάτων των οποίων ζητείται η συνέλιξη

μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα πως στην πραγματικότητα τα όρια του παραπάνω αθροίσματος θα κυμαίνονται από $k_{min} = 0$ έως $k_{max} = 4$, αφού σε αυτή την περιοχή τιμών το σήμα $h(k)$ διαθέτει μη μηδενικές τιμές. Όσον αφορά την περιοχή τιμών του n για την οποία το σήμα $x(n)$ έχει και αυτό μη μηδενικές τιμές έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της συνέλιξης, αυτά προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις $n_1 - k_{min} = -3 \Rightarrow n_1 = -3 + k_{min} = -3$ και $n_2 - k_{max} = 5 \Rightarrow n_2 = 5 + k_{max} = 5 + 4 = 9$. Επομένως τελικά, η συνέλιξη των δύο διακριτών σημάτων θα έχει τη μορφή

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^4 h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^4 x(n-k) & -3 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

(αφού για $0 \leq k \leq 4$ είναι $h(k) = 1$). Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε ένα προς ένα

όλα τα στοιχεία της διακριτής ακολουθίας $y(n)$ τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} y(-3) &= x(-3) + x(-4) + x(-5) + x(-6) + x(-7) = \alpha^{-3} \\ y(-2) &= x(-2) + x(-3) + x(-4) + x(-5) + x(-6) = \alpha^{-2} + \alpha^{-3} \\ y(-1) &= x(-1) + x(-2) + x(-3) + x(-4) + x(-5) = \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^{-3} \\ y(0) &= x(0) + x(-1) + x(-2) + x(-3) + x(-4) = 1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^{-3} \\ y(1) &= x(1) + x(0) + x(-1) + x(-2) + x(-3) = \alpha + 1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^{-3} \\ y(2) &= x(2) + x(1) + x(0) + x(-1) + x(-2) = \alpha^2 + \alpha^1 + 1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-2} \\ y(3) &= x(3) + x(2) + x(1) + x(0) + x(-1) = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^{-1} \\ y(4) &= x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0) = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ y(5) &= x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha \\ y(6) &= x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 \\ y(7) &= x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 \\ y(8) &= x(8) + x(7) + x(6) + x(5) + x(4) = \alpha^5 + \alpha^4 \\ y(9) &= x(9) + x(8) + x(7) + x(6) + x(5) = \alpha^5 \end{aligned}$$

Άσκηση 50 Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα

$$x(n) = \alpha^n u(n) \quad \text{και} \quad h(n) = \beta^n u(n)$$

για τις περιπτώσεις $\alpha = \beta$ και $\alpha \neq \beta$.

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ορισμού της συνέλιξης θα λάβουμε

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k) \beta^{n-k} u(n-k)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως για $k < 0$ θα είναι $u(k) = 0$ ενώ για $k > n$ θα είναι $u(n-k) = 0$. Επομένως η συνέλιξη των δύο σημάτων θα ορίζεται ως

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^n \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n (\alpha \beta^{-1})^k$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1η: $\alpha = \beta$: Θα είναι $\alpha \beta^{-1} = \alpha \alpha^{-1} = 1$ και επομένως

$$y(n) = \beta^n \sum_{k=0}^n 1^k = \beta^n (n+1)$$

- Περίπτωση 2η: $\alpha \neq \beta$: Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση από το μαθηματικό τυπολόγιο θα λάβουμε

$$y(n) = \beta^n \frac{1 - (\alpha \beta^{-1})^{n+1}}{1 - (\alpha \beta^{-1})} = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \beta^n \frac{\beta(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})}{\beta^{n+1} * (\beta - \alpha)} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

Επομένως, τελικά, η συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα $x(n)$ και $h(n)$ θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = x(n) * h(n) = \begin{cases} \beta^n (n+1) & \alpha = \beta \\ \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 51 Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα διακριτά σήματα

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = -2, 0, 1 \\ 2 & n = -1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad \text{και} \quad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Απάντηση: Από τη μαθηματική έκφραση του σήματος $x(n)$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως σε μορφή διακριτής ακολουθίας θα γράφεται ως $x(n) = \{1, 2, 1, 1\}$. Από την άλλη πλευρά, το σήμα $h(n)$ έχει τη μορφή

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) = 1*\delta(n) + (-1)*\delta(n-1) + 0*\delta(n-2) + 0*\delta(n-3) + 1*\delta(n-4) + 1*\delta(n-5)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν πως κάθε διακριτό σήμα αναλύεται σε γραμμικό συνδυασμό χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων μοναδιαίας ώσης οι συντελεστές του οποίου αποτελούν και τα δεδομένα της διακριτής ακολουθίας, μπορούμε να γράψουμε το σήμα $h(n)$ με τη μορφή $h(n) = \{1, -1, 0, 0, 1, 1\}$. Επομένως τα δύο σήματα γράφονται ως

$$x(n) = \{1, 2, 1, 1\} \quad \text{και} \quad h(n) = \{1, -1, 0, 0, 1, 1\}$$

και η συνέλιξη τους θα υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Από τη μαθηματική αναπαράσταση των δύο σημάτων διαπιστώνουμε πως τα όρια του παραπάνω αθροίσματος θα κυμαίνονται από $k_{min} = -2$ σε $k_{max} = 1$, αφού μόνο σε αυτή την περιοχή τιμών το διακριτό σήμα $x(k)$ έχει μη μηδενικές τιμές. Όσον αφορά την περιοχή τιμών για το δείκτη n , εύκολα διαπιστώνεται πως η ελάχιστη τιμή του υπολογίζεται ως $n_1 - k_{min} = 0 \Rightarrow n_1 = k_{min} + 0 = -2$ ενώ η μέγιστη τιμή του θα είναι τέτοια ώστε $n_2 - k_{max} = 5 \Rightarrow n_2 = k_{max} + 5 = 1 + 5 = 6$ (σε αυτούς τους υπολογισμούς ελήφθη υπ' όψιν πως το διακριτό σήμα $h(n)$ λαμβάνει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $0 \leq n \leq 5$). Επομένως η συνέλιξη $y(n)$ των δύο σημάτων θα ορίζεται στο διάστημα $-2 \leq n \leq 6$ και ο υπολογισμός των στοιχείων της θα λάβει χώρα χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση με τα νέα όρια δεικτών που έχουν υπολογιστεί. Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y(-2) &= x(-2)h(0) + x(-1)h(-1) + x(0)h(-2) + x(1)h(-3) = 1 \\ y(-1) &= x(-2)h(1) + x(-1)h(0) + x(0)h(-1) + x(1)h(-2) = 1 \\ y(0) &= x(-2)h(2) + x(-1)h(1) + x(0)h(0) + x(1)h(-1) = -1 \\ y(1) &= x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0)h(1) + x(1)h(0) = 0 \\ y(2) &= x(-2)h(4) + x(-1)h(3) + x(0)h(2) + x(1)h(1) = 0 \\ y(3) &= x(-2)h(5) + x(-1)h(4) + x(0)h(3) + x(1)h(2) = 3 \\ y(4) &= x(-2)h(6) + x(-1)h(5) + x(0)h(4) + x(1)h(3) = 3 \\ y(5) &= x(-2)h(7) + x(-1)h(6) + x(0)h(5) + x(1)h(4) = 2 \\ y(6) &= x(-2)h(8) + x(-1)h(7) + x(0)h(6) + x(1)h(5) = 1 \end{aligned}$$

Επομένως η συνέλιξη των συστημάτων $x(n)$ και $h(n)$ είναι το διακριτό σήμα $y(n) = \{1, 1, -1, 0, 0, 3, 3, 2, 1\}$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 52 Δίδεται διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση της μορφής

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί το σήμα εισόδου $x(n)$ ($0 \leq n \leq 8$) για το οποίο η έξοδος του συστήματος είναι η διακριτή ακολουθία $y(n) = \{1, 2, 2.5, 3, 3, 3, 2, 1, 0, \dots\}$

Απάντηση: Από τη μαθηματική έκφραση του σήματος της κρουστικής απόκρισης δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως σε γραφή διακριτής ακολουθίας θα έχει τη μορφή $h(n) = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$. Όσον αφορά την έξοδο του συστήματος, αυτή θα προκύψει κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^4 h(k)x(n-k)$$

όπου τα όρια του αθροίσματος κυμαίνονται από $k_{min} = 0$ έως $k_{max} = 4$ αφού σε αυτή την περιοχή τιμών ορίζεται το διακριτό σήμα $h(n)$.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του σήματος εισόδου θα αναπτύξουμε το παραπάνω άθροισμα για κάθε ένα από τα στοιχεία του συστήματος εξόδου. Με άλλα λόγια θα εκφράσουμε την κάθε έξοδο ως συνάρτηση των τιμών των σημάτων $h(n)$ και $x(n)$. Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τις τιμές των δειγμάτων για τα σήματα $y(n)$ και $h(n)$ θα πρέπει να επιλύσουμε τις εξισώσεις που θα προκύψουν ως προς $x(n)$ προκειμένου να υπολογίσουμε τις ζητούμενες τιμές. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + h(3)x(-3) + h(4)x(-4) = x(0) \Rightarrow x(0) = y(0) = 1 \\ y(1) &= h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + h(3)x(-2) + h(4)x(-3) = x(1) + \frac{1}{2} \Rightarrow x(1) = y(1) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y(2) &= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) + h(4)x(-2) = x(2) + 1 \Rightarrow x(2) = y(2) - 1 = \frac{3}{2} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Από την παραπάνω διαδικασία διαπιστώνουμε πως σε κάθε βήμα υπολογίζουμε και ένα στοιχείο του διακριτού σήματος $x(n)$ το οποίο στο επόμενο βήμα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του επόμενου στοιχείου. Ο υπολογισμός των στοιχείων $x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8)$ πραγματοποιείται με παρόμοιο τρόπο και αφήνεται ως άσκηση στους φοιτητές.

5.4 Συστήματα διακριτού χρόνου και εξισώσεις διαφορών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εάν $x(n)$ είναι η ακολουθία εισόδου ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος διακριτού χρόνου, τότε η έξοδός του, $y(n)$, θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (45)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση ορισμού για την έξοδο του συστήματος μπορούμε να ταξινομήσουμε τα συστήματα διακριτού χρόνου σε δύο μεγάλες κατηγορίες με κριτήριο το εάν η διακριτή ακολουθία της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ που τα περιγράφει είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Εάν η κρουστική απόκριση αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, το σύστημά μας θα χαρακτηρίζεται ως σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response System, FIR System) ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σύστημά μας είναι γνωστό ως σύστημα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite Impulse Response System, IIR System). Επομένως οι έξοδοι αυτών των δύο τύπων συστημάτων θα περιγράφονται από τις εξισώσεις

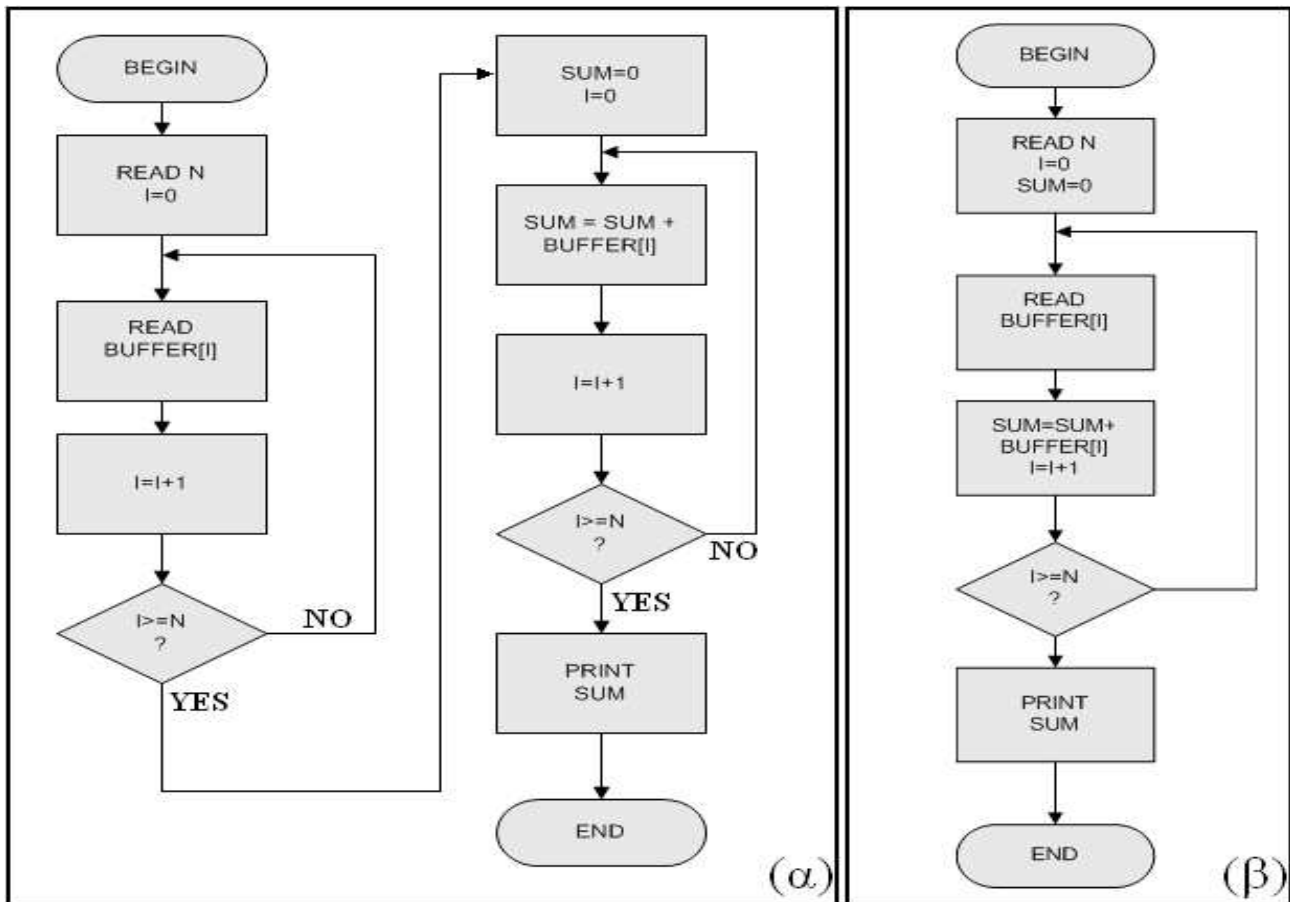
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad \text{και} \quad y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

αντίστοιχα, όπου M είναι το πλήθος των στοιχείων της πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης της πρώτης κατηγορίας συστημάτων, ενώ σιωπηρά έχουμε υποθέσει πως τα συστήματά μας είναι αιτιατά και επομένως το κάτω όριο των παραπάνω αθροισμάτων έχει την τιμή $k_{min} = 0$.

Είναι προφανές, πως σε αντίθεση με τα συστήματα FIR η υλοποίηση των οποίων είναι πάρα πολύ εύκολη λόγω του πεπερασμένου μεγέθους της κρουστικής απόκρισης, στα συστήματα IIR κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει καθώς το πλήθος των προσθέσεων και των πολλαπλασιασμών που πρέπει να γίνουν είναι πρακτικά άπειρο, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με την ποσότητα μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευση των στοιχείων της κρουστικής απόκρισης. Ωστόσο η υλοποίηση αυτών των συστημάτων δεν είναι αδύνατη, αλλά λαμβάνει χώρα χρησιμοποιώντας αναδρομικές δομές, κατασκευάζοντας δηλαδή συστήματα των οποίων η τρέχουσα έξοδος δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο και τις προγενέστερες εισόδους, αλλά και από προγενέστερες εξόδους, δηλαδή από εξόδους που έχουν δημιουργηθεί από το σύστημα σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με τον τρόπο αυτό δεν χρειάζεται να διατηρούμε αποθηκευμένες τις άπειρες ενδεχομένως τιμές της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, καθώς η έξοδος του συστήματος απαιτεί τη γνώση μόνο των προηγούμενων εξόδων του.

Προκειμένου να κατανοήσουμε αυτή τη δυνατότητα που προσφέρεται από τα αναδρομικά συστήματα ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να κατασκευάσουμε μια εφαρμογή που να δέχεται N εισόδους από το πληκτρολόγιο και να υπολογίζει το άθροισμα των τιμών τους (πρόκειται για το γνωστό σύστημα του συσσωρευτή που μελετήσαμε σε προηγούμενη ενότητα). Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να υλοποιηθεί αυτή η διαδικασία. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, θα πρέπει να δεσμεύσουμε περιοχή μνήμης μεγέθους N στοιχείων - το μέγεθος σε bytes του κάθε στοιχείου θα εξαρτάται από τον τύπο δεδομένων των στοιχείων του πίνακα - και στη συνέχεια μέσα από ένα βρόγχο N επαναλήψεων να διαβάσουμε τις τιμές των εισόδων από το πληκτρολόγιο και να τις αποθηκεύσουμε στα

αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα. Στη συνέχεια το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε μεταξύ τους όλες αυτές τις τιμές, προκειμένου να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα. Από την άλλη πλευρά, στη δεύτερη προσέγγιση, μπορούμε να αρχικοποιήσουμε μία μεταβλητή sum στην τιμή μηδέν και μέσα από τον επαναληπτικό βρόγχο να διαβάζουμε μία μία τις τιμές των εισόδων της εφαρμογής προσθέτοντάς τις στη συνέχεια στην τρέχουσα τιμή της μεταβλητής του αθροίσματος. Με τον τρόπο αυτό στο τέλος της διαδικασίας η μεταβλητή sum θα περιέχει το άθροισμα των τιμών που έχουν καταχωρηθεί από το χρήστη. Τα διαγράμματα ροής που περιγράφουν τις δύο αυτές διαφορετικές προσεγγίσεις, παρουσιάζονται στο σχήμα 27.



Σχήμα 27: Διαδικασίες υπολογισμού του αθροίσματος N στοιχείων

Από τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις η δεύτερη είναι προφανώς πιο ευφυής, αφού χρησιμοποιεί μόνο ένα επαναληπτικό βρόγχο ενώ παράλληλα δεν απαιτεί δέσμευση ποσότητας μνήμης για την αποθήκευση των τιμών των οποίων το άθροισμα ζητείται. Αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό είναι που την καθιστά και πιο αποδοτική καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις ακόμη και σε εκείνες στις οποίες το πλήθος των τιμών που πρέπει να προστεθούν είναι άπειρο. Αντίθετα η πρώτη προσέγγιση δεν δύναται να εφαρμοσθεί σε μια τέτοια περίπτωση καθώς η χρήση της απαιτεί τη δέσμευση άπειρης ποσότητας μνήμης. Παρόμοιες τεχνικές εφαρμόζονται και για την υλοποίηση συστημάτων με άπειρη χρονική απόκριση τα οποία λειτουργούν χρησιμοποιώντας για τον υπολογισμό της τρέχουσας εξόδου τις τιμές των προηγούμενων εξόδων τους.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την κατηγορία των αναδρομικών διακριτών συστημάτων, ας θεωρήσουμε μια περίπτωση ελαφρά διαφορετική από την προηγούμενη και ας υποθέσουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε τον συσσωρευμένο μέσο όρο των τιμών μιας ακολουθίας δειγμάτων $x(n)$ για το διάστημα $0 \leq k \leq n$. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα διακριτό σύστημα του οποίου η έξοδος θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Εάν η τιμή της εξόδου του συστήματος υπολογισθεί σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση θα εμφανιστούν όλα εκείνα

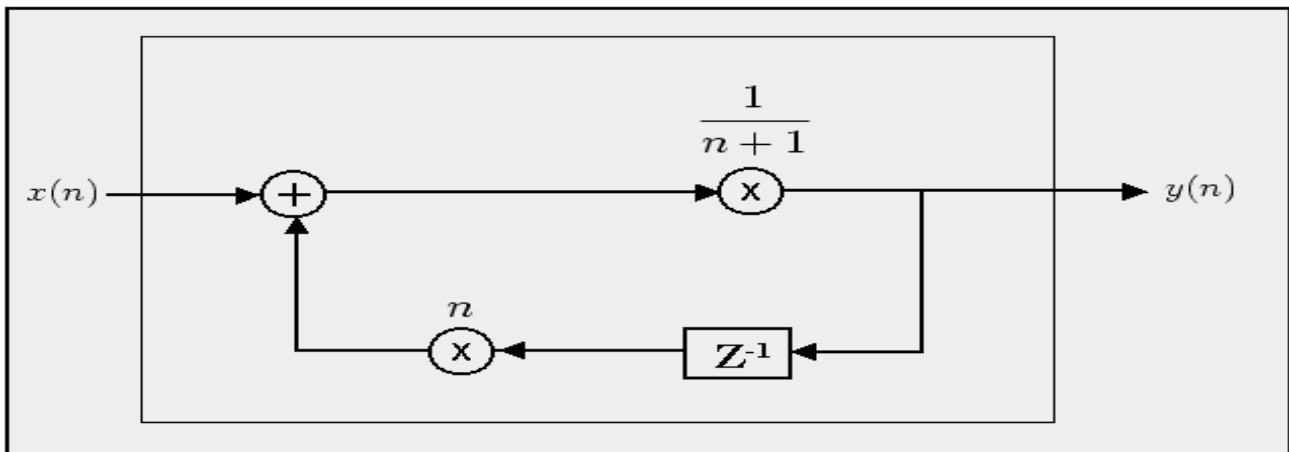
τα προβλήματα που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Αντίθετα, εάν γράψουμε την παραπάνω εξίσωση με τη μορφή

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^n x(k) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n) \quad (47)$$

ή ισοδύναμα

$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n) \quad (48)$$

έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την τρέχουσα έξοδο του συστήματος χρησιμοποιώντας όχι το σύνολο των προηγούμενων τιμών που ενδεχομένως να είναι πάρα πολύ μεγάλο, αλλά μόνο την προηγούμενη έξοδο του και την τρέχουσα είσοδο. Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση μειώνουμε κατά πολύ τόσο τις απαιτήσεις σε μνήμη της εφαρμογής όσο και το πλήθος των πράξεων που πρέπει να γίνουν και οι οποίες πλέον περιλαμβάνουν μόνο δύο πολλαπλασιασμούς και μια πρόσθεση. Το σχηματικό διάγραμμα του αναδρομικού αυτού συστήματος, παρουσιάζεται στο σχήμα 28. Από το διάγραμμα αυτό διαπιστώνουμε πως η τρέχουσα έξοδος του συστήματος επιστρέφει πίσω στην είσοδό του και την ανατροφοδοτεί, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί μαζί με την επόμενη είσοδο για τον υπολογισμό της επόμενης εξόδου. Επομένως τα σχηματικά διαγράμματα των αναδρομικών συστημάτων χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη κλειστών βρόγχων παρόμοιων με εκείνων που συναντούμε στα διαγράμματα ροής που περιγράφουν τους βρόγχους επανάληψης στις εφαρμογές προγραμματισμού.



Σχήμα 28: Το σχηματικό διάγραμμα (block diagram) για το αναδρομικό διακριτό σύστημα που υπολογίζει το μέσο όρο μιας ακολουθίας δειγμάτων

Η τελευταία εξίσωση στην οποία καταλήξαμε και η οποία περιγράφει τη λειτουργία του αναδρομικού συστήματος του συσσωρευμένου μέσου είναι μια τυπική εξίσωση διαφορών η οποία αποτελεί και το βασικό εργαλείο για τη μαθηματική μελέτη και περιγραφή των συστημάτων αυτού του τύπου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στη μαθηματική εισαγωγή, μια εξίσωση διαφορών ορίζεται με τη βοήθεια μια συνάρτησης των όρων μιας διακριτής ακολουθίας η λύση της οποίας είναι η ίδια η διακριτή ακολουθία. Στο παραπάνω παράδειγμα, η τρέχουσα έξοδος του συστήματος είναι συνάρτηση μόνο της προηγούμενης εξόδου, ωστόσο στη γενική περίπτωση αυτή η έξοδος μπορεί να εξαρτάται από τις N προηγούμενες εξόδους καθώς και από τις M προηγούμενες εισόδους και να περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), y(n-3), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), x(n-2), x(n-3), \dots, x(n-N)]$$

Στην ειδική περίπτωση των γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων αναδρομικών συστημάτων μπορούμε να εκφράσουμε την τρέχουσα έξοδο ως ένα γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων εισόδων και εξόδων τους με τους συντελεστές αυτού του γραμμικού συνδυασμού να χαρακτηρίζονται από σταθερές τιμές. Αυτή η έξοδος σε μαθηματική περιγραφή δίδεται από την εξίσωση

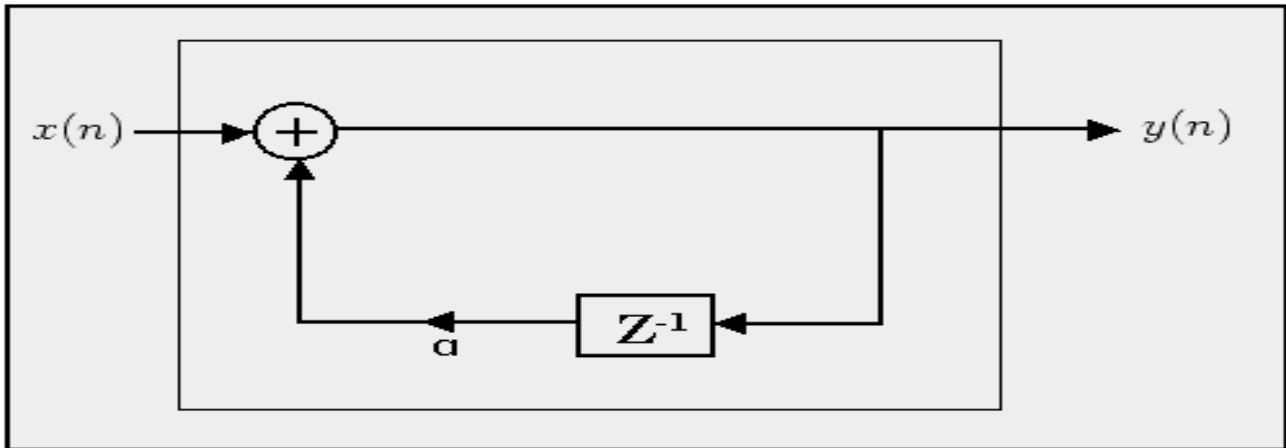
$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad (\alpha_0 \equiv 1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η παράμετρος N είναι γνωστή ως τάξη της εξίσωσης διαφορών ή του αναδρομικού συστήματος, ενώ το αρνητικό πρόσημο έχει μπει για λόγους σύμβασης έτσι ώστε οι ποσότητες στην τελευταία εξίσωση να φέρουν όλες θετικό πρόσημο.

Προκειμένου να περιγράψουμε τη συμπεριφορά των αναδρομικών γραμμικών και χρονικώς αμετάβλητων διακριτών συστημάτων, ας θεωρήσουμε την πιο απλή περίπτωση ενός τέτοιου συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n] = \alpha y(n - 1) + x(n) \quad (49)$$

και του οποίου το σχηματικό διάγραμμα παρουσιάζεται στο σχήμα 29.



Σχήμα 29: Το σχηματικό διάγραμμα (block diagram) για το διακριτό σύστημα $y(n] = \alpha y(n - 1) + x(n]$

Εάν στην είσοδο αυτού του συστήματος διαβιβάσουμε μια ακολουθία εισόδου $x(n]$ για χρονικές στιγμές $n \geq 0$ και θεωρήσουμε πως η έξοδος του συστήματος $y(-1]$ τη χρονική στιγμή $n = -1$ είναι γνωστή (αυτή η έξοδος συνήθως δίδεται ως αρχική συνθήκη), μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τις εξόδους του συστήματος, για κάθε χρονική στιγμή, n . Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

- Για $n = 0$: $y(0] = \alpha y(-1] + x(0]$
- Για $n = 1$: $y(1] = \alpha y(0] + x(1] = \alpha^2 y(-1] + \alpha x(0] + x(1]$
- Για $n = 2$: $y(2] = \alpha y(1] + x(2] = \alpha^3 y(-1] + \alpha^2 x(0] + x(2]$
- Για κάθε n : $y(n] = \alpha y(n - 1] + x(n] = \alpha^{n+1} y(-1] + \alpha^n x(0] + \alpha^{n-1} x(1] + \dots + \alpha x(n - 1] + x(n]$

Η τελευταία σχέση σε πιο συμπαγή μορφή μπορεί να γραφεί ως

$$y(n] = \alpha^{n+1} y(-1] + \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n - k) \quad n \geq 0 \quad (50)$$

Μελετώντας την παραπάνω σχέση δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως η έξοδος του παραπάνω συστήματος τη χρονική στιγμή n , αποτελείται από ένα άθροισμα δύο όρων. Από αυτούς τους δύο όρους, ο πρώτος οφείλεται στην ύπαρξη αρχικής συνθήκης για το σύστημα, ενώ ο δεύτερος είναι η απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή n . Σητηρίζομενοι στην τελευταία εξίσωση, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

Υποθέτοντας πως το σύστημά μας βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας - αυτό σημαίνει πως τη χρονική στιγμή $n = 0$ η έξοδος του συστήματος $y(n]$ έχει και αυτή μηδενική τιμή - θα είναι προφανώς και $y(-1] = 0$. Σε μία τέτοια περίπτωση, η έξοδος του συστήματος είναι γνωστή ως απόκριση στη μηδενική κατάσταση (zero state response) και συμβολίζεται με $y_{zs}(n]$. Αντίθετα, εάν είναι $y(-1] \neq 0$ και η είσοδος $x(n]$ ($\forall n \in N$) του συστήματος έχει μηδενική τιμή, τότε η έξοδος $y(n]$ λέγεται απόκριση σε μηδενική είσοδο (zero input response) και συμβολίζεται με $y_{zi}(n]$. Αυτός ο ειδικός τύπος απόκρισης, είναι γνωστός και ως φυσική ή ελεύθερη απόκριση καθώς όντας ανεξάρτητος από την εκάστοτε είσοδο του συστήματος αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό του που προσδιορίζει πλήρως τον τρόπο λειτουργίας του σε αντίθεση με την απόκριση στη μηδενική είσοδο η οποία δεν εξαρτάται μόνο από τη φύση του συστήματος αλλά και από την τρέχουσα είσοδό του. Όσον αφορά την έξοδο του συστήματος στη γενική περίπτωση, αυτή προκύπτει από το άθροισμα των δύο παραπάνω τύπων εξόδων, ιδιότητα που σε μαθηματική γραφή αποδίδεται από την εξίσωση $y(n] = y_{zs}(n] + y_{zi}(n]$.

Το τελευταίο σημαντικό μέγεθος που θα αναφέρουμε σε αυτή την ενότητα είναι η χροστική απόκριση ενός αναδρομικού γραμμικού και χρονικώς αμετάβλητου διακριτού συστήματος, η οποία ορίζεται ως η απόκριση της μηδενικής του κατάστασης, $y_{zs}(n]$ όταν ως είσοδος στο σύστημα διαβιβαστεί η διακριτή ακολουθία της μοναδιαίας

ώσης (δηλαδή ισχύει η σχέση $x(n) = \delta(n)$) ενώ ταυτόχρονα το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας (δηλαδή είναι $y(-1) = 0$). Θεωρώντας για παράδειγμα ένα σύστημα με απόκριση στη μηδενική κατάσταση

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n-k)$$

η διαβίβαση στην είσοδό του διακριτού σήματος $x(n) = \delta(n)$ θα οδηγήσει στην έξοδο

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k \delta(n-k) = \alpha^n \quad (n \geq 0)$$

και επομένως η χρονική του απόκριση θα είναι η $h(n) = \alpha^n u(n)$.

Άσκηση 53 Να προσδιοριστεί εάν το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n)$$

είναι γραμμικό και ευσταθές.

Απάντηση: Προκειμένου να προχωρήσουμε στην επίλυση της άσκησης ας ορίσουμε πρώτα την έννοια της γραμμικότητας για τα αναδρομικά γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ένα διακριτό σύστημα που ανήκει σε αυτή την κατηγορία ονομάζεται γραμμικό όταν ικανοποιεί ταυτόχρονα τις επόμενες τρεις ιδιότητες:

- Η συνολική απόκριση του συστήματος θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα της απόκρισης στη μηδενική κατάσταση και της απόκρισης στη μηδενική είσοδο, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η σχέση $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$.
- Η απόκριση στη μηδενική κατάσταση θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή εάν στο σύστημα διαβιαστεί η είσοδος $c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)$ η έξοδος του θα πρέπει να είναι η $c_1 y_{zs}^{(1)}(n) + c_2 y_{zs}^{(2)}(n)$.
- Η απόκριση στη μηδενική είσοδο θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή εάν στο σύστημα διαβιαστεί η είσοδος $c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)$ η έξοδος του θα πρέπει να είναι η $c_1 y_{zi}^{(1)}(n) + c_2 y_{zi}^{(2)}(n)$.

Εάν έστω και μία από τις παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό.

Στην περίπτωση του συγκεκριμένου διακριτού συστήματος, η συνολική του έξοδος τη χρονική στιγμή n , δίδεται όπως έχουμε ήδη αποδείξει από τη σχέση

$$y(n) = \alpha^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n-k)$$

ενώ οι αποκρίσεις του συστήματος στη μηδενική κατάσταση και στη μηδενική είσοδο δίδονται από τις σχέσεις

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n-k) \quad \text{και} \quad y_{zi}(n) = \alpha^{k+1} y(-1)$$

όπως προκύπτει από τη παραπάνω σχέση θέτοντας $y(-1) = 0$ και $x(n) = 0$ ($\forall n \in N$). Παρατηρούμε λοιπόν πως η πρώτη ιδιότητα ικανοποιείται, δηλαδή ισχύει η σχέση $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$.

Προκειμένου να αποδείξουμε τη δεύτερη ιδιότητα ας διαβιάσουμε στο σύστημα τη συνδυασμένη είσοδο $x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)$. Στην περίπτωση αυτή η απόκριση στη μηδενική κατάσταση θα λάβει τη μορφή

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n-k) = \sum_{k=0}^n \alpha^k [c_1 x_1(n-k) + c_2 x_2(n-k)] = c_1 \sum_{k=0}^n \alpha^k x_1(n-k) + c_2 \sum_{k=0}^n \alpha^k x_2(n-k) = c_1 y_{zs}^{(1)}(n) + c_2 y_{zs}^{(2)}(n)$$

και επομένως η απόκριση στη μηδενική κατάσταση υπακούει στην αρχή της επαλληλίας. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, η διαβίβαση στο σύστημα της συνδυασμένης εισόδου $y(-1) = c_1 y_1(-1) + c_2 y_2(-1)$ θα οδηγήσει σε απόκριση στη μηδενική είσοδο

$$y_{zi}(n) = \alpha^{n+1} y(-1) = \alpha^{n+1} [c_1 y_1(-1) + c_2 y_2(-1)] = c_1 \alpha^{n+1} y_1(-1) + c_2 \alpha^{n+1} y_2(-1) = c_1 y_{zi}^{(1)}(n) + c_2 y_{zi}^{(2)}(n)$$

και επομένως και η απόκριση στη μηδενική είσοδο υπακούει επίσης στην αρχή της επαλληλίας. Παρατηρούμε επομένως πως το σύστημά μας υπακούει και στις τρεις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ένα γραμμικό σύστημα και επομένως είναι γραμμικό σύστημα.

Από την άλλη πλευρά, προκειμένου να προσδιορίσουμε εάν το σύστημά μας είναι ευσταθές, ας διαβιβάσουμε σε αυτό τη φραγμένη είσοδο $x(n)$ με $|x(n)| \leq M_x < \infty$ ($\forall n \geq 0$). Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της εξόδου του συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$|y(n)| \leq |\alpha^{n+1}y(-1)| + \left| \sum_{k=0}^n \alpha^k x(n-k) \right| \leq |\alpha|^{n+1}|y(-1)| + M_x \sum_{k=0}^n |\alpha|^k \leq |\alpha|^{n+1}|y(-1)| + M_x \frac{1 - |\alpha|^{n+1}}{1 - |\alpha|} = M_y$$

για τιμές $n \geq 0$. Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε πως εάν η τιμή του n είναι πεπερασμένη, η ποσότητα M_y είναι και αυτή πεπερασμένη και στο σύστημα είναι ευσταθές αφού χαρακτηρίζεται από φραγμένη έξοδο. Ωστόσο, αν η παράμετρος n λαμβάνει άπειρες τιμές, το σύστημα είναι ευσταθές μόνο τιμές $|\alpha| < 1$ (αφού για αυτή την περιοχή τιμών θα είναι $|\alpha|^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$) - στην περίπτωση αυτή η έξοδος είναι φραγμένη από την ποσότητα $M_y = M_x[(1 - |\alpha|^{n+1})/(1 - |\alpha|)]$.

Άσκηση 54 Έστω το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = ny(n-1) + x(n) \quad n \geq 0$$

και το οποίο υποτίθεται πως βρίσκεται σε ηρεμία (δηλαδή ισχύει η σχέση $y(-1) = 0$). Να ελεγχθεί εάν είναι γραμμικό, χρονικώς αμετάβλητο και ευσταθές.

Απάντηση: Εάν στο σύστημα διαβιβάσουμε τις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$, οι αντίστοιχες έξοδοι θα είναι οι $y_1(n) = ny_1(n-1) + x_1(n)$ και $y_2(n) = ny_2(n-1) + x_2(n)$. Εάν στο σύστημα διαβιβάσουμε τη συνδυασμένη είσοδο $x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) &= \alpha[ny_1(n-1) + x_1(n)] + \beta[ny_2(n-1) + x_2(n)] = \alpha ny_1(n-1) + \alpha x_1(n) + \beta ny_2(n-1) + \\ &+ \beta x_2(n) = n[\alpha y_1(n-1) + \beta y_2(n-1)] + \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) = ny(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

και επομένως το σύστημα είναι γραμμικό.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε εάν το σύστημά μας είναι χρονικώς αμετάβλητο ας διαβιβάσουμε σε αυτό την είσοδο $x(n-k)$. Θα είναι τότε $y(n,k) = T[x(n-k)] = ny(n-k-1) + x(n-k)$ αλλά από την άλλη πλευρά θα έχουμε $y(n-k) = (n-k)y(n-k-1) + x(n-k)$. Παρατηρούμε πως $y(n,k) \neq y(n-k)$ και επομένως το σύστημά μας δεν είναι χρονικώς αμετάβλητο.

Τέλος ο έλεγχος ευστάθειας για το σύστημα συνίσταται στη διαβίβαση φραγμένης εισόδου η οποία εάν το σύστημα είναι ευσταθές θα πρέπει να οδηγήσει σε φραγμένη έξοδο. Παρατηρούμε ωστόσο πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει γιατί εάν στο σύστημα διαβιβάσουμε την είσοδο $x(n) = u(n)$ η οποία είναι φραγμένη αφού $|x(n)| \leq 1$, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την έξοδό του. Πράγματι, με επαναληπτική εφαρμογή της εξίσωσης διαφορών του συστήματος διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 * y(-1) + x(0) = 1 \\ y(1) &= 1 * y(0) + x(1) = 1 * 1 + 1 = 2 \\ y(2) &= 2 * y(1) + x(2) = 2 * 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ y(3) &= 3 * y(2) + x(3) = 3 * 5 + 1 = 15 + 1 = 16 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Επομένως η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη, ήτοι, το σύστημά μας δεν είναι ευσταθές.

5.4.1 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στη μαθηματική εισαγωγή, μια εξίσωση διαφορών ορίζεται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης των όρων κάποιας ακολουθίας $y(n)$ και η εύρεση της λύσης της στηρίζεται στον προσδιορισμό της αναλυτικής μορφής της συνάρτησης $y(n)$. Στην περίπτωση των αναδρομικών γραμμικών χρονικώς αμετάβλητων διακριτών συστημάτων, μια εξίσωση διαφορών δεν είναι παρά η μαθηματική περιγραφή της σχέσης εισόδου - εξόδου που προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο τη συμπεριφορά του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή n και η επίλυσή της συνίσταται στον προσδιορισμό της συνάρτησης $y(n)$ όταν είναι γνωστή η ακολουθία εισόδου $x(n)$ και ένα πλήθος αρχικών συνθηκών. Σε πλήρη αναλογία με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις η γενική λύση μιας πλήρους εξίσωσης διαφορών ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης $y_h(n)$ και μιας μερικής λύσης της πλήρους εξίσωσης $y_p(n)$, η σε μαθηματική γραφή, $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$.

Θεωρώντας τη γενική περίπτωση αναδρομικών γραμμικών χρονικώς αμετάβλητων διακριτών συστημάτων που περιγράφονται από την εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad (\alpha_0 \equiv 1)$$

η ομογενής εξίσωση που τα περιγράφει, προκύπτει από την τελευταία σχέση εάν θέσουμε $x(n) = 0$ ($\forall n \in N$) και έχει τη μορφή

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k y(n-k) = 0 \quad (\alpha_0 \equiv 1)$$

Η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης που συνίσταται στον προσδιορισμό της συνάρτησης $y(n)$ θα γίνει κατά τα γνωστά - παρόμοια διαδικασία χρησιμοποιείται και για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων - θεωρώντας λύσεις της μορφής $y_h(n) = \lambda^n$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση αυτή γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^{n-k} = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_N \lambda^{n-N} = \lambda^{n-N} (\lambda^N + \alpha_1 \lambda^{N-1} + \alpha_2 \lambda^{N-2} + \dots + \alpha_{N-1} \lambda + \alpha_0) = 0$$

και επειδή η ποσότητα λ^{n-N} είναι προφανώς διάφορη του μηδενός, θα είναι

$$\lambda^N + \alpha_1 \lambda^{N-1} + \alpha_2 \lambda^{N-2} + \dots + \alpha_{N-1} \lambda + \alpha_0 = 0$$

πολυωνυμική εξίσωση βαθμού N , που είναι γνωστή ως χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών. Στη γενική περίπτωση αυτή η πολυωνυμική εξίσωση διαθέτει N ρίζες της μορφής $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ οι οποίες μπορεί να είναι τόσο πραγματικές όσο και μιγαδικές σε αντίθεση με τους συντελεστές α_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) οι οποίοι συνήθως είναι πραγματικοί αριθμοί. Σε πλήρη αναλογία με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, εάν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μιγαδικές αυτές εμφανίζονται μαζί με τους μιγαδικούς συζυγείς τους, ενώ εάν κάποια ρίζα είναι πολλαπλότητας m θα οδηγήσει στη δημιουργία ισάριθμων λύσεων. Περισσότερες λεπτομέρειες για την επίλυση των εξισώσεων διαφορών μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία.

Έχοντας προσδιορίσει τις N ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών θα έχει τη μορφή

$$y_h(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_N \lambda_N^n$$

με τους συντελεστές C_1, C_2, \dots, C_N να προσδιορίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών που υποτίθεται πως είναι γνωστές. Ας σημειωθεί, πως επειδή η ομογενής εξίσωση διαφορών προκύπτει από την πλήρη θέτοντας $x(n) = 0$ ($\forall n \in N$), η λύση της είναι στην πραγματικότητα η απόκριση του συστήματος στη μηδενική είσοδο, $y_{zs}(n)$ που ορίσαμε προηγουμένως. Από την άλλη πλευρά, ο προσδιορισμός μιας μερικής λύσης μιας πλήρους εξίσωσης διαφορών δεν περιγράφεται από κάποια συγκεκριμένη διαδικασία αλλά είναι εκτός των άλλων συνάρτηση της εμπειρίας μας και της εξοικείωσής μας με τη χρήση και την επίλυση εξισώσεων διαφορών. Ωστόσο αξίζει να αναφέρουμε πως εάν στο σύστημα διαβιβαστούν κάποιες συγκεκριμένες εισόδους με γνωστές μορφές, η ζητούμενη μερική λύση θα έχει και αυτή παρόμοια μορφή με εκείνη του σήματος εισόδου. Ο επόμενος πίνακας περιέχει ένα πλήθος γνωστών σημάτων εισόδου και την αντίστοιχη μερική λύση που αντιστοιχεί σε αυτές.

Πίνακας 3: Γνωστά σήματα εισόδου και οι αντίστοιχες μερικές λύσεις εξισώσεων διαφορών

| Είσοδος $x(n)$ | Μερική Λύση $y_p(n)$ |
|------------------------|---|
| C | C_1 |
| Cn | $C_1 n + C_2$ |
| $C a^n$ | $C_1 a^n$ |
| $C \cos(\omega n)$ | $C_1 \cos(\omega n) + C_2 \sin(\omega n)$ |
| $C \sin(\omega n)$ | $C_1 \cos(\omega n) + C_2 \sin(\omega n)$ |
| $C a^n \cos(\omega n)$ | $C_1 a^n \cos(\omega n) + C_2 a^n \sin(\omega n)$ |
| $C \delta(n)$ | δεν υπάρχει μερική λύση |

Έχοντας προσδιορίσει τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $y_h(n)$ και τη μερική λύση της πλήρους εξίσωσης $y_p(n)$, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης $y(n)$, προκύπτει όπως έχουμε ήδη αναφέρει από το άθροισμα των δύο αυτών λύσεων, ή σε μαθηματική γραφή, $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$.

Άσκηση 55 Να βρεθεί η φυσική απόκριση του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) + \alpha_1 y(n-1) = x(n)$.

Απάντηση: Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη φυσική απόκριση του ανωτέρω διακριτού συστήματος θα πρέπει να βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών που περιγράφει τη λειτουργία του και η οποία είναι η $y(n) + \alpha_1 y(n-1) = 0$. Θεωρώντας κατά τα γνωστά λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ θα είναι $y(n-1) = \lambda^{n-1}$ και αντικαθιστώντας στην ομογενή εξίσωση αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda^{n-1}(\lambda + \alpha_1) = 0 \Rightarrow \lambda + \alpha_1 = 0$$

Από την τελευταία εξίσωση διαπιστώνουμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι πρώτου βαθμού με ρίζα $\lambda = -\alpha_1$. Επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα είναι η $y_h(n) = C(-\alpha_1)^n$ με σταθερά C να υπολογίζεται με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης η οποία υποτίθεται πως είναι γνωστή. Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή αυτής της σταθεράς θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $y(0)$ από την εξίσωση διαφορών και από τη λύση που προσδιορίσαμε και κατόπιν να εξισώσουμε τις δύο ποσότητες. Αναλυτικά λοιπόν έχουμε:

- Από την ομογενή εξίσωση διαφορών: εάν στη σχέση $y(n) + \alpha_1 y(n-1) = 0$ θέσουμε $n = 0$ θα λάβουμε $y(0) = -\alpha_1 y(-1)$.
- Από τη γενική λύση: εάν στη σχέση $y_h(n) = C(-\alpha_1)^n$ θέσουμε $n = 0$ θα λάβουμε $y(0) = C$.

Εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις που αναφέρονται στην ίδια ποσότητα θα λάβουμε $C = -\alpha_1 y(-1)$. Επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών θα λάβει τη μορφή

$$y_h(n) = C(-\alpha_1)^n = (-\alpha_1 y(-1))(-\alpha_1)^n = (-\alpha_1)^{n+1} y(-1)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε πως αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $-\alpha_1 = \alpha$ αυτή θα λάβει τη μορφή $y(n) = \alpha^{n+1} y(-1)$ και επομένως καταλήξαμε στην ίδια εξίσωση για τη φυσική απόκριση του συστήματος με εκείνη που λάβαμε από την απευθείας χρήση της εξίσωσης διαφορών του συστήματος.

Άσκηση 56 Να βρεθεί η φυσική απόκριση του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$

Απάντηση: Η εξίσωση διαφορών του συστήματος είναι ομογενής και επομένως η λύση της θα μας δώσει και τη ζητούμενη φυσική απόκριση. Θεωρώντας λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

Επομένως, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι μια δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 4(-4) = 9 + 16 + 25$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3-5}{2} = -1$$

ήτοι, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα είναι η $y(n) = y_h(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 (4)^n + C_2 (-1)^n$ με τις σταθερές C_1 και C_2 να προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ας σημειωθεί πως επειδή στην προκειμένη περίπτωση η τάξη του συστήματος είναι $N = 2$, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές δύο αρχικών συνθηκών που αντιστοιχούν στις τιμές $y(-1)$ και $y(-2)$. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που εφαρμόσαμε προηγουμένως, θα υπολογίσουμε τις τιμές των ποσοτήτων $y(0)$ και $y(1)$ από την αρχική εξίσωση διαφορών και από τη γενική λύση που προσδιορίστηκε και στη συνέχεια θα εξισώσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες. Αναλυτικά λοιπόν θα έχουμε:

- Από την ομογενή εξίσωση διαφορών: εάν στη σχέση $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$ θέσουμε διαδοχικά $n = 0$ και $n = 1$ θα λάβουμε

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) = 3[3y(-1) + 4y(-2)] + 4y(-1) = 9y(-1) + 12y(-2) + 4y(-1) = 13y(-1) + 12y(-2)$$

- Από τη γενική λύση: εάν στη σχέση $y(n) = C_1 (4)^n + C_2 (-1)^n$ θέσουμε διαδοχικά $n = 0$ και $n = 1$ θα λάβουμε

$$y(0) = C_1 + C_2 \quad \text{και} \quad y(1) = 4C_1 - C_2$$

Απάντηση: Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό ως η γενική λύση μιας πλήρους εξίσωσης διαφορών ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης και μιας μερικής λύσης της πλήρους. Επομένως στο πρώτο βήμα της διαδικασίας θα πρέπει να επιλύσουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση που έχει τη μορφή

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = 0$$

Θεωρώντας κατά τα γνωστά λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ η ομογενής εξίσωση θα λάβει τη μορφή

$$\lambda^n - \frac{5}{6}\lambda^{n-1} + \frac{1}{6}\lambda^{n-2} \Rightarrow \lambda^{n-2} \left(\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} \right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$$

Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών θα είναι η $\lambda^2 - (5/6)\lambda + (1/6) = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5/6)^2 - 4(1/6) = (25/36) - (24/36) = (1/36)$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(5/6) + (1/6)}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(5/6) - (1/6)}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ήτοι, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης θα είναι η

$$y(n) = C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

με τις σταθερές C_1 και C_2 να καθορίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών οι οποίες υποτίθεται πως είναι γνωστές.

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας θα πρέπει να αναζητήσουμε μία μερική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών. Από τη συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης $x(n) = (2)^n u(n)$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως η ζητούμενη μερική λύση θα πρέπει να έχει τη μορφή $y_p(n) = k(2)^n u(n)$ με την τιμή της σταθεράς k να προκύπτει από την απαίτηση να ικανοποιεί η μερική λύση $y_p(n)$ την πλήρη εξίσωση διαφορών. Αντικαθιστώντας λοιπόν τη συνάρτηση $y_p(n)$ στην πλήρη εξίσωση διαφορών αυτή θα λάβει τη μορφή

$$k(2)^n u(n) - \frac{5}{6}k(2)^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{6}k(2)^{n-2}u(n-2) = (2)^n u(n)$$

Για $n = 2$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$k(2)^2 u(2) - \frac{5}{6}k(2)u(1) + \frac{1}{6}ku(0) = (2)^2 u(2) \Rightarrow 4k - \frac{10}{6}k + \frac{1}{6}k + 4 = \frac{15}{6}k = 4 \Rightarrow k = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

και επομένως η μερική λύση της πλήρους εξίσωσης θα είναι η $y_p(n) = (8/5)(2)^n u(n)$ ενώ η γενική της λύση θα έχει τη μορφή

$$y(n) = \frac{8}{5}(2)^n u(n) + C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n)$$

με τις σταθερές C_1 και C_2 να προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Εάν για παράδειγμα υποθέσουμε πως αυτές οι συνθήκες είναι οι $y(-1) = y(-2) = 0$, οι τιμές των σταθερών C_1 και C_2 θα προκύψουν με τον ακόλουθο τρόπο:

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών τις τιμές $n = 0$ και $n = 1$ θα λάβουμε:

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{5}{6}y(-1) - \frac{1}{6}y(-2) + x(0) = 1 \\ y(1) &= \frac{5}{6}y(0) - \frac{1}{6}y(-1) + x(1) = \frac{5}{6} + 2 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

- Από τη γενική λύση της πλήρους εξίσωσης που προσδιορίσαμε, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{8}{5} + C_1 + C_2 \\ y(1) &= \frac{8}{5} * 2 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 = \frac{16}{5} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} \end{aligned}$$

Εξισώνοντας λοιπόν τις αντίστοιχες ποσότητες προκύπτει το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\frac{8}{5} + C_1 + C_2 = 1 \quad \text{και} \quad \frac{16}{5} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} = \frac{17}{6}$$

η λύση του οποίου εύκολα αποδεικνύεται πως είναι η $C_1 = -1$ και $C_2 = (2/5)$. Επομένως η γενική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y(n) = \left[\frac{8}{5}(2)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 59 Να προσδιοριστεί η απόκριση $y(n)$ ($n \geq 0$) του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξης

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

όταν στο σύστημα διαβιβαστεί η είσοδος $x(n) = (4)^n u(n)$

Απάντηση: Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάσαμε προηγουμένως θα επιλύσουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση διαφορών που έχει τη μορφή $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$. Θεωρώντας κατά τα γνωστά λύση της μορφής $y(n) = \lambda^n$ και αντικαθιστώντας τη στην παραπάνω εξίσωση, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι η πολυωνυμική δευτεροβάθμια εξίσωση $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 * (-4) = 9 + 16 = 25$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3-5}{2} = -1$$

ήτοι, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι η $y(n) = C_1(4)^n + C_2(-1)^n$ με τις σταθερές C_1 και C_2 να υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες οι οποίες υποτίθεται πως είναι γνωστές.

Από την άλλη πλευρά, προκειμένου να προσδιορίσουμε μία μερική λύση της πλήρους εξίσωσης, διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση $x(n)$ έχει τη μορφή $x(n) = \alpha^n u(n)$ με την τιμή $\alpha = 4$ να αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας $q = 1$. Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία η ζητούμενη μερική λύση θα έχει τη μορφή $y_p(n) = kn(4)^n u(n)$ με την τιμή της παραμέτρου k να προσδιορίζεται από την απαίτηση να ικανοποιεί η προαναφερόμενη μερική λύση την πλήρη εξίσωση διαφορών. Αντικαθιστώντας λοιπόν τη μερική λύση στην πλήρη εξίσωση διαφορών, θα λάβουμε

$$kn(4)^n u(n) - 3k(n-1)(4)^{n-1} u(n-1) - 4k(n-2)(4)^{n-2} u(n-2) = 4^n u(n) + 2 * 4^{n-1} u(n-1)$$

Θέτοντας $n = 2$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$k * 2 * (4)^2 u(2) - 3k(2-1)4^{2-1} u(2-1) - 4k(2-2)4^{2-2} u(2-2) = \\ (4)^2 u(2) + 2 * 4^{2-1} u(2-1) \Rightarrow 32k - 12k = 16 + 8 \Rightarrow 20k = 24 \Rightarrow k = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

και επομένως η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης θα έχει τη μορφή

$$y(n) = \left[\frac{6}{5}n(4)^n + C_1(4)^n + C_2(-1)^n \right] u(n)$$

με την τιμή των σταθερών C_1 και C_2 να υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Θεωρώντας για παράδειγμα πως οι αρχικές συνθήκες έχουν τις τιμές $y(-1) = y(-2) = 0$, οι παραπάνω σταθερές υπολογίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών τις τιμές $n = 0$ και $n = 1$ θα λάβουμε:

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + x(0) + 2x(-1) = 1 \\ y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + x(1) + 2x(0) = 3 + 4 + 2 = 9$$

- Από τη γενική λύση της πλήρους εξίσωσης που προσδιορίσαμε, θα λάβουμε

$$\begin{aligned}y(0) &= C_1 + C_2 \\y(1) &= \frac{6}{5} * 4 + 4C_1 - C_2 = \frac{24}{5} + 4C_1 - C_2\end{aligned}$$

Εξισώνοντας λοιπόν τις αντίστοιχες ποσότητες προκύπτει το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$C_1 + C_2 = 1 \quad \text{και} \quad 4C_1 - C_2 = 9 - \frac{24}{5} = \frac{21}{5}$$

η λύση του οποίου εύκολα αποδεικνύεται πως είναι η $C_1 = (26/25)$ και $C_2 = (-1/25)$. Επομένως η γενική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y(n) = \left[\frac{6}{5}n(4)^n + \frac{26}{25}(4)^n - \frac{1}{25}(-1)^n \right] u(n)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 60 Να βρεθεί η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών $y(n+2) - 5y(n+1) + 36y(n) = n^2 - 1$. Υπόδειξη: ως μερική λύση της πλήρους εξίσωσης χρησιμοποιήστε δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $y_p(n) = A_0n^2 + A_1n + A_2$.

Άσκηση 61 Να προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Άσκηση 62 Να προσδιοριστεί η κρουστική και η βηματική απόκριση των διακριτών συστημάτων που περιγράφονται από τις εξισώσεις διαφορών

$$\begin{aligned}y(n) &= 0.6y(n-1) - 0.08y(n-2) + x(n) \\y(n) &= 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) + 2x(n) - x(n-2)\end{aligned}$$

Άσκηση 63 Να προσδιορίσετε την απόκριση στη μηδενική κατάσταση του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + 2x(n-2)$$

όταν στην είσοδο διαβιβαστεί το σήμα $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 2, 1\}$. Η άσκηση να επιλυθεί χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξίσωση διαφορών του συστήματος.

Άσκηση 64 Να προσδιοριστεί η απόκριση $y(n)$ ($n \geq 0$) του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

στην είσοδο $x(n) = (-1)^n u(n)$ και για αρχικές συνθήκες $y(-1) = y(-2) = 0$.

Άσκηση 65 Να προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση του διακριτού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Άσκηση 66 Για το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

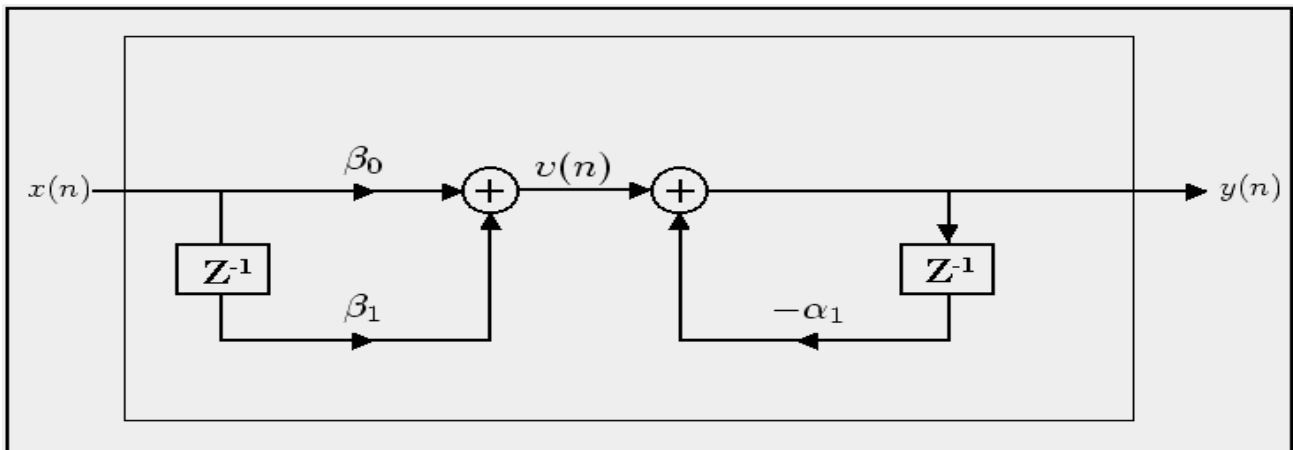
$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n-1)$$

να προσδιοριστεί η έξοδος $y(n)$ για χρονικές στιγμές $n \geq 0$ όταν είναι $x(n) = \delta(n)$ και $y(n) = 0$ για χρονικές στιγμές $n < 0$.

Άσκηση 67 Για το διακριτό αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n-1)$$

να προσδιοριστεί η φυσική, η κρουστική και η βηματική του απόκριση.



Σχήμα 30: Direct Form I structure για το διακριτό σύστημα $y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1)$

Άσκηση 68 Έστω το διακριτό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = \frac{1}{3}x(n-1)$$

- Να βρεθεί η φυσική, η κρουστική και η βηματική του απόκριση
- Να βρεθεί η γενική μορφή της λύσης του ομογενούς συστήματος (δηλαδή του συστήματος που περιγράφεται από την ομογενή εξίσωση διαφορών)
- Εάν $y(0) = y(1) = 1$ να βρεθεί η απόκριση του συστήματος $y(n)$ στην είσοδο $x(n) = \delta(n)$.

Άσκηση 69 Έστω τα διακριτά συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις διαφορών

$$\begin{aligned} y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) &= 3x(n) \\ y(n) + \frac{1}{15}y(n-1) - \frac{2}{15}y(n-2) &= x(n) \end{aligned}$$

- Να βρεθεί η απόκρισή τους $y(n)$ στα σήματα εισόδου $x(n) = (1/2)^n u(n)$ και $x(n) = (3/5)^n u(n)$
- Να ελεγχθεί εάν τα συστήματα είναι ευσταθή ή όχι.

5.5 Υλοποίηση διακριτών συστημάτων

Μετά την θεωρητική παρουσίαση της ειδικής κατηγορίας διακριτών συστημάτων που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές, ας περάσουμε τώρα στην παρουσίαση των βασικών δομών που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση αυτών των συστημάτων.

Ως πρώτο παράδειγμα ας θεωρήσουμε το διακριτό σύστημα πρώτης τάξης που χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \quad (51)$$

και περιγράφεται από το σχηματικό διάγραμμα του σχήματος 30 που αποδίδεται από τον όρο Direct Form I structure.

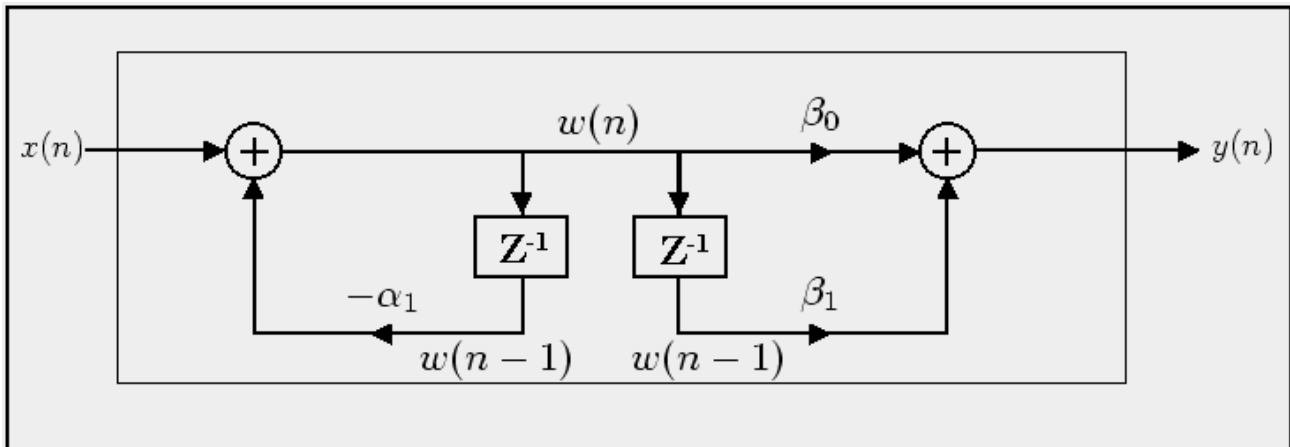
Στο σύστημα αυτό χρησιμοποιούνται δυο διαφορετικές θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των τιμών $x(n-1)$ και $y(n-1)$ που αποτελούν την είσοδο και την έξοδο του συστήματος τη χρονική στιγμή $n-1$.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως το παραπάνω σύστημα στην πραγματικότητα αποτελείται από δύο γραμμικά και αμετάβλητα ως προς το χρόνο υποσυστήματα, τα οποία συνδέονται στη σειρά, το ένα μετά το άλλο. Το πρώτο από τα δύο αυτά υποσυστήματα είναι μη αναδρομικό και περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$v(n) = \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \quad (52)$$

ενώ το δεύτερο σύστημα είναι αναδρομικής φύσεως και περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + v(n) \quad (53)$$



Σχήμα 31: Το αναθεωρημένο σχηματικό διάγραμμα για το διακριτό σύστημα $y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1)$

Όπως όμως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα, εάν αλλάξουμε τη σειρά διασύνδεσης των δύο υποσυστημάτων, η απόκριση του συστήματος δεν μεταβάλλεται. Το αποτέλεσμα αυτής της μεταβολής, παρουσιάζεται στο σχήμα 31.

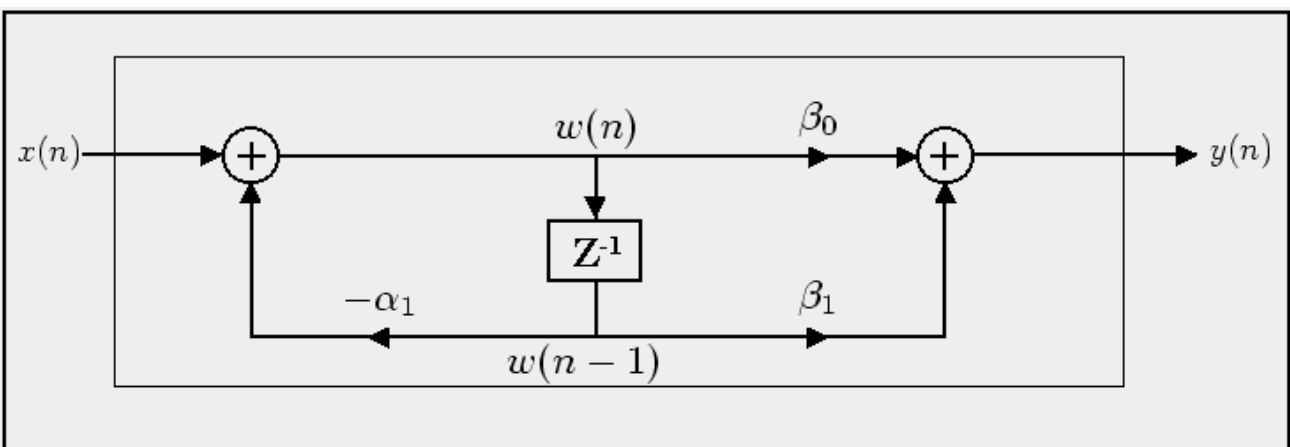
Με τη βοήθεια του σχήματος 31, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις διαφορών των δύο υποσυστημάτων που συνιστούν το νέο διακριτό σύστημα, και οι οποίες έχουν τη μορφή

$$w(n) = -\alpha_1 w(n-1) + x(n) \quad \text{και} \quad y(n) = \beta_0 w(n) + \beta_1 w(n-1)$$

οι οποίες (ως ένα σύστημα εξισώσεων) είναι ισοδύναμες με την αρχική εξίσωση διαφορών του συστήματος

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \quad (54)$$

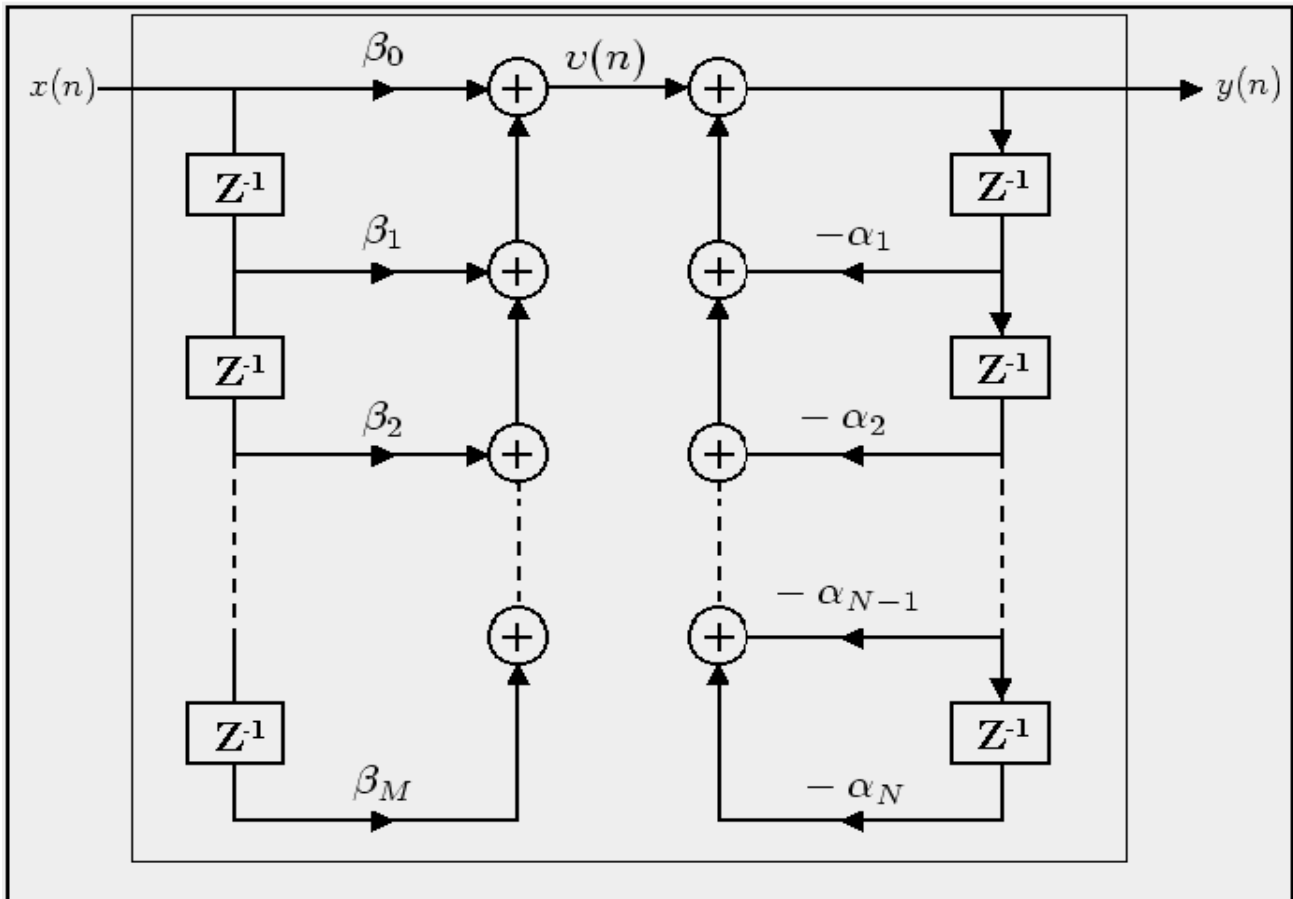
Από το παραπάνω διάγραμμα διαπιστώνουμε πως τα δύο στοιχεία της χρονικής υστέρησης δέχονται την ίδια είσοδο και παράγουν την ίδια έξοδο. Επομένως μπορούμε να προχωρήσουμε στη συγχώνευση αυτών των δύο στοιχείων και να κρατήσουμε μόνο το ένα από αυτά. Το τελικό σχηματικό διάγραμμα που προκύπτει με τον τρόπο αυτό, παρουσιάζεται στο σχήμα 32, αποδίδεται από τον αγγλικό όρο Direct Form II structure και αποτελεί ένα από τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται κατά τη σχεδίαση και υλοποίηση διακριτών συστημάτων.



Σχήμα 32: Direct Form I structure για το διακριτό σύστημα $y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1)$

Οι παραπάνω δομές μπορούν να γενικευθούν για να περιγράψουν τη γενική περίπτωση ενός αναδρομικού γραμμικού συστήματος αμετάβλητου ως προς το χρόνο που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N \beta_k x(n-k) \quad (55)$$



Σχήμα 33: Direct Form I structure για τη γενική περίπτωση αναδρομικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο διακριτού συστήματος

Το Direct Form I Structure για αυτό το σύστημα, παρουσιάζεται στο σχήμα 33.

Ο υπολογισμός της εξόδου αυτού του γενικευμένου συστήματος, απαιτεί τη χρήση $M + N$ στοιχείων χρονικής υστέρησης delay buffers και $M + N + 1$ πολλαπλασιασμούς. Σε πλήρη αναλογία με την προηγούμενη απλή περίπτωση, το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η συνένωση ενός μη αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από μία εξίσωση διαφορών της μορφής

$$u(n) = \sum_{k=0}^M \beta_k x(n - k) \quad (56)$$

και ενός αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n - k) + u(n) \quad (57)$$

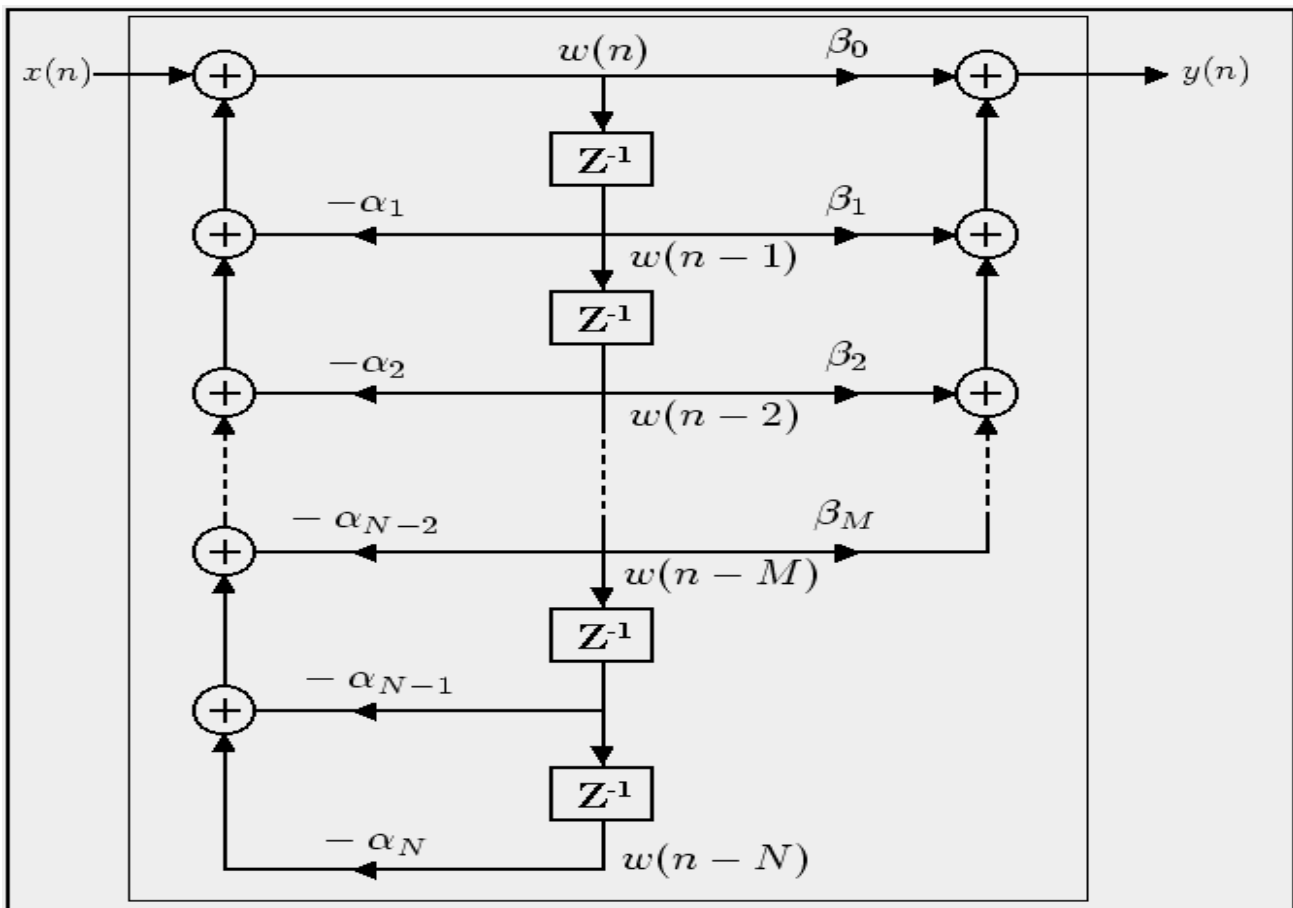
Αντιστρέφοντας τη σειρά διασύνδεσης αυτών των δύο υποσυστημάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε το Direct Form II Structure του γενικευμένου διακριτού συστήματος το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 34.

Η παραπάνω δομή (για την οποία ισχύει η συνθήκη $M > N$) μπορεί να θεωρηθεί πως αποτελείται τη συνένωση δύο υποσυστημάτων εκ των οποίων το πρώτο είναι αναδρομικό και περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$w(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k w(n - k) + x(n) \quad (58)$$

ενώ το δεύτερο είναι μη αναδρομικό και η εξίσωση ορισμού του είναι η

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \beta_k w(n - k) \quad (59)$$



Σχήμα 34: Direct Form II structure για τη γενική περίπτωση αναδρομικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο διακριτού συστήματος

Εάν θέσουμε $\alpha_k = 0$ στη γενική εξίσωση

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad (60)$$

αυτή θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad (61)$$

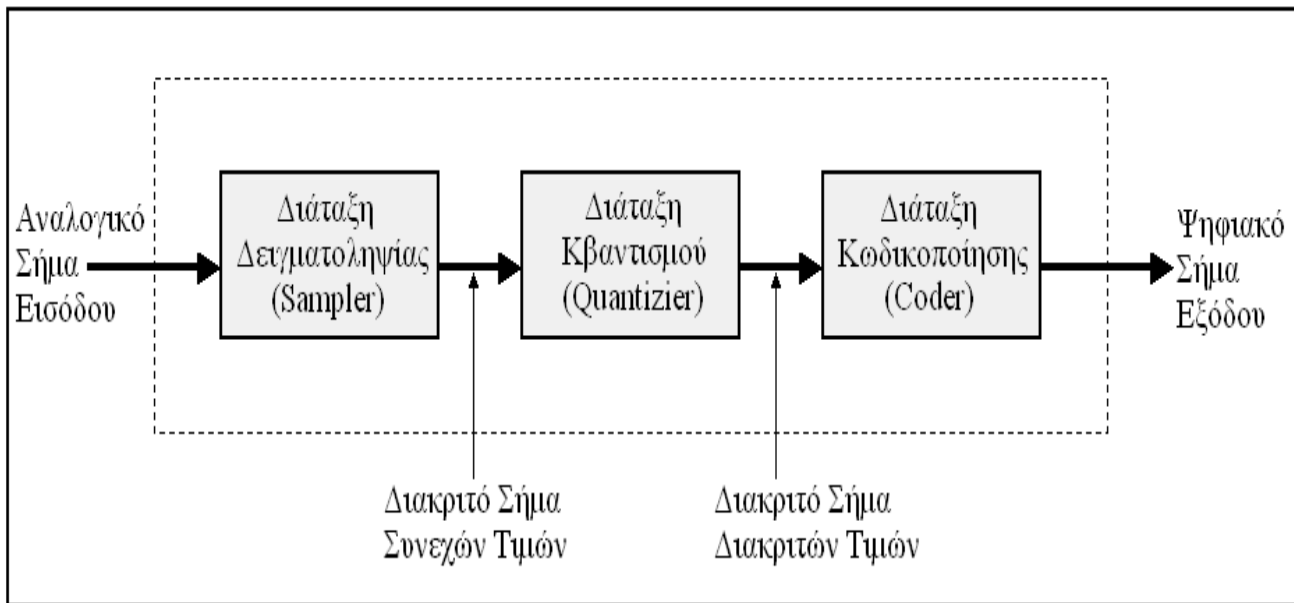
η οποία παραπέμπει σε ένα γραμμικό διακριτό σύστημα αμετάβλητο ως προς το χρόνο. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα υπολογίζει την έξοδό του, με τη βοήθεια των $M+1$ πιο πρόσφατων εισόδων του, αφού πρώτα πολλαπλασιάσει την κάθε μια από αυτές, με τον αντίστοιχο συντελεστή β_k . Ουσιαστικά το σύστημα υπολογίζει τον ισοζυγισμένο κινούμενο μέσο όρο (weighted moving average) των δειγμάτων εισόδου. Για το λόγο αυτό, το παραπάνω σύστημα ονομάζεται και σύστημα του κινούμενου μέσου (moving average system). Ένα τέτοιο σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR system) με κρουστική απόκριση ίση με τους συντελεστές β_k , δηλαδή

$$h(k) = \begin{cases} \beta_k & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (62)$$

Τέλος, εάν στη γενική εξίσωση θέσουμε $M = 0$, αυτή θα γίνει

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \beta_0 x(n) \quad (63)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα πλήρως αναδρομικό σύστημα, η έξοδος του οποίου είναι ένας ισοζυγισμένος γραμμικός συνδυασμός των N προηγούμενων εξόδων του και της τρέχουσας εισόδου του.



Σχήμα 35: Τυπική δομή συστήματος μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό.

6 Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγική ενότητα, η μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακή μορφή είναι ένα αναγκαίο στάδιο στην επεξεργασία του - ειδικότερα εάν αυτή λάβει χώρα με ψηφιακά μέσα - και συνίσταται στη μετατροπή των δεδομένων του σήματος σε μία ακολουθία δυαδικών ψηφίων. Αυτή η μετατροπή πραγματοποιείται από ειδικές διατάξεις που είναι γνωστές ως ADCs (Analog to Digital Converters) και δύναται να ορισθεί ως μια διαδικασία τριών βημάτων τα οποία σε γενικές γραμμές είναι τα ακόλουθα:

- Δειγματοληψία (sampling): σε αυτό το στάδιο λαμβάνει χώρα η μετατροπή του αναλογικού συνεχούς σήματος σε σήμα διακριτού χρόνου, καταμετρώντας τις τιμές του πλάτους του σήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές. Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις αυτές οι χρονικές στιγμές απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους με το χρονικό διάστημα T_s που υφίσταται ανάμεσά τους να είναι γνωστό ως περίοδος δειγματοληψίας.
- Κβαντισμός (quantization): το αποτέλεσμα της διαδικασίας της δειγματοληψίας που παρουσιάσαμε προηγουμένως είναι ένα διακριτό σήμα συνεχών τιμών, δηλαδή μια ακολουθία τιμών πλάτους σήματος οι οποίες αν και απέχουν ίσες χρονικές αποστάσεις μεταξύ τους εν τούτοις είναι συνεχείς υπό την έννοια πως μπορεί να λάβουν οποιαδήποτε τιμή. Στο στάδιο του κβαντισμού αυτές οι τιμές του πλάτους του σήματος καθίστανται και αυτές διακριτές, δηλαδή, προσαρμόζονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι νέες τιμές τους να ανήκουν σε ένα προκαθορισμένο σύνολο τιμών. Η διαφορά που υφίσταται ανάμεσα στο διακριτό σήμα συνεχών τιμών που έχει προκύψει από τη δειγματοληψία και στο διακριτό σήμα διακριτών τιμών που έχει προκύψει από τον κβαντισμό είναι γνωστή ως σφάλμα κβαντισμού (quantization error).
- Κωδικοποίηση (coding): στο τρίτο και τελευταίο στάδιο μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακή μορφή, οι κβαντισμένες τιμές του πλάτους του σήματος που έχουν προκύψει από την προηγούμενη διαδικασία, μετατρέπονται σε μία ακολουθία δυαδικών ψηφίων μήκους b bits με τη μεταβλητή b να αποτελεί παράμετρο του συστήματος η τιμή της οποίας καθορίζεται ανάλογα με τις συνθήκες που υφίστανται σε κάθε περίπτωση.

Η τυπική δομή ενός συστήματος μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό παρουσιάζεται στο σχήμα 35. Ας σημειωθεί ωστόσο πως αν και το σύστημα μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό έχει περιγραφεί ως ένα σύνολο τριών επιμέρους υποσυστημάτων, στην πράξη η διαδικασία πραγματοποιείται από ένα απλό ολοκληρωμένο κύκλωμα που δέχεται στην είσοδό του ένα αναλογικό σήμα και παράγει στην έξοδό του μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων. Όσον αφορά τη σειρά πραγματοποίησης των διαδοχικών μετασχηματισμών, αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε, αν και στην πράξη, το στάδιο της δειγματοληψίας προηγείται συνήθως εκείνο του κβαντισμού.

Σε ορισμένες περιπτώσεις (όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές χρήσης φωνητικού σήματος) απαιτείται η μετατροπή του επεξεργασμένου ψηφιακού σήματος στην αρχική αναλογική του μορφή. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται με τη βοήθεια διατάξεων γνωστών ως DACs (Digital to Analog Converters) οι οποίοι πραγματοποιούν την αντίστροφη διαδικασία. Ας σημειωθεί ωστόσο πως επειδή η μετατροπή του σήματος από αναλογική σε ψηφιακή μορφή

Πίνακας 4: Παράδειγμα συνδυασμένης εφαρμογής των διαδικασιών της δειγματοληψίας και του κβαντισμού επί αναλογικού σήματος εισόδου

| ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ (msec) | ΠΛΑΤΟΣ ΣΗΜΑΤΟΣ (Volts) | ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ (Volts) | ΣΦΑΛΜΑ ΚΒΑΝΤΙΣΜΟΥ (Volts) |
|--------------------------------|------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 10 | 0.352 | 0.350 | -0.002 |
| 20 | 0.401 | 0.400 | -0.001 |
| 30 | 0.497 | 0.500 | +0.003 |
| 40 | 0.483 | 0.500 | +0.017 |
| 50 | 0.428 | 0.450 | +0.022 |
| 60 | 0.398 | 0.400 | +0.002 |
| 70 | 0.352 | 0.350 | -0.002 |
| 80 | 0.297 | 0.300 | +0.003 |
| 90 | 0.201 | 0.200 | -0.001 |
| 100 | 0.115 | 0.100 | -0.015 |
| 110 | 0.076 | 0.100 | +0.024 |
| 120 | 0.003 | 0.000 | -0.003 |
| 130 | 0.003 | 0.000 | -0.003 |
| 140 | 0.047 | 0.050 | +0.003 |
| 150 | 0.082 | 0.100 | +0.018 |

είναι μία απωλεστική διαδικασία, η πλήρης ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από το διακριτό ισοδύναμο του δεν είναι δυνατή σε όλες τις περιπτώσεις αλλά μόνο όταν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις οι οποίες θα παρουσιαστούν σε επόμενη ενότητα.

6.1 Δειγματοληψία αναλογικού σήματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγική ενότητα, η μετατροπή ενός σήματος από τη συνεχή στη διακριτή του μορφή πραγματοποιείται μέσα από τη διαδικασία της δειγματοληψίας που ορίζεται ως η καταγραφή και η αποθήκευση της τιμής του πλάτους του σήματος σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Αν και υπάρχουν πολλοί τρόποι για να πραγματοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία, εν τούτοις ο πιο χαρακτηριστικός από αυτούς είναι η περιοδική ή ομοιόμορφη δειγματοληψία (periodic or uniform sampling) που περιγράφεται από την έκφραση

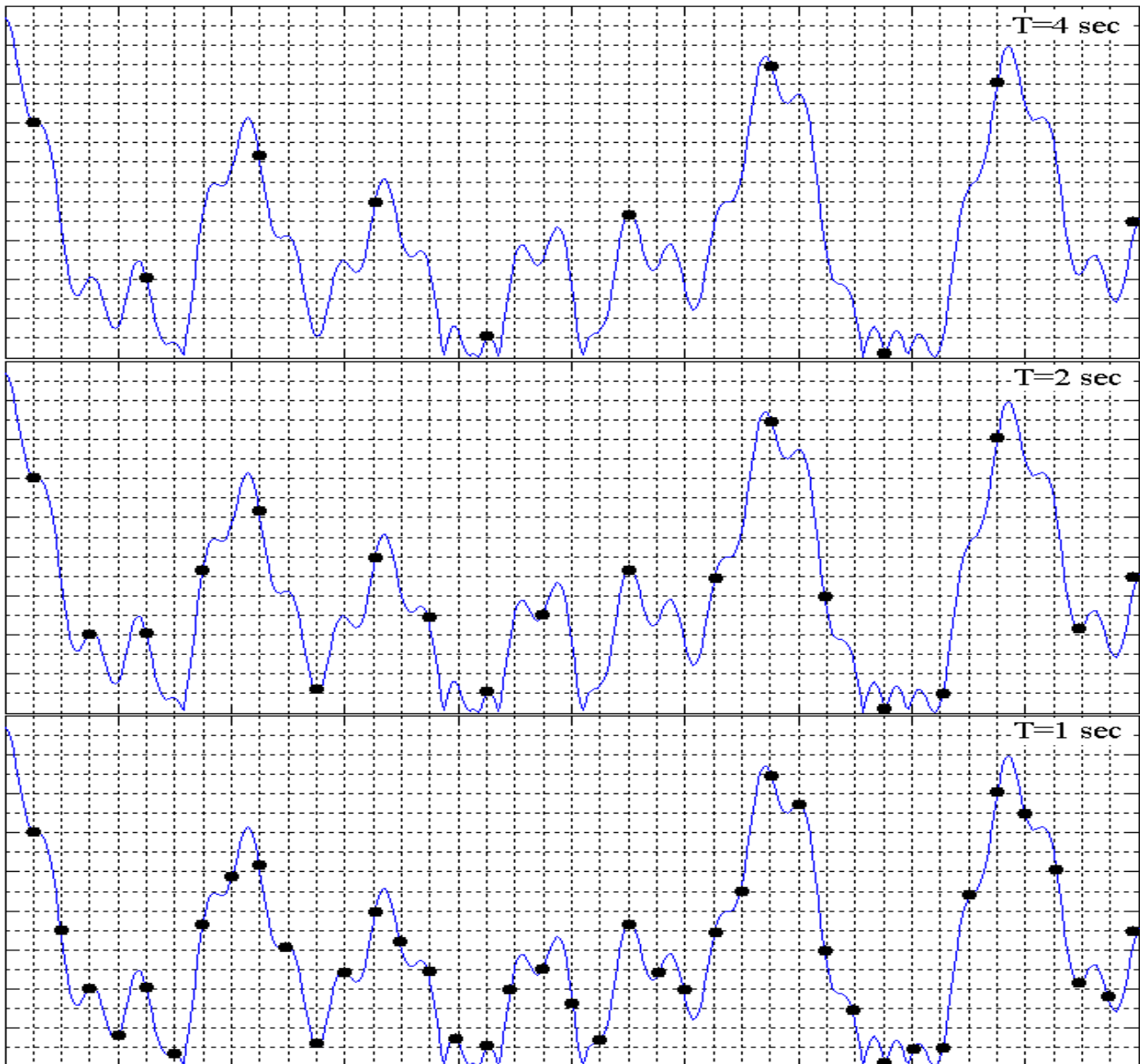
$$x(n) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

Στην παραπάνω σχέση, η ποσότητα $x(n)$ αναφέρεται στο σήμα διακριτού χρόνου που δημιουργείται δια της καταμέτρησης δειγμάτων του σήματος $x_a(t)$ κάθε T χρονικές μονάδες. Στην παραπάνω περιγραφή, το χρονικό διάστημα T ονομάζεται περίοδος δειγματοληψίας (sampling period), ενώ το αντίστροφο μέγεθος, $F_s = 1/T$, ονομάζεται ρυθμός δειγματοληψίας (sampling rate) ή συχνότητα δειγματοληψίας (sampling frequency).

Η διαδικασία της δειγματοληψίας παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 36. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε πως όσο πιο μικρή είναι η περίοδος δειγματοληψίας τόσο πιο ακριβή είναι η αναπαράσταση του συνεχούς σήματος από το διακριτό σήμα που προκύπτει, αφού το πλήθος των δεδομένων που καταγράφονται είναι μεγαλύτερο. Από την άλλη πλευρά ωστόσο η χρήση πολύ μικρής περιόδου δειγματοληψίας - ή αντίστροφα πολύ μεγάλης συχνότητας - συνοδεύεται από πολύ μεγάλο αποθηκευτικό κόστος εφόσον αυτές οι τιμές αποθηκεύονται σε κάποιο ψηφιακό μέσο (π.χ. στο σκληρό δίσκο ενός υπολογιστή). Είναι προφανές πως το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας καταγραφής είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου, καθώς οι τιμές του δεν ορίζονται πλέον σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά μόνο στις χρονικές στιγμές $T, 2T, 3T, \dots, nT$. Ένα άλλο συμπέρασμα που συσχετίζεται με τη διαδικασία της δειγματοληψίας είναι πως αυτή η διαδικασία οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας, κάτι που χαρακτηρίζει κάθε διαδικασία μετατροπής μιας συνεχούς ποσότητας σε διακριτή μορφή.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαδικασία της δειγματοληψίας, ας παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα. Θεωρώντας τη δειγματοληψία του σχήματος 36, ας θεωρήσουμε μια περίοδο δειγματοληψίας $T = 10$ msec. Αυτό σημαίνει πως κάθε 10 msec καταγράφουμε την τιμή του πλάτους του σήματος και έστω πως οι τιμές που έχουν καταγραφεί είναι αυτές που περιλαμβάνονται στις δύο πρώτες στήλες του πίνακα 4.

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε πως ενώ το αρχικό συνεχές σήμα οριζότανε σε κάθε χρονική στιγμή, τώρα πλέον ορίζεται μόνο στις διακριτές στιγμές 10, 20, 30, 40, ... (σε χρονικές μονάδες msec). Επομένως το σήμα

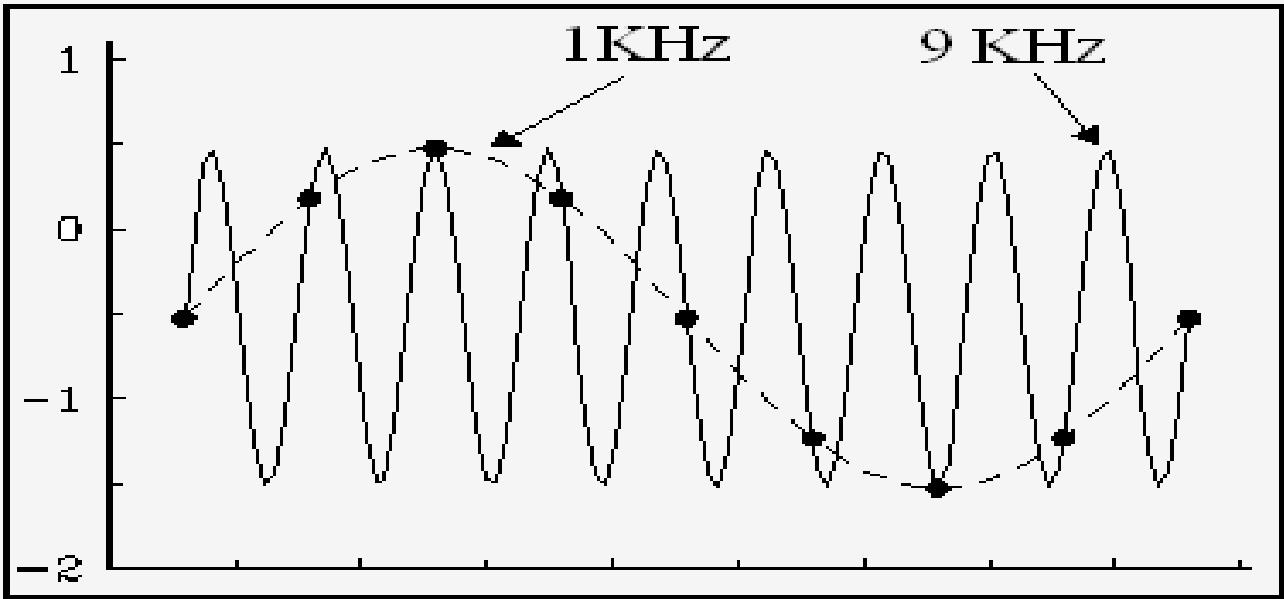


Σχήμα 36: Περιοδική δειγματοληψία αναλογικού σήματος

μετασηματίστηκε από συνεχές σε διακριτό, ή ισοδύναμα, από σήμα συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου. Ωστόσο οι τιμές του σήματος σε αυτές τις συγκεκριμένες διακριτές χρονικές στιγμές, είναι συνεχείς, υπό την έννοια ότι μπορεί να είναι οποιεσδήποτε. Επομένως το σήμα που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία είναι ένα διακριτό σήμα συνεχών τιμών. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, η διαδικασία μετατροπής του σήματος αυτού σε διακριτό σήμα διακριτών τιμών (δηλαδή σε ψηφιακό σήμα) είναι γνωστή ως κβαντισμός.

6.1.1 Ασαφείς συχνοτικές αναπαραστάσεις διακριτών σημάτων

Ένα ανεπιθύμητο αλλά αναπόφευκτο φαινόμενο που εκδηλώνεται κατά τη διάρκεια της περιοδικής δειγματοληψίας συνεχών σημάτων, είναι η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο το συνεχές σήμα από το οποίο προέκυψε μια διακριτή ακολουθία καταγεγραμμένων τιμών. Προκειμένου να περιγράψουμε αυτό το φαινόμενο και να ορίσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίζεται, ας θεωρήσουμε τη δειγματοληψία μιας συνεχούς ημιτονοειδούς κυματομορφής συχνότητας F_0 η οποία περιγράφεται από μία μαθηματική εξίσωση της μορφής $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίσουμε να δειγματοληπτούμε το σήμα με περίοδο δειγματοληψίας T_s , τότε, τα πρώτα n



Σχήμα 37: Ασάφεια αναπαράστασης διακριτού σήματος

δείγματα του διακριτού σήματος που θα προκύψει από την παραπάνω διαδικασία, θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos[2\pi F_0(0 * T_s)] \\ x(1) &= A \cos[2\pi F_0(1 * T_s)] \\ x(2) &= A \cos[2\pi F_0(2 * T_s)] \\ &\dots = \dots\dots\dots \\ x(n) &= A \cos[2\pi F_0(n * T_s)] \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας δε υπ' όψιν πως η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$, η παραπάνω σχέση θα λάβει τη μορφή

$$x(n) = A \cos(2\pi F_0 n T_s) = A \cos(2\pi F_0 n T_s + 2m\pi) = A \cos \left[2\pi \left(F_0 + \frac{m}{n T_s} \right) n T_s \right] = \sin[2\pi (F_0 + k F_s) n T_s]$$

όπου $k = m/n$ (στο σημείο αυτό έχουμε υποθέσει σιωπηρά πως το m είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n έτσι ώστε η παράμετρος k να είναι ακέραιος αριθμός) ενώ χρησιμοποιήσαμε και τη γνωστή σχέση $F_s = 1/T_s$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι πολύ σημαντική καθώς μας οδηγεί σε ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα: θεωρώντας μια διακριτή ακολουθία $x(n)$ η οποία έχει προκύψει από τη δειγματοληψία μιας ημιτονοειδούς κυματομορφής συχνότητας F_0 , τότε η ίδια ακριβώς ακολουθία θα προκύψει από τη δειγματοληψία οποιασδήποτε ημιτονοειδούς κυματομορφής της οποίας η συχνότητα είναι $F_k = F_0 + k F_s$ όπου F_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας ενώ η ακέραια μεταβλητή k παίρνει τις τιμές $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 37.

Στο παραπάνω σχήμα, η διακριτή ακολουθία έχει προκύψει από τη δειγματοληψία ημιτονοειδούς κυματομορφής συχνότητας $F_0 = 1 \text{ KHz}$ - αυτή η καμπύλη είναι σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή - ενώ η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $F_s = 1 \text{ KHz}$. Παρατηρούμε ωστόσο πως η εν λόγω ακολουθία δεν προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο το συνεχές σήμα από το οποίο έχει προέλθει, αφού από το ίδιο σημεία (όπως εύκολα προκύπτει από το σχήμα) διέρχεται και η ημιτονοειδής κυματομορφή συχνότητας $F_8 = F_0 + 8 F_s = 9 \text{ KHz}$. Επομένως εάν δεν γνωρίζουμε πληροφορίες σχετικά με τις παραμέτρους της δειγματοληψίας και το μόνο που διαθέτουμε είναι η διακριτή χρονοσειρά που έχει προκύψει από αυτή, δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να διακρίνουμε εάν αυτή έχει προέλθει από το συνεχές σήμα συχνότητας F_0 ή από το συνεχές σήμα συχνότητας F_8 ενώ το ίδιο προφανώς συμβαίνει και για τις άπειρες συχνότητες που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της παραμέτρου k . Το ανεπιθύμητο αυτό αποτέλεσμα, στη διεθνή ορολογία που συσχετίζεται με το χώρο της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι γνωστό ως aliasing.

Ποια είναι όμως η αιτία αυτού του φαινομένου; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα ας επιστρέψουμε για λίγο στη βασική θεωρία και στον τρόπο αναπαράστασης της συχνότητας στα συνεχή και στα διακριτά σήματα και ας θεωρήσουμε τη δειγματοληψία της ημιτονοειδούς κυματομορφής $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$ η οποία όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα οδηγήσει στη δημιουργία του διακριτού σήματος $x(n) = A \cos(2\pi F_0 n T_s) = A \cos((2\pi F_0 n)/F_s) = A \cos(2\pi f_0 t)$

- στην τελευταία σχέση, η συχνότητα $f_0 = F_0/F_s$ που ορίζεται ως ο λόγος της συχνότητας του δειγματοληφθέντος σήματος προς τη συχνότητα δειγματοληψίας είναι γνωστή ως σχετική (relative) ή κανονικοποιημένη (normalized) συχνότητα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, σε αντίθεση με τα συνεχή σήματα η συχνότητα F_0 των οποίων μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, στα διακριτά σήματα κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει και η συχνότητά τους μπορεί να λάβει τιμές μόνο στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ (σε αυτή την περιγραφή χρησιμοποιείται η απλή συχνότητα f_0 ενώ εάν χρησιμοποιηθούν οι κυκλικές συχνότητες $\omega = 2\pi F_0$ και $\Omega = 2\pi f_0$ τα αντίστοιχα διαστήματα είναι $-\infty < \omega < \infty$ για τα συνεχή σήματα και $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ για τα διακριτά σήματα). Τα διακριτά σήματα επίσης, χαρακτηρίζονται από μία ακόμη ιδιότητα: το σύνολο των συχνοτήτων που ανήκουν στο παραπάνω διάστημα τιμών προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο ένα διακριτό σήμα και για το λόγο αυτό θεωρούνται ως οι αληθείς συχνότητες ενώ οι συχνότητες που βρίσκονται έξω από αυτό το διάστημα είναι ταυτοσημες με κάποια από τις αληθείς συχνότητες - αποτελούν δηλαδή ψευδή αντίγραφα τους - και για το λόγο αυτό θεωρούνται ως ψευδείς συχνότητες.

Στηριζόμενοι στις παραπάνω ιδιότητες των διακριτών σημάτων μπορούμε να διατυπώσουμε για τη διαδικασία της δειγματοληψίας τις ακόλουθες προτάσεις: (α) η δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος δύναται να ορισθεί ως μία απεικόνιση της άπειρης περιοχής τιμών των συχνοτήτων των συνεχών σημάτων, στην πεπερασμένη περιοχή τιμών των συχνοτήτων των διακριτών σημάτων και (β) για να είναι δυνατή η συσχέτιση της διακριτής δειγματοληφθείσας ακολουθίας με μία και μοναδική συνεχή ημιτονοειδή κυματομορφή έτσι ώστε να λάβει χώρα η άρση της προαναφερόμενης ασάφειας, θα πρέπει η συχνότητα της δειγματοληψίας να είναι τέτοια ώστε η συχνότητα του διακριτού σήματος που θα προκύψει να είναι αληθής συχνότητα δηλαδή να ανήκει στο διάστημα τιμών $[-1/2, 1/2]$. Το τελευταίο συμπέρασμα σε μαθηματική διατύπωση γράφεται ως

$$-\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{F_0}{F_s} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2T_s} \leq -\frac{F_s}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις περιέχουν την απλή συχνότητα F_0 , ενώ εάν χρησιμοποιηθεί το μέγεθος της κυκλικής συχνότητας η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$-\frac{\pi}{T_s} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζουν και την σωστή σχέση που θα πρέπει να υφίσταται ανάμεσα στη συχνότητα δειγματοληψίας F_s και στη συχνότητα του σήματος προς δειγματοληψία F_0 έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση του φαινομένου του aliasing. Για δεδομένη συχνότητα δειγματοληψίας F_s η συχνότητα του συνεχούς σήματος θα πρέπει να είναι το πολύ ίση με $F_s/2$. Αντίθετα για δεδομένη συχνότητα σήματος F_0 , η συχνότητα της δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με $2F_0$ έτσι ώστε η δειγματοληψία να πραγματοποιηθεί με το σωστό τρόπο. Τυπική εφαρμογή αυτού κανόνα συναντάμε σε εφαρμογές ηχογράφησης της ανθρώπινης ομιλίας η οποία πραγματοποιείται στα 44100 Hz, συχνότητα υπερδιπλασια της μέγιστης συχνότητας που γίνεται αντιληπτή από το ανθρώπινο αυτί και είναι τα 20000 Hz περίπου.

Επιστρέφοντας στο σχήμα 37 διαπιστώνουμε πως η συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 1\text{KHz}$ είναι μικρότερη της ελάχιστης τιμής που πρέπει να έχει για να εφαρμοσθεί με επιτυχία η διαδικασία της δειγματοληψίας και η οποία είναι η $F_s = 2F_0 = 2\text{KHz}$ και για το λόγο αυτό το διακριτό σήμα που έχει προκύψει δεν είναι δυνατό να συσχετιστεί με μοναδικό τρόπο με κάποιο από τα δύο σήματα που απεικονίζονται στο σχήμα (μπορεί να έχει προκύψει τόσο από το ένα όσο και από το άλλο με τις ίδιες ακριβώς πιθανότητες).

Παράδειγμα 3 Προκειμένου να κατανοήσουμε το φαινόμενο του aliasing ας θεωρήσουμε δύο συνεχή σήματα $x_1(t) = \cos[2\pi(10)t]$ και $x_2(t) = \cos[2\pi(50)t]$ με συχνότητες $F_1 = 10\text{Hz}$ και $F_2 = 50\text{Hz}$ που δειγματοληφτούνται με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 40\text{Hz}$. Σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, τα διακριτά σήματα που θα προκύψουν από την παραπάνω διαδικασία θα έχουν τη μορφή

$$x_1(n) = \cos\left[2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)n\right] \quad \text{και} \quad x_2(n) = \cos\left[2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n\right] = \cos\left[\left(\frac{5\pi}{2}\right)n\right]$$

Παρατηρούμε όπως πως

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{και επομένως} \quad x_1(n) = x_2(n)$$

Με άλλα λόγια, τα δύο σήματα είναι πανομοιότυπα και δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους γεγονός που σημαίνει πως το σήμα $x_2(n)$ είναι ψευδεπίγραφο του σήματος $x_1(n)$. Αυτό συμβαίνει γιατί η μέγιστη συχνότητα του σήματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαδικασία δειγματοληψίας συχνότητας $F_s = 40\text{Hz}$ είναι $F_{max} = F_2/2 = 20\text{Hz}$ ενώ η συχνότητα του σήματος $x_2(t)$ είναι $F_2 = 50\text{Hz} > F_{max}$.

Άσκηση 70 Θεωρώντας το αναλογικό σήμα $x(t) = 3 \cos(100\pi t)$ να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του aliasing;
- Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 200\text{Hz}$ να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.
- Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 75\text{Hz}$ να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία.
- Να προσδιοριστεί η συχνότητα F ($0 < F < F_s/2$) του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου με συχνότητα $F_s = 75\text{Hz}$ θα οδηγήσει στη δημιουργία του ίδιου διακριτού σήματος με εκείνο του αρχικού αναλογικού σήματος.

Απάντηση: (α) Η μαθηματική μορφή του αναλογικού σήματος εισόδου είναι η $x(t) = 3 \cos(2\pi F_0 t) = 3 \cos(100\pi t)$ από όπου προκύπτει πως η συχνότητά του είναι ίση με $F_0 = 50\text{Hz}$. Επομένως η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του aliasing είναι $F_s^{min} = 2F_0 = 100\text{Hz}$.

(β) Εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 200\text{Hz}$, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$x(n) = 3 \cos\left(\frac{100}{200} \pi n\right) = 3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(γ) Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν το παραπάνω σήμα υποστεί δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 75\text{Hz}$, το διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$x(n) = 3 \cos\left(\frac{100}{75} \pi n\right) = 3 \cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(-\frac{2n\pi}{3} + 2n\pi\right) = 3 \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

(δ) Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως το διακριτό σήμα που προκύπτει από διαδικασία δειγματοληψίας έχει τη μορφή $x(n) = A \cos(2\pi f_0 n)$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$x(n) = 3 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{3}\right)n\right] = 3 \cos(2\pi f_0 n)$$

από όπου προκύπτει πως η σχετική ή κανονικοποιημένη συχνότητα είναι ίση με $f_0 = F/F_s = 1/3$. Επομένως η συχνότητα F του ημιτονοειδούς σήματος η δειγματοληψία του οποίου θα οδηγήσει στο ίδιο διακριτό σήμα με εκείνο του αρχικού σήματος θα είναι ίση με $F = f_0 * F_s = 75/3\text{Hz} = 25\text{Hz}$ ενώ η μαθηματική αναπαράσταση αυτού του σήματος θα είναι η $x(n) = 3 \cos(2\pi F t) = 3 \cos(50\pi t)$. Παρατηρούμε λοιπόν πως τα αναλογικά σήματα με συχνότητες $F_1 = 50\text{Hz}$ και $F_2 = 25\text{Hz}$ δίνουν το ίδιο ακριβώς διακριτό σήμα για συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 75\text{Hz}$ και επομένως το σήμα συχνότητας F_1 θεωρείται ψευδεπίγραφο του σήματος συχνότητας F_2 .

6.1.2 Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, η δειγματοληψία ενός απλού ημιτονοειδούς σήματος συχνότητας F_0 θα πρέπει να γίνει με συχνότητα τουλάχιστον ίση με $2F_0$ έτσι ώστε να μην παρουσιαστεί το ανεπιθύμητο φαινόμενο του aliasing. Στην πράξη βέβαια τα συνεχή αναλογικά σήματα δεν είναι απλές ημιτονοειδείς κυματομορφές αλλά σύμφωνα με τη θεωρία του Fourier μπορούν να αναλυθούν σε ένα άθροισμα τέτοιων κυματομορφών της μορφής

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \vartheta_i)$$

όπου τα σύμβολα A_i , F_i και ϑ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) αναφέρονται στο πλάτος, τη συχνότητα και τη φάση της συνιστώσας υπ' αριθμόν i . Στην περίπτωση αυτή, η συχνότητα της δειγματοληψίας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του aliasing θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $F_s > 2F_{max}$ όπου $F_{max} = \max(F_1, F_2, \dots, F_N)$ είναι η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο αναλογικό σήμα προς δειγματοληψία.

Είναι προφανές πως η επιλογή της συχνότητας δειγματοληψίας F_s με τον παραπάνω τρόπο, έχει ως αποτέλεσμα την απεικόνιση κάθε ημιτονοειδούς συνιστώσας συχνότητας $|F_i| < F_{max}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) του αναλογικού σήματος σε μία μοναδική διακριτή ημιτονοειδή συνιστώσα η συχνότητα της οποίας θα ανήκει στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ (για τη συνήθη συχνότητα) ή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (για την κυκλική συχνότητα $\omega_i = 2\pi f_i$). Με τον τρόπο αυτό,

το φαινόμενο του aliasing δεν πρόκειται να εμφανιστεί, ενώ επιπλέον είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από το διακριτό ισοδύναμό του δια της χρήσεως μεθόδων παρεμβολής. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι παρεμβολής που χρησιμοποιούνται στην πράξη με την πιο γενική από αυτές να υπαγορεύεται από το θεώρημα της δειγματοληψίας το οποίο διατυπώνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Θεώρημα 1 Εάν η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται σε ένα αναλογικό σήμα $x_\alpha(t)$ είναι η $F_{max} = B$ και η δειγματοληψία του σήματος γίνεται με συχνότητα $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$, τότε η κυματομορφή $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τις τιμές που έχουν καταγραφεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση παρεμβολής (interpolation function)

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \quad (64)$$

Επομένως το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha\left(\frac{n}{F_s}\right)g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \quad (65)$$

όπου $x_\alpha(n/F_s) = x_\alpha(nT) \equiv x(n)$ είναι τα δείγματα της αναλογικής κυματομορφής $x_\alpha(t)$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ισχύει η ισότητα $F_s = 2B$ η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin\{2\pi B[t - (n/2B)]\}}{2\pi B[(t - (n/2B))]}$$

Στην ορολογία της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος η συχνότητα $F_N = 2B$ είναι γνωστή ως συχνότητα Nyquist.

Ας σημειωθεί πως η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος με τον παραπάνω τρόπο είναι αρκετά δύσκολη (λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση παρεμβολής) και στην πράξη ο υπολογισμός των ενδιάμεσων τιμών του πλάτους του σήματος γίνεται με πιο απλές μεθόδους.

Παράδειγμα 4 Ας υπολογίσουμε τη συχνότητα Nyquist για το αναλογικό σήμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$x(t) = 3 \cos(50\pi t) + 10 \sin(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

Εάν γράψουμε το σήμα με τη μορφή

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \sin(2\pi F_2 t) + A_3 \cos(2\pi F_3 t) = 3 \cos[2\pi(25)t] + 10 \sin[2\pi(150)t] - \cos[2\pi(50)t]$$

διαπιστώνουμε πως προκύπτει από την επαλληλία τριών στοιχειωδών ημιτονοειδών σημάτων με πλάτη $A_1 = 3$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1$ και συχνότητες $F_1 = 25\text{Hz}$, $F_2 = 150\text{Hz}$ και $F_3 = 50\text{Hz}$. Διαπιστώνουμε πως η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι η $F_{max} = F_2 = 150\text{Hz}$ και επομένως η συχνότητα Nyquist θα είναι ίση με $F_N = 2F_{max} = 2F_2 = 300\text{Hz}$. Αυτή θα πρέπει να είναι και η συχνότητα με την οποία θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η δειγματοληψία του σήματος προκειμένου να είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από τις δειγματοληφθείσες τιμές.

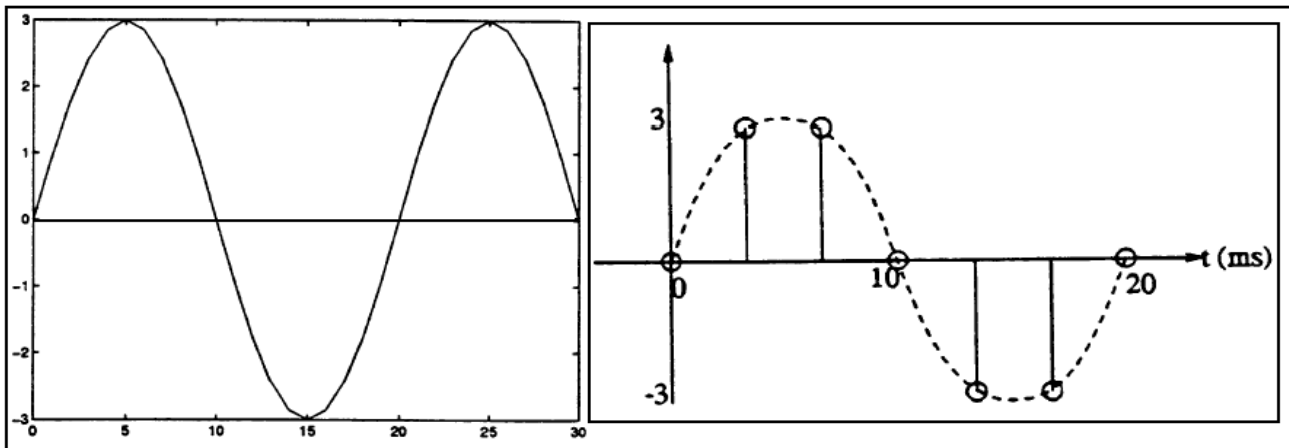
Άσκηση 71 Θεωρώντας το αναλογικό σήμα $x(t) = 3 \cos(2000\pi t) + 5 \sin(6000 \sin t) + 10 \cos(12000\pi)$ να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποια είναι η συχνότητα Nyquist του αναλογικού σήματος;
- Ποιο είναι το διακριτό σήμα που θα προκύψει ως αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του παραπάνω σήματος με συχνότητα $F_s = 5000\text{Hz}$;
- Ποιο είναι το αναλογικό σήμα που θα ανακατασκευαστεί από το παραπάνω διακριτό σήμα;

Απάντηση: (α) Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του προηγούμενου παραδείγματος, ξαναγράφουμε το αναλογικό σήμα με τη μορφή

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \sin(2\pi F_2 t) + A_3 \cos(2\pi F_3 t) = 3 \cos[2\pi(1000)t] + 5 \sin[2\pi(3000)t] + 10 \cos[2\pi(6000)t]$$

από όπου διαπιστώνουμε πως αυτό προκύπτει από τη σύνθεση τριών στοιχειωδών ημιτονοειδών κυματομορφών με συχνότητες $F_1 = 1000\text{Hz}$, $F_2 = 3000\text{Hz}$ και $F_3 = 6000\text{Hz}$. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η μέγιστη συχνότητα



Σχήμα 38: Συνεχές ημιτονοειδές σήμα και το διακριτό ισοδύναμό του

που περιέχεται στο σήμα είναι η $F_{max} = F_3 = 6000\text{Hz}$ και επομένως η συχνότητα Nyquist θα είναι ίση με $F_n = 2F_{max} = 2F_3 = 12000\text{Hz}$.

(β) Το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 x(n) = x_\alpha(nT_s) = x_\alpha\left(\frac{n}{F_s}\right) &= 3 \cos \left[\left(\frac{1000}{5000} \right) 2\pi n \right] + 5 \sin \left[\left(\frac{3000}{5000} \right) 2\pi n \right] + 10 \cos \left[\left(\frac{6000}{5000} \right) 2\pi n \right] = \\
 &= 3 \cos \left[\left(\frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] + 5 \sin \left[\left(\frac{3}{5} \right) 2\pi n \right] + 10 \cos \left[\left(\frac{6}{5} \right) 2\pi n \right] = \\
 &= 3 \cos \left[\left(\frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] + 5 \sin \left[\left(1 - \frac{2}{5} \right) 2\pi n \right] + 10 \cos \left[\left(1 + \frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] = \\
 &= 3 \cos \left[\left(\frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] + 5 \sin \left[\left(-\frac{2}{5} \right) 2\pi n \right] + 10 \cos \left[\left(+\frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] = \\
 &= 13 \cos \left[\left(\frac{1}{5} \right) 2\pi n \right] - 5 \sin \left[\left(\frac{2}{5} \right) 2\pi n \right]
 \end{aligned}$$

(γ) Από την αναλυτική μορφή του διακριτού σήματος που προέκυψε από τη δειγματοληψία, διαπιστώνουμε πως αποτελείται από δύο στοιχειώδεις κυματομορφές οι συχνότητες των οποίων είναι $F_1 = F_s f_0 = 5000\text{Hz} * (1/5) = 1000\text{Hz}$ και $F_2 = F_s f_0 = 5000\text{Hz} * (2/5) = 2000\text{Hz}$ και επομένως το αναλογικό σήμα που αντιστοιχεί σε αυτό είναι το $x(t) = 13 \cos[2\pi(1000)t] - 5 \sin[2\pi(2000)t] = 13 \cos(2000\pi t) - 5 \sin(4000\pi t)$. Παρατηρούμε επομένως πως το ανακατασκευασμένο σήμα δεν είναι ίδιο με το αρχικό, με την παραμόρφωση που παρατηρείται να οφείλεται στο φαινόμενο του aliasing. Πράγματι, αφού η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $F_s = 5000\text{Hz}$ η μέγιστη συχνότητα που ανακατασκευάζεται πλήρως από το διακριτό δειγματοληφθέν σήμα είναι η $F_{max} = 2500\text{Hz}$, ενώ το αρχικό αναλογικό σήμα έχει μεγαλύτερες συχνότητες.

Άσκηση 72 Θεωρώντας το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t) = 3 \sin(1000\pi t)$ να σχεδιάσετε την κυματομορφή που το περιγράφει και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Θεωρώντας πως το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 300\text{Hz}$ να προσδιορίσετε τη συχνότητα του διακριτού σήματος $x(n) = x_\alpha(nT)$ ($T = 1/F_s$) και να αποδείξετε πως αυτό είναι περιοδικό.
- Υπολογίστε τα δείγματα του διακριτού σήματος $x(n)$ για χρόνο μιας περιόδου και σχεδιάστε το διακριτό σήμα σε αντιπαραβολή με το συνεχές σήμα από το οποίο έχει προκύψει.
- Να προσδιορίσετε την τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας F_s τέτοια ώστε το διακριτό σήμα να προσεγγίσει τη μέγιστη τιμή του πλάτους που είναι η τιμή $A = 3$. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή για αυτή τη συχνότητα;

Απάντηση: (α) Η σχεδίαση του αναλογικού σήματος είναι αρκετά απλή αφού πρόκειται για ένα στοιχειώδες ημιτονοειδές σήμα και το αποτέλεσμά της απεικονίζεται διαγραμματικά στο σχήμα 38.

(β) Το διακριτό σήμα που θα προκύψει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος με συχνότητα $F_s = 300\text{Hz}$, θα δίδεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη σχέση

$$x(n) = x_\alpha(nT_s) = x_\alpha\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3 \sin\left(\frac{100\pi}{300}n\right) = 3 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 3 \sin(2\pi f_0 n)$$

Επομένως η συχνότητα του διακριτού σήματος θα δίδεται από τη σχέση $2\pi f_0 = n\pi/3 \Rightarrow f_0 = (1/2\pi)(\pi/3) = 1/6$, ήτοι, το εν λόγω σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 1/f_0 = 6$.

(γ) Τα δείγματα του διακριτού σήματος σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου είναι εκείνα που δίδονται από τις τιμές $x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5)$ και οι οποίες υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} x(0) &= 3 \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) = 3 \sin(0) = 0 \\ x(1) &= 3 \sin\left(\frac{1\pi}{3}\right) = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x(2) &= 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x(3) &= 3 \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = 3 \sin(\pi) = 0 \\ x(4) &= 3 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = 3 \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x(5) &= 3 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω τιμές του n αναφέρονται στην πρώτη περίοδο του σήματος ενώ η αμέσως επόμενη τιμή σηματοδοτεί την έναρξη της επόμενης περιόδου, καθώς θα είναι

$$x(6) = 3 \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 3 \sin(2\pi) = 0$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές του συνεχούς χρόνου t που αντιστοιχούν στις τιμές του διακριτού χρόνου $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση $t = n/F_s$. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} \text{Για } n = 0 : \quad t &= \frac{0}{300\text{Hz}} = 0 \text{ msec} \\ \text{Για } n = 1 : \quad t &= \frac{1}{300\text{Hz}} = \frac{1000}{300} \text{ msec} \\ \text{Για } n = 2 : \quad t &= \frac{2}{300\text{Hz}} = \frac{2000}{300} \text{ msec} \\ \text{Για } n = 3 : \quad t &= \frac{3}{300\text{Hz}} = \frac{3000}{300} \text{ msec} = 10 \text{ msec} \\ \text{Για } n = 4 : \quad t &= \frac{4}{300\text{Hz}} = \frac{4000}{300} \text{ msec} \\ \text{Για } n = 5 : \quad t &= \frac{5}{300\text{Hz}} = \frac{5000}{300} \text{ msec} \\ \text{Για } n = 6 : \quad t &= \frac{6}{300\text{Hz}} = \frac{6000}{300} \text{ msec} = 20 \text{ msec} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η χρονική στιγμή $n = 6$ σηματοδοτεί και την έναρξη της δεύτερης περιόδου του σήματος, είναι προφανές πως η τιμή της περιόδου του περιοδικού διακριτού σήματος είναι ίση με $T_d = 20\text{msecs}$. Αυτό το διακριτό σήμα για το χρονικό διάστημα της πρώτης περιόδου του παρουσιάζεται και αυτό στο σχήμα 38.

(δ) Από τη μαθηματική αναπαράσταση του διακριτού σήματος $x(n)$ διαπιστώνουμε πως η μέγιστη τιμή του είναι η τιμή $A = 3$ αφού η συνάρτηση του ημιτόνου μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1, +1]$. Όπως φαίνεται δε από το σχήμα 38, αυτή η μέγιστη τιμή προσεγγίζεται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $n = 1$. Εάν λοιπόν η ζητούμενη τιμή συχνότητας είναι ίση με F , η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή $n = 1$ θα δίδεται από τη σχέση

$$x(1) = 3 \sin\left(\frac{100}{F} \pi\right) = 3 \Rightarrow \sin\left(\frac{100\pi}{F}\right) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{100\pi}{F} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F = 200\text{Hz}$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας έτσι ώστε να καταγραφεί η μέγιστη τιμή του πλάτους του διακριτού σήματος είναι ίση με $F = 200Hz$.

Άσκηση 73 Θεωρώντας ένα αναλογικό σήμα που περιέχει συχνότητες μέχρι $10KHz$ να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:

- Για ποια περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα διακριτά δείγματά του;
- Έστω πως δειγματοληπτούμε το σήμα με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 8KHz$. Να εξηγήσετε τι θα συμβεί με τις στοιχειώδεις ημιτονοειδείς κυματομορφές συχνοτήτων $F_1 = 5KHz$ και $F_2 = 9KHz$.

Απάντηση: (α) Εφόσον η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα είναι η $F_{max} = 10KHz$, η περιοχή συχνοτήτων δειγματοληψίας για την οποία είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή του αναλογικού σήματος είναι η $F_s \geq 2F_{max} = 20KHz$.

(β) Για τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας $F_s = 8KHz$ η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα διακριτά δείγματα θα είναι η $F = 4KHz$. Επομένως οι συχνότητες $F_1 = 5KHz$ και $F_2 = 9KHz$ είναι ψευδώνυμα μικρότερων συχνοτήτων που ανήκουν στο διάστημα $[0KHz - 4KHz]$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτές τις μικρότερες συχνότητες εργαζόμαστε ως εξής:

- Για τη συχνότητα $F_1 = 5KHz$:

$$x(n) = \cos \left[2\pi \left(\frac{5000}{8000} \right) n \right] = \cos \left[2\pi \left(\frac{5}{8} \right) n \right] = \cos \left(\frac{5\pi n}{4} \right) = \cos \left(-\frac{3n\pi}{4} + 2n\pi \right) = \cos \left(-\frac{3n\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{3n\pi}{4} \right)$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_1 = 5KHz$ είναι ψευδώνυμο του σήματος συχνότητας $F = 3KHz$.

- Για τη συχνότητα $F_2 = 9KHz$:

$$x(n) = \cos \left[2\pi \left(\frac{9000}{8000} \right) n \right] = \cos \left[2\pi \left(\frac{9}{8} \right) n \right] = \cos \left(\frac{9\pi n}{4} \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{4} + 2n\pi \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right)$$

Επομένως το ημιτονοειδές σήμα συχνότητας $F_2 = 9KHz$ είναι ψευδώνυμο του σήματος συχνότητας $F = 1KHz$.

Άσκηση 74 Ένα αναλογικό σήμα προερχόμενο από ηλεκτροκαρδιογράφημα περιέχει συχνότητες μέχρι τα $100Hz$. (α) Ποια είναι η συχνότητα Nyquist; (β) Έστω πως το παραπάνω σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 250Hz$. Ποια είναι η μεγαλύτερη συχνότητα του σήματος που μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο για αυτή τη συχνότητα δειγματοληψίας;

Απάντηση: (α) Εφόσον η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα έχει τιμή $F_{max} = 100Hz$, η συχνότητα Nyquist θα έχει τιμή $F_N = 2F_{max} = 200Hz$. (β) Η μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος που αναπαρίσταται με μοναδικό τρόπο σε διαδικασία δειγματοληψίας συχνότητας $F_s = 250Hz$ είναι η $F = F_s/2 = 125KHz$.

Άσκηση 75 Θεωρώντας ένα αναλογικό σήμα της μορφής

$$x_a(t) = \sin(480\pi t) + 3\sin(720\pi t)$$

που δειγματοληπτείται με συχνότητα $F_s = 600Hz$, να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποια είναι η τιμή της συχνότητας Nyquist του αναλογικού σήματος;
- Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο για τη συγκεκριμένη συχνότητα δειγματοληψίας;
- Ποιες είναι οι συχνότητες (σε ακτίνια) του διακριτού σήματος $x(n)$;
- Εάν το $x(n)$ διαβιβαστεί από ένα ιδανικό DAC (Digital to Analog Converter) ποιο θα είναι το αναλογικό σήμα $y_a(t)$ που θα προκύψει;

Απάντηση: (α) Εάν γράψουμε το αναλογικό σήμα με τη μορφή

$$x_a(t) = \sin(2\pi F_0 t) + 3 \sin(2\pi F_1 t) = \sin[2\pi(240)t] + 3 \sin[2\pi(360)t]$$

δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως σε αυτό περιέχονται οι συχνότητες $F_0 = 240\text{Hz}$ και $F_1 = 360\text{Hz}$. Παρατηρούμε πως η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι η $F_{max} = F_2 = 360\text{Hz}$ και επομένως η συχνότητα Nyquist του σήματος θα είναι ίση με $F_N = 2F_{max} = 2F_1 = 720\text{Hz}$.

(β) Εφόσον η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος είναι η $F_s = 600\text{Hz}$, η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο για τη συγκεκριμένη συχνότητα δειγματοληψίας, είναι η $F = F_s/2 = 300\text{Hz}$.

(γ) Το διακριτό σήμα που προκύπτει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος με συχνότητα $F_s = 600\text{Hz}$ θα δίδεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$\begin{aligned} x(n) &= \sin\left(2\pi \frac{240}{600}n\right) + 3 \sin\left(2\pi \frac{360}{600}n\right) = \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 3 \sin\left(\frac{6\pi n}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 3 \sin\left(-\frac{4\pi n}{5} + 2\pi n\right) = \\ &= \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 3 \sin\left(-\frac{4\pi n}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - 3 \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) = -2 \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

και επομένως η συχνότητα του διακριτού σήματος (σε ακτίνια) θα είναι ίση με $\omega = 4\pi/5$. Όσον αφορά την κανονικοποιημένη συχνότητα f_0 αυτή θα είναι ίση με $f_0 = \omega/2\pi = (1/2\pi)(4\pi/5) = (4/10) = (2/5)$.

(δ) Η συχνότητα του αναλογικού σήματος που θα προκύψει από το παραπάνω διακριτό σήμα θα δίδεται από τη σχέση $F = f_0 F_s = (2/5) * 600\text{Hz} = 240\text{Hz}$. Επομένως, το ανακατασκευασμένο αναλογικό σήμα θα έχει τη μορφή

$$y_a(t) = -2 \sin[2\pi(240)t] = -2 \sin(480\pi t)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

6.2 Κβαντισμός του δειγματοληφθέντος διακριτού σήματος

Η διαδικασία του κβαντισμού (quantization) συνίσταται στη μετατροπή του διακριτού σήματος συνεχών τιμών που έχει προκύψει από τη δειγματοληψία κάποιου αναλογικού σήματος, σε διακριτό σήμα διακριτών τιμών οι τιμές του οποίου δεν είναι αυθαίρετες αλλά ανήκουν σε ένα σύνολο τιμών οι οποίες είναι γνωστές και προκαθορισμένες εκ των προτέρων. Εάν συμβολίσουμε τη διαδικασία του κβαντισμού του διακριτού σήματος με $Q[x(n)]$ και το κβαντισμένο διακριτό σήμα που θα προκύψει από αυτή ως $x_q(n)$, τότε η διαδικασία του κβαντισμού μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από την εξίσωση

$$x_q(n) = Q[x(n)]$$

Η κάθε μία από τις διακριτές τιμές που μπορούν να λάβουν τα δείγματα ενός κβαντισμένου διακριτού σήματος είναι γνωστή ως επίπεδο κβαντισμού (quantization levels) ενώ η διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικά επίπεδα κβαντισμού ονομάζεται μέγεθος βήματος κβαντισμού (quantization step size) ή ανάλυση (resolution). Στην πραγματικότητα, το μόνο μέγεθος που ορίζουμε ως παράμετρο της διαδικασίας είναι το πλήθος L των επιπέδων κβαντισμού, ενώ το μέγεθος Δ του βήματος κβαντισμού υπολογίζεται αυτόματα με τη βοήθεια της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής των δειγμάτων του διακριτού σήματος $x(n)$. Πράγματι, εάν x_{max} και x_{min} είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της διακριτής ακολουθίας $x(n)$ και L είναι το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε, τότε προφανώς το βήμα κβαντισμού Δ , δηλαδή η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά επίπεδα κβαντισμού, θα δίδεται από τη σχέση

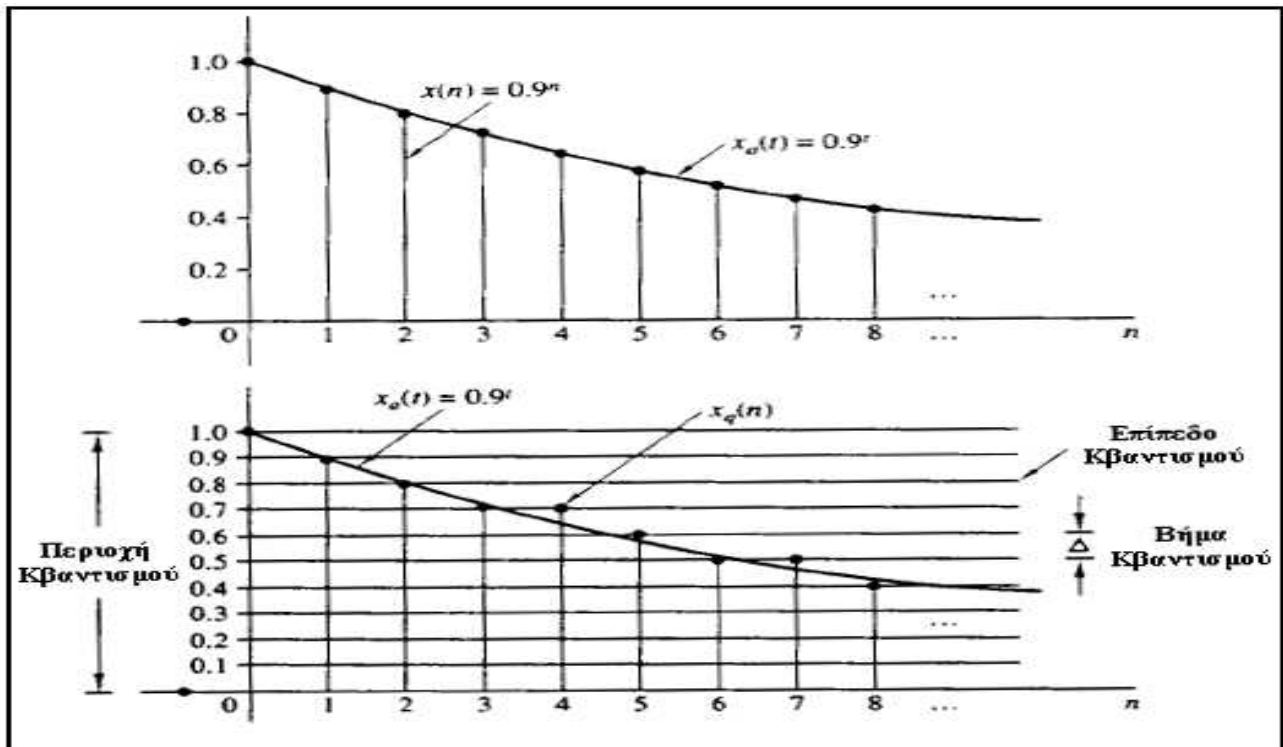
$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1}$$

ενώ οι τιμές των L επιπέδων κβαντισμού θα είναι οι

$$\{x_{min}, x_{min} + \Delta, x_{min} + 2\Delta, x_{min} + 3\Delta, \dots, x_{min} + (L - 1)\Delta, x_{max}\}$$

Με άλλα λόγια τα επίπεδα κβαντισμού ορίζονται υποδιαιρώντας το διάστημα τιμών $[x_{min}, x_{max}]$ σε L ίσα διαστήματα και καταγράφοντας τις ενδιάμεσες τιμές που προκύπτουν από αυτή την υποδιάρθρωση. Ας σημειωθεί πως αυτός ο τρόπος ορισμού των επιπέδων κβαντισμού χαρακτηρίζει τους ομοιόμορφους κβαντιστές ενώ σε άλλες περιπτώσεις οι αποστάσεις ανάμεσα σε δύο διαδοχικά επίπεδα δεν είναι πάντα οι ίδιες.

Μετά τον προσδιορισμό των επιπέδων κβαντισμού, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσαρμόσουμε την κάθε μία από τις τιμές των δειγμάτων του διακριτού σήματος έτσι ώστε αυτή να ταυτιστεί με την τιμή του πλησιέστερου επιπέδου κβαντισμού. Εάν αυτό το πλησιέστερο επίπεδο έχει μεγαλύτερη τιμή από την τιμή του τρέχοντος δείγματος θα πρέπει να λάβει χώρα στρογγυλοποίηση της τιμής ενώ στην αντίθετη περίπτωση η τιμή του



Σχήμα 39: Διαγραμματική αναπαράσταση της διαδικασίας του χβαντισμού

δείγματος θα πρέπει να μειωθεί έτσι ώστε να συμπίσει με εκείνη του πλησιέστερου προς αυτή επιπέδου. Προκειμένου να κατανοήσουμε αυτή τη διαδικασία, ας θεωρήσουμε το επόμενο παράδειγμα:

Εστω πως η μέγιστη τιμή του πλάτους του σήματος είναι τα 0.50 Volts. Θεωρώντας $L = 10$ επίπεδα χβαντισμού και υποθέτοντας πως το σήμα περιέχει μόνο θετικές τιμές, είναι προφανές πως το βήμα χβαντισμού θα είναι ίσο με $\Delta = 0.50/10 = 0.05$. Αυτό σημαίνει πως οι τιμές του σήματος διακριτού χρόνου που έχει προκύψει από τη διαδικασία της δειγματοληψίας, δεν μπορεί να είναι οποιεσδήποτε αλλά μόνο μία από τις τιμές που ανήκουν στο σύνολο τιμών

$$\{0, 0.050, 0.100, 0.150, 0.200, 0.250, 0.300, 0.350, 0.400, 0.450, 0.500\}$$

Επομένως εκείνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσαρμόσουμε την κάθε μία από αυτές τις τιμές έτσι ώστε να την εξισώσουμε με το πλησιέστερο ως προς αυτή επίπεδο χβαντισμού. Στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος, η πρώτη τιμή του διακριτού σήματος είναι η 0.352. Παρατηρούμε πως το πλησιέστερο προς αυτή επίπεδο χβαντισμού έχει την τιμή 0.350. Εκείνο που έχουμε να κάνουμε λοιπόν είναι να αντικαταστήσουμε την τιμή 0.352 με την τιμή 0.350. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, η δεύτερη τιμή που είναι η 0.401 θα αντικατασταθεί από την τιμή 0.400, η τρίτη τιμή που είναι η 0.497 θα αντικατασταθεί από την 0.500 κ.ο.κ. Οι νέες τιμές του σήματος έτσι όπως έχουν προκύψει από την εφαρμογή της διαδικασίας του χβαντισμού, παρουσιάζονται στην τρίτη στήλη του πίνακα 4.

Ένα δεύτερο παράδειγμα διαδικασίας χβαντισμού απεικονίζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 39. Στο σχήμα αυτό παρουσιάζεται η διαδικασία χβαντισμού του διακριτού σήματος συνεχών τιμών $x(n) = (0.9)^n$ που έχει προκύψει από τη δειγματοληψία του συνεχούς σήματος $x(t) = (0.9)^t$.

Η διαφορά $e_q(n) = x_q(n) - x(n)$ που υφίσταται ανάμεσα στις τιμές του σήματος πριν και μετά τη διαδικασία του χβαντισμού, είναι γνωστή ως σφάλμα χβαντισμού (quantization error) ή θόρυβος χβαντισμού (quantization noise). Η τιμή αυτού του σφάλματος θα ανήκει στην περιοχή τιμών $-\Delta/2 \leq e_q(n) \leq \Delta/2$ και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ανάλογα με το εάν η προσαρμογή της συνεχούς τιμής έτσι ώστε αυτή να προσεγγίσει το πλησιέστερο επίπεδο χβαντισμού, γίνεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Είναι προφανές λοιπόν πως η εφαρμογή της διαδικασίας του χβαντισμού οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας (καθώς πλέον οι τιμές του διακριτού σήματος εισόδου δεν είναι συνεχείς αλλά διακριτές) ενώ θα πρέπει να σημειωθεί πως το αποτέλεσμα της εφαρμογής της δεν είναι αναστρέψιμο, αφού δύο δείγματα που απέχουν απόσταση $d \leq \Delta/2$ από ένα επίπεδο χβαντισμού θα λάβουν και τα δύο την ίδια τιμή. Όσον αφορά την ακρίβεια της προσέγγισης του αρχικού σήματος από το χβαντισμένο ισοδύναμό του, αυτή εξαρτάται άμεσα από το πλήθος των επιπέδων χβάντωσης L , ή ισοδύναμα από την τιμή του μεγέθους του βήματος χβάντωσης Δ : όσο μικρότερο είναι το μέγεθος του βήματος χβάντωσης, τόσο περισσότερα είναι τα επίπεδα χβάντωσης και τόσο

πιο μικρό είναι το σφάλμα κβαντισμού. Για να το καταλάβουμε αυτό ας θεωρήσουμε την περίπτωση των 10 επιπέδων κβάντωσης του προηγούμενου παραδείγματος και την τιμή 0.378 του σήματος εισόδου. Στην περίπτωση αυτή το πλησιέστερο επίπεδο κβάντωσης είναι το 0.400, και επομένως το σφάλμα κβαντισμού είναι ίσο με $0.400 - 0.378 = 0.022$. Αντίθετα, εάν διπλασιάσουμε το πλήθος των επιπέδων κβάντωσης - δηλαδή υποδιπλασιάσουμε το μέγεθος του βήματος κβάντωσης - το πλησιέστερο προς την τιμή 0.378 επίπεδο κβαντισμού είναι το 0.375 και επομένως το σφάλμα κβάντωσης στην περίπτωση αυτή είναι ίσο με $0.375 - 0.378 = 0.003$ (αναφερόμαστε ασφαλώς σε απόλυτες τιμές). Διαπιστώνουμε λοιπόν πως όσο πιο πυκνά είναι τα επίπεδα κβαντισμού, τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα κβαντισμού για το κάθε δείγμα, και τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση του διακριτού σήματος συνεχών τιμών από το κβαντισμένο ισοδύναμό του. Οι τιμές του σφάλματος κβαντισμού για το παράδειγμα της συγκεκριμένης ενότητας παρουσιάζονται στην τέταρτη στήλη του πίνακα 4.

Άσκηση 76 Να δημιουργηθούν δύο σήματα διακριτού χρόνου $x_1(n)$ και $x_2(n)$ με μήκος $N = 1000$ η μαθηματική περιγραφή των οποίων αποδίδεται από τις εξισώσεις

$$x_1(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N} + \vartheta\right) \quad \text{και} \quad x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \vartheta\right) \quad \text{αντίστοιχα}$$

Για κάθε ένα από αυτά τα σήματα να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των δειγμάτων που περιλαμβάνονται σε αυτά, καθώς επίσης και ο μέσος όρος τους.

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας να μετασχηματίσετε τα σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ σε ψηφιακά χρησιμοποιώντας M επίπεδα κβαντισμού (η τιμή του M θα καθορίζεται από το χρήστη). Για κάθε τιμή του M να υπολογίσετε το μέσο σφάλμα κβαντισμού για το κάθε σήμα. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία 3 φορές για τιμές του $M = 5, 10, 20$ να επαληθεύσετε πειραματικά τη σχέση της αντιστρόφου αναλογίας που υφίσταται ανάμεσα στην τιμή του M και στο μέσο σφάλμα κβαντισμού.

Απάντηση: Στο πρώτο βήμα της διαδικασίας θα πρέπει να κατασκευάσουμε τα δύο σήματα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ορισμού τους. Στη γλώσσα προγραμματισμού C η κατασκευή των δύο αυτών σημάτων πραγματοποιείται από ένα απλό βρόγχο της μορφής

```
for (i=0; i<SAMPLES; i++){
    x1[i]=sin((2*PI*i)/SAMPLES+THETA);
    x2[i]=cos((2*PI*i)/SAMPLES+THETA); }
```

όπου οι σταθερές SAMPLES και THETA περιγράφουν το πλήθος των δειγμάτων και τη γωνία ϑ αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα πρέπει να λάβει χώρα ο υπολογισμός της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του κάθε σήματος, καθώς επίσης και του μέσου όρου των δειγμάτων του, διαδικασίες που στηρίζονται στη χρήση των συναρτήσεων Max, Min και Mean ο πηγαίος κώδικας των οποίων παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
double Max (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double max;
    if (length<=0) return (-1);
    max = buffer [0];
    for (counter=0; counter<length; counter++)
        if (buffer [counter]>max)
            max = buffer [counter];
    return (max); }

double Min (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double min;
    if (length<=0) return (-1);
    min = buffer [0];
    for (counter=0; counter<length; counter++)
        if (buffer [counter]<min)
            min = buffer [counter];
    return (min); }

double Mean (double * buffer , LTYPE length) {
    LTYPE counter; double sum = 0.0;
    if (length<=0) return (-1);
```

```

for (counter=0;counter<length;counter++)
    sum += buffer [counter];
return (sum/(double)length); }

```

Από την άλλη πλευρά ο κβαντισμός του σήματος στηρίζεται στη συνάρτηση FindQuantizationLevel η οποία δέχεται ως είσοδο τον πίνακα των επιπέδων κβαντισμού και την τρέχουσα τιμή του πλάτους του σήματος και επιστρέφει την τιμή του πλησιέστερου προς αυτή επιπέδου κβαντισμού. Η υλοποίηση αυτής της συνάρτησης χαρακτηρίζεται από ένα κώδικα της μορφής

```

int FindQuantizationLevel (double * levels , int length ,
                          double sample) {
    int counter , minCell=0; double minDist;
    if (length<=0) return (-1);
    minDist = fabs(levels[0]-sample);
    for (counter=0;counter<length;counter++) {
        if (fabs(levels[counter]-sample)<minDist) {
            minDist = fabs(levels[counter]-sample);
            minCell = counter; } }
    return minCell; }

```

ο οποίος εκείνο που κάνει είναι να υπολογίζει το επίπεδο κβαντισμού του οποίου η απόσταση από την τρέχουσα τιμή του δείγματος είναι η ελάχιστη. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως ο κώδικας της παραπάνω συνάρτησης είναι παρόμοιος με τον κώδικα της συνάρτησης Min που υπολογίζει την ελάχιστη τιμή των στοιχείων ενός μονοδιάστατου πίνακα. Τέλος ο κώδικας της συνάρτησης main που υλοποιεί το σύνολο του αλγορίθμου δια της κλήσεως των συναρτήσεων που έχουν παρουσιαστεί στις προηγούμενες παραγράφους ακολουθεί στη συνέχεια.

```

void main (void) {
    int counter , levelNum = 1000;
    double buffer [SAMPLES] , * quant , * error;
    double min , max , step , * levels , meanError;
    for (counter=0;counter<SAMPLES;counter++)
        buffer [counter]=sin ((2*PI*counter)/SAMPLES+THETA);
    min = Min (buffer , SAMPLES);
    max = Max (buffer , SAMPLES);
    if ((min>0)&&(max>0))
        step = (max-min)/levelNum;
    if ((min<0)&&(max>0))
        step = (fabs(min)+fabs(max))/levelNum;
    if ((min<0)&&(max<=0))
        step = (fabs(min)-fabs(max))/levelNum;
    for (levelNum=1;levelNum<20;levelNum++) {
        levels = (double *) malloc ((levelNum+1)*sizeof(double));
        if (!levels) return;
        for (counter=0;counter<=levelNum;counter++)
            levels [counter] = min+counter*step;
        quant = (double *) malloc (SAMPLES*sizeof(double));
        if (!quant) return;
        error = (double *) malloc (SAMPLES*sizeof(double));
        if (!error) return;
        for (counter=0;counter<SAMPLES;counter++) {
            quant [counter]=levels [FindQuantizationLevel(
                levels , levelNum , buffer [counter])];
            error [counter]=fabs (buffer [counter]-quant [counter]); }
        meanError = Mean (error , SAMPLES);
        printf ("Mean_Error_is_%.6f ==> Level_Numbner_is %d\n" ,
                meanError , levelNum);
        free (quant);
    }
}

```



```

free (error);
free (levels); }
getch(); }

```

Στον παραπάνω κώδικα η διαδικασία κβαντισμού υλοποιείται για το διακριτό σήμα $x_1(n)$ ενώ η διαδικασία για το διακριτό σήμα $x_2(n)$ είναι εντελώς ανάλογη. Η παραπάνω διαδικασία υλοποιείται για μεταβλητό πλήθος επιπέδων κβαντισμού, προκειμένου να διαπιστωθεί πειραματικά η σχέση της αντιστρόφου αναλογίας που υφίσταται ανάμεσα στην τιμή του μέσου απόλυτου σφάλματος κβαντισμού και στο πλήθος των επιπέδων κβαντισμού που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Η τυπική έξοδος της παραπάνω εφαρμογής παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```

Mean Error is 1.000000 ==> Level Numner is 1 Mean Error is
0.998035 ==> Level Numner is 2 Mean Error is 0.996088 ==> Level
Numner is 3 Mean Error is 0.994155 ==> Level Numner is 4 Mean
Error is 0.992233 ==> Level Numner is 5 Mean Error is 0.990321
==> Level Numner is 6 Mean Error is 0.988417 ==> Level Numner is
7 Mean Error is 0.986522 ==> Level Numner is 8 Mean Error is
0.984634 ==> Level Numner is 9 Mean Error is 0.982753 ==> Level
Numner is 10 Mean Error is 0.980879 ==> Level Numner is 11 Mean
Error is 0.979012 ==> Level Numner is 12 Mean Error is 0.977150
==> Level Numner is 13 Mean Error is 0.975294 ==> Level Numner
is 14 Mean Error is 0.973444 ==> Level Numner is 15 Mean Error is
0.971598 ==> Level Numner is 16 Mean Error is 0.969759 ==> Level
Numner is 17 Mean Error is 0.967925 ==> Level Numner is 18 Mean
Error is 0.966095 ==> Level Numner is 19

```

Άσκηση 77 *Μια ψηφιακή γραμμή επικοινωνίας μεταφέρει δείγματα του αναλογικού σήματος που περιγράφεται από την εξίσωση*

$$x_\alpha(t) = 3 \cos(600\pi t) + 2 \cos(1800\pi t)$$

κωδικοποιημένα σε δυαδική μορφή. Η γραμμή έχει ταχύτητα μετάδοσης 10Kbps και κάθε δείγμα υφίσταται διαδικασία κβαντισμού και προσαρμόζεται σε κάποιο από 1024 διαφορετικά επίπεδα κβαντισμού που αναπαριστούν τιμές τάσης.

- Να προσδιοριστεί η συχνότητα δειγματοληψίας F_s καθώς και η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα καταγεγραμμένα δείγματα του διακριτού σήματος.
- Ποια είναι η συχνότητα Nyquist του σήματος $x_\alpha(t)$;
- Ποιες είναι οι συχνότητες του διακριτού σήματος $x(n)$;
- Ποια είναι η τιμή του βήματος κβαντισμού Δ ;

Απάντηση: (α) Εφόσον το κάθε δείγμα του σήματος εισόδου είναι κωδικοποιημένο στο δυαδικό σύστημα και μπορεί να λάβει τιμές στο διάστημα $[0, 1023]$ είναι προφανές πως απαιτούνται $b = \log_2(1024) = 10$ bits για την κωδικοποίησή του. Από την άλλη πλευρά η ταχύτητα της γραμμής είναι ίση με 10000 bps. Επομένως η συχνότητα δειγματοληψίας θα υπολογίζεται ως

$$F_s = \frac{1000 \text{ bits per second}}{10 \text{ bits per sample}} = 1000 \frac{\text{samples}}{\text{seconds}} = 1000 \text{ Hz}$$

ενώ η μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος που να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα πειραματικά δεδομένα είναι η $F = F_s/2 = 500 \text{ Hz}$.

(β) Από την αναλυτική μορφή του αναλογικού σήματος εισόδου

$$x_\alpha(t) = 3 \cos(2\pi F_1 t) + 2 \cos(2\pi F_2 t) = 3 \cos[2\pi(300)t] + 2 \cos[2\pi(200)t]$$

είναι προφανές πως το σήμα περιέχει τις συχνότητες $F_1 = 300 \text{ Hz}$ και $F_2 = 200 \text{ Hz}$. Από αυτές τις δύο συχνότητες η μεγαλύτερη είναι η $F_2 = 200 \text{ Hz}$ και επομένως η συχνότητα Nyquist του αναλογικού σήματος θα έχει τιμή $F_N = 2F_{max} = 2F_2 = 400 \text{ Hz}$.

(γ) Το διακριτό σήμα $x(n)$ που προκύπτει από το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ με δειγματοληψία συχνότητας $F_s = 1000\text{Hz}$ θα δίδεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$x(n) = 3 \cos\left(\frac{600}{1000}\pi n\right) + 2 \cos\left(\frac{1800}{1000}\pi n\right) = 3 \cos\left(\frac{3}{5}\pi n\right) + 2 \cos\left(\frac{9}{5}\pi n\right) = 3 \cos(2\pi f_0 n) + 2 \cos(2\pi f_1 n)$$

Θα είναι επομένως $2\pi f_0 = 3\pi/5 \Rightarrow f_0 = 3/10$ και $2\pi f_1 = 9\pi/5 \Rightarrow f_1 = 9/10$. Ωστόσο, η συχνότητα $f_1 = 9/10$ είναι στην πραγματικότητα ψευδώνυμο της συχνότητας $f_2 = 1/10$ καθώς όπως εύκολα αποδεικνύεται, είναι

$$\cos\left(\frac{9\pi n}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi n}{5} + 2\pi n\right) = \cos\left(-\frac{\pi n}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$$

(δ) Από την εξίσωση ορισμού του αναλογικού σήματος διαπιστώνουμε πως η μέγιστη τιμή του πλάτους του είναι η τιμή $x_{max} = 5$ - η τιμή αυτή εμφανίζεται όταν οι δύο συναρτήσεις του συνημιτόνου λάβουν τη μέγιστη τιμή τους που είναι ίση με $+1$ - ενώ η ελάχιστη τιμή του πλάτους του είναι η τιμή $x_{min} = -5$ - η τιμή αυτή εμφανίζεται όταν οι δύο συναρτήσεις του συνημιτόνου λάβουν την ελάχιστη τιμή τους που είναι ίση με -1 . Επομένως η τιμή του βήματος κβαντισμού θα είναι σύμφωνα με τη θεωρία ίση με

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1} = \frac{5 - (-5)}{1024 - 1} = \frac{10}{1023}$$

Άσκηση 78 Το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 6.35 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right)$$

υφίσταται διαδικασία κβαντισμού με τιμές βήματος κβαντισμού (α) $\Delta = 0.1$ και (β) $\Delta = 0.02$. Να προσδιοριστεί το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την αναπαράσταση των ψηφιακών δειγμάτων σε κάθε περίπτωση.

Απάντηση: Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό πως το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού δίδεται από τη σχέση

$$L = 1 + \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta}$$

όπου x_{max} και x_{min} η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του πλάτους του σήματος και Δ η τιμή του επιπέδου κβαντισμού. Έχοντας υπολογίσει το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού, μπορούμε να προσδιορίσουμε το μήκος σε bits της δυαδικής αναπαράστασης του κάθε δείγματος του διακριτού σήματος, από τη σχέση $b = \log_2(L)$ εάν η τιμή του L είναι δύναμη του 2 ή από τη σχέση $b = \lceil \log_2(L) \rceil + 1$ στην αντίθετη περίπτωση (στην τελευταία εξίσωση, το σύμβολο $\lceil \alpha \rceil$ αναφέρεται στο ακέραιο μέρος της πραγματικής μεταβλητής α). Στην προκειμένη περίπτωση, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του πλάτους του σήματος είναι η $x_{max} = 6.35$ και $x_{min} = -6.35$ - οι τιμές αυτές προκύπτουν όταν η συνάρτηση του συνημιτόνου παίρνει τη μέγιστη ($+1$) και την ελάχιστη (-1) τιμή του αντίστοιχα, και επομένως, το πλήθος των ψηφίων για τις δύο τιμές της παραμέτρου L υπολογίζεται ως εξής:

- Για την τιμή $\Delta = 0.1$

$$L = 1 + \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta} - 1 = 1 + \frac{12.7}{0.1} = 128 \Rightarrow b = \log_2(128) = 7$$

- Για την τιμή $\Delta = 0.02$

$$L = 1 + \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta} - 1 = 1 + \frac{12.7}{0.02} = 1 + 635 = 636 \Rightarrow b = \lceil \log_2(636) \rceil + 1 = \lceil 9.312883 \rceil + 1 = 9 + 1 = 10$$

Επομένως το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που απαιτείται για την αναπαράσταση των δειγμάτων του συγκεκριμένου διακριτού σήματος είναι $b = 7$ για βήμα κβαντισμού $\Delta = 0.1$ και $b = 10$ για βήμα κβαντισμού $\Delta = 0.02$.

Άσκηση 79 Να προσδιοριστεί το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ που προκύπτει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος $x_a(t) = \sin[2\pi(100)t]$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = (1/400)\text{seconds}$.

Άσκηση 80 Το διακριτό σήμα $x(n) = \cos(n\pi/4)$ ($-\infty < n < \infty$) έχει προκύψει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος $x_a(t) = \cos(\Omega_0 t)$ ($-\infty < t < \infty$) με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 1000\text{Hz}$. Ποιες είναι οι δύο τιμές της συχνότητας Ω_0 του αναλογικού σήματος που θα οδηγήσουν στη δημιουργία του ίδιου διακριτού σήματος $x(n)$;

Άσκηση 81 Ας θεωρηθούν τα ακόλουθα αναλογικά σήματα και οι αντίστοιχες συχνότητες δειγματοληψίας F_s :

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos[2\pi(1000)t] & T &= (1/3000)\text{sec} \\x(t) &= \sin[2\pi(1000)t] & T &= (1/5000)\text{sec} \\x(t) &= \{\sin[2\pi(1000)t]\}/(\pi t) & T &= (1/5000)\text{sec}\end{aligned}$$

Να προσδιοριστούν τα διακριτά σήματα $x(n)$ που θα προκύψουν για την κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Άσκηση 82 Ας θεωρηθούν τα ακόλουθα αναλογικά σήματα και τα αντίστοιχα διακριτά σήματα που έχουν προκύψει με δειγματοληψία των αναλογικών σημάτων με συχνότητα F_s :

$$\begin{aligned}x(t) = \cos(4000\pi t) &\Leftrightarrow x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \\x(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t) &\Leftrightarrow x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \\x(t) = \sin(10\pi t) &\Leftrightarrow x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{9}\right) \\x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{10\pi t} &\Leftrightarrow x(n) = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\end{aligned}$$

Να προσδιοριστεί η συχνότητα δειγματοληψίας F_s για την κάθε περίπτωση. Είναι η τιμή αυτής της συχνότητας μοναδική; Εάν όχι ποιες άλλες τιμές της συχνότητας δειγματοληψίας θα οδηγήσουν στην ίδια διακριτή ακολουθία $x(n)$;

6.3 Κωδικοποίηση του κβαντισμένου διακριτού σήματος

Μετά την ολοκλήρωση των διαδικασιών της δειγματοληψίας και του κβαντισμού, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κωδικοποίηση των κβαντισμένων τιμών του σήματος εισόδου, μετατρέποντάς τα σε μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων το πλήθος των οποίων εξαρτάται από τον αριθμό των επιπέδων κβαντισμού L που χρησιμοποιήθηκαν στη διαδικασία του κβαντισμού με τον τρόπο που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το μήκος σε bits της δυαδικής αναπαράστασης του κάθε δείγματος του διακριτού σήματος, δίδεται από τη σχέση $b = \log_2(L)$ εάν η τιμή του L είναι δύναμη του 2 ή από τη σχέση $b = [\log_2(L)] + 1$ στην αντίθετη περίπτωση (στην τελευταία εξίσωση, το σύμβολο $[\alpha]$ αναφέρεται στο ακέραιο μέρος της πραγματικής μεταβλητής α). Με τον τρόπο αυτό τελικά επιτυγχάνουμε τη μετατροπή του αναλογικού σήματος εισόδου στην ισοδύναμη ψηφιακή του μορφή, διαδικασία, που όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι απαραίτητη για τη μεταγενέστερη επεξεργασία του σήματος από ψηφιακά συστήματα επεξεργασίας.

Σύμφωνα με τὰ ὅσα ἔχουμε αναφέρει στην προηγούμενη ενότητα, η ακρίβεια της μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό, εξαρτάται άμεσα από τις τιμές που αποδίδουμε στα επόμενα μεγέθη:

- Τη συχνότητα δειγματοληψίας, F_s : όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή αυτού του μεγέθους, τόσο πιο πυκνές είναι οι καταγραφές των τιμών του σήματος, και τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση του αρχικού σήματος (συνεχές σήμα συνεχών τιμών) από εκείνο που προκύπτει μετά τη δειγματοληψία (διακριτό σήμα συνεχών τιμών). Σύμφωνα με το θεώρημα της δειγματοληψίας, εάν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μέγιστη συχνότητα που περιλαμβάνεται στο αρχικό σήμα εισόδου, τότε είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή αυτού του σήματος από το δειγματοληφθέν σήμα, χρησιμοποιώντας μεθόδους παρεμβολής.
- Το πλήθος των επιπέδων κβάντωσης, L : όσο πιο μεγάλο είναι το πλήθος αυτών των επιπέδων, τόσο μικρότερη είναι η τιμή του σφάλματος κβάντωσης και τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση του αρχικού σήματος εισόδου (διακριτό σήμα συνεχών τιμών) από το κβαντισμένο ισοδύναμό του (διακριτό σήμα διακριτών τιμών ή πιο απλά, ψηφιακό σήμα).

Είναι προφανές πως η τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας και του πλήθους των επιπέδων κβάντωσης, επηρεάζουν και το κόστος των διατάξεων μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Όσο πιο μεγάλες είναι αυτές οι τιμές, τόσο πιο ακριβής είναι η διαδικασία της μετατροπής και τόσο πιο υψηλό είναι και το κόστος των επεξεργασιών αυτού του είδους.

7 Ανάπτυγμα Fourier

Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, ένα σήμα ονομάζεται περιοδικό (periodic) με περίοδο T ($T > 0$) αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$x(n+T) = x(n) \quad \forall n \quad (66)$$

Αποδεικνύεται πως ένα τέτοιο σήμα μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός μετοπισμένων ως προς τη φάση (phase shifted) ημιτονοειδών κυματομορφών, σύμφωνα με τη σχέση

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\omega_0 t) + \beta_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (67)$$

η οποία είναι γνωστή ως ανάπτυγμα ή σειρά Fourier (Fourier series). Στην παραπάνω σχέση, οι συντελεστές α_0 , α_n και β_n δίδονται από τις σχέσεις

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad \alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

όπου T είναι η περίοδος του σήματος και $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$ η θεμελιώδης συχνότητά του.

Ένας εναλλακτικός τρόπος με τον οποίο μπορεί να εκφραστεί το ανάπτυγμα Fourier του σήματος $x(t)$ είναι μέσω της σχέσης

$$x(t) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(n\omega_0 t - \vartheta_n) \quad (68)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη καθώς έχει προκύψει από αυτή με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Στην παραπάνω σχέση, τα μεγέθη c_n και ϑ_n συσχετίζονται με τους συντελεστές α_n και β_n μέσω των σχέσεων

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \quad \text{και} \quad \vartheta_n = \tan^{-1}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$$

ενώ για $n = 0$, είναι $\gamma_0 = \alpha_0/2$.

Παρατηρώντας την εξίσωση 67 δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως το περιοδικό σήμα $x(t)$ περιέχει μόνο μία συνεχή συνιστώσα καθώς και ένα σύνολο ημιτονοειδών συνιστωσών οι συχνότητες των οποίων είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = 2\pi/T$. Αυτές οι συχνότητες είναι γνωστές ως αρμονικές. Πιο συγκεκριμένα η συνιστώσα με συχνότητα $2f_0$ είναι η δεύτερη αρμονική, η συνιστώσα με συχνότητα $3f_0$ είναι η τρίτη αρμονική, κ.ο.κ. Αν και θεωρητικά ένα περιοδικό σήμα περιέχει άπειρες αρμονικές συνιστώσες, είναι προφανές πως στην πράξη το πλήθος των πειραματικά καταμετρούμενων συνιστωσών αυτού του είδους, είναι πεπερασμένο.

Εκθετική μορφή του αναπτύγματος Fourier: Η μαθηματική περιγραφή του αναπτύγματος Fourier που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στηρίζεται στη χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Εναλλακτικά, το εν λόγω ανάπτυγμα μπορεί να γραφεί και σε εκθετική μορφή η οποία αποδίδεται από τη σχέση

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t) \quad \text{όπου} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt$$

Στη γενική περίπτωση, οι συντελεστές c_n που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση δεν είναι πραγματικοί αλλά μιγαδικοί αριθμοί, και επομένως χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη ενός πραγματικού μέρους $Re(c_n)$ και ενός φανταστικού μέρους $Im(c_n)$. Επομένως το μέτρο και η φάση αυτών των αριθμών θα δίδονται από τις σχέσεις

$$|c_n| = \sqrt{[Re(c_n)]^2 + [Im(c_n)]^2} \quad \text{και} \quad \vartheta_n = \tan^{-1}\left[\frac{Im(c_n)}{Re(c_n)}\right] \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Αποδεικνύεται πως οι μιγαδικοί συντελεστές c_n της εκθετικής μορφής της σειράς Fourier συσχετίζονται με τους πραγματικούς συντελεστές α_n και β_n της αντίστοιχης τριγωνομετρικής μορφής δια μέσου της σχέσης

$$c_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n + j\beta_n}{2} & \text{για } n < 0 \\ \alpha_0 & \text{για } n = 0 \\ \frac{\alpha_n - j\beta_n}{2} & \text{για } n > 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier: Οι πιο σημαντικές από τις ιδιότητες που συσχετίζονται με το ανάπτυγμα Fourier ενός ή περισσοτέρων σημάτων παρουσιάζονται στον πίνακα 5. Για λόγους απλότητας και κατανόησης του κειμένου, συμβολίζουμε τους συντελεστές c_n που συσχετίζονται με το σήμα $x(t)$ ως $X(n)$, ενώ οι

Πίνακας 5: Οι βασικές ιδιότητες του αναπτύγματος Fourier

| ΙΔΙΟΤΗΤΑ | ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ | ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ |
|---------------------------------|--|--|
| Ομογένεια | $\alpha x(t)$ | $\alpha X(n)$ |
| Γραμμικότητα | $x(t) + y(t)$ | $X(n) + Y(n)$ |
| Πρόσθεση | $\alpha x(t) + \beta y(t)$ | $\alpha X(n) + \beta Y(n)$ |
| Πολλαπλασιασμός | $x(t)y(t)$ | $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(n-m)Y(m)$ |
| Συνέλιξη | $\frac{1}{T} \int_0^T x(t-\tau)y(\tau)d\tau$ | $X(n)Y(n)$ |
| Μετατόπιση ως προς το χρόνο ως | $x(t-\tau)$ | $\exp(-j\frac{2\pi n\tau}{T})X(n)$ |
| Μετατόπιση ως προς τη συχνότητα | $\exp(j\frac{2\pi mt}{T})x(t)$ | $X(n-m)$ |

συντελεστές c_n που συσχετίζονται με το σήμα $y(t)$, συμβολίζονται ως $Y(n)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, οι σειρές Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$, αποδίδονται από τις εξισώσεις

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)\exp(j\frac{2\pi nt}{T}) \quad \text{και} \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(n)\exp(j\frac{2\pi nt}{T})$$

όπου T είναι η περίοδος των εν λόγω σημάτων.

Εκτός από τις ιδιότητες που παρουσιάζονται στον πίνακα 5, οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier χαρακτηρίζονται και απο ορισμένες συμμετρίες. Πιο συγκεκριμένα, εάν (και μόνο εάν) οι τιμές του σήματος $x(t)$ είναι πραγματικές, οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier θα χαρακτηρίζονται από άρτια συμμετρία (even symmetry) ως προς το πραγματικό μέρος τους, και από περιττή συμμετρία (odd symmetry) ως προς το φανταστικό μέρος τους. Με άλλα λόγια, εάν ισχύει η συνθήκη $Im[x(t)] = 0$, θα είναι $Re[X(-n)] = Re[X(n)]$ και $Im[X(-n)] = -Im[X(n)]$. Οι παραπάνω δύο σχέσεις μπορούν σε πιο συμπαγή μορφή να γραφούν ως $X(-n) = X^*(n)$ όπου το σύμβολο (*) χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον συζυγή μιγαδικό αριθμο του $X(n)$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν οι τιμές του σήματος $x(t)$ είναι φανταστικές - και επομένως ισχύει η σχέση $Re[x(t)] = 0$ - τότε οι συντελεστές Fourier θα χαρακτηρίζονται από περιττή συμμετρία ως προς το πραγματικό μέρος τους και από άρτια συμμετρία ως προς το φανταστικό μέρος τους. Θα είναι δηλαδή $Re[X(-n)] = -Re[X(n)]$ και $Im[X(-n)] = Im[X(n)]$ ή ισοδύναμα $X(-n) = -[X^*(n)]$.

Η τελευταία περίπτωση που είναι δυνατό να συμβεί, συσχετίζεται με την απόδοση μιγαδικών τιμών στη χρονοσειρά $x(t)$. Στην περίπτωση αυτή, εάν (και μόνο εάν) οι τιμές τις εν λόγω χρονοσειράς χαρακτηρίζονται από άρτια συμμετρία ως προς το πραγματικό μέρος τους και από περιττή συμμετρία ως προς το φανταστικό μέρος τους, τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier θα είναι πραγματικοί αριθμοί. Η ιδιότητα αυτή αποδίδεται από την ισοδυναμία

$$x(-t) = -[x^*(t)] \Leftrightarrow Im[X(n)] = 0 \quad (69)$$

Από την άλλη πλευρά, εάν οι μιγαδικές τιμές της χρονοσειράς $x(t)$ χαρακτηρίζονται από περιττή συμμετρία ως προς το πραγματικό μέρος τους και από άρτια συμμετρία ως προς το φανταστικό μέρος τους, τότε οι αντίστοιχοι συντελεστές Fourier θα είναι φανταστικοί αριθμοί. Με άλλα λόγια, θα ισχύει η ισοδυναμία

$$x(-t) = -[x^*(t)] \Leftrightarrow Re[X(n)] = 0 \quad (70)$$

8 Μετασχηματισμός Fourier

Σύμφωνα με τη βασική θεωρία, ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $x(t)$ αποδίδεται από τη σχέση

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt \quad (71)$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί σε σχέση με τη συχνότητα $\omega = 2\pi f$ ως

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt \quad (72)$$

Από την άλλη πλευρά, ο αντίστροφος μετασχηματισμός αποδίδεται από τη σχέση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (73)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier χαρακτηρίζεται από ένα πλήθος χρήσιμων ιδιοτήτων οι πιο σημαντικές από τις οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 6

Πίνακας 6: Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

| ΙΔΙΟΤΗΤΑ | ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ | ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ |
|---------------------------------|---|--|
| Ομογένεια | $\alpha x(t)$ | $\alpha X(f)$ |
| Γραμμικότητα | $x(t) + y(t)$ | $X(f) + Y(f)$ |
| Πρόσθεση | $\alpha x(t) + \beta y(t)$ | $\alpha X(f) + \beta Y(f)$ |
| Διαφόριση | $\frac{d^n}{dt^n} x(t)$ | $(j2\pi f)^n X(f)$ |
| Ολοκλήρωση | $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ | $\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ |
| Μετατόπιση Συχνότητας | $\exp(-j2\pi f_0 t) x(t)$ | $X(f + f_0)$ |
| Διαμόρφωση Ημιτόνου | $x(t) \sin(2\pi f_0 t)$ | $\frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$ |
| Διαμόρφωση Συνημιτόνου | $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$ | $\frac{1}{2} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$ |
| Χρονική Μετατόπιση | $x(t - \tau)$ | $\exp(-i\omega\tau) X(f)$ |
| Χρονική Συνέλιξη | $\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$ | $H(f) X(f)$ |
| Πολλαπλασιασμός | $x(t) y(t)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) Y(f - \lambda) d\lambda$ |
| Κλιμάκωση Χρόνου και Συχνότητας | $x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$ | $\alpha X(\alpha f)$ |
| Δυαδισμός | $X(t)$ | $x(-f)$ |
| Συζυγία | $x^*(t)$ | $X^*(-f)$ |
| Πραγματικό Μέρος | $Re[x(t)]$ | $\frac{1}{2} [X(f) + X^*(-f)]$ |
| Φανταστικό Μέρος | $Im[x(t)]$ | $\frac{1}{2j} [X(f) - X^*(-f)]$ |

9 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT) δίδεται από τη σχέση

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi mnFT) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi mnFT) + j \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi mnFT) \quad (74)$$

ενώ ο αντίστροφός του αποδίδεται από την εξίσωση

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \exp(j2\pi mnFT) = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \cos(2\pi mnFT) + j \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \sin(2\pi mnFT) \quad (75)$$

όπου $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ και $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Όρίζοντας την ποσότητα $W_N = \exp(j2\pi/N) = \exp(j2\pi FT)$, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να λάβουν την απλή μορφή

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (W_N)^{-mn} \quad \text{και} \quad x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] (W_N)^{mn} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Στις επόμενες ενότητες θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση $x[n]$ μαζί με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier που αντιστοιχεί σε αυτή, ως $x[n] \Leftrightarrow X[m]$. Σε αυτό το συμβολισμό το δεξί βέλος (\rightarrow) χρησιμοποιείται για να συμβολίσει το

μετασχηματισμό Fourier ενώ το αριστερό βέλος (\leftarrow) χρησιμοποιείται για να συμβολίσει τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σύμβαση όσον αφορά τον τρόπο γραφής του μετασχηματισμού, μπορούμε να παρουσιάσουμε τις πιο σημαντικές από τις ιδιότητές του, οι οποίες σε γενικές γραμμές είναι οι ακόλουθες:

- Ομογένεια: $x[n] \Leftrightarrow X[m] \Leftrightarrow \alpha x[n] \Leftrightarrow \alpha X[m]$
- Προσθετικότητα: $x[n] \Leftrightarrow X[m], y[n] \Leftrightarrow Y[m] \Leftrightarrow x[n] + y[n] \Leftrightarrow X[m] + Y[m]$
- Γραμμικότητα: $x[n] \Leftrightarrow X[m], y[n] \Leftrightarrow Y[m] \Leftrightarrow \alpha x[n] + \beta y[n] \Leftrightarrow \alpha X[m] + \beta Y[m]$
- Συμμετρία: $x[n] \Leftrightarrow X[m] \Leftrightarrow (1/N)X[n] \Leftrightarrow x[-m]$
- Μετατόπιση ως προς το χρόνο: $x[n] \Leftrightarrow X[m] \Leftrightarrow x[n - k] \Leftrightarrow X[m] \exp((-j2\pi mk)/N)$
- Μετατόπιση ως προς τη συχνότητα: $x[n] \Leftrightarrow X[m] \Leftrightarrow x[n] \exp((j2\pi mk)/N) \Leftrightarrow X[m - k]$

Υλοποίηση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier: Η υλοποίηση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μπορεί να γίνει σχετικά εύκολα, υπολογίζοντας τα αθροίσματα που εμφανίζονται στις εξισώσεις ορισμού του. Τυπικό παράδειγμα κώδικα που υλοποιεί αυτό το μετασχηματισμό παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
#include <math.h>
#define PI 4*atan(1.0)

// Type Definition of Complex Data Type

typedef struct Complex {
    double Real; // The Real Part
    double Imaginary; // The Imaginary Part
} Complex;

// The Function DFT implements the Direct Fourier Transform for
// the complex data values that are stored in 'buffer' variable.
// The number of these values is equal to 'samples'. The Fourier
// coefficients are stored in the 'transform' variable.

void DFT (Complex buffer [], Complex transform [], int samples) {
    int counter, index;
    double realSum, imaginarySum, phi;
    for (counter=0;counter<samples;counter++) {
        realSum = 0.0;
        imaginarySum = 0.0;
        for (index=0;index<samples;index++) {
            phi = (2.0*PI*counter*index)/samples;
            realSum += buffer[counter].Real*cos(phi)+
                buffer[counter].Imaginary*sin(phi);
            imaginarySum += buffer[counter].Imaginary*cos(phi)-
                buffer[counter].Real*sin(phi); }
        transform[counter].Real = realSum;
        transform[counter].Imaginary = imaginarySum; } }
```

Αυτός ο κώδικας αν και υλοποιεί το μετασχηματισμό Fourier με βάση τις εξισώσεις ορισμού του, δεν είναι καθόλου αποδοτικός και καθυστερεί σημαντικά όσον αφορά το χρόνο της εκτέλεσής του. Ο βασικός λόγος για αυτή την καθυστέρηση είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου N^2 φορές. Αντίθετα, εάν λάβουμε υπόψη τη σχέση

$$\exp\left(\frac{-2\pi jk}{N}\right) = \exp\left(\frac{-2\pi j(k \bmod N)}{N}\right) \quad (76)$$

είναι προφανές πως για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού θα χρειαστούμε μόνο N διακριτές τιμές της γωνίας $\varphi = 2\pi km/N$. Εκείνο που κάνουμε λοιπόν είναι να υπολογίσουμε και να αποθηκεύσουμε τις τιμές

των συναρτήσεων $\sin(\varphi)$ και $\cos(\varphi)$ για $\varphi = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ και στη συνέχεια να τις χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού. Αυτός ο νέος τροποποιημένος κώδικας παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
#include <math.h>

#define PI 4*atan(1.0)
#define DFTSIZE 512

// Type Definition of Complex Data Type

typedef struct Complex {
    double Real; // The Real Part
    double Imaginary; // The Imaginary Part
} Complex;

// The Function DFT implements the Direct Fourier Transform for
// the complex data values that are stored in 'buffer' variable.
// The number of these values is equal to 'samples'. The Fourier
// coefficients are stored in the 'transform' variable.

void DFT (Complex buffer [], Complex transform [], int samples) {
    int counter, index, cnt;
    double realSum, imaginarySum, phi;
    static double cosValues[DFTSIZE], sinValues[DFTSIZE];
    for (cnt=0;cnt<samples;cnt++) {
        cosValues[cnt] = cos((2.0*PI*cnt)/samples);
        sinValues[cnt] = sin((2.0*PI*cnt)/samples); }
    for (counter=0;counter<samples;counter++) {
        realSum = 0.0;
        imaginarySum = 0.0;
        for (index=0;index<samples;index++) {
            cnt = (counter*index)%samples;
            realSum += buffer[counter].Real*cosValues[cnt] +
                buffer[counter].Imaginary*sinValues[cnt];
            imaginarySum += buffer[counter].Imaginary*cosValues[cnt] -
                buffer[counter].Real*sinValues[cnt]; }
        transform[counter].Real = realSum;
        transform[counter].Imaginary = imaginarySum; } }
```

10 Fast Fourier Transform, FFT

Από τα όσα αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα είναι προφανές πως ο υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι μια διαδικασία $O(N^2)$ που σημαίνει πως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για την ολοκλήρωσή της είναι ανάλογο του N^2 , όπου N είναι το πλήθος των δειγμάτων της χρονοσειράς. Αυτό το χρονικό διάστημα είναι πάρα πολύ μεγάλο για μεγάλες τιμές του πλήθους των δειγμάτων, N , και καθιστά τη χρήση του εν λόγω μετασχηματισμού, πρακτικά ανεφάρμοστη. Για το λόγο αυτό η υλοποίηση του *DFT* έτσι όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα δεν χρησιμοποιείται ποτέ στην πράξη. Αντίθετα χρησιμοποιείται μια άλλη διαδικασία υπολογισμού του εν λόγω μετασχηματισμού η οποία είναι γνωστή ως γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) και ο χρόνος ολοκλήρωσής της είναι της τάξης του $N \log_2 N$ που είναι πολύ μικρότερος από το χρόνο της άλλης διαδικασίας.

Η μαθηματική θεμελίωση του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier στηρίζεται σε ένα λήμμα που διατυπώθηκε από τους Danielson και Lanczos το 1942, σύμφωνα με το οποίο ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας ακολουθίας τιμών με μέγεθος N μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier, κάθε ένας από τους οποίους έχει μήκος $N/2$. Από αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς, ο ένας υπολογίζεται από τα δείγματα τα οποία βρίσκονται στις άρτιες θέσεις της ακολουθίας των δεδομένων εισόδου (even numbered points) ενώ ο άλλος προκύπτει από τα δείγματα τα οποία βρίσκονται στις περιττές θέσεις τις ακολουθίας των δεδομένων εισόδου (odd

numbered points). Η απόδειξη αυτού του λήμματος είναι σχετικά εύκολη και παρουσιάζεται στη συνέχεια.

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right)x[j] = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \exp\left(\frac{2\pi ik(2j)}{N}\right)x[2j] + \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \exp\left(\frac{2\pi ik(2j+1)}{N}\right)x[2j+1] \\ &= \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \exp\left(\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)x[2j] + W^k \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \exp\left(\frac{2\pi ikj}{N/2}\right)x[2j+1] = F_k^e + W^k F_k^o \end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση η παράμετρος W^k δίδεται από τη σχέση $W^k = \exp(j2\pi/k) = \exp(j2\pi FT)$ (η σχέση αυτή έχει ορισθεί σε προηγούμενη ενότητα), ενώ τα σύμβολα F_k^e και F_k^o χρησιμοποιούνται για να συμβολίσουν την υπ' αριθμόν k συνιστώσα του μετασχηματισμού Fourier που προκύπτει από τα δείγματα της χρονοσειράς που βρίσκονται στις άρτιες και στις περιττές θέσεις αντίστοιχα.

Η πιο σημαντική από τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το λήμμα των Danielson και Lanczos είναι πως αυτό καλείται αναδρομικά. Έχοντας διασπάσει το μετασχηματισμό F_k στους μετασχηματισμούς F_k^e και F_k^o , κάθε ένας από τους οποίους απαιτεί τη χρήση $N/2$ σημείων της ακολουθίας εισόδου, μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την ίδια διαδικασία για να διασπάσουμε το μετασχηματισμό F_k^e στους μετασχηματισμούς F_k^{ee} και F_k^{eo} κάθε ένας από τους οποίους θα χρησιμοποιήσει πλήθος σημείων ίσο με $N/4$. Επειδή σε κάθε εφαρμογή του αλγορίθμου το πλήθος των χρησιμοποιούμενων σημείων υποδιπλασιάζεται, είναι προφανές πως αυτό θα πρέπει να είναι δύναμη του 2, έτσι ώστε η ποσότητα $\log_2 N$ να είναι ακέραιος αριθμός. Στην αντίθετη περίπτωση, η εφαρμογή του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier δεν είναι δυνατή. Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το μήκος της ακολουθίας δεδομένων δεν είναι δύναμη του 2, μπορούμε το αυξήσουμε προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος της μέχρι να ικανοποιηθεί η παραπάνω ιδιότητα. Αν και υπάρχουν πιο έξυπνες τεχνικές για την πραγματοποίηση της εν λόγω διαδικασίας, εν τούτοις, για την ώρα ασ περιοριστούμε μόνο σε αυτή.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία $\log_2 N$ φορές, θα καταλήξουμε τελικά σε μήκος ακολουθίας δεδομένων εισόδου με τιμή ίση με τη μονάδα. Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη τερματισμού της αναδρομικής διαδικασίας, σύμφωνα με την οποία ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας ακολουθίας δεδομένων που περιλαμβάνει μόνο ένα σημείο, είναι αυτό το ίδιο το σημείο. Σε μαθηματική διατύπωση αυτή η ιδιότητα εκφράζεται μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$F_k^{eooooe\dots oee} = x[n] \quad \text{για κάποια τιμή του } n \quad (77)$$

όπου είναι προφανές πως το πλήθος των e και o στην ακόλουθη $eooooe\dots oee$ είναι ίσο με $\log_2 N$.

Προκειμένου να ταυτοποιήσουμε την τιμή του n που αντιστοιχεί σε κάποια ακολουθία της μορφής $eooooe\dots oee$ για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση, θα πρέπει να αντιστρέψουμε την ακολουθία και να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $e = 0$ και $o = 1$. Στην περίπτωση αυτή, το αποτέλεσμα που θα προκύψει, θα είναι η τιμή του n εκπεφρασμένη στο δυαδικό σύστημα.

Για να υλοποιήσουμε το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier θα πρέπει να αναδιατάξουμε τα δείγματα της χρονοσειράς με τον ακόλουθο τρόπο: Για κάθε δείγμα $x[n]$, μετατρέπουμε το δείκτη του, n , στο δυαδικό σύστημα - είναι προφανές πως το μήκος αυτού του δυαδικού αριθμού θα είναι ίσο με $\log_2 N$ - και στη συνέχεια αντιστρέφουμε τα bits αυτού του αριθμού, έτσι ώστε να σχηματίσουμε τον κατοπτρικό του (θεωρώντας για παράδειγμα τον αριθμό 1001111 είναι προφανές πως ο κατοπτρικός του που θα προκύψει από την αντιστροφή των bits θα είναι ο 1111001). Μετά τη διαδικασία της αντιστροφής ταξινομούμε τα στοιχεία της χρονοσειράς ως προς την αντεστραμμένη δυαδική τιμή που έχει προκύψει δια της εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας.

Για να κατανοήσουμε αυτή τη διαδικασία, ας θεωρήσουμε μια ακολουθία δειγμάτων που περιέχει $N = 8$ δείγματα. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός των νέων δεικτών σύμφωνα με τη διαδικασία που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα οδηγήσει στα επόμενα αποτελέσματα:

| Τιμή Δείγματος | Τιμή Δείκτη | Δυαδική Τιμή Δείκτη | Κατοπτρική Τιμή | Δεκαδική Τιμή |
|-------------------|----------------|------------------------|--------------------|------------------|
| $X_0 = 5.27$ | 0 | 000 | 000 | 0 |
| $X_1 = 8.48$ | 1 | 001 | 100 | 4 |
| $X_2 = 3.71$ | 2 | 010 | 010 | 2 |
| $X_3 = 0.33$ | 3 | 011 | 110 | 6 |
| $X_4 = 4.85$ | 4 | 100 | 001 | 1 |
| $X_5 = 1.70$ | 5 | 101 | 101 | 5 |
| $X_6 = 9.23$ | 6 | 110 | 011 | 3 |
| $X_7 = 0.45$ | 7 | 111 | 111 | 7 |

Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιήθηκαν 3 bits για τη μετατροπή των δεικτών στο δυαδικό σύστημα, διότι η χρονοσειρά περιέχει 8 δείγματα και επομένως οι θέσεις τους κωδικοποιούνται με $\log_2 8 = 3$ ψηφία. Μετά τον

υπολογισμό των νέων δεικτών θα πρέπει να ταξινομήσουμε τα δείγματα ως προς αυτούς, προκαλώντας έτσι την αναδιάταξή τους. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως αυτή η αναδιάταξη περιλαμβάνει την αντιμετάθεση (swapping) των δειγμάτων (X_1, X_4) και (X_3, X_6) . Αυτή η αντιμετάθεση δικαιολογείται από το γεγονός πως εάν ένας αριθμός k_2 είναι ο αντεστραμμένος δυαδικός (bit reversed) ενός αριθμού k_1 , τότε και ο αριθμός k_1 είναι ο αντεστραμμένος δυαδικός του k_2 . Αυτή η διαδικασία της αντιμετάθεσης είναι πάρα πολύ σημαντική, γιατί το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να αναδιατάξουμε την ακολουθία εισόδου, είναι να αντιμεταθέσουμε ένα ή περισσότερα ζεύγη δειγμάτων, διεργασία, που δεν απαιτεί επιπρόσθετη ποσότητα μνήμης και εφαρμόζεται απευθείας πάνω στο ίδιο το διάνυσμα.

Έχοντας κατασκευάσει τη νέα ακολουθία των σημείων με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο των Danielson και Lanczos, για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier για την ακολουθία των δεδομένων εισόδου. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν πως το κάθε ένα από τα σημεία της νέας, αναδιατεταγμένης ακολουθίας, μπορεί να θεωρηθεί ως ο διακριτός μετασχηματισμός του εαυτού του (1-point transform). Χρησιμοποιώντας λοιπόν δυο διαδοχικά σημεία - εκ των οποίων το ένα βρίσκεται σε θέση με άρτιο δείκτη και το άλλο σε θέση με περιττό δείκτη - και εφαρμόζοντας το λήμμα των Danielson και Lanczos, μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας των δύο αυτών σημείων (2-point transform). Μετά τον υπολογισμό αυτών των μετασχηματισμών, διπλασιάζουμε το πλήθος των σημείων - συνδυάζοντας διαδοχικά ζεύγη σημείων - έτσι ώστε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier για την κάθε μια από τις $N/4$ ομάδες διαδοχικών σημείων που έχουν προκύψει. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται συνεχώς μέχρι να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας των N σημείων από τους δύο διακριτούς μετασχηματισμούς που έχουν προκύψει από τα δύο ίσα κομμάτια της εν λόγω ακολουθίας, κάθε ένα από τα οποία περιλαμβάνει $N/2$ δείγματα.

Από την προγραμματιστική σκοπιά του θέματος, η υλοποίηση του μετασχηματισμού Fourier πραγματοποιείται σε δύο στάδια: στο πρώτο στάδιο τα δείγματα αναδιατάσσονται με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Η αναδιάταξη αυτή πραγματοποιείται πάρα πολύ εύκολα, αντιμεταθέτοντας τα κατάλληλα σε κάθε περίπτωση στοιχεία. Το δεύτερο τμήμα του αλγορίθμου χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός διπλού βρόγχου (loop). Ο εξωτερικός βρόγχος εκτελείται $\log_2 N$ φορές και υπολογίζει τους μετασχηματισμούς Fourier για ακολουθίες με μήκος 2, 4, 8, ..., N στοιχεία. Μέσα στον εσωτερικό βρόγχο υπάρχουν δύο εσωτερικοί βρόγχοι που υλοποιούν τον αλγόριθμο των Danielson και Lanczos σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στις προηγούμενες σελίδες. Προκειμένου να ελαττώσουμε το χρόνο εκτέλεσης των υπολογισμών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των ημιτόνων και των συνημιτόνων του αλγορίθμου στον εξωτερικό βρόγχο έτσι ώστε οι πράξεις αυτές να εκτελεστούν $\log_2 N$ φορές. Ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier σύμφωνα με τη διαδικασία που παρουσιάσαμε παραπάνω, παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```

int bit_swap(int i, int nu) {
    int ib, i1, i2;
    ib = 0;
    for (i1=0; i1!=nu; i1++) {
        i2 = i/2;
        ib = ib*2+i-2*i2;
        i = i2;}
    return(ib); }

void swap(double x1, double x2) {
    double temp_x;
    temp_x = x1;
    x1 = x2;
    x2 = temp_x; }

void fft(double *real_data, double *imag_data, int n_pts,
        int nu, int inv) {
    int n2, j, l, i, ib, k, k1, k2;
    int sgn;
    double tr, ti, arg, nu1;
    double c, s;
    n2 = n_pts / 2;
    nu1 = nu - 1.0;
    k = 0;
    sgn = inv ? -1 : 1;
    for (l=0; l!=nu; l++) {

```

```

do {
  for ( i=0; i!=n2; i++) {
    j = k / ( pow( 2.0, nu1 ) );
    ib = bit_swap( j, nu );
    arg = 2.0 * PI * ib / n_pts;
    c = cos( arg );
    s = sgn * sin( arg );
    k1 = k;
    k2 = k1 + n2;
    tr = *(real_data+k2) * c + *(imag_data+k2) * s;
    ti = *(imag_data+k2) * c - *(real_data+k2) * s;
    *(real_data+k2) = *(real_data+k1) - tr;
    *(imag_data+k2) = *(imag_data+k1) - ti;
    *(real_data+k1) = *(real_data+k1) + tr;
    *(imag_data+k1) = *(imag_data+k1) + ti;
    k++;}
  k += n2; }
while(k<n_pts -1);
k = 0;
nu1 -= 1.0;
n2 /= 2; }
for (k=0; k!=n_pts; k++) {
  ib = bit_swap( k, nu );
  if(ib>k) {
    swap(*(real_data+k), *(real_data+ib));
    swap(*(imag_data+k), *(imag_data+ib));} }
if(inv)
  for (k=0; k!=n_pts; k++) {
    *(real_data+k) /= n_pts;
    *(imag_data+k) /= n_pts; } }

```

Μελετώντας τον παραπάνω κώδικα δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως ο τρόπος κλήσης του χαρακτηρίζεται από τη δέσμευση και χρήση δύο μονοδιάστατων πινάκων κάθε ένας εκ των οποίων έχει μήκος `n_pts`. Από αυτούς τους πίνακες ο πίνακας `real_data` περιέχει τα πραγματικά μέρη των δεδομένων εισόδου ενώ ο πίνακας `imag_data` περιέχει τα φανταστικά μέρη αυτών. Εάν τα δεδομένα εισόδου δεν είναι μιγαδικοί αλλά πραγματικοί αριθμοί, τότε τα καταχωρούμε στον πίνακα `real_data` ενώ στα κελιά του πίνακα `imag_data` αποδίδουμε τη μηδενική τιμή. Μετά την κλήση της συνάρτησης `fft`, οι πίνακες `real_data` και `imag_data` περιέχουν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των συντελεστών Fourier οι οποίοι επίσης είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα λεπτομέρεια που θα πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα, είναι η απαίτηση του μετασχηματισμού να εφαρμοσθεί πάνω σε πίνακα δεδομένων το πλήθος των οποίων είναι ακέραια δύναμη του 2. Εάν αυτό δεν συμβαίνει θα πρέπει να προσθέσουμε μηδενικά στο τέλος του πίνακα μέχρι το πλήθος των στοιχείων του να γίνει δύναμη του 2 (ας σημειωθεί ωστόσο πως υπάρχουν και πιο έξυπνες τεχνικές) ή εναλλακτικά να αγνοήσουμε τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται σε θέσεις μεγαλύτερες από εκείνη που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα. Αυτό στην πράξη σημαίνει πως εάν θεωρήσουμε για παράδειγμα πίνακα δεδομένων με 750 στοιχεία, θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier θεωρώντας μόνο τα 512 από αυτά και αγνοώντας τα υπόλοιπα 238 (το 512 είναι δύναμη του 2). Αυτή η προσέγγιση βεβαίως δεν ενδείκνυται γιατί αγνοεί μέρος των δεδομένων του πίνακα, που ανάλογα με το μήκος του μπορεί να είναι από πολύ μικρό έως πολύ μεγάλο. Πράγματι, εάν το πλήθος των στοιχείων του πίνακα είναι ίσο με 150, η θεωρήση των 128 πρώτων από αυτά έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια των υπόλοιπων 22 στοιχείων που αποτελεί ένα μικρό σχετικά ποσοστό του συνόλου των στοιχείων του. Για ένα πίνακα όμως με 1000 στοιχεία, η θεωρήση των 512 πρώτων στοιχείων έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια των υπόλοιπων 488 που περιέχουν τα μισά σχεδόν δεδομένα του πίνακα. Ωστόσο στο παράδειγμα που ακολουθεί και προκειμένου να επιδείξουμε τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο.

Από την άλλη πλευρά η τέταρτη παράμετρος της συνάρτησης `fft` είναι ο λογάριθμος με βάση 2 του πλήθους των δεδομένων του πίνακα, ο οποίος προφανώς θα είναι ακέραιος αριθμός - αφού το πλήθος των δεδομένων του πίνακα είναι δύναμη του 2. Τέλος η τελευταία παράμετρος μπορεί να λάβει μόνο μια από τις τιμές +1 και -1 εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε τον ευθύ ή τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier αντίστοιχα. Ο λόγος για την ύπαρξη αυτού του ορίσματος είναι πως ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier έχουν παρόμοια μορφή με τη διαφορά ανάμεσά τους να περιορίζεται στο πρόσημο του εκθετικού όρου που εμφανίζεται στις εξισώσεις ορισμού των. Για

το λόγο αυτό εάν έχουμε ένα σύνολο δεδομένων με τη βοήθεια των οποίων θέλουμε να ταυτοποιήσουμε τους συντελεστές Fourier χρησιμοποιούμε την τιμή +1, ενώ εάν έχουμε ένα πίνακα συντελεστών Fourier και επιθυμούμε να ταυτοποιήσουμε τα δεδομένα που αντιστοιχούν σε αυτούς, χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, χρησιμοποιώντας για το τελευταίο όρισμα της συνάρτησης fft την τιμή -1.

Τυπικό παράδειγμα χρήσης του μετασχηματισμού Fourier περιλαμβάνεται στον κώδικα που ακολουθεί.

```
#include "utils.cpp"
#include "fft.cpp"
#include "signals.c"

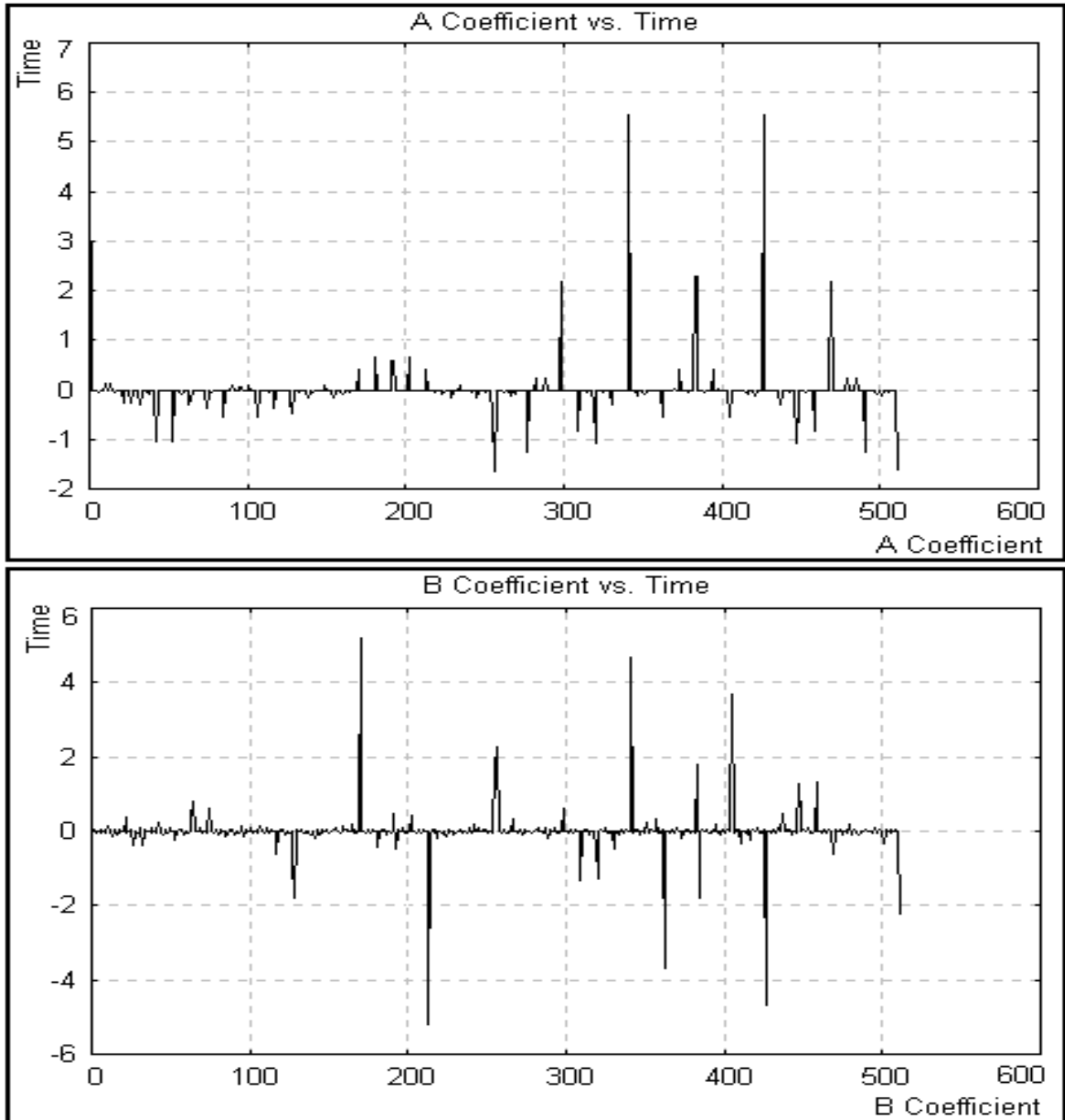
int main (void) {
    int counter, lines, logVal;
    double * real, * imag, * power;
    real = LoadSignal("lorentz.dat", &lines);
    if (lines < 0) {
        printf ("Signal_Loading_was_not_succesfull\n");
        return (-1); }
    printf ("%d_data_points_has_been_found\n", lines);
    imag = (double *) malloc (lines*sizeof(double));
    if (!imag) {
        printf ("Not_enough_memory_for_FFT_operation\n");
        return (-2); }
    for (counter=0;counter<lines;counter++)
        imag[counter]=0.0;
    logVal=(int)(log10((double)lines)/log10((double)2));
    lines = pow (2,logVal);
    fft (real, imag, lines, logVal, +1);
    power = (double *) malloc (lines*sizeof(double));
    if (!power) return (-1);
    for (counter=0;counter<lines;counter++)
        power[counter]=sqrt(pow(real[counter],2)+pow(imag[counter],2));
    SaveSignal (real, lines, "aCoeff.dat");
    SaveSignal (imag, lines, "bCoeff.dat");
    SaveSignal (power, lines, "power.dat");
    FreeBuffer (real);
    FreeBuffer (imag);
    FreeBuffer (power);
    printf ("Function_completed... Press_any_key_to_exit....\n");
    return (0); }
```

Στον παραπάνω κώδικα οι πίνακες real και imag και power χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση του πραγματικού και φανταστικού μέρους των συντελεστών Fourier αντίστοιχα. Αυτές οι τιμές καταχωρούνται μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού, ενώ πριν την εφαρμογή, ο πίνακας real περιέχει τις τιμές ενός διακριτού σήματος που έχει διαβαστεί από αρχείο δεδομένων δια της χρήσης της συνάρτησης LoadSignal ενώ ο πίνακας imag έχει αρχικοποιηθεί κατάλληλα, αποδίδοντας σε κάθε στοιχείο του την τιμή μηδέν. Τέλος στον πίνακα power αποθηκεύονται οι τιμές της ισχύος του σήματος για τις συχνότητες του μετασχηματισμού, οι οποίες ορίζονται ως το μέτρο των μιγαδικών συντελεστών Fourier και δίδονται από τη σχέση

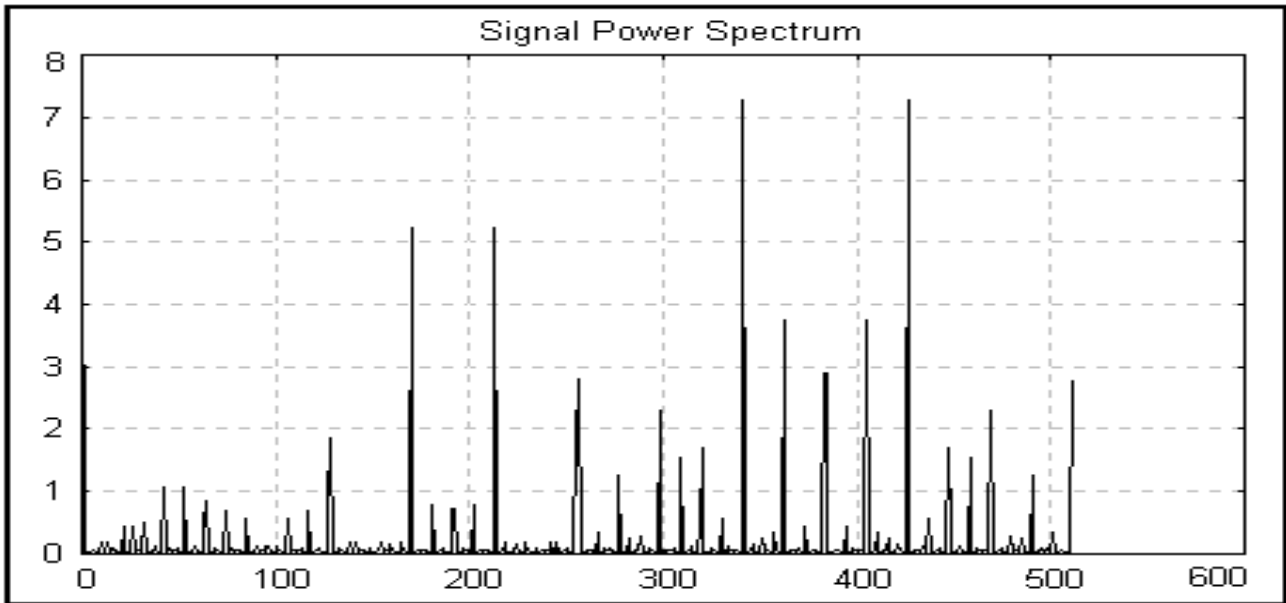
$$p_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (78)$$

όπου a_n και b_n είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του κάθε συντελεστή Fourier. Οι τιμές των παραμέτρων a_n και b_n - οι οποίες όπως έχουμε ήδη αναφέρει βρίσκονται καταχωρημένες στους πίνακες real και imag - αποθηκεύονται στα αρχεία δεδομένων μαζί με τα στοιχεία του πίνακα power χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SaveSignal.

Μετά τη δημιουργία των αρχείων δεδομένων aCoeff.dat, bCoeff.dat και power.dat μπορούμε να προχωρήσουμε στην προεπισκόπηση του περιεχομένου τους και στη σχεδίαση της αντίστοιχης γραφικής παράστασης χρησιμοποιώντας την εφαρμογή GNUPLOT. Οι γραφικές παραστάσεις των συντελεστών a_n και b_n καθώς και του ενεργειακού φάσματος για το συγκεκριμένο αρχείο δεδομένων παρουσιάζονται στα σχήματα 40 και 41.



Σχήμα 40: Μεταβολή των συντελεστών a και b του μετασχηματισμού Fourier σε συνάρτηση με το χρόνο



Σχήμα 41: Ενεργειακό Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου

11 Μετασχηματισμός Fourier σε μεγαλύτερο πλήθος διαστάσεων

Θεωρώντας μια μιγαδική συνάρτηση $h(k_1, k_2)$ που ορίζεται σε ένα διδιάστατο πλέγμα $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ και $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$, μπορούμε να ορίσουμε το διδιάστατο διακριτό μετασχηματισμό Fourier, ως μια μιγαδική συνάρτηση $H(n_1, n_2)$ που ορίζεται πάνω στο ίδιο πλέγμα και δίδεται από τη σχέση

$$H(n_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \exp\left(\frac{2\pi i k_2 n_2}{N_2}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k_1 n_1}{N_1}\right) h(k_1, k_2) \quad (79)$$

όπου οι τιμές των σταθερών N_1 και N_2 θα πρέπει να είναι δυνάμεις του 2. Γενικεύοντας την παραπάνω εξίσωση ακόμη περισσότερο, μπορούμε να ορίσουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier σε ένα χώρο L διαστάσεων, δια μέσου μιας εξίσωσης της μορφής

$$H(n_1, n_2, \dots, n_L) = \sum_{k_L=0}^{N_L-1} \dots \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \exp\left(\frac{2\pi i k_L n_L}{N_L}\right) \dots \exp\left(\frac{2\pi i k_2 n_2}{N_2}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k_1 n_1}{N_1}\right) h(k_1, k_2, \dots, k_L)$$

όπου οι ποσότητες k_i και n_i παίρνουν τιμές στο διάστημα $0 - N_i - 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, L$) ενώ τα μήκη N_1, N_2, \dots, N_L είναι ξανά δύναμη του 2.

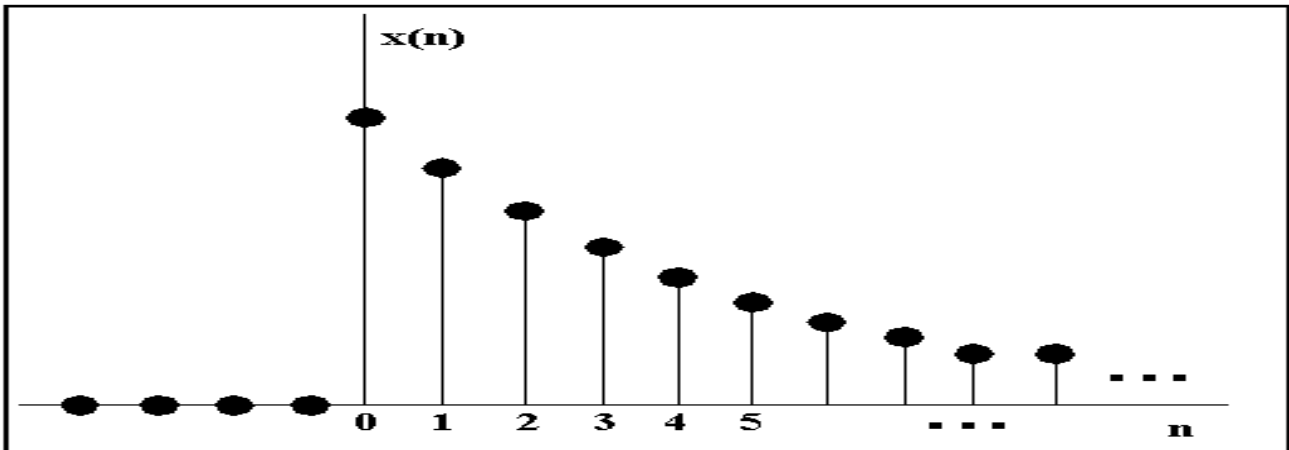
12 Ο μετασχηματισμός Z

Ένας άλλος τύπος μετασχηματισμού που είναι το ίδιο σημαντικός με το μετασχηματισμό Fourier που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, είναι ο μετασχηματισμός Z ο οποίος μετασχηματίζει ένα σήμα από το πεδίο του διακριτού χρόνου στην αναπαράσταση επί του επιπέδου των μιγαδικών αριθμών (complex plane). Θεωρώντας ένα σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, ο μετασχηματισμός Z αυτού του σήματος, ορίζεται ως η δυναμοσειρά απείρων όρων

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (80)$$

όπου z είναι μια μιγαδική μεταβλητή. Αυτός ο μετασχηματισμός για λόγους απλότητας μπορεί να γραφεί και ως $Z\{x(n)\}$, ενώ η συσχέτιση ανάμεσα στο διακριτό σχήμα $x(n)$ και στο μετασχηματισμό του $X(z)$, συμβολίζεται ως $x(n) \rightleftharpoons X(z)$.

Είναι προφανές πως επειδή ο μετασχηματισμός Z δεν είναι παρά μια δυναμοσειρά απείρων όρων, ορίζεται μόνο για εκείνες τις τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z , για τις οποίες η εν λόγω χρονοσειρά, συγκλίνει. Το σύνολο

Σχήμα 42: Το σήμα διακριτού χρόνου $x(n) = \alpha^n u(n)$

των τιμών της μεταβλητής z που οδηγούν σε σύγκλιση της εν λόγω χρονοσειράς, ορίζει μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, η οποία ονομάζεται περιοχή σύγκλισης (region of convergence, ROC). Ο καθορισμός αυτής της περιοχής είναι απαραίτητος και θα πρέπει να συνοδεύει τον ορισμό του μετασχηματισμού Z που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση.

Παράδειγμα 1: Ο μετασχηματισμός Z του διακριτού σήματος $x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$, θα είναι σύμφωνα με τον ορισμό του η δυναμοσειρά $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$. Η περιοχή σύγκλισης του εν λόγω μετασχηματισμού είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο $z = 0$.

Παράδειγμα 2: Ας θεωρήσουμε το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (81)$$

που παρουσιάζεται στο σχήμα 42. Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Z , αυτός θα δίδεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 0z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Η σύγκλιση της παραπάνω ακολουθίας είναι δυνατή μόνο όταν ισχύει η σχέση $|\alpha z^{-1}| < 1$ ή ισοδύναμα όταν $|z| > |\alpha|$. Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι το συμπλήρωμα ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $z = 0$ και ακτίνα $r = |\alpha|$. Αυτή η περιοχή απεικονίζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 43.

13 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

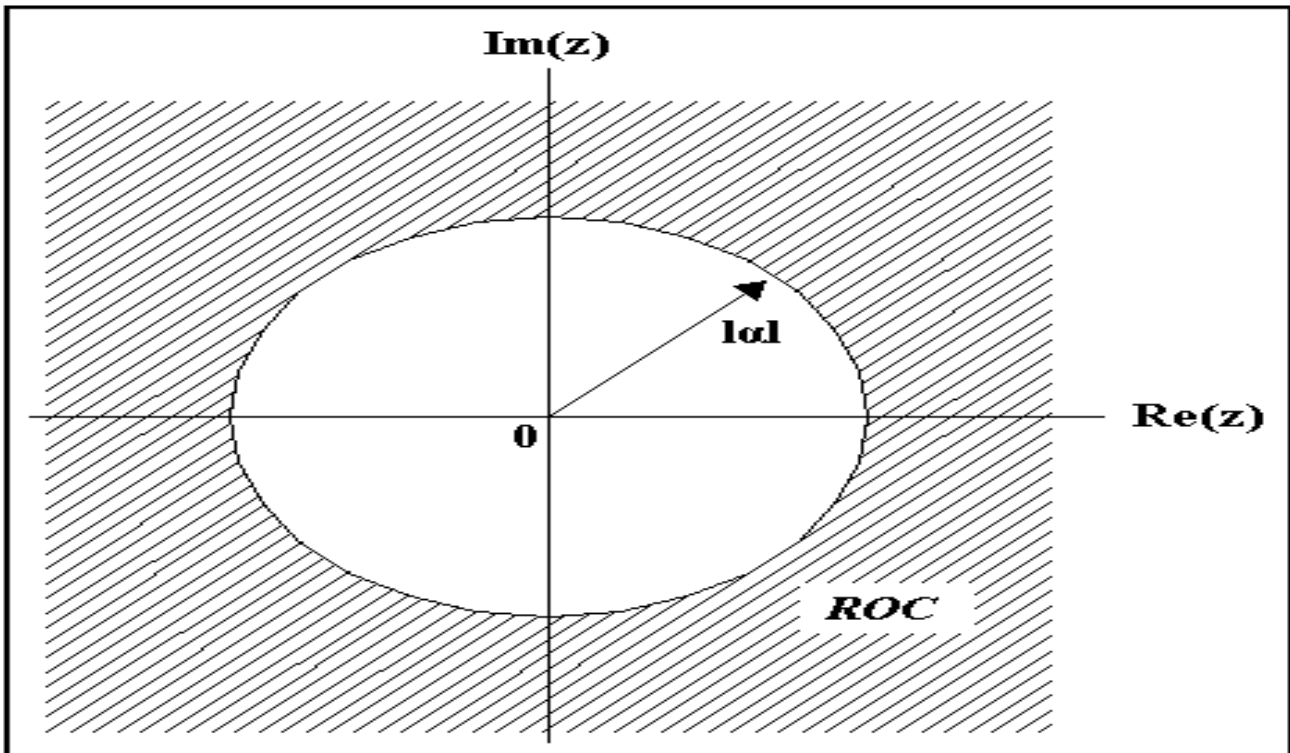
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z μετασχηματίζει το ψηφιακό σήμα από την αναπαράσταση επί του μιγαδικού επιπέδου στο πεδίο του διακριτού χρόνου. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, ξεκινούμε από την εξίσωση ορισμού του ευθέως μετασχηματισμού

$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (82)$$

και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με την ποσότητα z^{n-1} . Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και των δύο μελών κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C η οποία βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς των απείρων όρων του μετασχηματισμού και περιέχει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z = 0$.

$$\oint_C X(z)z^{n-1} dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{n-k-1} dz \quad (83)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C στην παραπάνω εξίσωση, γίνεται κατά την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού. Επειδή η εν λόγω καμπύλη βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης



Σχήμα 43: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z για το διακριτό σήμα $x(n) = a^n u(n)$

της δυναμοσειράς των απείρων όρων, έπεται, πως η εν λόγω δυναμοσειρά συγκλίνει, και επομένως μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των πράξεων της άθροισης και της ολοκλήρωσης στην παραπάνω εξίσωση. Επομένως μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση με τη μορφή

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_C x(k) z^{n-k-1} dz \quad (84)$$

Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολοκλήρωσης του Cauchy που αποδίδεται από τη μαθηματική σχέση

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \quad (85)$$

όπου η καμπύλη C μπορεί να είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη περιέχει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z = 0$. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$2\pi j x(n) = \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (86)$$

ήτοι

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (87)$$

όπου j η μιγαδική μονάδα ($j = \sqrt{-1}$). Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί και την εξίσωση ορισμού του του αντίστροφου μετασχηματισμού Z .

14 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z

Ο μετασχηματισμός Z χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός συνόλου ιδιοτήτων, οι πιο σημαντικές από τις οποίες είναι οι ακόλουθες (οι ιδιότητες παρατίθενται χωρίς απόδειξη):

- Γραμμικότητα (linearity): Εάν ισχύουν οι σχέσεις $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(Z)$ και $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(Z)$, τότε θα είναι και $x(n) \Leftrightarrow X(Z)$ όπου $x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$ και $X(Z) = \alpha_1 X_1(Z) + \alpha_2 X_2(Z)$ για κάθε τιμή των σταθερών α_1 και α_2 .

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα ο μετασχηματισμός Z του γραμμικού συνδυασμού ενός πλήθους διακριτών σημάτων, ταυτίζεται με το γραμμικό συνδυασμό των μετασχηματισμών Z των διακριτών σημάτων ξεχωριστά. Όσον αφορά την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X(Z)$ αυτή είναι το λιγότερο η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $Q_1(Z)$ και $Q_2(Z)$.

- **Μετατόπιση ως προς το χρόνο (Time Shifting):** Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, εάν ισχύει η σχέση $x(n) \Leftrightarrow X(Z)$ τότε θα είναι και $x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(Z)$. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $z^{-k}X(Z)$ είναι η ίδια με εκείνη του μετασχηματισμού $X(Z)$ εκτός από το σημείο $z=0$ εάν $k > 0$ ή $z=\infty$ εάν $k < 0$.
- **Κλιμάκωση (Scaling):** Θεωρώντας το μετασχηματισμό $x(n) \Leftrightarrow X(Z)$ με περιοχή σύγκλισης $r_1 < |z| < r_2$ αποδεικνύεται πως ισχύει και η σχέση $\alpha^n x(n) \Leftrightarrow X(\alpha^{-1}z)$ με περιοχή σύγκλισης $|\alpha|r_1 < |z| < |\alpha|r_2$, για κάθε τιμή του α πραγματική ή μιγαδική.
- **Αντιστροφή χρόνου (Time Reversal):** Θεωρώντας το μετασχηματισμό $x(n) \Leftrightarrow X(Z)$ με περιοχή σύγκλισης $r_1 < |z| < r_2$ αποδεικνύεται πως ισχύει και η σχέση $x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$ με περιοχή σύγκλισης $(1/r_2) < |z| < (1/r_1)$.
- **Διαφόριση (Differentiation):** Αποδεικνύεται πως εάν ισχύει η σχέση $x(n) \Leftrightarrow X(z)$, τότε θα είναι και $nx(n) \Leftrightarrow -z(dX(z)/dz)$. Στην περίπτωση αυτή οι δύο μετασχηματισμοί χαρακτηρίζονται από την ίδια περιοχή σύγκλισης.
- **Συνέλιξη ακολουθιών (Convolution):** Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα, εάν ισχύουν οι σχέσεις $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$ και $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$, τότε θα είναι και $x(n) \Leftrightarrow X(z)$ όπου $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ και $X(z) = X_1(z)X_2(z)$. Στην περίπτωση αυτή, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X(z)$ είναι τουλάχιστον η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $X_1(z)$ και $X_2(z)$.
- **Συσχέτιση ακολουθιών (Correlation):** Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα, εάν ισχύουν οι σχέσεις $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$ και $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$, τότε θα είναι και $r_{x_1x_2}(l) \Leftrightarrow R_{x_1x_2}(z)$ όπου $r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l)$ και $R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$. Στην περίπτωση αυτή, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X(z)$ είναι τουλάχιστον η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $X_1(z)$ και $X_2(z)$.
- **Πολλαπλασιασμός ακολουθιών (Multiplication):** Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα, εάν ισχύουν οι σχέσεις $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$ και $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$, τότε θα είναι και $x(n) \Leftrightarrow X(z)$ όπου $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ και

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \quad (88)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης, ορίζεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C που βρίσκεται στην τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $X_1(v)$ και $X_2(1/v)$ και περιέχει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z=0$.

Εάν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X_1(v)$ είναι η $r_{1l} < |v| < r_{1u}$ ενώ η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X_2(z)$ είναι η $r_{2l} < |z| < r_{2u}$, τότε η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X_2(z/v)$ θα είναι η $r_{2l} < |z/v| < r_{2u}$, ενώ η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $X(z)$ θα είναι τουλάχιστον η $r_{1l}r_{2l} < |z| < r_{1u}r_{2u}$.

Οι παραπάνω ιδιότητες (μαζί με πολλές άλλες) παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 7.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η ταυτότητα του Parseval σύμφωνα με την οποία εάν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι δύο ακολουθίες μιγαδικών τιμών, τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (89)$$

Τέλος ο πίνακας 8 περιλαμβάνει τους μετασχηματισμούς Z και τις περιοχές σύγκλισης για τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου.

15 Πόλοι και μηδενικές τιμές του μετασχηματισμού Z

Οι μηδενικές τιμές (zeros) του μετασχηματισμού $X(z)$ είναι οι τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z για τις οποίες ισχύει η σχέση $X(z) = 0$. Αντίθετα οι πόλοι (poles) του μετασχηματισμού είναι εκείνες οι τιμές του z για τις οποίες ισχύει

Πίνακας 7: Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Z

| PROPERTY NAME | TIME DOMAIN | Z DOMAIN | REGION OF CONVERGENCE |
|--------------------|-------------------------------------|---|---|
| Συμβολισμός | $x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$ | $X(Z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$ | ROC: $r_2 < z < r_1$ ROC ₁ ROC ₂ |
| Γραμμικότητα | $\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$ | $\alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$ | Τουλάχιστον η τομή των ROC ₁ και ROC ₂ |
| Χρονική Μετατόπιση | $x(n - k)$ | $z^{-k} X(z)$ | Ίδια με τη ROC εκτός από τα σημεία $z = 0$ (για $k > 0$) και $z = \infty$ (για $k < 0$) |
| Κλιμάκωση | $\alpha^n x(n)$ | $X(\alpha^{-1}z)$ | $ \alpha r_2 < z < \alpha r_1$ |
| Χρονική Αντιστροφή | $x(-n)$ | $X(z^{-1})$ | $\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}$ |
| Συζυγία | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | ROC |
| Πραγματικό Μέρος | $Re\{x(n)\}$ | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*z^*]$ | Περιλαμβάνει τη ROC |
| Φανταστικό Μέρος | $Im\{x(n)\}$ | $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*z^*]$ | Περιλαμβάνει τη ROC |
| Διαφόριση | $nx(n)$ | $-z \frac{dX(z)}{dz}$ | $r_2 < z < r_1$ |
| Συνέλιξη | $x_1(n) * x_2(n)$ | $X_1(z)X_2(z)$ | Τουλάχιστον η τομή των ROC ₁ και ROC ₂ |
| Συσχέτιση | $r_{x_1x_2}(l) = x_1(l)x_2(-l)$ | $R_{x_1x_2} = X_1(z)X_2(z^{-1})$ | Τουλάχιστον η τομή των ROCs των $X_1(z)$ και $X_2(z^{-1})$ |
| Πολλαπλασιασμός | $x_1(n)x_2(n)$ | $\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2(\frac{z}{v})v^{-1}dv$ | Τουλάχιστον η περιοχή $r_{1u}r_{2l} < z < r_{1u}r_{2u}$ |

η σχέση $X(z) = \infty$. Εάν ο μετασχηματισμός z είναι μια κλασματική συνάρτηση της μορφής

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_M z^{-M}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k}} \quad (90)$$

και τέτοια ώστε $\alpha_0 \neq 0$ και $\beta_0 \neq 0$, μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της εάν τη γράψουμε με τη μορφή

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 z^{-M} z^M + (\beta_1/\beta_0)z^{M-1} + (\beta_2/\beta_0)z^{M-2} + \dots + (\beta_M/\beta_0)}{\alpha_0 z^{-N} z^N + (\alpha_1/\alpha_0)z^{N-1} + (\alpha_2/\alpha_0)z^{N-2} + \dots + (\alpha_N/\alpha_0)} \quad (91)$$

ή ισοδύναμα

$$X(z) = \frac{\beta_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{\alpha_0 (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)} z^{-M+N} = G \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} z^{N-M} \quad (92)$$

όπου $G = \beta_0/\alpha_0$. Επομένως ο μετασχηματισμός $X(z)$ έχει M πεπερασμένες μηδενικές τιμές στις θέσεις $z = z_1, z_2, \dots, z_M$ (οι ρίζες του αριθμητή), N πεπερασμένους πόλους στις θέσεις $z = p_1, p_2, \dots, p_N$ (οι ρίζες του παρονομαστή) και $|N - M|$ μηδενικές τιμές (εάν $N > M$) ή πόλους (εάν $N < M$) στην αρχή του μιγαδικού

Πίνακας 8: Παραδείγματα μετασχηματισμών Z

| A | ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΗΜΑ | ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z | ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ |
|----|---------------------------------|--|-------------------------|
| 01 | $\delta(n)$ | 1 | Όλο το μιγαδικό επίπεδο |
| 02 | $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $ z > 1$ |
| 03 | $\alpha^n u(n)$ | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $ z > \alpha $ |
| 04 | $n\alpha^n u(n)$ | $\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$ | $ z > \alpha $ |
| 05 | $-\alpha^n u(-n-1)$ | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $ z < \alpha $ |
| 06 | $-n\alpha^n u(-n-1)$ | $\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$ | $ z < \alpha $ |
| 07 | $\cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$ | $ z > 1$ |
| 08 | $\sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$ | $ z > 1$ |
| 09 | $\alpha^n \cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{1-\alpha z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2\alpha z^{-1}\cos(\omega_0)+\alpha^2 z^{-2}}$ | $ z > \alpha $ |
| 10 | $\alpha^n \sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{\alpha z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2\alpha z^{-1}\cos(\omega_0)+\alpha^2 z^{-2}}$ | $ z > \alpha $ |

επιπέδου $z = 0$. Οι πόλοι και οι μηδενικές τιμές μπορούν επίσης να εμφανιστούν και για την τιμή $z = \infty$. Εάν για την τιμή $z = \infty$ ισχύει η σχέση $X(\infty) = 0$ η εν λόγω τιμή αντιστοιχεί σε μία μηδενική τιμή, ενώ εάν για την τιμή αυτή είναι $X(\infty) = \infty$, η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε ένα πόλο. Εάν μετρήσουμε τους πόλους και τις μηδενικές τιμές στις θέσεις $z = 0$ και $z = \infty$, θα διαπιστώσουμε πως ο μετασχηματισμός $X(z)$ χαρακτηρίζεται από το ίδιο πλήθος πόλων και μηδενικών τιμών.

Μια ενδιαφέρουσα διαδικασία που συσχετίζεται με το μετασχηματισμό Z είναι η αναπαράστασή του σε ειδικό διάγραμμα που εμφανίζει επί του μιγαδικού επιπέδου τις θέσεις των μηδενικών τιμών και των πόλων του μετασχηματισμού. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών (pole-zero plot) και χρησιμοποιεί το σύμβολο (*) για να αναπαραστήσει ένα πόλο και το σύμβολο (o) για να αναπαραστήσει μια μηδενική τιμή. Παραδείγματα τέτοιων διαγραμμάτων παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 1: Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για το σήμα $x(n) = \alpha^n u(n)$ ($\alpha > 0$).

Λύση: Ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x(n)$ θα δίδεται από τη σχέση

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} \quad (93)$$

με περιοχή σύγκλισης την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου για την οποία ισχύει η σχέση $|z| > \alpha$. Απο την εξίσωση ορισμού των πόλων και των μηδενικών τιμών δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως ο εν λόγω μετασχηματισμός έχει μια μηδενική τιμή στη θέση $z_1 = 0$ και ένα πόλο στη θέση $p_1 = \alpha$. Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για το μετασχηματισμό Z του σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$ παρουσιάζεται στο σχήμα 44.

Παράδειγμα 2: Να σχεσιαστεί το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για το διακριτό σήμα

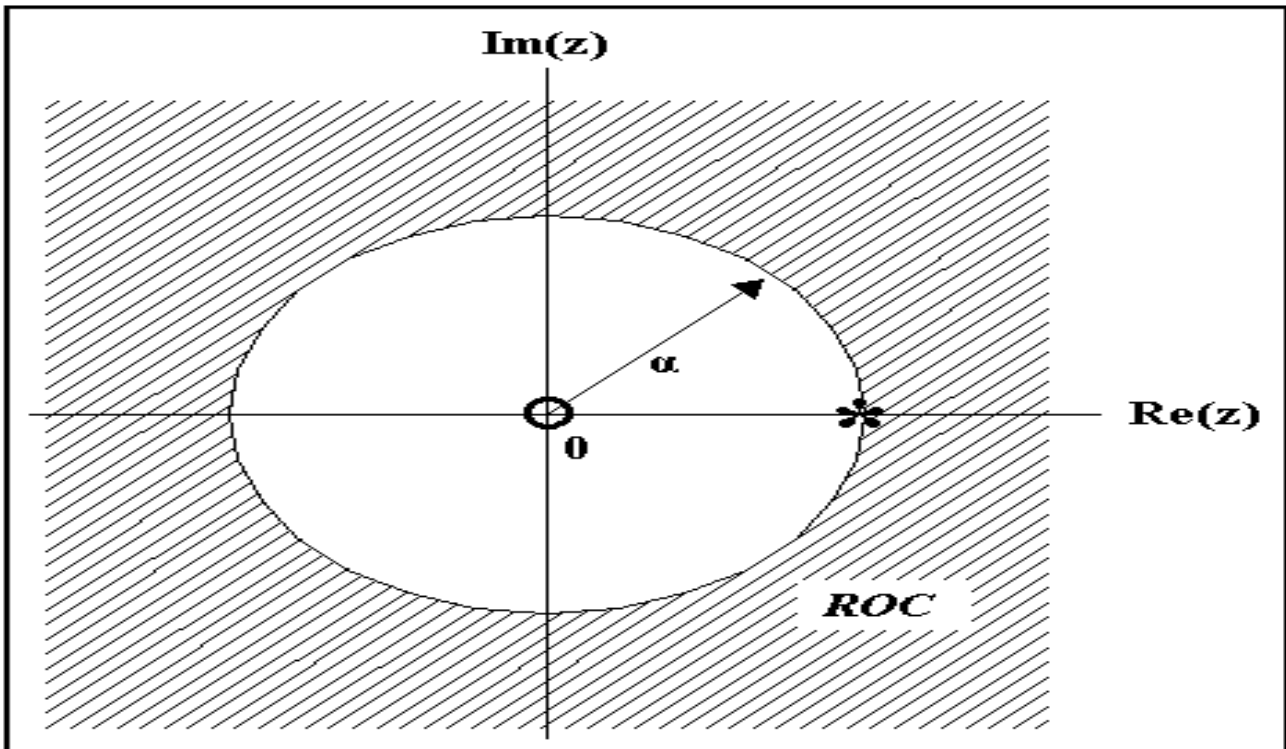
$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (94)$$

Λύση: Ο μετασχηματισμός Z του ανωτέρω διακριτού σήματος αποδεικνύεται ότι δίδεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1 - (\alpha z^{-1})^M}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z^M - \alpha^M}{z^{M-1}(z - \alpha)} \quad (95)$$

Θεωρώντας πως ισχύει η σχέση $\alpha > 0$, η εξίσωση $z^M = \alpha^M$ έχει M ρίζες στις θέσεις

$$z_k = \alpha \exp\left(\frac{j2\pi k}{M}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$



Σχήμα 44: Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για το μετασχηματισμό Z του διακριτού σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$ ($\alpha > 0$)

Η μηδενική τιμή $z_0 = \alpha$ ακυρώνει τον πόλο στη θέση $z = \alpha$. Επομένως ο μετασχηματισμός Z του ανωτέρου διακριτού σήματος μπορεί να γραφεί ως ένας λόγος πολυωνύμων της μορφής

$$X(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{M-1})}{z^{M-1}} \quad (96)$$

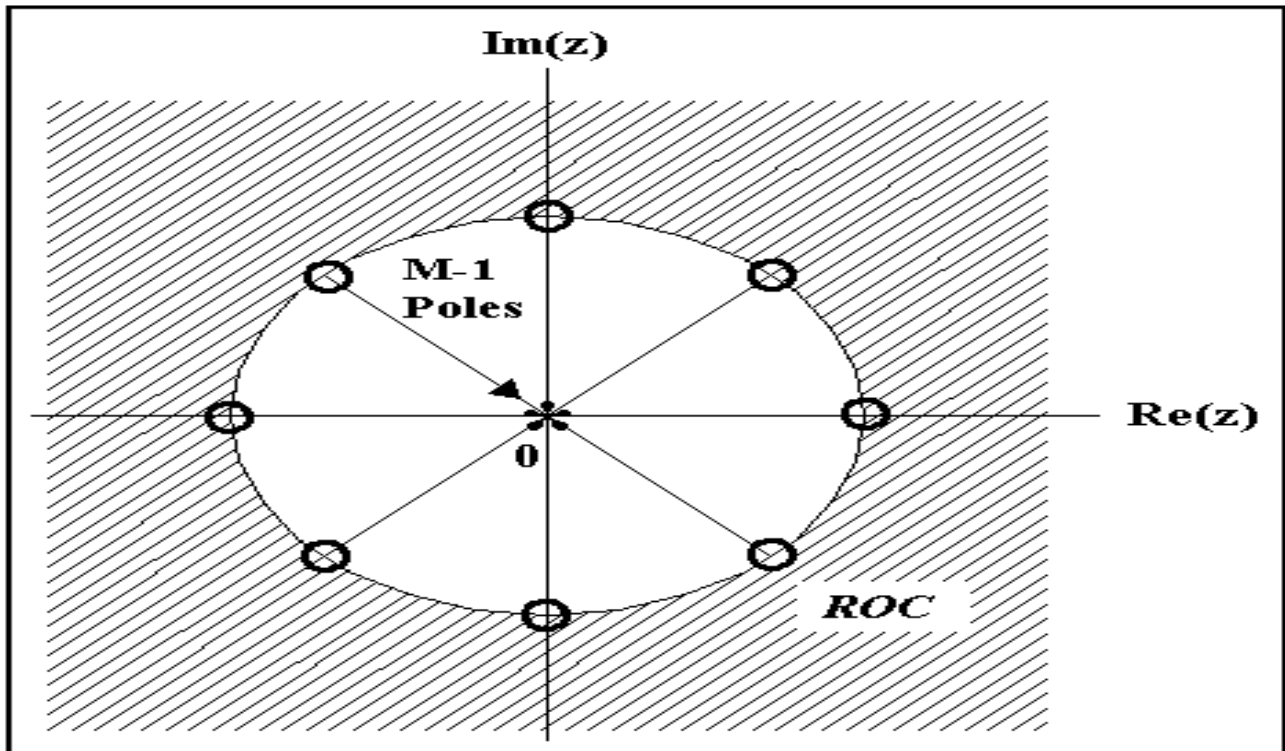
και επομένως χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη $M - 1$ πόλων και $M - 1$ μηδενικών τιμών, οι θέσεις των οποίων για $M = 8$ απεικονίζονται στο σχήμα 45.

Ένα ενδιαφέρον θέμα που αξίζει να αναφερθεί, είναι η συσχέτιση που υφίσταται ανάμεσα στο σχήμα ενός διακριτού σήματος (που έχει να κάνει με το είδος της χρονικής του εξέλιξης) και στις θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών του μετασχηματισμού Z του εν λόγω σήματος επί του μιγαδικού επιπέδου. Θεωρώντας το μοναδιαίο κύκλο που έχει ως κέντρο την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z = 0$ και ακτίνα ίση με τη μονάδα, ένας πόλος μπορεί να βρίσκεται σε τρεις διαφορετικές περιοχές επί του μιγαδικού επιπέδου: (α) στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, (β) στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και (γ) στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Αυτές οι τρεις διαφορετικές θέσεις ενός πόλου, παρουσιάζονται στο σχήμα 46, στο οποίο αναφέρεται και το σύνολο της περιγραφής που παρουσιάζεται στις προηγούμενες παραγράφους.

Η πιο απλή περίπτωση που μπορούμε να μελετήσουμε, είναι εκείνη του σήματος $x(n) = \alpha^n u(n)$ ο μετασχηματισμός Z του οποίου είναι ο $X(z) = (1 - \alpha z^{-1})^{-1}$ με περιοχή σύγκλισης την $|z| > |\alpha|$. Αυτός ο μετασχηματισμός έχει μια μηδενική τιμή στην αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z_1 = 0$ και ένα πόλο στη θέση $p_1 = \alpha$ η οποία κείται επί του θετικού ημιάξονα των πραγματικών αριθμών. Στην περίπτωση αυτή, η χρονική εξέλιξη του σήματος εξαρτάται από τη θέση του ανωτέρω πόλου επί του μιγαδικού επιπέδου. Πιο συγκεκριμένα, εάν ο πόλος βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, το σήμα εξασθενεί σε συνάρτηση με το χρόνο, εάν ο πόλος βρίσκεται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου το πλάτος του σήματος παραμένει σταθερό, ενώ εάν ο πόλος βρίσκεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, το πλάτος του σήματος αυξάνεται απεριόριστα και παύει να είναι φραγμένο, με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε σε φαινόμενα υπερχείλισης (overflows).

Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες ο πόλος του μετασχηματισμού Z βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών. Η διαφορά στην περίπτωση αυτή, είναι πως το πρόσημο του σήματος εναλλάσσεται σε κάθε χρονική επανάληψη, με αποτέλεσμα δύο διαδοχικά δείγματα να χαρακτηρίζονται από διαφορετικό πρόσημο. Αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζονται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 46.

Εκτός από αυτή την απλή περίπτωση του ενός και μοναδικού πραγματικού πόλου, υπάρχουν πιο πολύπλοκες περιπτώσεις κάθε μια από τις οποίες έχει τα δικά της ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Γενικεύοντας την παραπάνω περι-



Σχήμα 45: Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών τιμών για το μετασχηματισμό Z του διακριτού σήματος $x(n) = \alpha^n \quad 0 \leq n \leq M-1$ ($\alpha > 0$)

γραφή, μπορούμε να πούμε πως ένα αιτιατό διακριτό σήμα πραγματικών τιμών που διαθέτει απλούς πραγματικούς πόλους ή ζεύγη συζυγών μιγαδικών πόλων οι οποίοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, είναι πάντοτε φραγμένοι όσον αφορά την τιμή του πλάτους τους. Επιπλέον, ένα σήμα κάποιος πόλος του οποίου βρίσκεται πολύ κοντά στην αρχή του μιγαδικού επιπέδου, εξασθενεί πολύ πιο γρήγορα κατά την εξέλιξη του στο χρόνο σε σχέση με ένα άλλο σήμα ο πόλος του οποίου βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή (αλλά πάντα βέβαια μέσα στα όρια του μοναδιαίου κύκλου). Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει το συμπέρασμα πως η χρονική εξέλιξη ενός αιτιατού διακριτού σήματος εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις θέσεις των πόλων του μετασχηματισμού Z του σήματος επί του μιγαδικού επιπέδου. Εξάρτηση υπάρχει ακόμη και από τις θέσεις των μηδενικών τιμών, αλλά δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η εξάρτηση από τις θέσεις των πόλων. Τέλος, είναι αναγκαίο να αναφέρουμε, πως οι παραπάνω ιδιότητες που ισχύουν για τα αιτιατά διακριτά σήματα ισχύουν και για τα γραμμικά και αμετάβλητα ως προς το χρόνο συστήματα, αφού η κρουστική απόκριση αυτών των συστημάτων είναι ένα αιτιατό διακριτό σήμα. Αυτό σημαίνει, πως εάν κάποιος από τους πόλους του συστήματος βρίσκεται έξω από τα όρια του μοναδιαίου κύκλου, η κρουστική απόκριση του συστήματος δεν είναι φραγμένη, και επομένως το σύστημα είναι ασταθές.

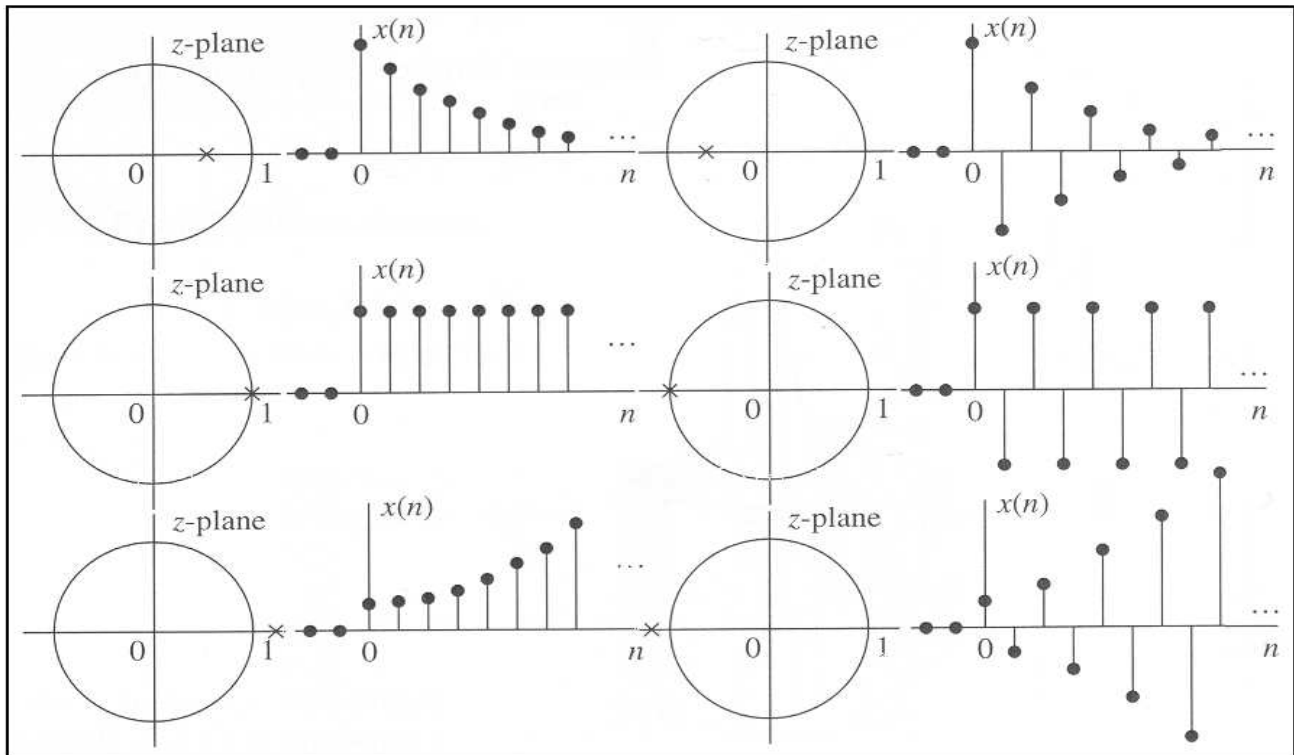
16 Ο μετασχηματισμός Z^+ (One-sided Z transform)

Ο μετασχηματισμός Z^+ αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Z που έχει μελετηθεί στις προηγούμενες ενότητες, καθώς το κάτω όριο του αθροίσματος στην εξίσωση ορισμού του, περιλαμβάνει μόνο τη μηδενική και θετικές τιμές του δείκτη n ενώ δεν επεκτείνεται στην περιοχή των αρνητικών τιμών του εν λόγω δείκτη. Επομένως ο μετασχηματισμός Z^+ θα δίδεται από τη σχέση

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (97)$$

Τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού Z^+ , είναι τα εξής:

- Δεν περιέχει πληροφορίες για τις τιμές του διακριτού σήματος $x(n)$ για τις οποίες είναι $n < 0$.
- Είναι μοναδικός μόνο για τα αιτιατά σήματα, διότι μόνο για τα σήματα αυτά είναι $x(n) = 0$ για $n < 0$.



Σχήμα 46: Τυπικές θέσεις των πόλων του μετασχηματισμού Z διακριτού σήματος επί του μιγαδικού επιπέδου

- Ο μετασχηματισμός Z^+ του σήματος $x(n)$ είναι ταυτόσημος με το μετασχηματισμό Z του σήματος $x(n)u(n)$. Επειδή δε το σήμα αυτό είναι αιτιατό σήμα, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z αυτού του σήματος - και επομένως και η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z^+ του σήματος $x(n)$ - είναι πάντοτε το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Για το λόγο αυτό όταν ορίζουμε το μετασχηματισμό Z^+ κάποιου σήματος, δεν είναι αναγκαίο να ορίζουμε και την περιοχή σύγκλισής του.

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Z^+ είναι οι ίδιες με εκείνες του μετασχηματισμού Z εκτός από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης η οποία διατυπώνεται διαφορετικά. Αυτή η ιδιότητα αναλύεται στην ιδιότητα της χρονικής υστέρησης (time delay) και στην ιδιότητα της χρονικής προώθησης (time advance). Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα, εάν είναι $x(n) \Leftrightarrow X^+(z)$, τότε θα είναι και

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right] \quad k > 0 \quad (98)$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(n)$ είναι αιτιατό, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k} X^+(z) \quad (99)$$

Τέλος, σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα, εάν είναι $x(n) \Leftrightarrow X^+(z)$, τότε θα είναι και

$$x(n+k) \Leftrightarrow z^{-k} \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right] \quad k > 0 \quad (100)$$

17 Η συσχέτιση του μετασχηματισμού Fourier με το μετασχηματισμό Z

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας εισόδου $x(n)$, ορίζεται από μία σχέση της μορφής

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (101)$$

με περιοχή σύγκλισης ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιεί τη σχέση $r_2 < |z| < r_1$. Εάν εκφράσουμε τώρα τη μιγαδική μεταβλητή z σε πολικές συντεταγμένες, αυτή θα γραφεί με τη μορφή $z = r \exp(j\omega)$ όπου r και ω το μέτρο και η φάση αντίστοιχα της μιγαδικής μεταβλητής z . Αντικαθιστώντας τώρα αυτή τη νέα μορφή της μεταβλητής z στην εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Z , αυτή γράφεται ως

$$X(z)|_{z=r \exp(j\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}] \exp(-j\omega n) \quad (102)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το συμπέρασμα πως ο μετασχηματισμός $X(z)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x(n)z^{-n}$. Ο παράγοντας r^{-n} αυξάνει με τη μεταβλητή n εάν ισχύει η σχέση $r < 1$ και ελαττώνεται με τη μεταβλητή n εάν $r > 1$. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε, πως αν ο μετασχηματισμός Z συγκλίνει για $|z| = 1$ (αυτή η περιοχή είναι η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου που έχει ως κέντρο την αρχή του μιγαδικού επιπέδου $z = 0$), τότε θα ισχύει η σχέση

$$X(z)|_{z=r \exp(j\omega)} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-j\omega n) \quad (103)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να ορισθεί ως ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας εισόδου υπολογισμένος στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Εάν ο μετασχηματισμός $X(z)$ δεν συγκλίνει στην περιοχή $|z| = 1$ - κάτι που σημαίνει πως ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z - τότε ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ δεν υφίσταται.

18 Η συνάρτηση συστήματος (System Function)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η έξοδος $y(n)$ ενός γραμμικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο συστήματος με χροστική απόκριση $h(n)$ που αντιστοιχεί σε ένα σήμα εισόδου $x(n)$, δίδεται από την εξίσωση της συνέλιξης

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (104)$$

Εάν $Y(z)$, $H(z)$ και $X(z)$ είναι οι μετασχηματισμοί Z των ακολουθιών $y(n)$, $h(n)$ και $x(n)$ αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με μια από τις βασικές ιδιότητες της συνέλιξης θα ισχύει η σχέση

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (105)$$

Επομένως, εάν γνωρίζουμε την χροστική απόκριση του συστήματος, $h(n)$, και την ακολουθία εισόδου, $x(n)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος, $y(n)$, εάν υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς $H(z)$ και $X(z)$, λάβουμε το γινόμενο τους $Y(z) = H(z)X(z)$ και στη συνέχεια υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της συνάρτησης $Y(z)$. Εναλλακτικά, εάν γνωρίζουμε την είσοδο, $x(n)$, και την έξοδο του συστήματος, $y(n)$, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση της χροστικής απόκρισης, $h(n)$, εάν υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της συνάρτησης

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (106)$$

Επειδή δε ο εν λόγω μετασχηματισμός σύμφωνα με την εξίσωση ορισμού του, δίδεται από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (107)$$

είναι προφανές πως αυτή η συνάρτηση αναπαριστά τα χαρακτηριστικά του συστήματος στο χώρο των z (z domain), αφού η χροστική απόκριση, $h(n)$, είναι η αντίστοιχη ισοδύναμη περιγραφή του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Για το λόγο αυτό η συνάρτηση $H(z)$ είναι γνωστή και ως συνάρτηση συστήματος (system function).

Στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημά μας περιγράφεται από μια γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N \beta_k x(n-k) \quad (108)$$

ο υπολογισμός της συνάρτησης $H(z)$ είναι σχετικά εύκολος. Πράγματι, εάν υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Z και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$Y(z) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^M \beta_k X(z)z^{-k} \quad (109)$$

ή ισοδύναμα

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}\right) \quad (110)$$

Θα είναι λοιπόν

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} \quad (111)$$

Επομένως τα γραμμικά και αναλλοίωτα ως προς το χρόνο συστήματα, θα χαρακτηρίζονται από μία σύμμετρη (rational) συνάρτηση συστήματος.

Η παραπάνω εξίσωση είναι η γενική μορφή της συνάρτησης συστήματος για τα γραμμικά και αναλλοίωτα ως προς το χρόνο διακριτά συστήματα. Από αυτή τη γενική μορφή, μπορούμε να καταλήξουμε σε πιο εξειδικευμένες μορφές που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η πρώτη από αυτές τις μορφές, αφορά την περίπτωση κατά την οποία οι συντελεστές α_k της παραπάνω εξίσωσης λαμβάνουν μηδενικές τιμές - αυτό με άλλα λόγια σημαίνει πως $\alpha_k = 0$ για την περιοχή τιμών $1 \leq k \leq N$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M \beta_k z^{M-k} \quad (112)$$

και όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη M μηδενικών τιμών, οι τιμές των οποίων καθορίζονται από τις παραμέτρους του συστήματος, β_k , και από ένα πόλο M -οστής τάξης που βρίσκεται στην αρχή του μηδενικού επιπέδου, $z = 0$. Επειδή το σύστημα χαρακτηρίζεται μόνο από trivial πόλους (στη θέση $z = 0$) καθώς και από M non trivial πόλους ονομάζεται all-zero system. Είναι προφανές πως ένα τέτοιο σύστημα θα έχει χρουστική απόκριση πεπερασμένης διάρκειας και για το λόγο αυτό ονομάζεται σύστημα πεπερασμένης χρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response System ή FIR System) ή σύστημα κινούμενου μέσου (moving average system).

Από την άλλη πλευρά, εάν ισχύει η σχέση $\beta_k = 0$ (για $1 \leq k \leq M$) η συνάρτηση του συστήματος θα λάβει τη μορφή

$$H(z) = \frac{\beta_0}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} = \frac{\beta_0 z^N}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{N-k}} \quad (\alpha_0 = 1) \quad (113)$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση $H(z)$ περιέχει N πόλους με τιμές που καθορίζονται από τις παραμέτρους του συστήματος, α_k , καθώς και μια μηδενική τιμή N -οστής στη θέση $z = 0$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση του συστήματος περιέχει μόνο non trivial πόλους και το σύστημα χαρακτηρίζεται ως all-pole system. Λόγω της ύπαρξης αυτών των πόλων, η χρουστική απόκριση του συστήματος θα έχει άπειρη διάρκεια και επομένως το σύστημα μας θα είναι ένα σύστημα άπειρης χρουστικής απόκρισης (Infinite Impulse Response System ή IIR System).

Είναι προφανές πως η γενική μορφή της συνάρτησης του συστήματος που αποδίδεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} \quad (114)$$

θα περιέχει τόσο πόλους όσο και μηδενικές τιμές και για το λόγο αυτό, το σύστημα θα ονομάζεται pole-zero system με N πόλους και M μηδενικές τιμές. Λόγω της ύπαρξης των πόλων, ένα σύστημα αυτής της μορφής θα χαρακτηρίζεται ως σύστημα άπειρης χρουστικής απόκρισης.

19 Ανάλυση συστημάτων στο χώρο των z (z domain)

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό και αναλλοίωτο ως προς το χρόνο διακριτό σύστημα που περιγράφεται από τη γενική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M \beta_k x(n-k) \quad (115)$$

ενώ η συνάρτηση που το περιγράφει έχει κατά τα γνωστά τη μορφή

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} \quad (116)$$

Η συνάρτηση $H(z)$ στην παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως ο λόγος δύο πολυωνύμων $B(z)/A(z)$ όπου $B(z)$ είναι το πολυώνυμο του αριθμητή που περιέχει τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης του συστήματος, ενώ $A(z)$ είναι το πολυώνυμο του παρονομαστή που περιέχει τους πόλους αυτής της συνάρτησης. Στο παραπάνω σύστημα διαβιβάζουμε ένα διακριτό σήμα εισόδου $x(n)$, ο μετασχηματισμός Z του οποίου μπορεί να γραφεί και αυτός ως λόγος δύο πολυωνύμων $N(z)/Q(z)$.

Ας υποθέσουμε τώρα πως το σύστημα αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας και επομένως οι αρχικές συνθήκες της εξίσωσης διαφορών του συστήματος θα είναι τέτοιες ώστε $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός Z της εξόδου του συστήματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)} \quad (117)$$

Ας υποθέσουμε επίσης πως το σύστημά μας διαθέτει απλούς πόλους στις θέσεις p_1, p_2, \dots, p_N και πως ο μετασχηματισμός Z του σήματος εισόδου διαθέτει και αυτός τους δικούς του πόλους στις θέσεις q_1, q_2, \dots, q_L όπου υποθέτουμε ότι $p_k \neq q_m$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, N$ και $m = 1, 2, \dots, L$. Επιπλέον θεωρούμε πως οι μηδενικές τιμές των πολυωνύμων του αριθμητή, $B(z)$ και $N(z)$, δεν συμπίπτουν με τους πόλους $\{p_k\}$ και $\{q_k\}$ έτσι ώστε να λαμβάνει χώρα αμοιβαία εξουδετέρωση πόλων από μηδενικές τιμές. Εάν πληρούνται όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις, μπορούμε να γράψουμε το μετασχηματισμό Z της εξόδου του συστήματος, ως ένα άθροισμα δύο όρων της μορφής

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}} \quad (118)$$

Εάν υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της παραπάνω συνάρτησης, θα λάβουμε την έξοδο $y(n)$ του συστήματος στο πεδίο του χρόνου, η οποία θα αποδίδεται από μια σχέση της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n) \quad (119)$$

Από την παραπάνω σχέση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η έξοδος του συστήματος, $y(n)$, μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα δύο όρων. Από αυτούς τους όρους, ο πρώτος είναι συνάρτηση των πόλων του συστήματος $\{p_k\}$ και ονομάζεται φυσική απόκριση (natural response) του συστήματος, ενώ ο δεύτερος είναι συνάρτηση των πόλων $\{q_k\}$ του μετασχηματισμού Z του σήματος εισόδου, και ονομάζεται εξαναγκασμένη απόκριση (forced response) του συστήματος. Η επίδραση αυτών των δύο όρων στην έξοδο $y(n)$ πραγματοποιείται δια μέσου των συντελεστών A_k και Q_k οι οποίοι είναι συναρτήσεις τόσο των πόλων $\{p_k\}$ όσο και των πόλων $\{q_k\}$.

Ας υποθέσουμε τώρα πως οι αρχικές συνθήκες της εξίσωσης διαφορών του συστήματος, $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ δεν είναι μηδενικές, αλλά φέρουν τιμές διάφορες του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή η φυσική απόκριση του συστήματος δεν είναι η ίδια με την προηγούμενη περίπτωση, αλλά μεταβάλλεται. Για να αποδείξουμε το αληθές αυτής της πρότασης, ας θεωρήσουμε πως τη χρονική στιγμή $n = 0$, διαβιβάζουμε στο σύστημα ένα αιτιατό διακριτό σήμα $x(n)$. Στην περίπτωση αυτή προκειμένου να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος, θα πρέπει να λάβουμε το μετασχηματισμό Z^+ (one sided Z transform) της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει το διακριτό σύστημα. Στην περίπτωση αυτή θα λάβουμε την εξίσωση

$$Y^+(z) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right] + \sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k} X^+(z) \quad (120)$$

Επειδή όμως το σήμα εισόδου είναι αιτιατό (ικανοποιεί δηλαδή τη συνθήκη $x(n) = 0$ για $n < 0$) μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $X^+(z) = X(z)$. Στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός $Y^+(z)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} \left(\sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right)}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} = H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad (121)$$

όπου

$$N_0(z) = - \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right) \quad (122)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές πως η έξοδος του συστήματος στην προκειμένη περίπτωση, μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα δύο όρων. Από αυτούς τους όρους, ο πρώτος είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response) του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z) \quad (123)$$

ενώ ο δεύτερος - που ονομάζεται απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response) του συστήματος - οφείλεται στην ύπαρξη των μη μηδενικών αρχικών συνθηκών, και αποδίδεται από την εξίσωση

$$Y_{zi}^+ = \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad (124)$$

Επομένως, η συνολική απόκριση του συστήματος, θα είναι το άθροισμα αυτών των δύο συνιστωσών. Για να λάβουμε αυτή την απόκριση στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z των εν λόγω συνιστωσών και στη συνέχεια να προσθέσουμε τις παραστάσεις που θα προκύψουν. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας, είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \quad (125)$$

Επειδή ο παρονομαστής του μετασχηματισμού Y_{zi}^+ είναι το πολυώνυμο $A(z)$, είναι προφανές πως οι πόλοι αυτού του μετασχηματισμού θα είναι οι p_1, p_2, \dots, p_N . Επομένως η απόκριση μηδενικής εισόδου, τελικά θα έχει τη μορφή

$$Y_{zi}^+ = \sum_{k=1}^N D_k (p_k)^n u(n) \quad (126)$$

ενώ η συνολική έξοδος του συστήματος θα περιγράφεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A'_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n) \quad (127)$$

όπου $A'_k = A_k + D_k$. Παρατηρούμε λοιπόν, πως το αποτέλεσμα της ύπαρξης μη μηδενικών αρχικών συνθηκών στο σύστημά μας, είναι η μεταβολή της φυσικής απόκρισης του συστήματος, ενώ από την άλλη πλευρά, η εξαναγκασμένη απόκριση του συστήματος, παραμένει αμετάβλητη.

Ένα τελευταίο θέμα που είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί στο σημείο αυτό, συσχετίζεται με το μέτρο των πόλων $\{p_k\}$ του διακριτού συστήματος. Εάν το μέτρο αυτό ικανοποιεί την ανίσωση $|p_k| < 1$, η φυσική απόκριση του συστήματος τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος n τείνει στο άπειρο. Στην περίπτωση αυτή, η φυσική απόκριση του συστήματος χαρακτηρίζεται ως πρόσκαιρη ή παροδική απόκριση (transient response). Όσον αφορά το ρυθμό αυτής της μείωσης, αυτός εξαρτάται από τη θέση των πόλων $\{p_k\}$ επί του μιγαδικού επιπέδου. Εάν όλοι οι πόλοι βρίσκονται πολύ κοντά στην αρχή του μιγαδικού επιπέδου (που αντιστοιχεί στο σημείο $z = 0$) ο ρυθμός εξασθένισης του σήματος είναι πάρα πολύ μεγάλος. Αντίθετα, εάν οι πόλοι βρίσκονται κοντά στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, η εξασθένιση της φυσικής απόκρισης είναι πολύ πιο αργή και αυτός ο παροδικός όρος διαρκεί για πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Από την άλλη πλευρά, η εξαναγκασμένη απόκριση του συστήματος, είναι συνάρτηση των συντελεστών Q_k και των πόλων $\{q_k\}$ του σήματος εισόδου. Εάν όλοι αυτοί οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, η εξαναγκασμένη απόκριση θα τείνει και αυτή στο μηδέν, όπως και η φυσική απόκριση. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς στην περίπτωση αυτή, το σήμα εισόδου είναι ένα παροδικό σήμα, το πλάτος του οποίου ελαττώνεται σε συνάρτηση με το χρόνο. Αντίθετα, εάν το σήμα εισόδου είναι μια ημιτονοειδής κυματομορφή, οι πόλοι του σήματος βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, και η εξαναγκασμένη απόκριση είναι επίσης ένα ημιτονοειδές κύμα που ορίζεται για τιμές χρόνου $n \geq 0$. Στην περίπτωση αυτή η απόκριση του συστήματος είναι γνωστή με το όνομα απόκριση σταθεράς κατάστασης (steady-state response).

20 Συχνотική ανάλυση σημάτων και συστημάτων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η χρήση του μετασχηματισμού και των σειρών Fourier επιτρέπει το διαχωρισμό ενός σήματος στις θεμελιώδεις συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται και οι οποίες είναι απλές ημιτονοειδείς κυματομορφές

κάθε μία εκ των οποίων έχει τη δική της συχνότητα. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατός ο μετασχηματισμός της αναπαράστασης του σήματος από το πεδίο του χρόνου (time domain) στο πεδίο συχνοτήτων (frequency domain). Πιο συγκεκριμένα, οι σειρές Fourier χρησιμοποιούνται για την ανάλυση περιοδικών σημάτων, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται για την ανάλυση αperiοδικών σημάτων πεπερασμένης ενέργειας.

Εάν ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου διέλθει μέσα από ένα γραμμικό και αμετάβλητο ως προς το χρόνο διακριτό σύστημα, θα προκύψει ένα νέο σήμα που θα έχει την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικό πλάτος και φάση σε σχέση με το αρχικό. Λαμβάνοντας δε υπ' όψιν την ιδιότητα της γραμμικότητας που χαρακτηρίζει αυτά τα συστήματα μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω περιγραφή όσον αφορά την έξοδο ενός τέτοιου συστήματος και σε ένα γραμμικό συνδυασμό απλών σημάτων που διαβιβάζονται στην είσοδο του εν λόγω συστήματος.

Η διαδικασία της αποσύνθεσης ενός σήματος στις στοιχειώδεις ημιτονοειδείς συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται, αποτελεί μέρος μιας γενικότερης ανάλυσης που εφαρμόζεται σε ένα σήμα συνεχούς ή διακριτού χρόνου, και η οποία είναι γνωστή με το όνομα συχνοτική ανάλυση (frequency analysis). Πραγματοποιώντας αυτή τη διαδικασία αποσύνθεσης, έχουμε τη δυνατότητα να αναδειξουμε το συχνοτικό περιεχόμενο (frequency content) ενός σήματος το οποίο είναι γνωστό και ως φάσμα (spectrum). Για το λόγο αυτό η συχνοτική ανάλυση αποδίδεται συχνά και από τον όρο φασματική ανάλυση (spectral analysis).

21 Συχνοτική ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει σε προηγούμενες ενότητες, κάθε περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου με περίοδο T_p μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα απείρων όρων της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(j2\pi k F_0 t) \quad (128)$$

το οποίο είναι γνωστό ως σειρά Fourier. Στην παραπάνω σχέση το μέγεθος F_0 είναι γνωστό ως θεμελιώδης συχνότητα, και συσχετίζεται με τη θεμελιώδη περίοδο T_p με τη σχέση $F_0 = 1/T_p$. Όσον αφορά τις ποσότητες C_k , αυτές είναι γνωστές ως συντελεστές Fourier, δίδονται από τη σχέση

$$C_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \exp(-j2\pi k F_0 t) \quad (129)$$

και στη γενική περίπτωση είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Ένα περιοδικό σήμα έχει άπειρη ενέργεια και πεπερασμένη μέση ισχύ η οποία δίδεται από τη σχέση

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \quad (130)$$

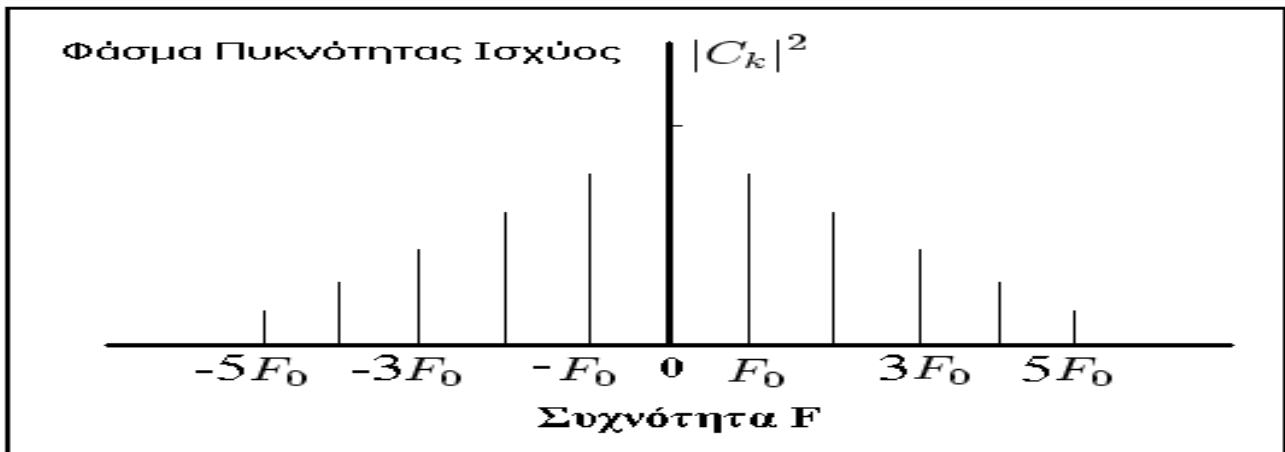
εξίσωση, που είναι γνωστή ως σχέση του Parseval. Αυτή η μέση ισχύς είναι ίση με το άθροισμα των μέσων ισχύων του συνόλου των αρμονικών συνιστωσών που συνιστούν το περιοδικό σήμα.

Εάν για κάθε αρμονική συνιστώσα σχεδιάσουμε την ισχύ P_x , θα λάβουμε το επονομαζόμενο φάσμα ισχύος (power spectrum) που δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η ισχύς του σήματος κατανέμεται στις διάφορες συχνότητες. Επειδή η ισχύς του περιοδικού σήματος ορίζεται μόνο στις διακριτές τιμές συχνοτήτων $\{0, \pm F_0, \pm 2F_0, \text{κ.λ.π.}\}$ το σήμα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός φάσματος γραμμών (line spectrum) με την απόσταση ανάμεσα σε αυτές τις γραμμές, να είναι ίση με το αντίστροφο της θεμελιώδους περιόδου του σήματος, T_p . Από την άλλη πλευρά, το σχήμα του φάσματος εξαρτάται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του σήματος στο πεδίο του χρόνου (time domain). Τυπικό παράδειγμα φάσματος γραμμών περιοδικού σήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 47.

Ας υποθέσουμε τώρα πως η περίοδος του σήματος αρχίζει να αυξάνει απεριόριστα. Η αύξηση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της απόστασης ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φασματικές γραμμές. Εάν η περίοδος λάβει άπειρη τιμή, αυτή η απόσταση θα γίνει ίση με το μηδέν, το φάσμα του σήματος από συνεχές θα γίνει διακριτό, ενώ το ίδιο το σήμα από περιοδικό θα γίνει απεριοδικό, θα χαρακτηρίζεται δηλαδή από πλήρη απουσία περιοδικότητας.

Λόγω αυτής της συνεχούς κατανομής της ενέργειας του σήματος στις διάφορες συχνότητες, η διαδικασία της ανασύνθεσης του σήματος από τις στοιχειώδεις κυματομορφές που το αποτελούν, δεν θα γίνει με πλέον με την πράξη της άθροισης, αλλά με την πράξη της ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να περιγράψουμε το απεριοδικό σήμα συνεχούς χρόνου από μια σχέση της μορφής

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) \exp(j2\pi Ft) dF \quad (131)$$



Σχήμα 47: Φάσμα γραμμών τυπικού περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου

όπου οι συντελεστές Fourier θα δίδονται πλέον από τη σχέση

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi Ft) dF \quad (132)$$

Οι δύο αυτές σχέσεις ορίζουν κατά τα γνωστά τον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Στην περίπτωση των απεριοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου, η εξίσωση ορισμού της ενέργειάς τους έχει τη μορφή

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \quad (133)$$

που είναι η σχέση του Parseval για την περίπτωση των απεριοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου και πεπερασμένης ενέργειας. Η σχέση αυτή αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της αρχής διατήρησης της ενέργειας σύμφωνα με την οποία η ενέργεια του σήματος στο πεδίο του χρόνου, είναι ίση με την ενέργεια του σήματος στο πεδίο συχνοτήτων.

Η παραπάνω σχέση του Parseval δίνει τη συνολική ενέργεια του σήματος για όλο το φάσμα συχνοτήτων. Εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια του σήματος για μια συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων ($F_1, F_1 + \Delta F$), εύρους ΔF , θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$E_F = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \quad (134)$$

όπου το μέγεθος $|X(F)|^2$ που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση, είναι γνωστό ως πυκνότητα ενέργειας (energy density).

22 Συχνοτική ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση των θεμελιωδών ιδιοτήτων των σημάτων συνεχούς χρόνου όσον αφορά τη συχνοτική τους αναπαράσταση, ας περάσουμε τώρα στην ανάλυση των παραπάνω χαρακτηριστικών για τα σήματα διακριτού χρόνου. Ξεκινώντας από τα περιοδικά διακριτά σήματα, θα πρέπει να αναφέρουμε πως σε αντίθεση με τα συνεχή περιοδικά σήματα τα οποία μπορούν να αναλυθούν σε ένα άπειρο πλήθος αρμονικών συνιστωσών με την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φασματικές γραμμές να ισούται με το αντίστροφο της θεμελιώδους περιόδου του σήματος, T_p , στα σήματα διακριτού χρόνου η περιοχή συχνοτήτων δεν εκτείνεται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, αλλά είναι μοναδική στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ ή στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Εάν N είναι η θεμελιώδης περίοδος του διακριτού σήματος, δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό, πως η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φασματικές γραμμές θα είναι ίση με $2\pi/N$ ακτίνια ή $1/N$ κύκλους. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα, η σειρά Fourier του διακριτού περιοδικού σήματος να περιέχει το πολύ N όρους. Όσον αφορά τη μαθηματική διατύπωση αυτού του αναπτύγματος, αυτή κατά τα γνωστά θα δίδεται από την εξίσωση

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad (135)$$

με τους συντελεστές Fourier, C_k , να δίδονται από τη σχέση

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-\frac{j2\pi kn}{N}) \quad (136)$$

Αποδεικνύεται πως η σειρά των συντελεστών Fourier που προκύπτει με τον παραπάνω τρόπο συνιστά μια περιοδική ακολουθία με θεμελιώδη περίοδο N , και επομένως οι εν λόγω συντελεστές θα ικανοποιούν τη σχέση $C_{k+N} = C_k$. Αλλά αυτό βεβαίως σημαίνει πως το φάσμα του διακριτού περιοδικού σήματος $x(n)$, είναι και αυτό μια περιοδική ακολουθία, με τιμή περιόδου ίση με την περίοδο του διακριτού σήματος. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα, διότι αν καταγράψουμε τις τιμές N οποιωνδήποτε διαδοχικών δειγμάτων του διακριτού σήματος, μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να λάβουμε μια πλήρη περιγραφή του εν λόγω σήματος, τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Σε πλήρη αναλογία με τα περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου, τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου θα χαρακτηρίζονται και αυτά από μια μέση ισχύ η οποία στην προκειμένη περίπτωση δίδεται από τη σχέση

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 \quad (137)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη σχέση του Parseval για τα περιοδικά διακριτά σήματα. Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή, η μέση ισχύς του σήματος, είναι ίση με το άθροισμα των τιμών της ισχύος του σήματος για την κάθε ξεχωριστή συνιστώσα. Όσον αφορά την ακολουθία των τιμών $|C_k|^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), αυτή αναπαριστά την κατανομή της ισχύος του σήματος ως συνάρτηση της συχνότητας και ορίζεται ως το φάσμα πυκνότητας ισχύος (power density spectrum) του περιοδικού διακριτού σήματος. Τέλος η ενέργεια του σήματος για μια ολόκληρη περίοδο, αποδεικνύεται ότι δίδεται από τη σχέση

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 \quad (138)$$

Ας περάσουμε τώρα στη μαθηματική περιγραφή των απεριοδικών σημάτων διακριτού χρόνου (discrete time aperiodic signals) πεπερασμένης ενέργειας, η οποία σε πλήρη αναλογία με τα απεριοδικά σήματα συνεχούς χρόνου, στηρίζεται στη χρήση του μετασχηματισμού Fourier. Αυτός ο μετασχηματισμός, για τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, έχει τη μορφή

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-j\omega n) \quad (139)$$

και χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση του συχνοτικού περιεχομένου (frequency content) του απεριοδικού διακριτού σήματος $x(n)$. Αποδεικνύεται πως για αυτή την ιδιαίτερη κατηγορία διακριτών σημάτων, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο ίση με 2π και επομένως θα ικανοποιεί τη συνθήκη $X(\omega) = X(\omega + 2\pi k)$. Η εμφάνιση αυτής της περιοδικότητας οφείλεται στο γεγονός πως η περιοχή συχνοτήτων των διακριτών σημάτων είναι μοναδικώς ορισμένη στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ ή στο διάστημα $(0, 2\pi)$, και πως κάθε συχνότητα που βρίσκεται έξω από αυτά τα διαστήματα, απεικονίζεται πάντα σε μία συχνότητα που βρίσκεται εντός αυτών των διαστημάτων.

Αποδεικνύεται πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για τα απεριοδικά σήματα διακριτού χρόνου δίδεται από τη σχέση

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) \exp(j\omega n) d\omega \quad (140)$$

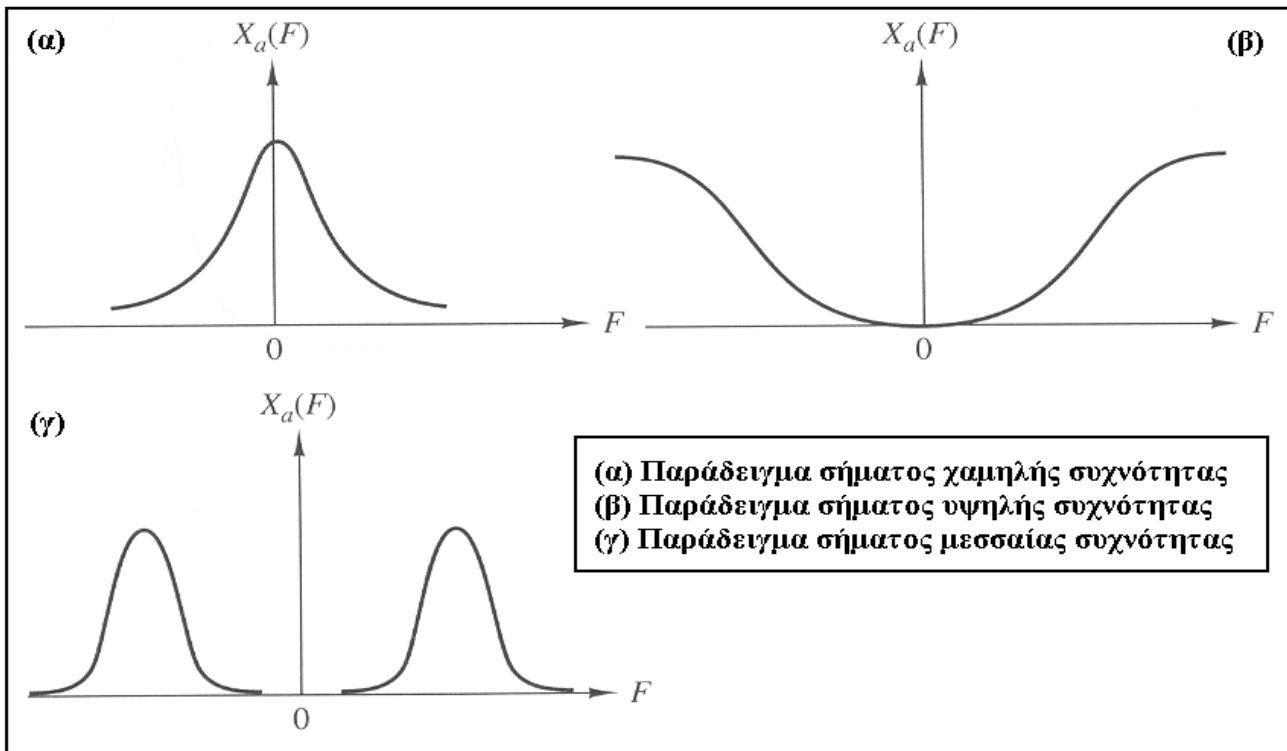
Τέλος η σχέση του Parseval για αυτή την ιδιαίτερη κατηγορία σημάτων αποδίδεται από την εξίσωση

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (141)$$

και αποτελεί την εξίσωση ορισμού της ενέργειας E_x του διακριτού σήματος $x(n)$.

23 Ταξινόμηση σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων

Μια ενδιαφέρουσα ταξινόμηση των σημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου σε σχέση με το συχνοτικό τους περιεχόμενο είναι ο διαχωρισμός τους σε τρεις κατηγορίες, που φέρουν τα ονόματα σήματα χαμηλής συχνότητας (low frequency signals), σήματα υψηλής συχνότητας (high frequency signals) και σήματα μεσαίας συχνότητας (medium



Σχήμα 48: Παραδείγματα σημάτων χαμηλής, μεσσαίας και υψηλής συχνότητας

frequency signals). Ένα σήμα ενέργειας ή ισχύος χαρακτηρίζεται ως σήμα χαμηλής συχνότητας, όταν το φάσμα ενέργειας ή ισχύος χαρακτηρίζεται από υψηλή συγκέντρωση στη θέση της μηδενικής συχνότητας. Αντίθετα, εάν αυτή η υψηλή συγκέντρωση εμφανίζεται σε θέση υψηλής συχνότητας ή σε κάποια ενδιάμεση θέση που βρίσκεται ανάμεσα στις περιοχές χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων, τότε το σήμα χαρακτηρίζεται ως σήμα υψηλής συχνότητας ή σήμα μεσσαίας συχνότητας αντίστοιχα. Παραδείγματα σημάτων χαμηλής, υψηλής και μεσσαίας συχνότητας, παρουσιάζονται στο σχήμα 48.

Στενά συνδεδεμένη με την παραπάνω ταξινόμηση των σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων, είναι και η έννοια του εύρους ζώνης (bandwidth). Θεωρώντας μια περιοχή συχνοτήτων $[F_1, F_2]$ στην οποία αντιστοιχεί το $X\%$ της συνολικής ισχύος του σήματος, τότε η περιοχή συχνοτήτων $F_1 \leq F \leq F_2$ χαρακτηρίζεται ως το $X\%$ εύρος ζώνης ($X\%$ bandwidth). Εάν υπάρχει μια συχνότητα F και μια σταθερά B τέτοια ώστε το φάσμα του σήματος να λαμβάνει μηδενικές τιμές στην περιοχή συχνοτήτων $|F| \geq B$ (ή ισοδύναμα $-B \leq F \leq B$), τότε το σήμα λέγεται band limited. Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται σε συνεχές αperiοδικό σήμα, αλλά μπορεί να επεκταθεί και για την περίπτωση συνεχούς περιοδικού σήματος καθώς και για την περίπτωση διακριτών περιοδικών και αperiοδικών σημάτων. Παράδειγμα τέτοιων σημάτων για κάθε μια από αυτές τις τέσσερις περιπτώσεις, παρουσιάζεται στο σχήμα 49.

24 Η συνάρτηση συχνοτικής απόκρισης των διακριτών συστημάτων

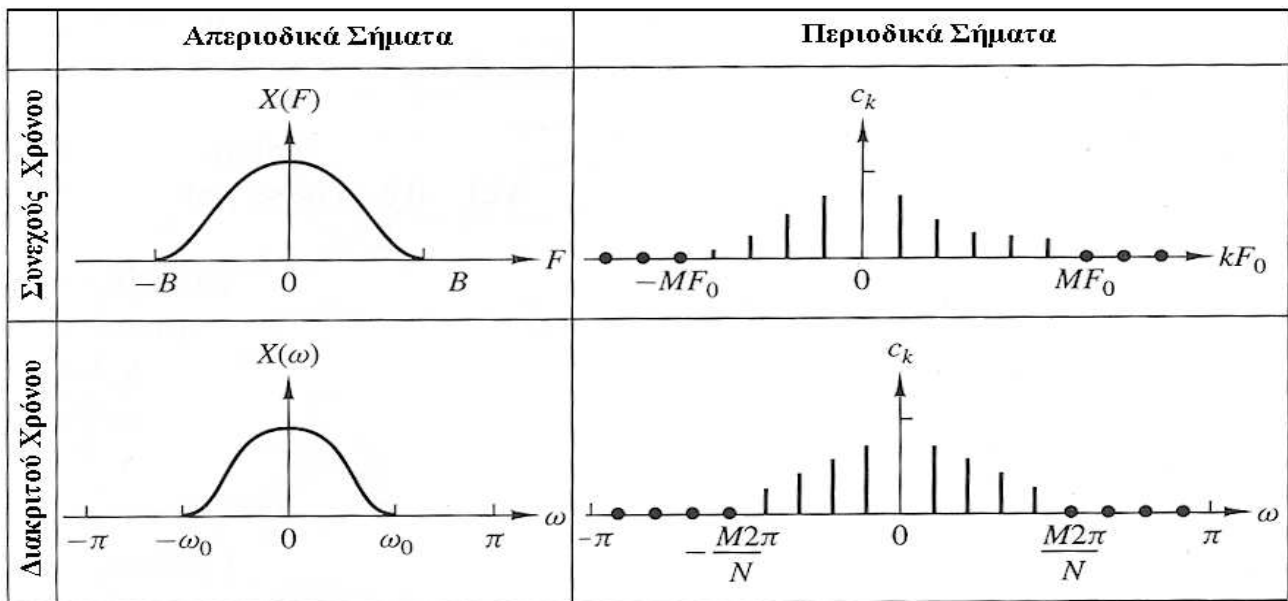
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η έξοδος ενός γραμμικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο συστήματος, περιγράφεται από μία σχέση της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (142)$$

όπου $x(n)$ είναι το διακριτό σήμα εισόδου και $h(k)$ η συνάρτηση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Η παραπάνω σχέση περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Για την περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος στο χώρο των συχνοτήτων, θα πρέπει να διεγείρουμε τό σύστημα με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής

$$x(n) = A \exp(i\omega n) \quad -\infty < n < \infty \quad (143)$$



Σχήμα 49: Παραδείγματα περιοδικού και απεριοδικού σήματος συνεχούς και διακριτού χρόνου

όπου A είναι το πλάτος του σήματος και ω η συχνότητά του (η τιμή αυτής της συχνότητας ανήκει στο διάστημα $[-\pi, \pi]$). Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση ορισμού της εξόδου του διακριτού συστήματος, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[A \exp(j\omega(n-k)) \right] = A \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) \right] \exp(j\omega n) \quad (144)$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως ο όρος που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες στην παραπάνω σχέση είναι συνάρτηση μόνο της συχνότητας ω του σήματος εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση αυτή είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, ο οποίος κατά τα γνωστά θα δίδεται από τη σχέση

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) \quad (145)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση για το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $h(k)$, μπορούμε να γράψουμε την έξοδο του συστήματος με τη μορφή

$$y(n) = AH(\omega) \exp(j\omega n) \quad (146)$$

Η σχέση αυτή στην οποία καταλήξαμε είναι μια εξίσωση ιδιοτιμών. Στην εξίσωση αυτή το σήμα εισόδου $x(n)$ είναι ιδιοσυνάρτηση του συστήματος με αντίστοιχη ιδιοτιμή τη συνάρτηση $H(\omega)$ - η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται για την τιμή της συχνότητας ω του σήματος εισόδου.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει το συμπέρασμα πως ο υπολογισμός της εξόδου ενός διακριτού συστήματος για δεδομένο σήμα εισόδου περιλαμβάνει τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος στη θέση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου. Για να κατανοήσουμε αυτή τη διαδικασία, ας παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της εξόδου του συστήματος για δεδομένο σήμα εισόδου.

Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό ένα σύστημα με συνάρτηση κρουστικής απόκρισης που δίδεται από τη σχέση

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (147)$$

Ζητείται η ακολουθία εξόδου του συστήματος, $y(n)$, όταν στην είσοδό του διαβιβάσουμε το σήμα

$$x(n) = A \exp\left(\frac{j\pi n}{2}\right) \quad -\infty < n < \infty \quad (148)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή, ο υπολογισμός της εξόδου $y(n)$ του συστήματος, απαιτεί τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier για την κρουστική απόκριση $h(n)$. Αυτός ο μετασχηματισμός αποδεικνύεται ότι δίδεται

από τη σχέση

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n) = \frac{1}{1 - 0.5 \exp(-j\omega)} \quad (149)$$

Από την άλλη πλευρά, η συχνότητα του σήματος εισόδου είναι $\omega = \pi/2$. Επομένως η τιμή της συνάρτησης $H(\omega)$ για την τιμή της συχνότητας $\omega = \pi/2$, θα είναι

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + 0.5j} = \frac{2}{\sqrt{5}} \exp(-j26.6^\circ) \quad (150)$$

ενώ η έξοδος του συστήματος, $y(n)$, θα δίδεται από τη σχέση

$$y(n) = A \left[\frac{2}{\sqrt{5}} \exp(-j26.6^\circ) \right] \exp\left(\frac{j\pi n}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} A \exp\left[j\left(\frac{\pi n}{2} - 26.6^\circ\right)\right] \quad -\infty < n < \infty \quad (151)$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει το συμπέρασμα πως το αποτέλεσμα της διέλευσης του σήματος εισόδου από το εν λόγω σύστημα, είναι η ενίσχυση του πλάτους του, A , κατά τον παράγοντα $2/\sqrt{5}$ και η μετατόπιση της φάσης του, κατά γωνία -26.6° . Επομένως το σήμα εξόδου θα είναι και αυτό ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με συχνότητα $\omega = \pi/2$, πλάτος $A' = 2A/\sqrt{5}$ και φάση $\varphi = -26.6^\circ$.

Στη γενική περίπτωση, ο μετασχηματισμός $H(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω και επομένως μπορεί να γραφεί σε πολικές συντεταγμένες με τη μορφή

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\Theta(\omega)) \quad (152)$$

Ο υπολογισμός του μέτρου $|H(\omega)|$ και της φάσης $\Theta(\omega)$ μπορεί να υπολογισθεί σχετικά εύκολα για την περίπτωση των γραμμικών και αμετάβλητων ως προς το χρόνο διακριτών συστημάτων, η χροστική απόκριση των οποίων χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη πραγματικών τιμών. Στην περίπτωση αυτή από την εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $H(\omega)$ θα έχουμε

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cos(\omega k) - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sin(\omega k) \quad (153)$$

και τελικά

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \exp\left(j \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}\right) \quad (154)$$

όπου

$$H_R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cos(\omega k) \quad \text{και} \quad H_I(\omega) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sin(\omega k)$$

είναι η πραγματική και η φανταστική συνιστώσα του μετασχηματισμού $H(\omega)$. Θα είναι λοιπόν

$$|H_R(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \quad \text{και} \quad \Theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως οι συναρτήσεις $H_R(\omega)$ και $H_I(\omega)$ ικανοποιούν τις συνθήκες $H_R(\omega) = H_R(-\omega)$ και $H_I(\omega) = -H_I(-\omega)$. Επομένως η $H_R(\omega)$ είναι άρτια συνάρτηση του ω ενώ η $H_I(\omega) = -H_I(-\omega)$ είναι περιττή συνάρτηση της εν λόγω μεταβλητής. Στηριζόμενοι σε αυτές τις ιδιότητες συμμετρίας, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε πως η συνάρτηση $|H(\omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση του ω ενώ η συνάρτηση $\Theta(\omega)$ είναι περιττή συνάρτηση του ω .

Οι παραπάνω ιδιότητες συμμετρίας που χαρακτηρίζουν τις συναρτήσεις $|H(\omega)|$ και $\Theta(\omega)$ σε συνδυασμό με το γεγονός πως ένα ημιτονοειδές σήμα μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ή η διαφορά δύο συζυγών εκθετικών μιγαδικών σημάτων, μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως η απόκριση ενός γραμμικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο συστήματος σε ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου, είναι ίδια με την απόκριση του εν λόγω συστήματος σε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα εισόδου.

Για να αποδείξουμε την ισχύ της παραπάνω πρότασης, ας θεωρήσουμε το σήμα

$$x_1(n) = A \exp(j\omega n) \quad (155)$$

Εάν το σήμα αυτό διααβιβασθεί στην είσοδο του συστήματος, η έξοδος $y(n)$ που θα προκύψει από αυτό, θα έχει σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω, τη μορφή

$$y_1(n) = A|H(\omega)|\exp(j\Theta(\omega))\exp(j\omega n) \quad (156)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν θεωρήσουμε το σήμα εισόδου

$$x_1(n) = A\exp(-j\omega n) \quad (157)$$

η αντίστοιχη έξοδος του συστήματος θα δίδεται από τη σχέση

$$y_2(n) = A|H(-\omega)|\exp(j\Theta(-\omega))\exp(-j\omega n) = A|H(\omega)|\exp(-j\Theta(\omega))\exp(-j\omega n) \quad (158)$$

αφού ισχύουν οι ιδιότητες συμμετρίας $|H(\omega)| = |H(-\omega)|$ και $\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega)$.

Εάν τώρα εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας (που ασφαλώς ισχύει αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό), δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως η απόκριση του συστήματος στην είσοδο

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\frac{\exp(j\omega n) + \exp(-j\omega n)}{2} = A\cos(\omega n) \quad (159)$$

αντιστοιχεί στο σήμα εξόδου

$$y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A|H(\omega)|\cos[\omega n + \Theta(\omega)] \quad (160)$$

ενώ με τον ίδιο τρόπο, η απόκριση του συστήματος στην είσοδο

$$x(n) = \frac{1}{2j}[x_1(n) - x_2(n)] = A\frac{\exp(j\omega n) - \exp(-j\omega n)}{2j} = A\sin(\omega n) \quad (161)$$

είναι η

$$y(n) = \frac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)] = A|H(\omega)|\sin[\omega n + \Theta(\omega)] \quad (162)$$

Στηριζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να διατυπώσουμε το συμπέρασμα πως η συνάρτηση $H(\omega)$ - ή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $|H(\omega)|$ και $\Theta(\omega)$ - καθορίζουν με μοναδικό τρόπο το αποτέλεσμα της επίδρασης ενός γραμμικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο διακριτού συστήματος πάνω σε ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου οποιασδήποτε συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, το μέτρο $|H(\omega)|$ καθορίζει το ποσό της ενίσχυσης (εάν $|H(\omega)| > 1$) ή εξασθένησης (εάν $|H(\omega)| < 1$) του πλάτους A του ημιτονοειδούς σήματος εισόδου, ενώ η φάση $\Theta(\omega)$ καθορίζει το μέτρο της μετατόπισης της φάσης του εν λόγω σήματος. Επειδή η γνώση της συνάρτησης $H(\omega)$ επιτρέπει τον πλήρη καθορισμό της επίδρασης του συστήματος πάνω σε κάθε ημιτονοειδές σήμα εισόδου, η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή και ως συχνοτική απόκριση (frequency response) του συστήματος. Δύο ακόμη όροι που συναντώνται ευρέως στη βιβλιογραφία, είναι ο όρος απόκριση πλάτους (amplitude response) για τη συνάρτηση $|H(\omega)|$ και ο όρος απόκριση φάσης ή φασική απόκριση (phase response) για τη συνάρτηση $\Theta(\omega)$.

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση της βασικής θεωρίας που συσχετίζεται με τον ορισμό και τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης, με την παρατήρηση πως στη γενική περίπτωση κατά την οποία το σήμα εισόδου είναι ένας γραμμικός συνδυασμός απλών ημιτονοειδών κυματομορφών της μορφής

$$x(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cos(\omega_i n + \varphi_i) \quad (163)$$

(όπου A_i , ω_i και φ_i είναι αντίστοιχα το πλάτος, η συχνότητα και η φάση της κυματομορφής υπ' αριθμόν i), η συνολική απόκριση του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$y(n) = \sum_{i=1}^L A_i |H(\omega_i)| \cos(\omega_i n + \varphi_i + \Theta(\omega_i)) \quad (164)$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει το συμπέρασμα πως η επίδραση του συστήματος σε κάθε μια από τις απλές κυματομορφές που συνιστούν το σήμα εισόδου, είναι γενικά διαφορετική και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της συχνοτικής απόκρισης $H(\omega)$. Εάν για παράδειγμα υπάρχουν κυματομορφές συχνότητας ω για τις οποίες να ισχύει η σχέση $H(\omega) = 0$, οι εν λόγω κυματομορφές θα απομακρυνθούν τελείως κατά τη διέλευση του σήματος από το διακριτό σύστημα, και δεν θα εμφανιστούν καθόλου στο σήμα εξόδου του συστήματος. Αντίστοιχα, κάποιες άλλες

κυματομορφές, θα υποστούν διαφορετικού τύπου επίδραση (για παράδειγμα, ενίσχυση, εξασθένηση, ή μετατόπιση φάσης). Αυτή η διαφορετική αντιμετώπιση που υφίσταται η κάθε μια από τις απλές κυματομορφές που συνιστούν το σήμα εισόδου του συστήματος, είναι και ο λόγος για τον οποίο χαρακτηρίζουμε συχνά αυτού του είδους τα διακριτά συστήματα ως φίλτρα (filters) τα οποία επιτρέπουν τη διέλευση μόνο μερικών συχνοτήτων ενώ έχουν τη δυνατότητα να απομακρύνουν τελείως κάποιες άλλες από αυτές. Η διαδικασία καθορισμού των παραμέτρων ενός ψηφιακού φίλτρου έτσι ώστε η συχνοτική τους απόκριση να διαθέτει τα επιθυμητά σε κάθε περίπτωση χαρακτηριστικά, αποτελεί το αντικείμενο της διαδικασίας σχεδίασης των ψηφιακών φίλτρων (digital filter design) που θα παρουσιαστεί συνοπτικά σε επόμενη ενότητα.

25 Υπολογισμός της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εάν η συνάρτηση $H(z)$ ενός διακριτού συστήματος συγκλίνει επί της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου, μπορούμε να λάβουμε τη συνάρτηση της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος, εάν υπολογίσουμε τη συνάρτηση $H(z)$ πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Αυτό σε μαθηματική μορφή διατυπώνεται δια μέσου μιας σχέσης της μορφής

$$H(\omega) = H(z)|_{z=\exp(j\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\exp(-j\omega n) \quad (165)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση $H(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως ένας λόγος δύο πολυωνύμων της μορφής $H(z) = B(z)/A(z)$, η συνάρτηση της συχνοτικής απόκρισης μπορεί να λάβει τη μορφή

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k \exp(-j\omega k)}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \exp(-j\omega k)} = \beta_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \exp(-j\omega))}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \exp(-j\omega))} \quad (166)$$

όπου οι συντελεστές $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$ είναι πραγματικοί, αλλά οι ποσότητες $\{p_k\}$ και $\{z_k\}$ μπορούν να λάβουν και μιγαδικές τιμές.

Η παραπάνω σχέση - που αναδεικνύει τη συσχέτιση που υφίσταται ανάμεσα στη συνάρτηση συχνοτικής απόκρισης $H(\omega)$ και στους πόλους και μηδενικές τιμές της συνάρτησης συστήματος $H(z)$ - μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$H(\omega) = \beta_0 \exp(j\omega(N - M)) \frac{\prod_{k=1}^M (\exp(j\omega - z_k))}{\prod_{k=1}^N (\exp(j\omega - p_k))} \quad (167)$$

Εάν εκφράσουμε τους μιγαδικούς παράγοντες της προηγούμενης σχέσης σε πολικές συντεταγμένες, θα λάβουμε

$$\exp(j\omega) - z_k = V_k(\omega) \exp(j\Theta_k(\omega)) \quad \text{και} \quad \exp(j\omega) - p_k = U_k(\omega) \exp(j\Phi_k(\omega))$$

όπου $V_k(\omega)$ και $U_k(\omega)$ είναι τα μέτρα των μιγαδικών ποσοτήτων $\exp(j\omega) - z_k$ και $\exp(j\omega) - p_k$, ενώ $\Theta_k(\omega)$ και $\Phi_k(\omega)$ είναι οι αντίστοιχες φάσεις. Αντικαθιστώντας τώρα αυτές τις νέες μορφές αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών $\exp(j\omega) - z_k$ και $\exp(j\omega) - p_k$ στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης $H(\omega)$, αυτή θα λάβει τη μορφή

$$H(\omega) = \beta_0 \exp(j\omega(N - M)) \frac{\prod_{k=1}^M V_k(\omega) \exp(j\Theta_k(\omega))}{\prod_{k=1}^N U_k(\omega) \exp(j\Phi_k(\omega))} \quad (168)$$

Επομένως το μέτρο της συνάρτησης συχνοτικής απόκρισης θα δίδεται από τη σχέση

$$|H(\omega)| = |\beta_0| \frac{V_1(\omega)V_2(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega) \dots U_N(\omega)} \quad \text{αφού είναι } |\exp(j\omega)(N - M)| = 1$$

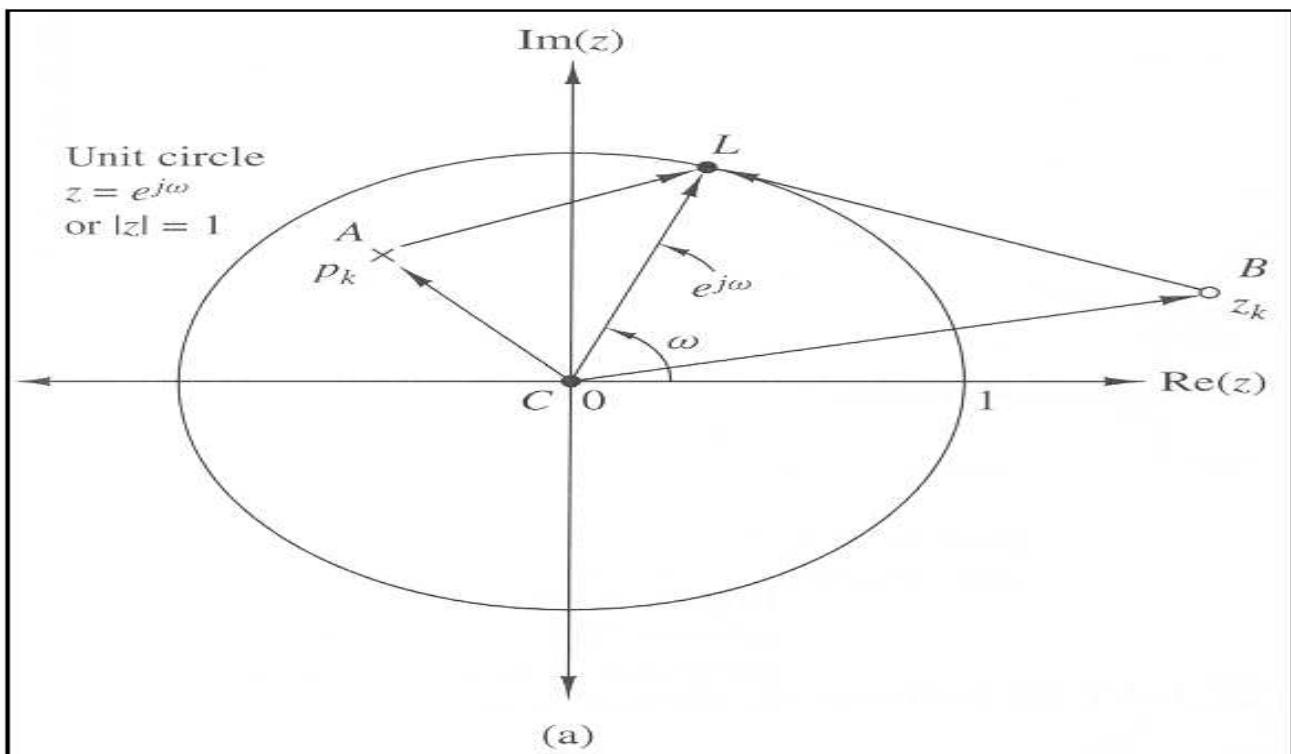
ενώ η αντίστοιχη φάση θα έχει τη μορφή

$$\text{Phase}(H(\omega)) = \text{Phase}(\beta_0) + \omega(N - M) + \Theta_1(\omega) + \Theta_2(\omega) + \dots + \Theta_M(\omega) - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \dots + \Phi_N(\omega)]$$

όπου $\text{Phase}(\beta_0)$ είναι η φάση της μιγαδικής ποσότητας β_0 - η γωνία αυτή μπορεί να λάβει μια από τις τιμές $\varphi = 0$ ή $\varphi = \pi$ ανάλογα με το εάν το β_0 παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές, πως εάν γνωρίζουμε τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης $H(z)$, μπορούμε με τον παραπάνω τρόπο να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση της συχνοτικής απόκρισης, $H(\omega)$. Σε μια εναλλακτική περιγραφή, μπορούμε να πούμε πως η διαμόρφωση της συνάρτησης $H(\omega)$ έτσι ώστε να διαθέτει τα επιθυμητά σε κάθε περίπτωση χαρακτηριστικά, μπορεί να λάβει χώρα δια της τοποθέτησης των πόλων και των μηδενικών τιμών της συνάρτησης $H(z)$, στις κατάλληλες θέσεις επί του μιγαδικού επιπέδου.

Οι ποσότητες που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις δύνανται να αναλυθούν δια της χρήσεως γεωμετρικών μεθόδων. Προκειμένου να παρουσιάσουμε αυτή την ανάλυση, ας θεωρήσουμε ένα πόλο p_k και μία μηδενική τιμή q_k που αντιστοιχούν στα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στα σχήματα 50 και 51. Ας υποθέσουμε τώρα πως επιθυμούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $H(\omega)$ για μια δεδομένη τιμή της συχνότητας ω . Αυτή η τιμή της συχνότητας καθορίζει τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης της ποσότητας $\exp(j\omega)$ με το θετικό πραγματικό άξονα. Η τομή αυτής της ευθείας με το μοναδιαίο κύκλο, ορίζει ένα σημείο L , και σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier για τη δεδομένη τιμή της συχνότητας ω , είναι ισοδύναμος με τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Z στο σημείο L του μοναδιαίου κύκλου.



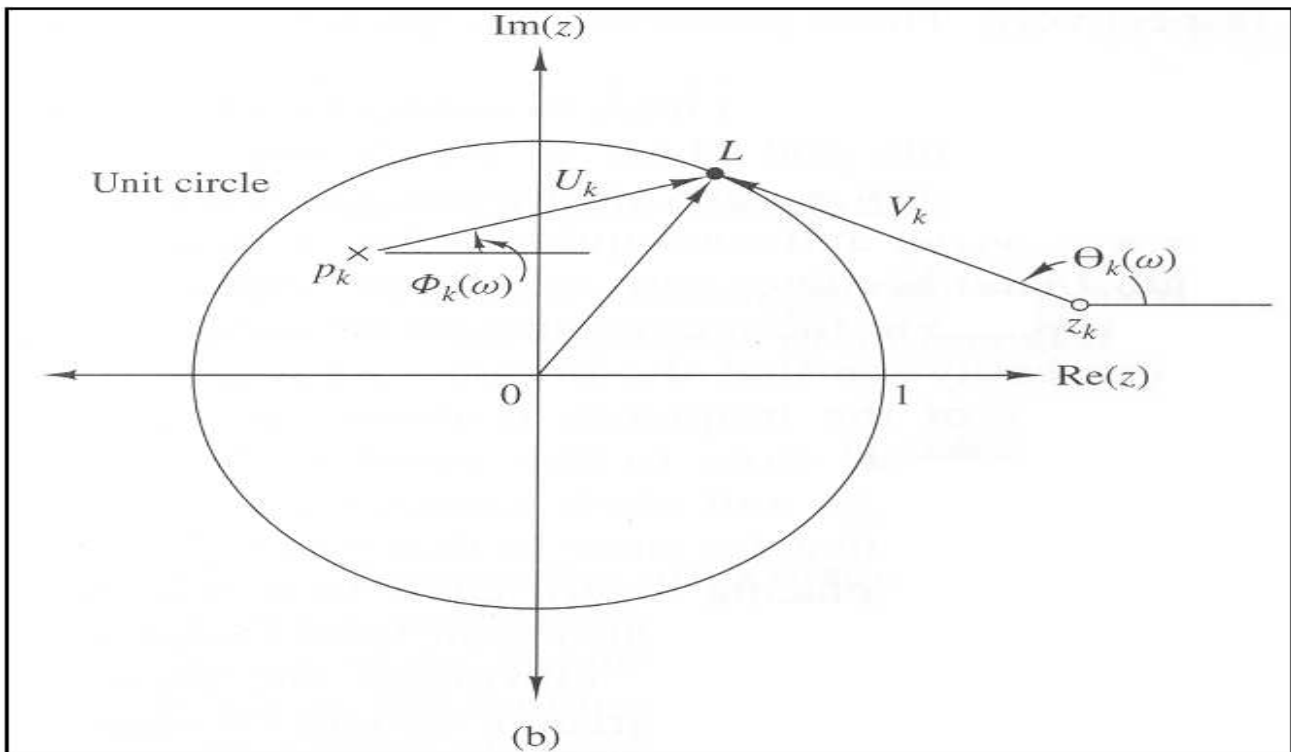
Σχήμα 50: Γεωμετρική αναπαράσταση της συνεισφοράς ενός πόλου και μιας μηδενικής τιμής στο μέτρο της συχνοτικής απόκρισης $H(\omega)$

Θεωρώντας τα διανύσματα \vec{AL} και \vec{BL} που ορίζονται ανάμεσα στις θέσεις του πόλου και της μηδενικής τιμής και του σημείου L , είναι προφανές πως αυτά θα συνδέονται μέσω των σχέσεων $\vec{CL} = \vec{CA} + \vec{AL}$ και $\vec{CL} = \vec{CB} + \vec{BL}$. Είναι όμως $\vec{CL} = \exp(j\omega)$, $\vec{CA} = p_k$ και $\vec{CB} = z_k$, και επομένως θα έχουμε $\vec{AL} = \exp(j\omega) - p_k = U_k(\omega)\exp(j\Phi_k(\omega))$ και $\vec{BL} = \exp(j\omega) - z_k = V_k(\omega)\exp(j\Theta_k(\omega))$.

Επομένως, η ποσότητα $U_k(\omega)$ είναι ίση με το μήκος του διανύσματος \vec{AL} που εκφράζει την απόσταση του πόλου p_k από το σημείο L του μοναδιαίου κύκλου (που αντιστοιχεί στην ποσότητα $\exp(j\omega)$), ενώ η ποσότητα $V_k(\omega)$ είναι η απόσταση της μηδενικής τιμής z_k , από το ίδιο σημείο. Όσον αφορά τις φάσεις $\Phi_k(\omega)$ και $\Theta_k(\omega)$, αυτές δεν είναι τίποτε άλλο από τις γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα \vec{AL} και \vec{BL} αντίστοιχα, με τον θετικό πραγματικό άξονα.

Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις αυτού του είδους είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, διότι συμβάλλουν στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών του συστήματος, επηρεάζουν το μέτρο

και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα πως ο πόλος p_k και η μηδενική τιμή z_k βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του μοναδιαίου κύκλου. Στην περίπτωση αυτή, και στη θέση της συχνότητας $\omega = \text{Phase}(z_k)$, η ποσότητα $V_k(\omega)$ - και επομένως και το μέτρο $|H(\omega)|$ - λαμβάνουν τιμή ίση με το μηδέν. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, στη θέση της συχνότητας $\omega = \text{Phase}(p_k)$, το μήκος $U_k(\omega)$ γίνεται ίσο με το μηδέν, και επομένως το μέτρο $|H(\omega)|$ απειρίζεται.



Σχήμα 51: Γεωμετρική αναπαράσταση της συνεισφοράς ενός πόλου και μιας μηδενικής τιμής στη φάση της συχνότητας απόκρισης $H(\omega)$

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές, πως η παρουσία μιας μηδενικής τιμής κοντά στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου οδηγεί σε μικρές τιμές του μέτρου της συνάρτησης $H(\omega)$ για εκείνες τις τιμές συχνότητων που αντιστοιχούν σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου που βρίσκονται κοντά στη μηδενική τιμή. Αντίθετα η παρουσία ενός πόλου κοντά στην επιφάνεια του μοναδιαίου κύκλου, οδηγεί σε πολύ μεγάλες τιμές του μέτρου $H(\omega)$. Επομένως η παρουσία των πόλων έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αντίθετων αποτελεσμάτων από εκείνα που συσχετίζονται με την παρουσία μηδενικών τιμών. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ένας πόλος που βρίσκεται κοντά σε μια μηδενική τιμή, έχει ως αποτέλεσμα την αμοιβαία εξουδετέρωση των αποτελεσμάτων που επιφέρουν.

26 Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, η επίδραση ενός ψηφιακού γραμμικού και αμετάβλητου ως προς το χρόνο συστήματος επί ενός σήματος εισόδου, έχει ως αποτέλεσμα την αποκοπή ορισμένων από τις συχνότητες που περιλαμβάνονται σε αυτό. Αυτή η διαδικασία του φιλτραρίσματος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης της συχνότητας απόκρισης $H(\omega)$, τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από τους συντελεστές α_k και β_k της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει το σύστημα και η οποία κατά τα γνωστά έχει τη μορφή

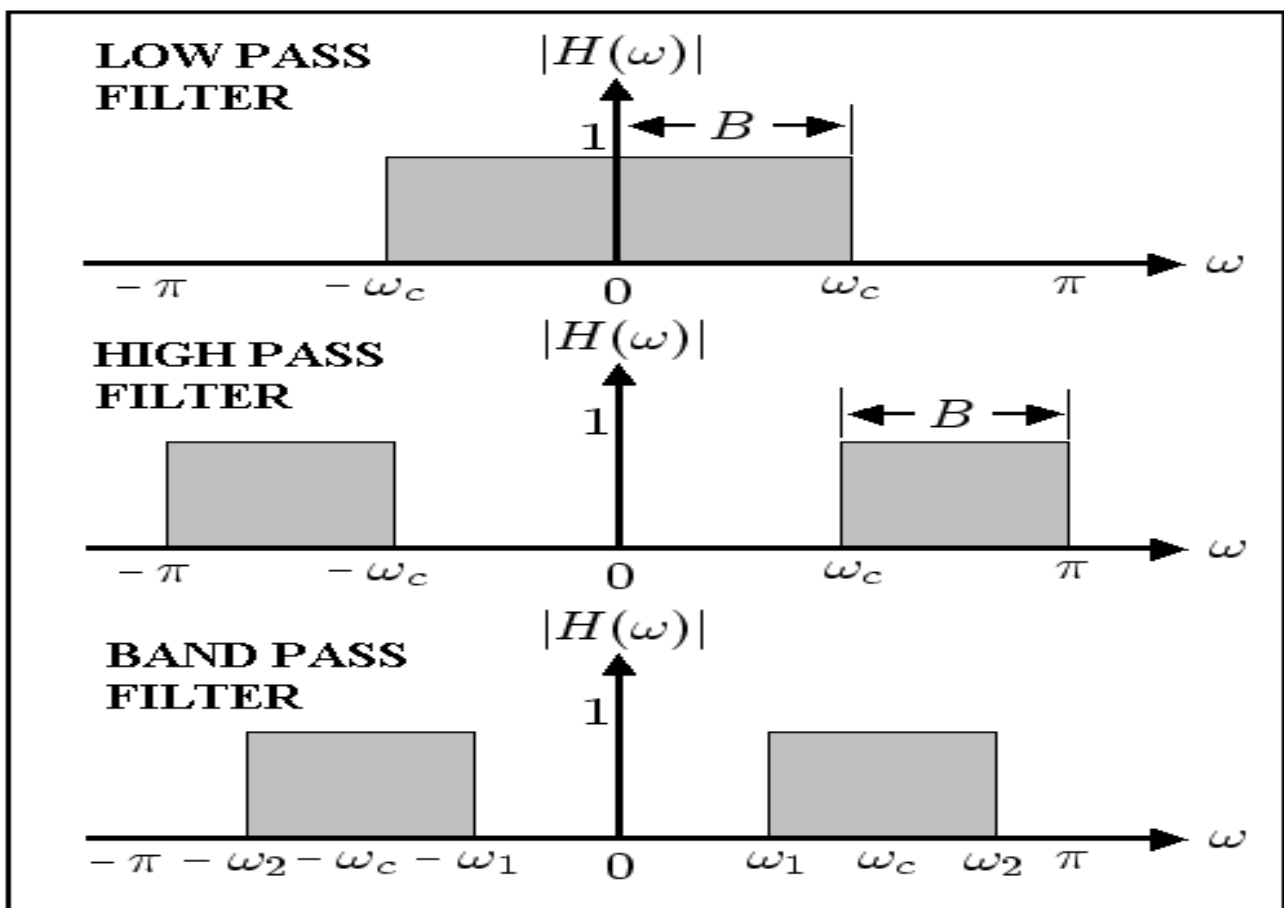
$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=1}^N \beta_k x(n-k) \quad (169)$$

Επομένως, με κατάλληλη επιλογή των εν λόγω συντελεστών μπορούμε να κατασκευάσουμε ψηφιακά φίλτρα που να αποκόπτουν την επιθυμητή σε κάθε περίπτωση περιοχή συχνοτήτων και να επιτρέπουν τη διέλευση σε κάποιες άλλες από αυτές.

Μιλώντας γενικά, ένα γραμμικό και αναλλοίωτο ως προς το χρόνο διακριτό σύστημα, τροποποιεί το φάσμα $X(\omega)$ του σήματος εισόδου και δημιουργεί ένα σήμα εξόδου το φάσμα του οποίου δίδεται από τη σχέση $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

όπου $H(\omega)$ είναι η συνάρτηση της συχνοτικής απόκρισης του συστήματος. Αυτό το είδος της επίδρασης του παραπάνω συστήματος επί ενός σήματος εισόδου - μαζί με πολλές άλλες διαφορετικές μορφές επεξεργασίας - μας επιτρέπει (όπως έχει ήδη αναφερθεί) να χαρακτηρίσουμε τα γραμμικά και αμετάβλητα ως προς το χρόνο συστήματα, ως φίλτρα (filters), που επιτρέπουν τη διέλευση της επιθυμητής σε κάθε περίπτωση περιοχής συχνοτήτων. Ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων που επιτρέπεται να διέλθουν από ένα φίλτρο, τα φίλτρα μπορούν να χωρισθούν στις εξής κατηγορίες: (α) στα χαμηλοπερατά φίλτρα (low pass filters) που επιτρέπουν τη διέλευση μόνο χαμηλών συχνοτήτων (δηλαδή συχνοτήτων με μικρές τιμές) (β) στα υψηλοπερατά φίλτρα (high pass filters) που επιτρέπουν τη διέλευση μόνο υψηλών συχνοτήτων (δηλαδή συχνοτήτων με μεγάλες τιμές) (γ) στα ζωνοπερατά φίλτρα (band pass filters) που επιτρέπουν τη διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνοτήτων (δ) στα band stop filters που επιτρέπουν τη διέλευση όλων των συχνοτήτων εκτός από τις συχνότητες μιας συγκεκριμένης περιοχής τις οποίες και απομακρύνουν από το σήμα εισόδου και (ε) τα all-pass filters που επιτρέπουν τη διέλευση όλων των συχνοτήτων.

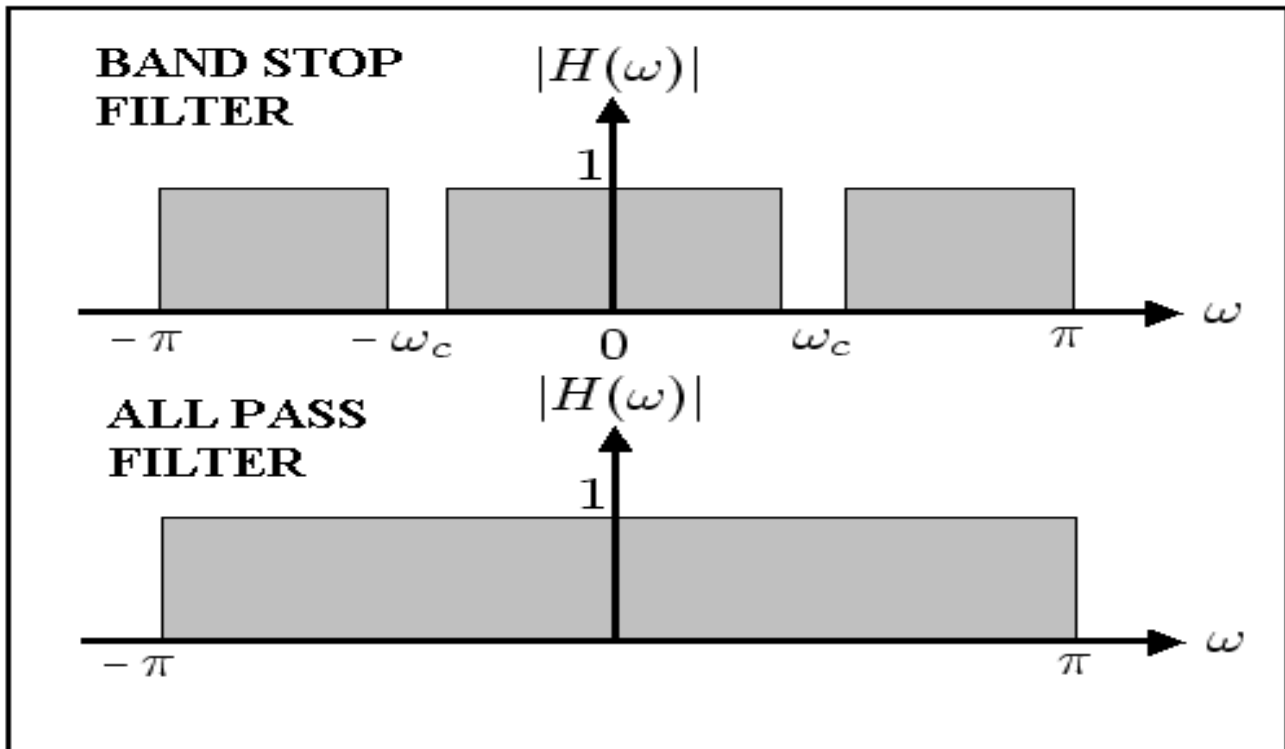
Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία ψηφιακών φίλτρων τα οποία εν τούτοις έχουν μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον καθώς δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν στην πράξη, είναι τα ιδανικά φίλτρα (filters). Τα φίλτρα αυτά χαρακτηρίζονται από δύο σημαντικές ιδιότητες: (α) η απόκριση πλάτους τους χαρακτηρίζεται από απότομο μηδενισμό της τιμής του πλάτους του σήματος εισόδου στις θέσεις των συχνοτήτων αποκοπής και (β) η φασική τους απόκριση είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας ω του σήματος εισόδου. Η απόκριση πλάτους ενός ιδανικού φίλτρου για κάθε μία από τις πέντε κατηγορίες φίλτρων που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζεται στα σχήματα 52 και 53.



Σχήμα 52: Απόκριση πλάτους ιδανικού φίλτρου για την περίπτωση χαμηλοπερατών, υψηλοπερατών και ζωνοπερατών φίλτρων

Προκειμένου να κατανοήσουμε την έννοια της γραμμικής φασικής απόκρισης (linear phase response) ας θεωρήσουμε ένα σήμα εισόδου $x(n)$ με συχνότητα στο διάστημα $\omega_1 < \omega < \omega_2$ το οποίο διέρχεται από ένα ψηφιακό φίλτρο με συχνοτική απόκριση

$$H(\omega) = \begin{cases} C \exp(-j\omega n_0) & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{οποδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (170)$$



Σχήμα 53: Απόκριση πλάτους ιδανικού φίλτρου για την περίπτωση band-stop και all-pass φίλτρων

όπου C και n_0 σταθερές. Στην περίπτωση αυτή το φάσμα του σήματος εξόδου θα έχει τη μορφή

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = CX(\omega)\exp(-j\omega n_0) \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (171)$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της κλιμάκωσης και της γραμμικής μετατόπισης που χαρακτηρίζουν το μετασχηματισμό Fourier, μπορούμε να γράψουμε την έξοδο του συστήματος στο πεδίο του χρόνου με τη μορφή $y(n) = Cx(n - n_0)$. Επομένως η έξοδος του συστήματος, είναι μια τροποποιημένη έκδοση του σήματος εισόδου που χαρακτηρίζεται από χρονική υστέρηση και ενίσχυση ή εξασθένιση του πλάτους του (ανάλογα με την τιμή της σταθεράς C) σε σχέση με το αρχικό σήμα. Αυτές όμως οι μεταβολές δεν παραμορφώνουν το σήμα. Επομένως τα ιδανικά φίλτρα θα χαρακτηρίζονται από μια γραμμική φασική χαρακτηριστική καμπύλη που θα περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $\Theta(\omega) = -\omega n_0$.

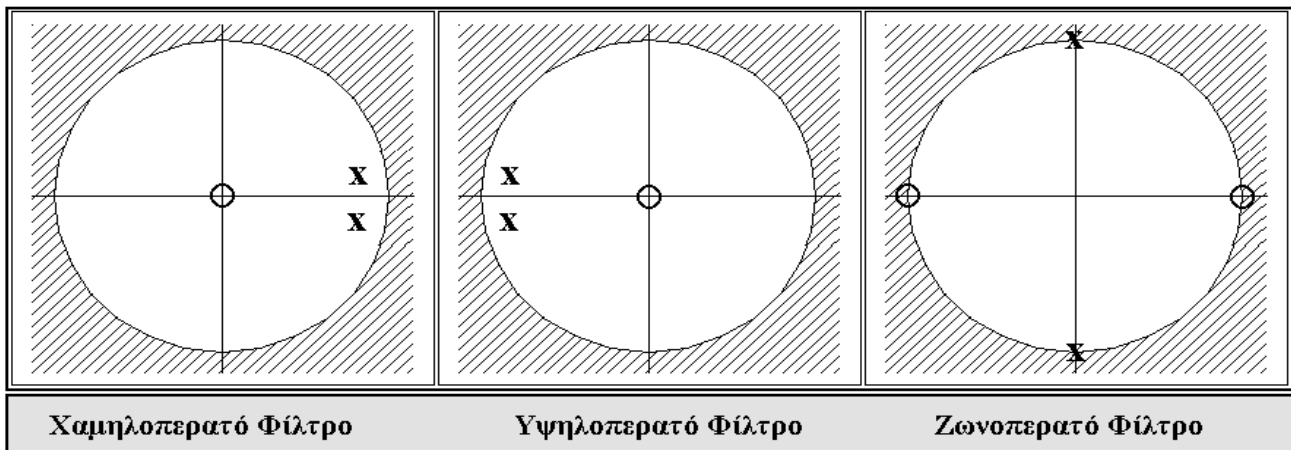
Η παράγωγος της φάσης $\Theta(\omega)$ ως προς τη συχνότητα ω είναι εκπεφρασμένη σε μονάδες χρονικής υστέρησης. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την καθυστέρηση του σήματος ως συνάρτηση της συχνότητας, δια μέσου μιας σχέσης της μορφής

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} \quad (172)$$

Το μέγεθος $\tau_g(\omega)$ που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση είναι γνωστό ως καθυστέρηση ομάδας (group delay) του φίλτρου. Το μέγεθος αυτό ερμηνεύεται ως η χρονική υστέρηση που υφίσταται η κάθε απλή αρμονική συνιστώσα του σήματος εισόδου λόγω της διέλευσής της από το ψηφιακό φίλτρο. Εφ' όσον η φασική απόκριση $\Theta(\omega)$ είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας ω , είναι προφανές, πως η καθυστέρηση ομάδας θα δίδεται από τη σχέση $\tau_g(\omega) = n_0 = \text{constant}$. Παρατηρούμε πως η εν λόγω καθυστέρηση είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα ω κάτι που σημαίνει πως όλα τα σήματα υφίστανται την ίδια καθυστέρηση από ένα ψηφιακό φίλτρο, ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους.

Ιδιαίτερο ρόλο στην κατασκευή ενός ψηφιακού φίλτρου, παίζουν οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών τιμών του φίλτρου επί του μιγαδικού επιπέδου. Σε γενικές γραμμές, οι πόλοι του συστήματος θα πρέπει να τοποθετηθούν κοντά στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχούν στις επιθυμητές σε κάθε περίπτωση τιμές συχνοτήτων, ενώ οι μηδενικές τιμές θα πρέπει να τοποθετηθούν κοντά στις λιγότερο σημαντικές συχνοότητες. Εκτός από τους παραπάνω κανόνες, θα πρέπει να επιβληθούν και οι δύο ακόλουθοι περιορισμοί:

- Όλοι οι πόλοι θα πρέπει να τοποθετηθούν στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, προκειμένου το φίλτρο να είναι ευσταθές. Ωστόσο οι μηδενικές τιμές μπορούν να τοποθετηθούν οποδήποτε πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 54: Τυπικές θέσεις πόλων και μηδενικών τιμών επί του μιγαδικού επιπέδου για την περίπτωση χαμηλοπερατού, υψηλοπερατού και ζωνοπερατού φίλτρου

- Σε περίπτωση κατά την οποία το σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μιγαδικών πόλων και μηδενικών τιμών, αυτά θα πρέπει να εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών ποσοτήτων, έτσι ώστε οι συντελεστές του φίλτρου να είναι πραγματικοί αριθμοί.

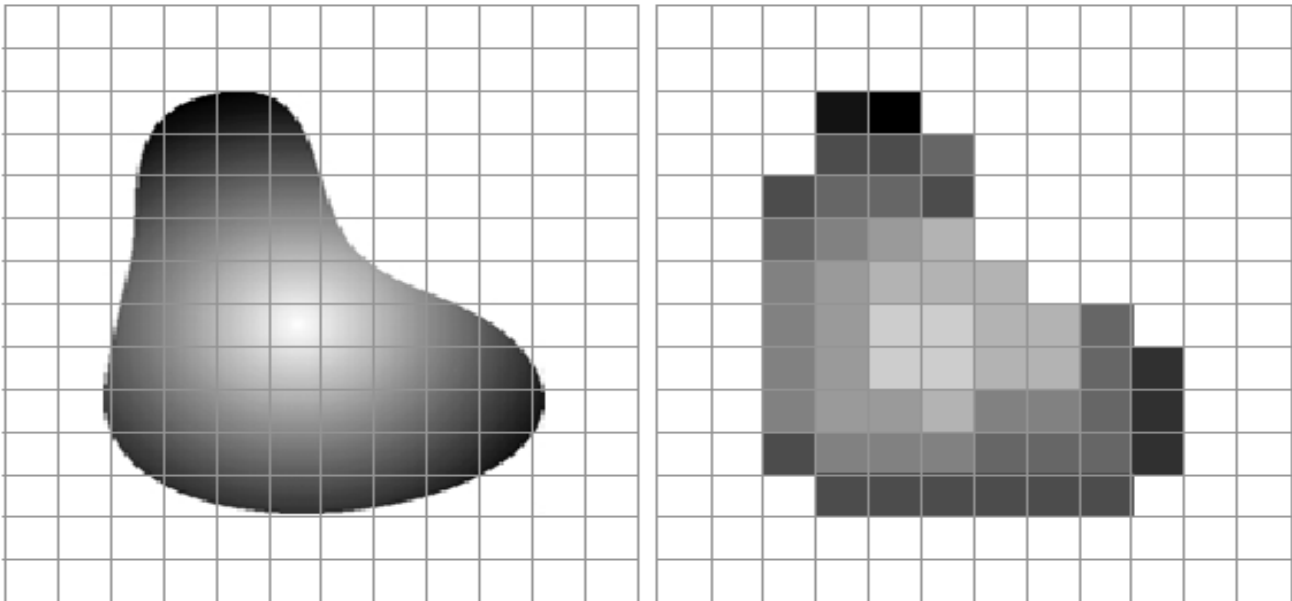
Στην περίπτωση των χαμηλοπερατών ψηφιακών φίλτρων, οι πόλοι θα πρέπει να τοποθετηθούν κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και σε σημεία που αντιστοιχούν σε χαμηλές συχνότητες (βρίσκονται δηλαδή κοντά στη συχνότητα $\omega = 0$). Από την άλλη πλευρά, οι μηδενικές τιμές θα πρέπει να τοποθετηθούν κοντά ή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και σε σημεία που αντιστοιχούν σε υψηλές συχνότητες (και πιο συγκεκριμένα κοντά στη συχνότητα $\omega = \pi$). Το αντίθετο ισχύει για την περίπτωση των υψηλοπερατών φίλτρων. Τέλος, στην περίπτωση των ζωνοπερατών φίλτρων, θα πρέπει να υφίστανται ένα ή περισσότερα ζεύγη συζυγών μιγαδικών πόλων, οι οποίοι να βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και στη γειτονιά των δύο συχνοτήτων που ορίζουν τη ζώνη συχνοτήτων η οποία επιτρέπεται να διέλθει από το φίλτρο. Παραδείγματα διαγραμμάτων πόλων - μηδενικών τιμών για τυπικές περιπτώσεις χαμηλοπερατών, υψηλοπερατών και ζωνοπερατών φίλτρων, παρουσιάζονται στο σχήμα 54.

27 Τα βασικά χαρακτηριστικά των ψηφιακών εικόνων

Μια εικόνα μπορεί να οριστεί ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ όπου οι μεταβλητές x και y θεωρούνται ως συντεταγμένες ορισμένες επί του επιπέδου R^2 , ενώ το πλάτος της συνάρτησης f για κάθε ζεύγος συντεταγμένων (x, y) ονομάζεται ένταση (intensity) ή επίπεδο του γκρι (gray level) της εικόνας σε εκείνο το σημείο. Στην περίπτωση κατά την οποία οι συντεταγμένες x και y και το πλάτος f λαμβάνουν πεπερασμένες και διακριτές τιμές, η εικόνα μας ονομάζεται ψηφιακή (digital image) και η επεξεργασία της από ένα υπολογιστή χαρακτηρίζεται ως ψηφιακή επεξεργασία εικόνας (digital image processing). Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή, η ψηφιακή εικόνα περιγράφεται από ένα πλήθος στοιχειωδών δομικών μονάδων, οι οποίες είναι γνωστές ως εικονοστοιχεία (pixels).

Σε πλήρη αναλογία με τη θεωρία των μονοδιάστατων σημάτων που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, η δημιουργία μιας ψηφιακής εικόνας μπορεί να οριστεί ως μια ακολουθία τριών διακριτών διεργασιών. Η πρώτη διεργασία περιλαμβάνει την καταγραφή της εικόνας (image acquisition) η οποία λαμβάνει χώρα δια της χρήσης του κατάλληλου αισθητήρα (sensor). Αυτός ορίζεται ως μια ειδική διάταξη η οποία έχει τη δυνατότητα να καταγράφει στιγμιότυπα του πραγματικού κόσμου (δηλαδή σκηνές και παραστάσεις) και να τα μετατρέπει στην κατάλληλη μορφή. Δεδομένου πως όλα τα ερεθίσματα στη φύση μεταδίδονται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (τα οποία ως σημειωθεί πως δεν είναι υποχρεωτικό να περιορίζονται μόνο στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος), οι αισθητήρες αυτού του τύπου είναι έτσι κατασκευασμένοι ώστε να καταγράφουν την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που προσπίπτει στην επιφάνειά τους και στη συνέχεια να τη μετατρέπουν σε ηλεκτρική τάση η οποία διαβιβάζεται στην έξοδο του αισθητήρα. Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις, αυτή η μετατροπή γίνεται με τη βοήθεια μιας φωτοδιόδου (photodiode), γεγονός που καθιστά το πλάτος της παραγόμενης ηλεκτρικής τάσης, ανάλογο της προσπίπτουσας ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας.

Η παραγόμενη κυματομορφή που προκύπτει με τον τρόπο αυτό, χαρακτηρίζεται από αναλογικά (δηλαδή συνεχή) χαρακτηριστικά, τόσο ως προς τις συντεταγμένες x και y των στοιχείων της εικόνας, όσο και ως προς την ένταση f της εικόνας σε κάθε σημείο της. Προκειμένου να λάβουμε μια ψηφιακή εικόνα, θα πρέπει κατά τα γνωστά να εφαρμόσουμε τις διαδικασίες της δειγματοληψίας (sampling) και του κβαντισμού (quantization), τόσο στις



Σχήμα 55: Προεπισκόπηση τυπικής εικόνας πριν και μετά τις διαδικασίες της δειγματοληψίας και του χβαντισμού

συντεταγμένες των στοιχείων της εικόνας όσο και στην ένταση f σε αυτά. Η διαδικασία που εφαρμόζουμε είναι αυτή που περιγράψαμε στη θεωρία των ψηφιακών σημάτων, με τη διαφορά ότι τώρα θα πραγματοποιηθεί και προς τις δύο διαστάσεις, ενώ επιπλέον θα εφαρμοσθεί και στην ένταση της εικόνας στο κάθε σημείο της. Οι διαφορετικές μορφές μιας εικόνας πριν και μετά τις διαδικασίες της δειγματοληψίας και του χβαντισμού, παρουσιάζονται στο σχήμα 55.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές πως το αποτέλεσμα των διαδικασιών της δειγματοληψίας και του χβαντισμού είναι ένας διδιάστατος πίνακας πραγματικών αριθμών. Εάν οι διαστάσεις της ψηφιακής εικόνας που θα προκύψει είναι $M \times N$ τότε ο πίνακας αυτός θα έχει M γραμμές και N στήλες. Επομένως, η μαθηματική αναπαράσταση μιας ψηφιακής εικόνας, θα είναι ένας πίνακας δυο διαστάσεων της μορφής

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (173)$$

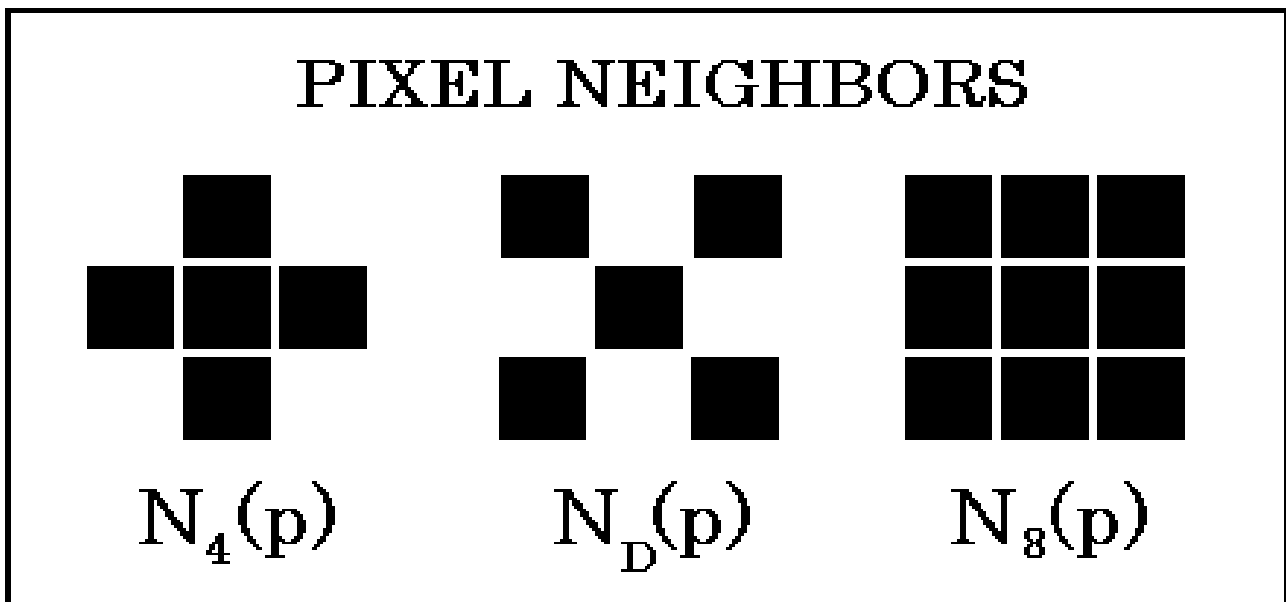
ή σε πιο συμπαγή μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{M-1,0} & \alpha_{M-1,1} & \dots & \alpha_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (174)$$

όπου είναι προφανές ότι $\alpha_{i,j} = f(x=i, y=j) = f(i, j)$. Το κάθε ένα από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα ονομάζεται εικονοστοιχείο (pixel) με την ποσότητα $\alpha_{i,j}$ $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ να αναπαριστά την ένταση της εικόνας (ή την τιμή του επιπέδου του γκρι) που αντιστοιχεί σε αυτό το εικονοστοιχείο.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως οι τιμές των διαστάσεων M και N και του πλήθους των επιπέδων του γκρι L που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας και του χβαντισμού, εξαρτάται από τις ανάγκες που υφίστανται σε κάθε περίπτωση. Μιλώντας γενικά, οι τιμές των παραμέτρων M και N δεν υφίστανται κανένα περιορισμό, πέρα από το γεγονός πως θα πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Όσον αφορά το πλήθος των επιπέδων του γκρι, αυτό - για λόγους που συσχετίζονται με τη διαδικασία της δειγματοληψίας και τα χαρακτηριστικά του εξοπλισμού με τον οποίο αυτή πραγματοποιείται - θα πρέπει να είναι δύναμη του 2, και επομένως να έχει τη μορφή $L = 2^k$ όπου η ακέραια θετική ποσότητα k εκφράζει το πλήθος των bits με τα οποία κωδικοποιείται η τιμή της έντασης της εικόνας για το κάθε εικονοστοιχείο. Επομένως το πλήθος των bits που απαιτείται για την αποθήκευση της ψηφιακής εικόνας στο σύνολό της, θα δίδεται από τη σχέση $b = M \times N \times K$.

Η οργάνωση των εικονοστοιχείων μιας ψηφιακής εικόνας σε μορφή διδιάστατου πλέγματος, μας επιτρέπει να ορίσουμε μερικά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά που περιγράφουν τις συσχετίσεις ανάμεσα σε αυτά τα εικονοστοιχεία.



Σχήμα 56: Οι τρεις γειτονίες $N_4(p)$, $N_D(p)$ και $N_8(p)$ που ορίζονται για το κάθε εικονοστοιχείο μιας ψηφιακής εικόνας.

Η πιο χρήσιμη από αυτές τις ιδιότητες είναι αυτή που αναφέρεται στα γειτονικά pixels μιας εικόνας. Θεωρώντας ένα εικονοστοιχείο p με συντεταγμένες (x, y) , αυτό χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο οριζόντιων γειτόνων - με συντεταγμένες $(x-1, y)$ και $(x+1, y)$ - δύο κατακόρυφων γειτόνων - με συντεταγμένες $(x, y-1)$ και $(x, y+1)$ - και τεσσάρων διαγώνιων γειτόνων - με συντεταγμένες $(x+1, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x-1, y+1)$ και $(x-1, y-1)$. Το σύνολο των οριζόντιων και των κατακόρυφων γειτόνων του κάθε εικονοστοιχείου, συχνά συμβολίζεται ως $N_4(p)$, ενώ για το σύνολο των διαγώνιων γειτόνων του, χρησιμοποιείται το σύμβολο $N_D(p)$. Πολύ συχνά επίσης, τα οκτώ αυτά εικονοστοιχεία που συνιστούν τις γειτονίες $N_4(p)$ και $N_D(p)$ θεωρούνται ως μια ενιαία γειτονιά που περιγράφεται από το σύμβολο $N_8(p)$. Οι τρεις αυτές διαφορετικές γειτονίες που μπορούμε να ορίσουμε για το κάθε εικονοστοιχείο, παρουσιάζονται στο σχήμα 56.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της γειτονιάς που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να ορίσουμε κάποιες θεμελιώδεις έννοιες που συναντώνται συχνά στους διάφορους αλγόριθμους επεξεργασίας εικόνας. Η πρώτη από αυτές τις έννοιες είναι η έννοια της συνδετικότητας (connectivity). Δύο εικονοστοιχεία θα λέμε ότι συνδέονται μεταξύ τους, όταν ανήκουν στην ίδια γειτονιά (σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως) και επιπλέον οι τιμές της έντασης της εικόνας σε αυτά, ικανοποιεί κάποιο κριτήριο ομοιότητας (είναι για παράδειγμα ίσες μεταξύ τους). Θεωρώντας για παράδειγμα μια ασπρόμαυρη εικόνα με μόνο δύο τιμές έντασης (την τιμή 0 και την τιμή 1), θα λέμε ότι δύο εικονοστοιχεία p και q συνδέονται μεταξύ τους, όταν το q ανήκει στη γειτονιά $N_4(p)$ και επιπλέον τα δύο εικονοστοιχεία χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή έντασης.

Από την άλλη πλευρά, εάν η εικόνα χαρακτηρίζεται από περισσότερα χρώματα, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της γειτονικότητας (adjacency) ανάμεσα σε δύο εικονοστοιχεία. Έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ το σύνολο των επιπέδων του γκρι που χρησιμοποιούνται για το χρωματισμό των pixels της εικόνας. Στην περίπτωση αυτή δυο εικονοστοιχεία θα χαρακτηρίζονται ως γειτονικά όταν ανήκουν σε κάποια από τις γειτονίες που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, και επιπλέον οι τιμές της έντασης της εικόνας σε αυτά, αποτελεί στοιχείο του συνόλου V . Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε τρεις τύπους γειτονικότητας:

- 4-adjacency: δυο εικονοστοιχεία p και q με τιμές έντασης από το σύνολο V θα λέμε ότι είναι 4-adjacent όταν το q ανήκει στη γειτονιά $N_4(p)$.
- 8-adjacency: δυο εικονοστοιχεία p και q με τιμές έντασης από το σύνολο V θα λέμε ότι είναι 8-adjacent όταν το q ανήκει στη γειτονιά $N_8(p)$.
- m-adjacency: δυο εικονοστοιχεία p και q με τιμές έντασης από το σύνολο V θα λέμε ότι είναι m-adjacent όταν το q ανήκει στη γειτονιά $N_4(p)$, ή εναλλακτικά, όταν το q ανήκει στη γειτονιά $N_D(p)$ και επιπλέον το σύνολο $N_4(p) \cap N_4(q)$ δεν περιέχει εικονοστοιχεία των οποίων η ένταση να είναι τιμή του συνόλου V .

Μετά τον ορισμό της γειτονικότητας (adjacency) ανάμεσα σε δύο εικονοστοιχεία, μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της διαδρομής ανάμεσα στα εικονοστοιχεία μιας εικόνας. Θεωρώντας δύο εικονοστοιχεία p και q με

συντεταγμένες (x, y) και (s, t) αντίστοιχα, ορίζουμε τη διαδρομή (path) ανάμεσά τους, ως το σύνολο των διακριτών εικονοστοιχείων με συντεταγμένες $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, τέτοια ώστε για το πρώτο και το τελευταίο εικονοστοιχείο να ισχύουν οι σχέσεις $(x_0, y_0) = (x, y)$ και $(x_n, y_n) = (s, t)$, ενώ για δύο οποιοδήποτε ενδιάμεσα εικονοστοιχεία (x_i, y_i) και (x_{i-1}, y_{i-1}) ($1 \leq i \leq n$) θα πρέπει να ισχύει η ιδιότητα της γειτονικότητας. Είναι προφανές πως εφόσον έχουμε τρία είδη γειτονικότητας ανάμεσα σε δύο εικονοστοιχεία, θα υπάρχουν και τρεις αντίστοιχες κατηγορίες διαδρομών. Εάν οι συντεταγμένες των εικονοστοιχείων είναι τέτοιες ώστε $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ η διαδρομή ανάμεσα σε αυτά χαρακτηρίζεται ως κλειστή διαδρομή (closed path) καθώς ταυτίζονται τα δύο άκρα της.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνουμε τη συνοπτική μας περιγραφή στα βασικά χαρακτηριστικά των ψηφιακών εικόνων, με τον ορισμό της απόστασης ανάμεσα σε δύο εικονοστοιχεία. Μιλώντας γενικά, εάν θεωρήσουμε τρία εικονοστοιχεία p, q και z με συντεταγμένες $(x, y), (s, t)$ και (u, w) αντίστοιχα, η συνάρτηση D λέμε ότι χαρακτηρίζεται από μετρική (metric) και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει αποστάσεις, εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) $D(p, q) \geq 0$ (και ειδικότερα $D(p, q) = 0$ εάν $p = q$) (β) $D(p, q) = D(q, p)$ και (γ) $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές αποστάσεις που μπορούμε να ορίσουμε ανάμεσα στα εικονοστοιχεία μιας εικόνας:

- Η Ευκλείδεια απόσταση (Euclidean distance) μεταξύ των σημείων p και q που δίδεται από τη σχέση

$$D_e(p, q) = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2} \quad (175)$$

Στην περίπτωση αυτή, όλα τα εικονοστοιχεία που απέχουν από το p απόσταση μικρότερη ή ίση από κάποια προκαθορισμένη απόσταση r , ανήκουν σε ένα δίσκο με ακτίνα r και κέντρο τις συντεταγμένες (x, y) του εικονοστοιχείου p .

- Η απόσταση D_4 ανάμεσα στα εικονοστοιχεία p και q που δίδεται από τη σχέση

$$D_4(p, q) = |x-s| + |y-t| \quad (176)$$

Στην περίπτωση αυτή, όλα τα εικονοστοιχεία που απέχουν από το p απόσταση μικρότερη ή ίση από κάποια προκαθορισμένη απόσταση r , σχηματίζουν ένα ρόμβο που έχει ως κέντρο τις συντεταγμένες (x, y) του εικονοστοιχείου p . Είναι προφανές, πως τα εικονοστοιχεία για τα οποία ισχύει η σχέση $r = 1$, δεν είναι παρά τα τέσσερα σημεία που αποτελούν τη γειτονιά $N_4(p)$ του εικονοστοιχείου p .

- Η απόσταση D_8 ανάμεσα στα εικονοστοιχεία p και q που δίδεται από τη σχέση

$$D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|) \quad (177)$$

Στην περίπτωση αυτή, όλα τα εικονοστοιχεία που απέχουν από το p απόσταση μικρότερη ή ίση από κάποια προκαθορισμένη απόσταση r , σχηματίζουν ένα τετράγωνο που έχει κέντρο τις συντεταγμένες (x, y) του εικονοστοιχείου p . Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως τα εικονοστοιχεία για τα οποία ισχύει η σχέση $r = 1$, δεν είναι παρά τα οκτώ σημεία που αποτελούν τη γειτονιά $N_8(p)$ του εικονοστοιχείου p .

28 Τα βασικά στάδια της επεξεργασίας εικόνας

Από τα όσα έχουν αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες είναι προφανές πως η ψηφιακή επεξεργασία μιας εικόνας είναι γενικά μια πολύπλοκη διαδικασία. Για το λόγο αυτό δεν πραγματοποιείται σε ένα και μόνο βήμα, αλλά υποδιαιρείται σε μια σειρά από επιμέρους διαδικασίες κάθε μια εκ των οποίων πραγματοποιείται ξεχωριστά και εφαρμόζει πάνω στην εικόνα τους δικούς της αλγόριθμους επεξεργασίας και τις δικές της τεχνικές. Σε μια συνοπτική περιγραφή, τα βασικά στάδια της ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας, σε γενικές γραμμές είναι τα ακόλουθα:

- Καταγραφή εικόνας (image acquisition): στο πρώτο αυτό βήμα της διαδικασίας λαμβάνει χώρα η καταγραφή της εικόνας ως ένα απλό στιγμιότυπο του πραγματικού κόσμου χρησιμοποιώντας την κατάλληλη διαδικασία καταγραφής. Στις πιο πολλές περιπτώσεις η καταγραφή μιας εικόνας συνοδεύεται και από επιπρόσθετες μορφές επεξεργασίας, όπως είναι για παράδειγμα η μεταβολή του μεγέθους (scaling) της καταγεγραμμένης εικόνας.
- Δειγματοληψία, χβαντισμός και συμπίεση (sampling, quantization, and compression): στο στάδιο αυτό η καταγεγραμμένη εικόνα που ευρίσκεται σε αναλογική μορφή μετατρέπεται σε ψηφιακή, δια της απόδοσης στις συντεταγμένες των εικονοστοιχείων και στα δεδομένα που συσχετίζονται με αυτά, ασυνεχών και διακριτών τιμών. Εάν το μέγεθος της εικόνας που προκύπτει από αυτή την διαδικασία είναι αρκετά μεγάλο, λαμβάνει χώρα συμπίεση της εικόνας, προκειμένου να ελαττωθεί το μέγεθός της. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας κάποιον από τους πολλούς αλγόριθμους συμπίεσης που είναι διαθέσιμοι, με τον πιο χαρακτηριστικό από αυτούς, να είναι ο αλγόριθμος JPEG.

- **Ενίσχυση και αποκατάσταση (enhancement and restoration):** το στάδιο αυτό περιλαμβάνει μεθόδους επεξεργασίας οι οποίες επιτρέπουν τη βελτίωση της ποιότητας της εικόνας με στόχο να αναδειχθούν τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά που συσχετίζονται με αυτή. Μια τυπική μορφή επεξεργασίας που λαμβάνει χώρα σε αυτό το στάδιο, είναι η αύξηση της ευκρίνειας της εικόνας που δημιουργεί μια εικόνα πιο καθαρή. Από την άλλη πλευρά, η αποκατάσταση μιας εικόνας είναι μια παρόμοια τεχνική που έχει ως στόχο να βελτιώσει το περιεχόμενο της εικόνας σε περιπτώσεις κατά τις οποίες αυτό περιέχει ελαττωματικές περιοχές που περιέχουν ασαφή χαρακτηριστικά.
- **Κατάτμηση (segmentation):** στο στάδιο της κατάτμησης η εικόνα αποσυντίθεται στις δομικές μονάδες και γενικότερα, στα αντικείμενα από τα οποία έχει δημιουργηθεί. Αυτό το στάδιο δεν πραγματοποιείται πάντα αλλά μόνο όταν είναι αναγκαίο και θεωρείται ως ένα από τα δυσκολότερα στάδια στο γενικότερο πλαίσιο της ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας.
- **Εξαγωγή χαρακτηριστικών (feature extraction):** το αποτέλεσμα της εφαρμογής των αλγορίθμων που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, δεν είναι μια νέα εικόνα, αλλά ένα σύνολο χαρακτηριστικών ιδιοτήτων που συσχετίζονται με την τρέχουσα εικόνα. Χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τέτοιου είδους διαδικασίες μπορούμε να ανακτήσουμε το ιστόγραμμα που εμφανίζει το ποσοστό χρήσης του κάθε χρώματος σε αυτή, τους συντελεστές Fourier της εικόνας όπως αυτοί υπολογίζονται κάτω από την εφαρμογή του ομώνυμου μετασχηματισμού, και άλλες παρόμοιες παραμέτρους.
- **Αναγνώριση εικόνας (image recognition):** η διαδικασία αυτή επιτρέπει την αναγνώριση των τμημάτων μιας εικόνας με κριτήριο ορισμένα χαρακτηριστικά που συσχετίζονται με αυτά. Η πιο χαρακτηριστική από τις εφαρμογές που ανήκουν στην κατηγορία αυτή είναι η αναγνώριση προσώπων (face recognition) που τα τελευταία χρόνια έχει γνωρίσει μεγάλη άνθηση και βρίσκει πάρα πολλές εφαρμογές.
- **Ερμηνεία εικόνας (image interpretation):** οι διαδικασίες που ανήκουν στην κατηγορία αυτή προσπαθούν να αποδώσουν κάποιο νόημα στα αντικείμενα που έχουν αναγνωρισθεί κατά το προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας.

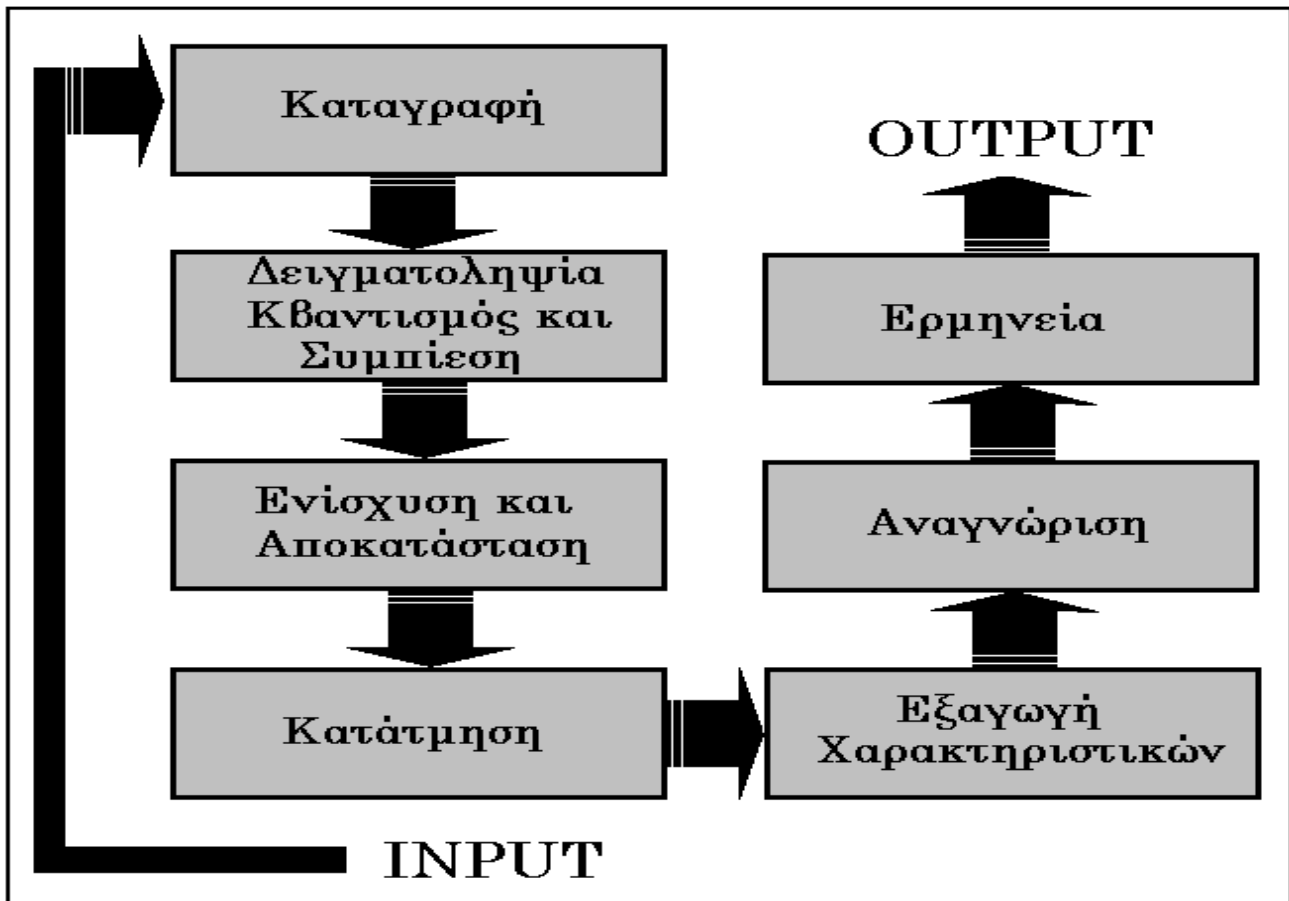
Τα βασικά στάδια επεξεργασίας μιας ψηφιακής εικόνας παρουσιάζονται στο σχήμα 57.

29 Η δομή των αρχείων BMP

Στις σελίδες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε αλγορίθμους επεξεργασίας εικόνας χρησιμοποιώντας ως πρότυπο για τα αρχεία εικόνας το πρότυπο BMP που θεωρείται ως ένα από τα πιο διαδεδομένα πρότυπα εικόνας. Όπως όλα τα αρχεία αυτού του είδους, τα αρχεία BMP χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη δομή και οργάνωση, η οποία σε γενικές γραμμές είναι η εξής: στο πρώτο μέρος του αρχείου υπάρχει μια κεφαλίδα (header) η οποία περιέχει πληροφορίες για τον τύπο και το μέγεθος της εικόνας. Ακολουθεί μια δεύτερη κεφαλίδα που κρατά πληροφορίες για τις διαστάσεις και τα χρώματα της εικόνας, και τέλος ακολουθούν τα δεδομένα της εικόνας.

Η δήλωση της πρώτης κεφαλίδας του αρχείου BMP παρουσιάζεται στη συνέχεια. Αποτελείται από έξι πεδία, τα δύο εκ των οποίων (και πιο συγκεκριμένα τα `bfReserved1` και `bfReserved2`) δεν χρησιμοποιούνται (καθώς έχουν δεσμευτεί για μελλοντική χρήση) και έχουν πάντα την τιμή μηδέν. Το πεδίο `bfType` περιέχει πάντα την τιμή *BM* (από τη λέξη **BitMap**) και χρησιμοποιείται για να ταυτοποιήσει ένα αρχείο εικόνας ως αρχείο BMP ή όχι: η ανάγνωση μιας τιμής για αυτό το πεδίο διαφορετική από την *BM*, σημαίνει πως το αρχείο εικόνας που διαβάζουμε δεν είναι αρχείο BMP (σημείωση: η συμβολοσειρά *BM* αντιστοιχεί στον αριθμό 19778. Αυτός ο αριθμός στο δυαδικό σύστημα είναι ο 0100110101000010 που αποτελείται από τα bytes 01001101 και 01000010. Τα δύο αυτά bytes στο δεκαδικό σύστημα είναι οι αριθμοί 77 και 66 που αντιστοιχούν στους ASCII κωδικούς των γραμμάτων *M* και *B* τα οποία αποθηκεύονται ανάποδα). Το πεδίο `bfSize` περιέχει το μέγεθος του αρχείου BMP (αυτό που φαίνεται χρησιμοποιώντας την εντολή `dir` ή την επιλογή `File Properties` του `Windows Explorer`), ενώ τέλος το πεδίο `bfOffBits` περιέχει το πλήθος των bytes που μεσολαβούν ανάμεσα στην αρχή του αρχείου και στην αρχή του πίνακα που περιέχει τα δεδομένα της εικόνας. Ο ορισμός της δομής `BITMAPFILEHEADER` που περιγράψαμε παραπάνω, παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
typedef struct tagBITMAPFILEHEADER {
    unsigned int    bfType;           // must be 'BM'
    unsigned long   bfSize;           // size of the whole .bmp file
    unsigned int    bfReserved1;     // must be 0
    unsigned int    bfReserved2;     // must be 0
    unsigned long   bfOffBits;
} BITMAPFILEHEADER;
```



Σχήμα 57: Τα βασικά στάδια επεξεργασίας μιας ψηφιακής εικόνας.

Η ύπαρξη του πεδίου `biOffBits` στην παραπάνω δομή, οφείλεται στο γεγονός πως το μέγεθος της δομής `BITMAPINFOHEADER` που ακολουθεί αμέσως μετά (και θα περιγραφεί στη συνέχεια) πιθανόν να μην είναι το ίδιο για όλα τα αρχεία εικόνας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι μεταγενέστερες εκδόσεις των Windows πιθανόν να χρησιμοποιούν εκτεταμένες και αναθεωρημένες δομές `BITMAPINFOHEADER`, με αποτέλεσμα κανείς να μην μπορεί να μας εγγυηθεί πως η αποθήκευση των δεδομένων της εικόνας θα ξεκινά πάντοτε από τη θέση `sizeof(BITMAPFILEHEADER) + sizeof(BITMAPINFOHEADER)`. Επομένως για να μην έχουμε προβλήματα ανάγνωσης των δεδομένων του αρχείου που οφείλονται στην ασυμβατότητα των διαφόρων εκδόσεων της δομής `BITMAPINFOHEADER`, τοποθετούμε τον δείκτη ανάγνωσης του αρχείου (file pointer) στη θέση που υποδεικνύεται από την τιμή του πεδίου `biOffBits` και αρχίζουμε την ανάγνωση των δεδομένων της εικόνας από εκεί και πέρα. Όσον αφορά τη δομή `BITMAPINFOHEADER`, αυτή σε γενικές γραμμές έχει ως εξής:

```

typedef struct tagBITMAPINFOHEADER {
    unsigned long    biSize;           // size of the structure
    signed long     biWidth;          // image width
    signed long     biHeight;         // image height
    signed long     biPlanes;         // bitplanes
    signed long     biBitCount;       // resolution
    signed long     biCompression;    // compression
    signed long     biSizeImage;      // size of the image
    signed long     biXPelsPerMeter;  // pixels per meter X
    signed long     biYPelsPerMeter;  // pixels per meter Y
    unsigned long   biClrUsed;        // colors used
    unsigned long   biClrImportant;   // important colors
} BITMAPINFOHEADER;
  
```

Στην παραπάνω δομή, η τιμή του πεδίου `biSize` είναι ίση με `sizeof(BITMAPINFOHEADER)` (περιέχει δηλαδή το

μέγεθος της δομής BITMAPINFOHEADER σε bytes) (αυτή η τιμή είναι ίση με 40 για τα Microsoft Windows ενώ για το OS/2 που χρησιμοποιεί μια τροποποιημένη δομή BITMAPINFOHEADER, η τιμή του εν λόγω πεδίου είναι ίση με 12). Τα πεδία biWidth και biHeight περιέχουν τις διαστάσεις της εικόνας (το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα) σε pixels, ενώ η τιμή του πεδίου biPlanes είναι πάντα ίση με τη μονάδα. Από την άλλη πλευρά, το πεδίο biBitcount περιέχει το πλήθος των bits που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το κάθε pixel (bits per pixel, bps). Αυτή η τιμή είναι ίση με 1 για ασπρόμαυρες εικόνες, ενώ πολύ συνηθισμένες τιμές είναι οι τιμές 4 (για εικόνες 16 χρωμάτων), 8 (για εικόνες 256 χρωμάτων) και 24 (για εικόνες που περιέχουν 16M χρώματα). Το πεδίο biCompression έχει τιμή που καθορίζει το είδος της συμπίεσης που (πιθανώς) εφαρμόζεται στην εικόνα, ενώ το πεδίο biSizeImage περιέχει το πλήθος των pixels της εικόνας (width*height) (είναι προφανές πως η τιμή αυτού του πεδίου είναι ίση με τη διαφορά bfSize-bfOffBits της δομής BITMAPFILEHEADER). Τα πεδία biXPelsPerMeter και biYPelsPerMeter περιέχουν την ανάλυση της εικόνας κατά την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση και μετρούνται σε μονάδες ppm (pixels per meter). Τέλος τα πεδία biClrUsed και biClrImportant περιέχουν πληροφορίες σχετικά με τα χρώματα που χρησιμοποιούνται καθώς και τα σημαντικά χρώματα της εικόνας. Η τιμή του πεδίου biClrUsed είναι ίση με το πλήθος των χρωμάτων της χρωματικής παλέτας που χρησιμοποιούνται για τη σχεδίαση της εικόνας (εάν η τιμή αυτού του πεδίου είναι ίση με το μηδέν, σημαίνει πως χρησιμοποιούνται όλα τα χρώματα). Από την άλλη πλευρά η τιμή του πεδίου biClrImportant είναι ίση με το πλήθος των χρωμάτων που θεωρούνται σημαντικά για τη σχεδίαση της εικόνας (και στην περίπτωση αυτή, εάν η τιμή του πεδίου είναι μηδέν, όλα τα χρώματα της παλέτας θεωρούνται σημαντικά).

Αμέσως μετά τη δομή BITMAPINFOHEADER, ακολουθούν οι παλέτες χρωμάτων του αρχείου BMP (ας σημειωθεί ωστόσο πως αυτό συμβαίνει μόνο όταν η τιμή του πεδίου biBitCount της δομής BITMAPFILEHEADER είναι μικρότερη ή ίση του 8, ενώ για bitmaps με περισσότερα χρώματα, δεν υπάρχει παλέτα χρωμάτων αλλά ακολουθούν κατευθείαν τα δεδομένα της εικόνας). Όπως είναι γνωστό από τα Windows, το κάθε χρώμα αποτελείται από τρία διαφορετικά χρώματα, το κόκκινο (red), το πράσινο (green) και το μπλε (blue). Για το λόγο αυτό το κάθε χρώμα ορίζεται ως μια δομή η οποία περιέχει τρία πεδία (ένα για κάθε χρώμα) - τα πεδία αυτά φέρουν τα ονόματα rgbBlue, rgbGreen και rgbRed - καθώς και ένα πεδίο με όνομα rgbReserved που δεν χρησιμοποιείται. Ο λόγος ύπαρξης αυτού του πεδίου είναι η αναγωγή του μεγέθους του αρχείου σε ακέραιο πολλαπλάσιο του 4, κάτι που (όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία) διευκολύνει τις διαδικασίες ανάγνωσης και αποθήκευσης του αρχείου. Η δομή αυτή φέρει το όνομα RGBQUAD και παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```
typedef struct tagRGBQUAD {
    unsigned char  rgbBlue;
    unsigned char  rgbGreen;
    unsigned char  rgbRed;
    unsigned char  rgbReserved;
} RGBQUAD;
```

Μετά τον ορισμό της δομής για το κάθε χρώμα, ας περάσουμε τώρα στην περιγραφή της χρωματικής παλέτας, η οποία ορίζεται ως ένας πίνακας από τέτοιες δομές. Το πλήθος των στοιχείων αυτού του πίνακα, εξαρτάται προφανώς από το πλήθος των χρωμάτων της εικόνας, το οποίο με τη σειρά του καθορίζεται από την τιμή του πεδίου biBitcount της δομής BITMAPINFOHEADER που περιγράψαμε προηγούμενως. Εάν η τιμή αυτού του πεδίου είναι 4, η εικόνα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη 16 χρωμάτων, και επομένως η χρωματική παλέτα θα είναι ένας πίνακας 16×4 - δηλαδή θα περιέχει 16 κελιά κάθε ένα από τα οποία θα περιλαμβάνει μια δομή RGBQUAD. Εάν το πεδίο biBitcount έχει την τιμή 8, η χρωματική παλέτα θα είναι ένας πίνακας με διαστάσεις 256×4 , κ.ο.κ. Μιλώντας γενικά, εάν η τιμή του πεδίου biBitcount είναι ίση με N , η χρωματική παλέτα του αρχείου *BMP* θα είναι ένας πίνακας με διαστάσεις $2^N \times 4$.

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε μόνο με bitmaps που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη 16 ή 256 χρωμάτων. Ας σημειωθεί ωστόσο πως σε ορισμένες περιπτώσεις η παλέτα χρωμάτων που βρίσκεται αποθηκευμένη στο αρχείο της εικόνας, δεν περιέχει ακριβώς 16 ή 256 χρώματα, αλλά πολύ λιγότερα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως ορισμένα προγράμματα επεξεργασίας εικόνας, αποθηκεύουν μόνο τα χρώματα που πραγματικά χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της εικόνας και όχι όλα τα χρώματα της παλέτας.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως για bitmaps των 16 ή των 256 χρωμάτων, δεν χρησιμοποιούνται και τα 8 bits των πεδίων rgbBlue, rgbGreen και rgbRed (κάθε ένα από τα οποία έχει μήκος 1 byte), αλλά μόνο τα 6 πρώτα από αυτά. Για παράδειγμα θεωρώντας το byte 01101100, τα bits που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του χρώματος, είναι τα 011011. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι πως η παλέτα χρωμάτων των αρχείων BMP έχει εύρος τιμών (0-255) (κωδικοποίηση με 8 bits) ενώ η παλέτα χρωμάτων της οθόνης VGA στην οποία θα απεικονίσουμε το bitmap έχει εύρος τιμών (0-63) (κωδικοποίηση με 6 bits). Προκειμένου να ανακτήσουμε τα έξι από τα οκτώ bits, θα πρέπει κατά τα γνωστά να ολισθήσουμε την τιμή του byte κατά 2 bits προς τα δεξιά, κάτι που στη γλώσσα προγραμματισμού *C* γίνεται με μία εντολή της μορφής `color = color >> 2`, όπου `color` είναι η τιμή που διαβάζουμε για κάποιο χρώμα.

Τέλος μετά τη χρωματική παλλέτα, το αρχείο της εικόνας περιέχει τα δεδομένα που συσχετίζονται με τα pixels που περιλαμβάνονται σε αυτή. Αυτά τα δεδομένα αποθηκεύονται από κάτω προς τα πάνω και από αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει πως κατά την ανάγνωση του αρχείου της εικόνας θα πρέπει να τη ζωγραφίσουμε με τον ίδιο τρόπο (δηλαδή από κάτω προς τα πάνω και από αριστερά προς τα δεξιά), εκτός εάν αναδιατάξουμε τη σειρά των δεδομένων στην περιοχή μνήμης που θα τα αποθηκεύσουμε, έτσι ώστε στη συνέχεια να σχεδιάσουμε την εικόνα όπως συνήθως, δηλαδή από πάνω προς τα κάτω. Εάν η εικόνα είναι bitmap των δεκαέξι χρωμάτων, το κάθε χρώμα κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας 4 bits, ενώ για εικόνα των 256 χρωμάτων, το κάθε χρώμα κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας 8 bits, δηλαδή ένα byte. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το μέγεθος μιας εικόνας των 256 χρωμάτων είναι διπλάσιο από το μέγεθος της ίδιας εικόνας εάν αυτή αποθηκευτεί ως bitmap 16 χρωμάτων.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που θα πρέπει να αναφερθεί, είναι πως το πλάτος μιας εικόνας θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4. Εάν αυτό δεν συμβαίνει θα πρέπει να προσθέσουμε μηδενικά στο τέλος της κάθε γραμμής, μέχρι το πλάτος της εικόνας να διαιρείται ακριβώς με το 4. Έτσι, εάν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\text{ImageWidth}/4$ είναι ίσο με 1, θα πρέπει στο τέλος της κάθε γραμμής να προσθέσουμε 3 bytes με τιμή ίση με το μηδέν, ενώ για τιμή υπολοίπου ίση με 3, θα πρέπει στο τέλος της κάθε γραμμής να προσθέσουμε 1 byte. Είναι προφανές, πως αυτή η προσθήκη αυξάνει το μέγεθος της εικόνας στο μέσο αποθήκευσης, αλλά όχι και το χρήσιμο μέγεθος της εικόνας (αυτό που περιέχει τη χρήσιμη πληροφορία που απεικονίζεται στην οθόνη). Αυτός είναι και ο λόγος της ύπαρξης του πεδίου biSizeImage της δομής BITMAPINFOHEADER . Η τιμή που καταχωρείται σε αυτό το πεδίο εκφράζει το πραγματικό μέγεθος της εικόνας. Αντίθετα το γινόμενο των πεδίων biWidth και biHeight της ίδιας δομής, εκφράζει το μέγεθος της εικόνας μετά την προσθήκη των επιπλέον bytes με τιμή ίση με το μηδέν. Είναι προφανές, πως εάν οι τιμές αυτών των δύο πεδίων είναι ίσες μεταξύ τους, τότε το πλάτος της εικόνας είναι από την αρχή πολλαπλάσιο του τέσσερα, και επομένως η προσθήκη των επιπλέον bytes με τιμή ίση με το μηδέν, δεν είναι αναγκαία.

Μετά την θεωρητική παρουσίαση της δομής ενός αρχείου BMP ας περάσουμε τώρα στην περιγραφή του κώδικα που θα χρησιμοποιήσουμε για να διαχειρισθούμε αρχεία αυτού του είδους. Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη αυτού του κώδικα, θα πρέπει να αναφέρουμε πως επειδή η εμφάνιση ενός αρχείου BMP πραγματοποιείται σε κατάσταση γραφικών (graphics mode) είναι αναγκαία η χρήση συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση pixels στην οθόνη του υπολογιστή μας. Στην τρέχουσα έκδοση του κώδικα, το bitmap εμφανίζεται σε κατάσταση γραφικών του MS-DOS (MS-DOS graphics mode) - σε μεταγενέστερες εκδόσεις θα λάβει χώρα εμφάνιση του bitmap μέσα από τα Windows - χρησιμοποιώντας συναρτήσεις γραφικών της Borland C++ 3.1. Αυτό σημαίνει πως σε κάθε πηγαίο αρχείο θα πρέπει να υπάρχει η εντολή `#include <graphics.h>` ενώ θα πρέπει να είναι διαθέσιμα και τα αρχεία BGI (Borland Graphics Interface) που χρησιμοποιούνται από την εντολή `initgraph`. Αυτός ο περιορισμός ισχύει μόνο για την εμφάνιση της εικόνας σε κατάσταση γραφικών, ενώ για την ανάγνωση και εκτύπωση στην οθόνη των κεφαλίδων του bitmap (που προφανώς γίνεται σε κατάσταση κειμένου) δεν υπάρχει κανένα τέτοιο πρόβλημα.

Η πρώτη από τις συναρτήσεις που θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα φέρει το όνομα `PrintBitmapFileHeaderInfo` και ο ρόλος της είναι να εκτυπώνει τα περιεχόμενα της δομής BITMAPFILEHEADER για το αρχείο BMP το όνομα του οποίου δέχεται ως όρισμα. Η συνάρτηση ανοίγει το αρχείο (εφ' όσον υπάρχει) διαβάζει τη δομή BITMAPFILEHEADER χρησιμοποιώντας την εντολή `fread` - καθώς τα αρχεία BMP είναι δυαδικά αρχεία (binary files) - και στη συνέχεια εκτυπώνει στην οθόνη του χρήστη τις τιμές των πεδίων που περιλαμβάνονται σε αυτή.

```
int PrintBitmapFileHeaderInfo (char * fileName) {
    FILE * fp;
    BITMAPFILEHEADER bmpHeader={0};
    fp = fopen (fileName, "rb");
    if (!fp) {
        printf ("Bitmap_File_could_not_be_Opened\n");
        return (-1); }
    rewind (fp);
    fread (&bmpHeader, sizeof(bmpHeader), 1, fp);
    fclose (fp);
    printf ("Bitmap_File_Header_for_Bitmap_File_%s\n", fileName);
    printf ("-----\n");
    printf ("Bitmap_Type_:_%d\n", bmpHeader.bfType);
    printf ("Bitmap_Size_:_%ld\n", bmpHeader.bfSize);
    printf ("Data_Offset_:_%ld\n\n", bmpHeader.bfOffBits);
    return (0); }
```

Από την άλλη πλευρά, η ανάγνωση των δεδομένων της δομής BITMAPINFOHEADER , γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `PrintBitmapInfoHeaderInfo` η οποία λειτουργεί με εντελώς ανάλογο τρόπο. Επειδή η δομή BITMAPINFOHEADER βρίσκεται αμέσως μετά τη δομή BITMAPFILEHEADER , η συνάρτηση χρησιμοποιεί ξανά

την εντολή fread για να διαβάσει τις δύο αυτές δομές - τη μία μετά την άλλη - και κατόπιν εκτυπώνει στην οθόνη τα περιεχόμενα της δεύτερης δομής. Στον κώδικα που ακολουθεί, οι σταθερές BI_RGB, BI_RLE4, BI_RLE8 και BI_RGBM έχουν ορισθεί ως

```
#define BI_RGB    0L
#define BI_RLE8  1L
#define BI_RLE4  2L
#define BI_RGBM  3L
```

και χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον τύπο της συμπίεσης που πιθανόν να χαρακτηρίζει τη δομή του τρέχοντος αρχείου εικόνας.

```
int PrintBitmapInfoHeaderInfo (char * fileName) {
    FILE * fp;
    BITMAPFILEHEADER bmpHeader={0};
    BITMAPINFOHEADER bmpInfo={0};
    fp = fopen (fileName, "rb");
    if (!fp) {
        printf ("Bitmap File could not be Opened\n");
        return (-1); }
    rewind (fp);
    fread (&bmpHeader, sizeof(bmpHeader), 1, fp);
    fread (&bmpInfo, sizeof(bmpInfo), 1, fp);
    fclose (fp);
    printf ("Bitmap Info Header for Bitmap File %s\n", fileName);
    printf ("-----\n");
    printf ("Structure Size : %d\n", bmpInfo.biSize);
    printf ("Bitmap Width : %d pixels\n", bmpInfo.biWidth);
    printf ("Bitmap Height : %d pixels\n", bmpInfo.biHeight);
    printf ("Bitmap Planes : %d\n", bmpInfo.biPlanes);
    printf ("Bits Per Pixel : %d\n", bmpInfo.biBitCount);
    if (bmpInfo.biCompression==BI_RGB)
        printf ("Compression Type : No Compression\n");
    if (bmpInfo.biCompression==BI_RLE8)
        printf ("Compression Type : 8 Bit RLE Encoding\n");
    if (bmpInfo.biCompression==BI_RLE4)
        printf ("Compression Type : 4 Bit RLE Encoding\n");
    if (bmpInfo.biCompression==BI_RGBM)
        printf ("Compression Type : RGB Bitmap with Mask\n");
    printf ("Real Image Size : %ld\n", bmpInfo.biSizeImage);
    printf ("Image Size (0's) : %ld\n", bmpInfo.biWidth*bmpInfo.biHeight);
    printf ("X Resolution : %d ppm\n", bmpInfo.biXPelsPerMeter);
    printf ("Y Resolution : %d ppm\n", bmpInfo.biYPelsPerMeter);
    printf ("Used Colors : %d\n", bmpInfo.biClrUsed);
    printf ("Important Colors : %d\n\n", bmpInfo.biClrImportant);
    return (0); }
```

Αμέσως μετά τη δομή BITMAPINFOHEADER, ακολουθεί η χρωματική παλέττα του αρχείου BMP η οποία για κάθε ένα από τα χρώματα του αρχείου περιέχει μια δομή RGBQUAD. Αυτή η δομή με τη σειρά της περιέχει τρεις ακέραιες τιμές στο διάστημα 0-255 οι οποίες καθορίζουν το ποσοστό της συμμετοχής των τριών βασικών χρωμάτων (RED, GREEN, BLUE), στο τελικό χρώμα. Από τη σκοπιά του προγραμματιστή, η χρωματική παλέττα ενός αρχείου BMP μπορεί να ορισθεί ως ένας μονοδιάστατος πίνακας από δομές τύπου RGBQUAD, το πλήθος των οποίων είναι ίσο με 2^N όπου N είναι η τιμή του πεδίου biBitCount της δομής BITMAPINFOHEADER: για $N = 4$ η εικόνα περιέχει 16 χρώματα, ενώ για $N = 8$ η εικόνα περιέχει 256 χρώματα. Επομένως οι διαστάσεις της παλέττας για τις δύο αυτές περιπτώσεις, θα είναι 16×4 και 256×4 αντίστοιχα. Αντίθετα, εάν η εικόνα χρησιμοποιεί 24 bits για να περιγράψει το κάθε χρώμα (γεγονός που οδηγεί στην ύπαρξη 16777216 χρωμάτων), το αρχείο δεν περιέχει χρωματική παλέττα (λόγω του τεράστιου αποθηκευτικού χώρου που θα απαιτούνταν για την αποθήκευσή της), και για το λόγο αυτό, αμέσως μετά τη δομή BITMAPINFOHEADER, ακολουθούν τα δεδομένα της εικόνας. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε αργότερα.

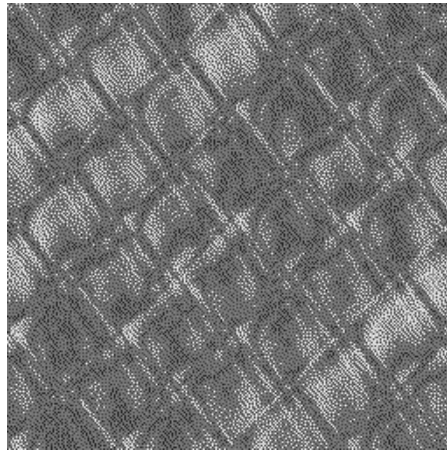
Η προεπισκόπηση του περιεχομένου της χρωματικής παλέτας ενός αρχείου BMP γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης PrintColorPalette. Αυτή η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα το όνομα ενός αρχείου εικόνας. Στη συνέχεια, η συνάρτηση ανοίγει το αρχείο (εάν υπάρχει), προσπερνά τις δομές BITMAPFILEHEADER και BITMAPINFOHEADER, δεσμεύει χώρο μνήμης για την παλέτα χρωμάτων (ανάλογα με την τιμή του πεδίου biBitCount της δομής BITMAPINFOHEADER) και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση fread, διαβάζει το περιεχόμενο της χρωματικής παλέτας, το οποίο και εκτυπώνει στην οθόνη του χρήστη χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση printf. Εάν το σύστημα γραφικών στο οποίο θα εμφανίσουμε το bitmap περιέχει μια απλή VGA με παλέτα 64 χρωμάτων, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο τα έξι από τα οκτώ bits της κάθε τιμής χρώματος, κάτι που το κάνουμε χρησιμοποιώντας τον τελεστή ολίσθησης της γλώσσας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί θεωρούμε πως το σύστημά μας μπορεί να απεικονίσει τουλάχιστον 256 χρώματα, και για το λόγο αυτό δεν προχωρούμε σε αυτή τη διαδικασία.

```
int PrintColorPalette (char * fileName) {
    FILE * fp; int colorNumber, counter;
    RGBQUAD * rgbTable = NULL;
    BITMAPFILEHEADER bmpHeader={0};
    BITMAPINFOHEADER bmpInfo={0};
    fp = fopen (fileName, "rb");
    if (!fp) {
        printf ("Bitmap_File_could_not_be_Opened\n");
        return (-1); }
    rewind (fp);
    fread (&bmpHeader, sizeof(bmpHeader), 1, fp);
    fread (&bmpInfo, sizeof(bmpInfo), 1, fp);
    if (bmpInfo.biBitCount <=8)
        colorNumber = pow (2, bmpInfo.biBitCount);
    else colorNumber = 0;
    if (colorNumber) {
        rgbTable=(RGBQUAD *) calloc (colorNumber, sizeof(RGBQUAD));
        if (!rgbTable) return (-1);
        fread (rgbTable, sizeof(RGBQUAD), colorNumber, fp); }
    fclose (fp);
    printf ("COLOR_TABLE_FOR_FILE_%s\n\n", fileName);
    printf ("COLOR\tRED\tGREEN\tBLUE\n");
    printf ("-----\n");
    for (counter=0;counter<colorNumber;counter++)
        printf ("%03d\t%03d\t%03d\t%03d\n", counter,
            rgbTable[counter].rgbRed,
            rgbTable[counter].rgbGreen,
            rgbTable[counter].rgbBlue);
    free (rgbTable);
    return (0); }
```

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του κώδικα ο οποίος θα αναλάβει να εμφανίσει το bitmap στην οθόνη του υπολογιστή μας, ας κατασκευάσουμε μια μικρή εφαρμογή η οποία θα εκτυπώνει στην οθόνη μας, τις τιμές των κεφαλίδων που περιλαμβάνονται σε αρχείο εικόνας τύπου BMP. Η εφαρμογή (που θα φέρει το όνομα showbmp) θα καλείται από τη γραμμή εντολών και θα δέχεται δύο ορίσματα εκ των οποίων το πρώτο θα καθορίζει την πληροφορία που θέλουμε να εκτυπώσουμε, ενώ το δεύτερο, το αρχείο εικόνας που θα χρησιμοποιήσουμε. Θεωρώντας για παράδειγμα το αρχείο test.bmp, θα μπορούμε να εκτυπώσουμε τα περιεχόμενα της κεφαλίδας BITMAPFILEHEADER χρησιμοποιώντας την εντολή showbmp -header test.bmp, τα περιεχόμενα της κεφαλίδας BITMAPINFOHEADER με την εντολή showbmp -info test.bmp, και τα περιεχόμενα της χρωματικής παλέτας, γράφοντας showbmp -palette test.bmp. Σε μεταγενέστερες εκδόσεις της εφαρμογής θα έχουμε τη δυνατότητα να εμφανίσουμε το bitmap σε κατάσταση γραφικών, γράφοντας showbmp -draw test.bmp. Ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί την εφαρμογή showbmp ακολουθεί στη συνέχεια.

```
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include "bitmap.cpp"

void Usage (void) {
```

Σχήμα 58: Το αρχείο bitmap gold.bmp σε ασπρόμαυρη εκτύπωση

```

printf (" Usage: \_showbmp \_is \_called \_as \_follows \_n" );
printf (" showbmp \_header \_file .bmp: \_prints \_the \_bitmap \_header \_n" );
printf (" showbmp \_info \_file .bmp: \_prints \_the \_birmap \_info \_n" );
printf (" showbmp \_palette \_file .bmp: \_prints \_the \_color \_palette \_n" );
printf (" showbmp \_draw \_file .bmp: \_draws \_bitmap \_in \_graphics \_mode \_n" ); }

int main (int argc, char ** argv) {
  if (argc!=3) {
    Usage(); return (-1); }
  if (!strcmp(argv[1], "-header"))
    PrintBitmapFileHeaderInfo (argv[2]);
  if (!strcmp(argv[1], "-info"))
    PrintBitmapInfoHeaderInfo (argv[2]);
  if (!strcmp(argv[1], "-palette"))
    PrintColorPalette (argv[2]);
  if (!strcmp(argv[1], "-draw"))
    ShowBitmap (argv[2]);
  return (0); }

```

Στα παραδείγματα χρήσης της εφαρμογής showbmp χρησιμοποιείται το αρχείο gold.bmp που παρουσιάζεται στο σχήμα 58 σε ασπρόμαυρη εκτύπωση. Για να εκτυπώσουμε τα περιεχόμενα της κεφαλίδας του εν λόγω αρχείου θα καλέσουμε την εντολή showbmp -header gold.bmp. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος της εντολής θα έχει τη μορφή

Bitmap File Header **for** Bitmap File gold.bmp

```

Bitmap Type : 19778
Bitmap Size : 32850
Data Offset : 82

```

Από την έξοδο της παραπάνω εντολής παρατηρούμε πως η τιμή του πεδίου bfType είναι ίση με 19778 (που αντιστοιχεί στη συμβολοσειρά *BM*) και επομένως πρόκειται για ένα έγκυρο αρχείο BMP, το μέγεθος του οποίου είναι 32850 bytes. Οι πληροφορίες αυτές αφορούν τη δομή BITMAPFILEHEADER, ενώ για να εκτυπώσουμε τις τιμές των πεδίων της δομής BITMAPINFOHEADER θα πρέπει να καλέσουμε την εντολή με τη μορφή showbmp -info gold.bmp. Το αποτέλεσμα της κλήσης της εντολής με αυτή τη μορφή και για το αρχείο gold.bmp παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Bitmap Info Header **for** Bitmap File gold.bmp

```

Structure Size : 40
Bitmap Width: 256
Bitmap Height: 256

```

```

Bitmap Planes: 1
Bits Per Pixel: 4
Compression Type: 0
Real Image Size: 32768
Image Size (0's): 65536
X-Resolution: 2835
Y-Resolution: 2835
Used Colors: 7
Important Colors: 7

```

Από την έξοδο της παραπάνω εντολής διαπιστώνουμε πως οι διαστάσεις του αρχείου (σε pixels) είναι 256×256 ενώ για την κωδικοποίησή του χρησιμοποιούνται 4 bits για κάθε χρώμα - επομένως πρόκειται για μια εικόνα 16 χρωμάτων. Προκειμένου να εμφανίσουμε αυτά τα δεκαέξι χρώματα - που συνιστούν και τη χρωματική παλέττα του αρχείου - καλούμε την εντολή showbmp με τη μορφή showbmp -palette gold.bmp και παίρνουμε το αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

COLOR TABLE FOR FILE gold.bmp

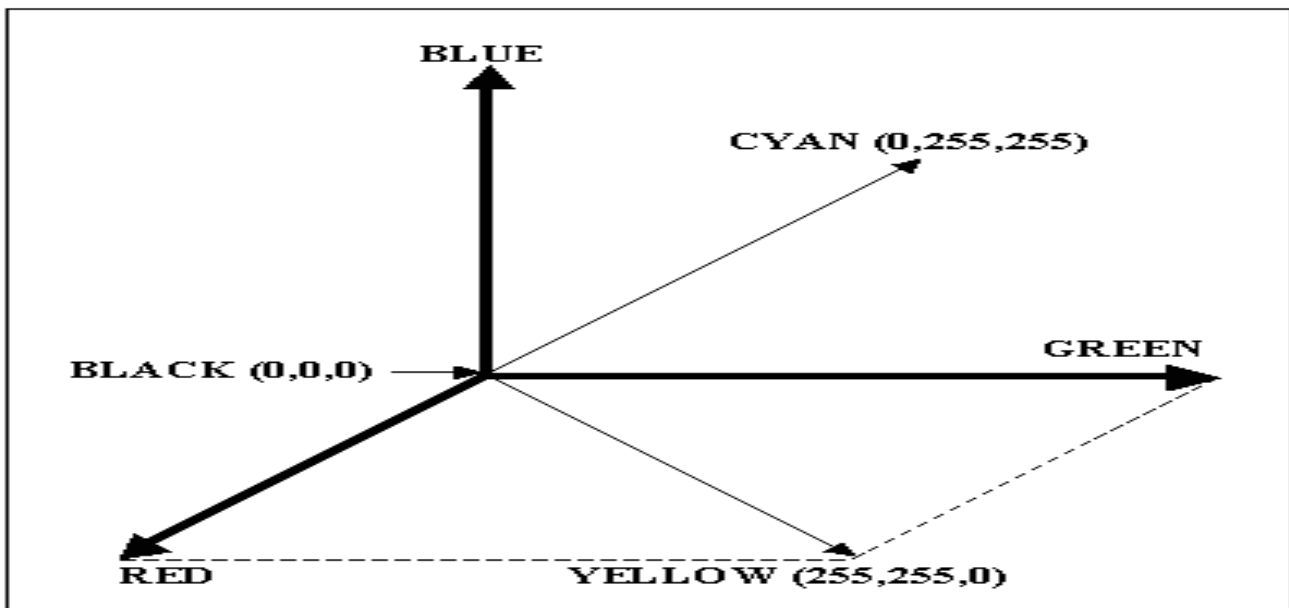
COLOR RED GREEN BLUE

| COLOR | RED | GREEN | BLUE |
|-------|-----|-------|------|
| 000 | 128 | 000 | 000 |
| 001 | 128 | 128 | 000 |
| 002 | 128 | 000 | 128 |
| 003 | 128 | 128 | 128 |
| 004 | 192 | 192 | 192 |
| 005 | 255 | 000 | 000 |
| 006 | 255 | 255 | 000 |
| 007 | 101 | 021 | 086 |
| 008 | 017 | 101 | 099 |
| 009 | 017 | 017 | 054 |
| 010 | 003 | 017 | 016 |
| 011 | 033 | 017 | 016 |
| 012 | 017 | 021 | 017 |
| 013 | 021 | 049 | 001 |
| 014 | 021 | 016 | 021 |
| 015 | 101 | 081 | 086 |

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς, πως για κάθε ένα από τα χρώματα της παλέττας, υπάρχει μια τριάδα ακέραιων αριθμών με τιμές στο διάστημα 0-255 που περιέχουν τη συνεισφορά των τριών βασικών χρωμάτων (RED, GREEN, BLUE) στο κάθε ένα από τα χρώματα που περιλαμβάνονται σε αυτή. Για παράδειγμα, το πρώτο χρώμα με δείκτη 000 αντιστοιχεί στο καφέ, το έκτο χρώμα με δείκτη 005 αντιστοιχεί στο κόκκινο, και το έβδομο χρώμα με δείκτη 006, αντιστοιχεί στο κίτρινο. Αμέσως μετά τη χρωματική παλέτα, ακολουθούν τα πραγματικά δεδομένα της εικόνας. Αυτά, δεν είναι τίποτε άλλο από μια ακολουθία ακέραιων αριθμών στο διάστημα 0-255 (ένας αριθμός για κάθε pixel) που περιέχουν τον κώδικα του χρώματος για αυτό το pixel. Εάν για παράδειγμα η εικόνα περιέχει πέντε συνεχόμενα pixels με χρώματα κίτρινο, καφέ, κόκκινο, κόκκινο και κίτρινο, τα αντίστοιχα δεδομένα που βρίσκονται αποθηκευμένα στο αρχείο της εικόνας και σε δυαδική μορφή, είναι οι αριθμοί 6,0,5,5, και 6. Εκείνο λοιπόν που κάνουν τα προγράμματα επεξεργασίας εικόνων bitmap, είναι να διαβάζουν τα χαρακτηριστικά (και τις διαστάσεις) της εικόνας - από τις δομές BITMAPFILEHEADER και BITMAPINFOHEADER - και τη χρωματική παλέττα του αρχείου, και στη συνέχεια, για κάθε τιμή που διαβάζεται και αντιστοιχεί σε κάποιο pixel, να ανατρέχουν στη χρωματική παλέττα, να ταυτοποιούν το αντίστοιχο χρώμα, και στη συνέχεια να το ζωγραφίζουν στην οθόνη του χρήστη. Η διαδικασία αυτή θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την υλοποίηση της συνάρτησης DrawBitmap.

30 Διανυσματική αναπαράσταση χρωμάτων εικόνων

Μια από τις πιο βασικές μορφές διαχείρισης των χρωμάτων μιας εικόνας είναι η αναπαράστασή τους σε διανυσματική μορφή σε χώρο τριών διαστάσεων οι άξονες του οποίου αντιστοιχούν στα τρία βασικά χρώματα RED, GREEN και BLUE. Σε αυτή τη μορφή αναπαράστασης το μαύρο χρώμα (που αντιστοιχεί στο συνδυασμό RGB(0,0,0)) αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων, το κίτρινο χρώμα (που αντιστοιχεί στο συνδυασμό RGB(0,255,255)) κείται επί της κύριας



Σχήμα 59: Ο τριδιάστατος χώρος των χρωμάτων RGB

διαγωνίου του επιπέδου BG ενώ το κίτρινο χρώμα (που αντιστοιχεί στο συνδυασμό $RGB(255,255,0)$), αντιστοιχεί στην κύρια διαγώνιο του επιπέδου RG . Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 59.

Θεωρώντας τα χρώματα μιας εικόνας ως διανύσματα τριών διαστάσεων, μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω τους το σύνολο των πράξεων που είναι γνωστές από την αναλυτική γεωμετρία, όπως για παράδειγμα τον υπολογισμό του μέτρου τους, το γινόμενο τους, την προβολή τους και την περιστροφή τους. Η πιο κλασσική από αυτές τις πράξεις είναι ο υπολογισμός της μεταξύ τους απόστασης. Θεωρώντας δύο χρώματα $\vec{C}_1 = (R_1, G_1, B_1)$ και $\vec{C}_2 = (R_2, G_2, B_2)$, μπορούμε να ορίσουμε τη μεταξύ τους απόσταση από τη σχέση¹

$$d(\vec{C}_1, \vec{C}_2) = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (G_2 - G_1)^2 + (B_2 - B_1)^2} \quad (178)$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της χρωματικής απόστασης μπορούμε να υλοποιήσουμε δύο απλά φίλτρα τα οποία εφαρμόζονται πάνω σε μία εικόνα. Τα φίλτρα αυτά είναι η ανίχνευση ακμών (edge detection) και η ταυτοποίηση χρώματος (color extraction).

31 Ανίχνευση ακμών

Ο σκοπός της διαδικασίας ανίχνευσης ακμών, είναι να ταυτοποιήσει τις ακμές ενός σχήματος σε μια εικόνα και να δημιουργήσει μια νέα εικόνα στην οποία τα pixels που ανήκουν στις ακμές τις εικόνας θα είναι ζωγραφισμένα με άσπρο χρώμα, ενώ όλα τα υπόλοιπα pixels θα είναι ζωγραφισμένα με μαύρο χρώμα. Για να το κάνουμε αυτό, διαβάζουμε ένα προς ένα τα pixels της εικόνας από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω, και για κάθε ένα από αυτά υπολογίζουμε την απόστασή του από το pixel που βρίσκεται προς τα δεξιά του, καθώς και από το pixel που βρίσκεται ακριβώς από κάτω του. Εάν κάποια από αυτές τις αποστάσεις είναι μεγαλύτερη από κάποια τιμή κατωφλίου, το pixel θεωρείται ότι ανήκει σε κάποια από τις ακμές της εικόνας και ζωγραφίζεται άσπρο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση χρωματίζεται μαύρο. Η παραπάνω διαδικασία σε μορφή ψευδοκώδικα διατυπώνεται ως εξής:

```

For every pixel (i,j) of the source bitmap
(1) Extract the C=(R,G,B) components of this pixel ,
    its right neighbor (R1,G1,B1) and its bottom
    neighbor (R2,G2,B2)
(3) Compute D(C,C1) and D(C,C2)
    If D(C,C1) or D(C,C2) superior to a parameter K,
    then we have an edge pixel
  
```

Ο παραπάνω ψευδοκώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού C , έχει την ακόλουθη μορφή:

¹Οι αλγόριθμοι επεξεργασίας εικόνας που περιγράφονται στις επόμενες σελίδες στηρίζονται κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό στο έγγραφο An Introduction to Digital Image Processing του Frédéric Patin που μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση <http://yov408.free.fr>

```

void EdgeDetection (BYTE ** pixels , long width , long height ,
    RGBQUAD * rgbTable , int colors , double threshold) {
    int counter , index , color , color1 , color2 ; double d1 , d2 ;
    int rC1 , gC1 , bC1 , rC11 , gC11 , bC11 , rC12 , gC12 , bC12 ;
    for (counter=0;counter<width-1;counter++) {
        for (index=0;index<height-1;index++) {
            color = pixels [ counter ][ index ] ;
            color1 = pixels [ counter +1 ][ index ] ;
            color2 = pixels [ counter ][ index +1 ] ;
            rC1 = rgbTable [ color ] . rgbRed ;
            gC1 = rgbTable [ color ] . rgbGreen ;
            bC1 = rgbTable [ color ] . rgbBlue ;
            rC11 = rgbTable [ color1 ] . rgbRed ;
            gC11 = rgbTable [ color1 ] . rgbGreen ;
            bC11 = rgbTable [ color1 ] . rgbBlue ;
            rC1 = rgbTable [ color1 ] . rgbRed ;
            gC1 = rgbTable [ color1 ] . rgbGreen ;
            bC1 = rgbTable [ color1 ] . rgbBlue ;
            d1 = sqrt ( pow ( ( rC11 - rC1 ) , 2 ) +
                pow ( ( gC11 - gC1 ) , 2 ) +
                pow ( ( bC11 - bC1 ) , 2 ) ) ;
            d2 = sqrt ( pow ( ( rC12 - rC1 ) , 2 ) +
                pow ( ( gC12 - gC1 ) , 2 ) +
                pow ( ( bC12 - bC1 ) , 2 ) ) ;
            if ( ( d1 >= threshold ) || ( d2 >= threshold ) )
                pixels [ counter ][ index ] = (BYTE) 16 ;
            else pixels [ counter ][ index ] = (BYTE) 0 ; } } }

```

Στον παραπάνω κώδικα, η μεταβλητή pixels είναι ένας διδιάστατος πίνακας μεταβλητών τύπου BYTE που περιέχει τα δεδομένα της εικόνας, ενώ width και height είναι αντίστοιχα το πλάτος και το ύψος του bitmap. Η μεταβλητή rgbTable είναι ένας μονοδιάστατος πίνακας από δομές τύπου RGBQUAD με μήκος colors (αυτό είναι προφανές και το μήκος των χρωμάτων). Τέλος η μεταβλητή threshold περιέχει την τιμή κατωφλίου για τις αποστάσεις d_1 και d_2 πέρα από την οποία το τρέχον pixel χαρακτηρίζεται ως pixel ακμής (edge pixel). Στην περίπτωση αυτή αποδίδουμε σε αυτό την τιμή 16, ενώ διαφορετικά, το pixel λαμβάνει την τιμή 0. Αυτές οι δύο τιμές εκφράζουν τις εισόδους της χρωματικής παλέττας για το άσπρο και το μαύρο χρώμα αντίστοιχα, για κατάσταση γραφικών με 16 χρώματα και χρησιμοποιούνται εδώ ως παράδειγμα (αυτό σημαίνει πως σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι τιμές που εκφράζουν τα δύο αυτά χρώματα). Είναι προφανές πως ο παραπάνω κώδικας εφαρμόζεται σε εικόνες των 16 και των 256 χρωμάτων οι οποίες διαθέτουν χρωματική παλέττα, ενώ για εικόνες των 24 bits θα χρησιμοποιηθούν απευθείας τα χρώματα που περιλαμβάνονται στα δεδομένα της εικόνας. Η εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου σε αρχείο εικόνας τύπου BMP παρουσιάζεται στο σχήμα 60.

32 Εξαγωγή χρώματος

Η δεύτερη ενδιαφέρουσα διαδικασία που μπορούμε να υλοποιήσουμε, αφορά την ταυτοποίηση των περιοχών της εικόνας, τα pixels της οποίας είναι ζωγραφισμένα με κάποιο συγκεκριμένο χρώμα. Για να το κάνουμε αυτό, καθορίζουμε το χρώμα που αναζητούμε μέσα στην εικόνα, και υπολογίζουμε την απόσταση του χρώματος όλων των pixels της εικόνας από αυτό το χρώμα. Εάν αυτή η απόσταση είναι μικρότερη από κάποιο κατώφλι, το pixel θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε αυτό το χρώμα και ζωγραφίζεται άσπρο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ζωγραφίζεται μαύρο. Η διαδικασία αυτή σε μορφή ψευδοκώδικα διατυπώνεται με τη μορφή

```

(1) Define the reference color C0=(R0,G0,B0)
(2) For every pixel (i,j) of the source bitmap
    (I) Extract the C=(R,G,B) components of this pixel
    (II) Compute D(C,C0)
        If D(C,C0) inferior to a parameter K, we have a pixel
        whose color matches the reference color

```

ενώ ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί αυτή τη διαδικασία, ακολουθεί στη συνέχεια.



Σχήμα 60: Εφαρμογή του αλγορίθμου ανίχνευσης ακμών

```

void ColorExtraction (BYTE ** pixels , long width , long height ,
  RGBQUAD * rgbTable , int colors , double threshold ,
  BYTE red , BYTE green , BYTE blue) {
  int counter , index ; BYTE rCl , gCl , bCl ;
  double distance ; int color ;
  for ( counter=0;counter<width;counter++) {
    for ( index=0;index<height;index++) {
      color = pixels [ counter ][ index ] ;
      rCl = rgbTable [ color ] . rgbRed ;
      gCl = rgbTable [ color ] . rgbGreen ;
      bCl = rgbTable [ color ] . rgbBlue ;
      distance = sqrt ( pow ( ( red-rCl ) , 2 ) +
        pow ( ( green-gCl ) , 2 ) +
        pow ( ( blue-bCl ) , 2 ) ) ;
      if ( distance <= threshold )
        pixels [ counter ][ index ] = ( BYTE ) 0 ;
      else pixels [ counter ][ index ] = ( BYTE ) 16 ; } } }

```

Τα ορίσματα και οι παράμετροι λειτουργίας της συνάρτησης ColorExtraction είναι ίδια με εκείνα της συνάρτησης EdgeDetection που παρουσιάσαμε στη συνέχεια. Όσον αφορά τα τρία επιπλέον ορίσματα (red, green, blue) που παίρνει η συνάρτηση ColorExtraction, αυτά είναι οι συνιστώσες του χρώματος αναφοράς τις οποίες αναζητούμε μέσα στο τρέχον αρχείο εικόνας.

33 Μετατροπή έγχρωμης εικόνας σε εικόνα gray-scale

Μια άλλη ενδιαφέρουσα μετατροπή που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω σε μία έγχρωμη εικόνα, είναι να την αντάξουμε σε εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι (gray-scale image). Όπως είναι γνωστό, σε όλα τα γκρι χρώματα, τα τρία θεμελιώδη χρώματα (red, green, blue) συνεισφέρουν κατά το ίδιο ποσοστό. Έτσι ένα γκρι χρώμα σε μορφή RGB θα γραφεί ως $C = RGB(N, N, N)$. Για $N = 0$ έχουμε το μαύρο χρώμα ($RGB(0, 0, 0)$), για $N = 32$ έχουμε το σκούρο γκρι χρώμα ($RGB(32, 32, 32)$), για $N = 128$ έχουμε το ενδιάμεσο γκρι χρώμα ($RGB(128, 128, 128)$), για $N = 192$ έχουμε το ανοικτό γκρι χρώμα ($RGB(192, 192, 192)$) και για $N = 255$ έχουμε το λευκό χρώμα ($RGB(255, 255, 255)$). Από την παραπάνω περιγραφή είναι προφανές πως όλα τα γκρι χρώματα θα ανήκουν πάνω στην κύρια διαγώνιο του τριδιάστατου χρωματικού χώρου που περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{U} = (1, 1, 1)$.

Η διαβάθμιση κάποιου χρώματος C ως προς το γκρι, ορίζεται ως η προβολή του διανύσματος \vec{C} που αντιστοιχεί

σε αυτό το χρώμα πάνω στο διάνυσμα \vec{U} . Όπως είναι γνωστό από την αναλυτική γεωμετρία, αυτή η προβολή ορίζεται από τη σχέση

$$Proj(\vec{C}/\vec{U}) = Proj((r, g, b)/(1, 1, 1)) = \frac{\vec{C}\vec{U}}{\|\vec{U}\|} \cos(\alpha) \quad (179)$$

όπου α η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα \vec{C} και \vec{U} . Είναι όμως

$$\vec{C}\vec{U} = 1 \cdot r + 1 \cdot g + 1 \cdot b = r + g + b \quad \text{και} \quad \|\vec{U}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3},$$

ήτοι, η παραπάνω σχέση γράφεται με τη μορφή

$$Proj(\vec{C}/\vec{U}) = \frac{r + g + b}{\sqrt{3}} \quad (180)$$

Θεωρώντας την περίπτωση του λευκού χρώματος που χαρακτηρίζεται από τις μέγιστες τιμές των χρωματικών συνιστωσών ($RGB(255, 255, 255)$), βρίσκουμε πως η μέγιστη τιμή της χρωματικής διαβάθμισης όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι ίση με 441.67. Προκειμένου να μεταφέρουμε αυτή την τιμή στην περιοχή τιμών $[0, 255]$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω σχέση με την ποσότητα

$$\frac{255}{255^2 + 255^2 + 255^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (181)$$

Στην περίπτωση αυτή η διαβάθμιση του κάθε χρώματος \vec{C} ως προς το γκρι θα λάβει τη μορφή

$$GrayScale(\vec{C}) = \frac{255}{\sqrt{255^2 + 255^2 + 255^2}} Proj(\vec{C}/\vec{U}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r + g + b}{\sqrt{3}} = \frac{r + b + g}{3} \quad (182)$$

Επομένως για την περίπτωση των διαβαθμίσεων του γκρι, η διαβάθμιση του κάθε χρώματος \vec{C} είναι ένα νέο χρώμα με συνιστώσες (N, N, N) όπου N είναι ο μέσος όρος των συνιστωσών των βασικών χρωμάτων (R, G, B) για αυτό το χρώμα $(N = (R + G + B)/3)$. Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική μπορούμε να ορίσουμε τις διαβαθμίσεις των χρωμάτων για οποιοδήποτε άλλο χρώμα.

Ο αλγόριθμος μετατροπής μιας έγχρωμης εικόνας σε εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι, σε μορφή ψευδοκώδικα έχει τη μορφή

- (1) For every pixel (i, j) of the source bitmap
- (I) Extract the $C=(R,G,B)$ components of this pixel
 - (II) Compute $N=GrayScale(C)$ using the above equation
 - (III) Mark pixel (i, j) on the output bitmap with color (N,N,N)

ενώ ο πραγματικός C κώδικας που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
void GrayScaleConversion (void) {
    int i, j, colors = GetColorNumber();
    int red, green, blue, gray;
    int width = GetWidth();
    int height = GetHeight();
    if (colors) {
        for (i=0; i<colors; i++) {
            red = rgbTable[i].rgbRed;
            green = rgbTable[i].rgbGreen;
            blue = rgbTable[i].rgbBlue;
            gray = (int)((red+green+blue)/3);
            rgbTable[i].rgbRed = gray;
            rgbTable[i].rgbGreen = gray;
            rgbTable[i].rgbBlue = gray; }
    else {
        for (i=0; i<width-1; i++) {
            for (j=0; j<height-1; j++) {
                red = pixMap[i][j].rgbRed;
                green = pixMap[i][j].rgbGreen;
                blue = pixMap[i][j].rgbBlue;
```

```

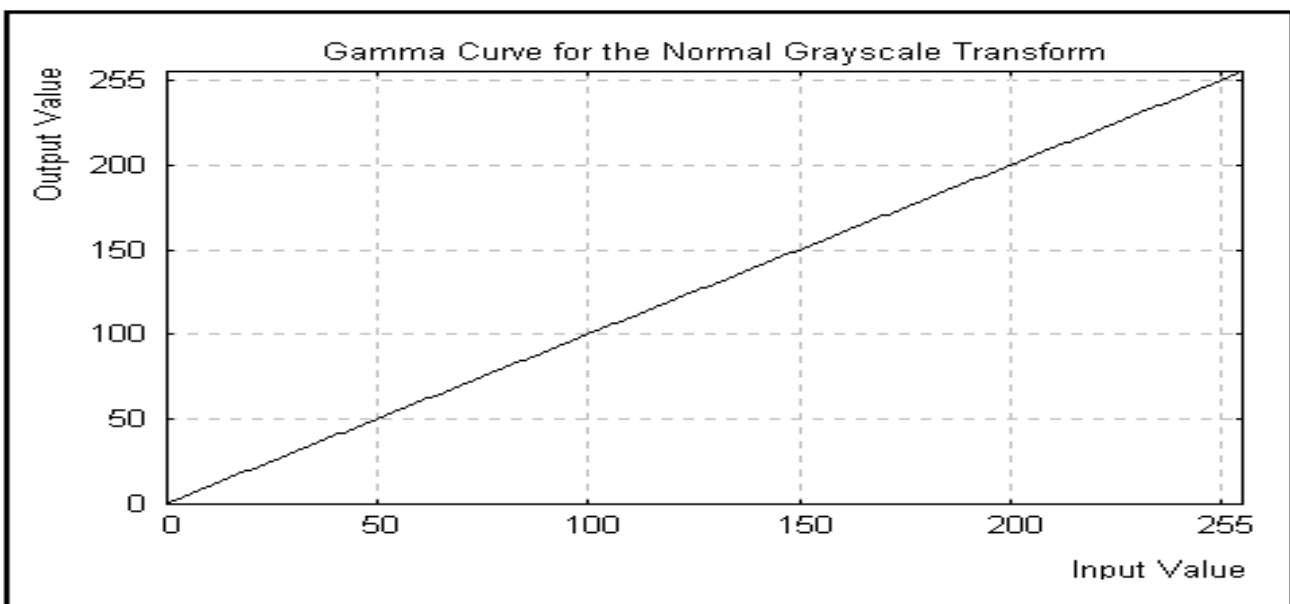
gray = (int)((red+green+blue)/3);
pixMap[i][j].rgbRed = gray;
pixMap[i][j].rgbGreen = gray;
pixMap[i][j].rgbBlue = gray; }}}}

```

34 Βασικοί Μετασχηματισμοί χρωμάτων

Οι βασικοί μετασχηματισμοί χρωμάτων ορίζονται ως απεικονίσεις με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα $[0, 255]$ (σε μαθηματική μορφή αυτό διατυπώνεται ως $f : [0, 255] \rightarrow [0, 255]$). Αυτό σημαίνει πως η απεικόνιση f θα εφαρμοσθεί σε κάποιο χρώμα που ανήκει στο παραπάνω διάστημα τιμών, και η εικόνα του χρώματος κάτω από την εφαρμογή αυτού του μετασχηματισμού θα ανήκει και αυτή στο ίδιο διάστημα. Στην περίπτωση των εικόνων, τα χρώματα των οποίων είναι της μορφής $C = (R, G, B)$, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής: (α) για κάθε χρώμα ταυτοποιούμε τις τιμές των τριών χρωματικών συνιστωσών, R, G και B (β) εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό f σε κάθε χρωματική συνιστώσα ξεχωριστά και υπολογίζουμε τις εικόνες τους $R' = f(R), G' = f(G)$ και $B' = f(B)$ και (γ) χρησιμοποιώντας τις νέες τιμές των χρωματικών συνιστωσών, επανασυνθέτουμε το νέο χρώμα που προφανώς έχει τη μορφή $C' = (R', G', B')$.

Σε πλήρη αναλογία με τις μαθηματικές απεικονίσεις, οι χρωματικές απεικονίσεις που περιγράψαμε παραπάνω χαρακτηρίζονται από μια γραφική παράσταση η οποία για κάθε τιμή εισόδου στο κλειστό διάστημα $[0, 255]$ επιτρέπει τον υπολογισμό της αντίστοιχης τιμής για την έξοδο. Αυτή η γραφική παράσταση ονομάζεται πίνακας αναζήτησης τιμών εξόδου (output lookup table) ή καμπύλη- γ (gamma-curve) και περιγράφει με μοναδικό τρόπο την κάθε χρωματική απεικόνιση. Η πιο απλή καμπύλη αυτής της μορφής είναι μια διαγώνια ευθεία με κλίση ίση με τη μονάδα η οποία περιγράφει την επονομαζόμενη ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή μια απεικόνιση της μορφής $x = f(x)$, όπου $x \in \{R, G, B\}$. Με άλλα λόγια αυτή η απεικόνιση για κάθε τιμή εισόδου που δέχεται επιστρέφει την ίδια τιμή στην έξοδο της, αφήνοντάς τη αμετάβλητη. Η καμπύλη- γ της ταυτοτικής απεικόνισης παρουσιάζεται στο σχήμα 61.



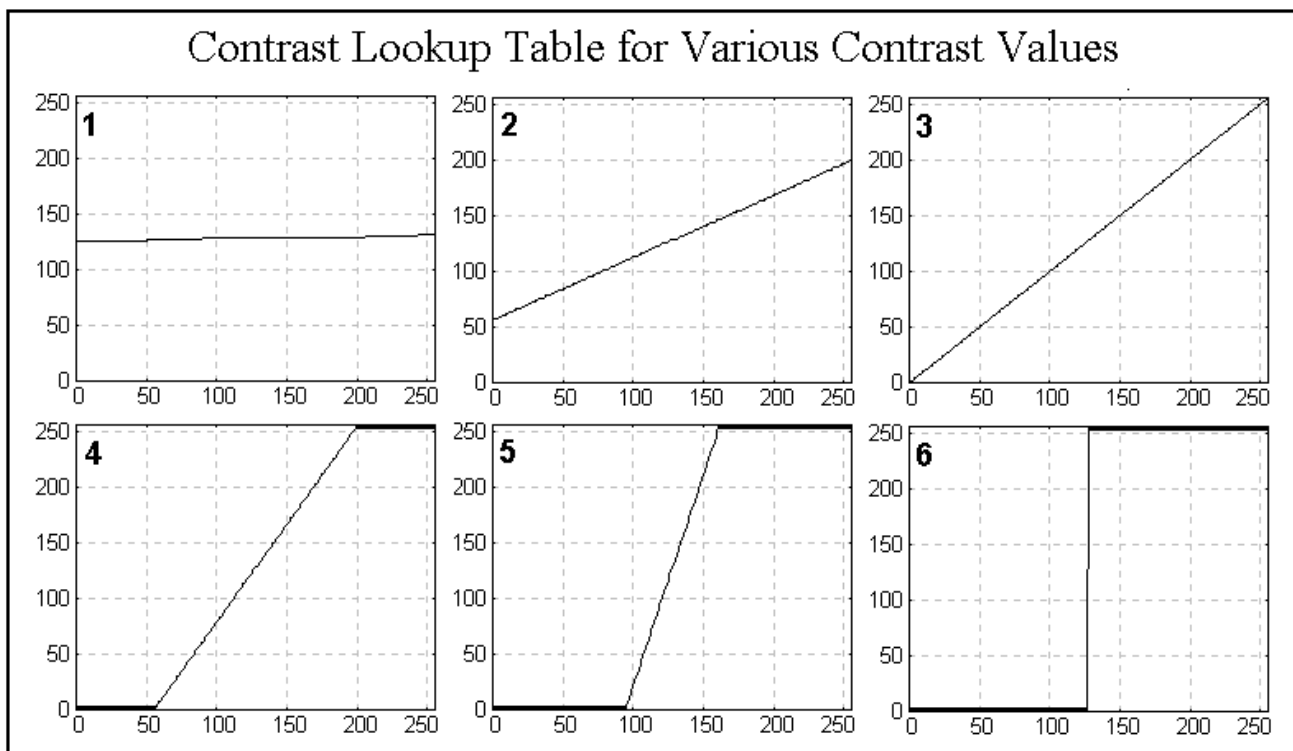
Σχήμα 61: Η καμπύλη - γ της ταυτοτικής απεικόνισης

Μιλώντας γενικά, για κάθε τύπο χρωματικής απεικόνισης, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αναζήτησης τιμών εξόδου, ή ισοδύναμα την καμπύλη- γ για αυτή την απεικόνιση. Ο πίνακας αναζήτησης (στο παράδειγμά μας ας τον ονομάσουμε Transform) έχει μήκος 256 στοιχεία, με το κάθε στοιχείο να περιέχει την έξοδο του μετασχηματισμού για το κάθε ένα από τα 256 χρώματα. Αυτό σημαίνει πως για κάθε χρώμα i , η εικόνα του κάτω από την εφαρμογή του μετασχηματισμού, είναι η τιμή $\text{Transform}[i]$. Επομένως για να σχεδιάσουμε τη μετασχηματισμένη εικόνα, θα καλέσουμε τη συνάρτηση του συστήματος που χρησιμοποιούμε για τη σχεδίαση των pixels της εικόνας, με ορίσματα, όχι τα (R, G, B) αλλά τα $(\text{Transform}[R], \text{Transform}[G], \text{Transform}[B])$. Η διαδικασία αυτή σε μορφή ψευδοκώδικα παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Calculate the Look-up Table for the desired transform. For each index j from 0 to 255 is stored its image by the transform in $\text{transform}[j]$.

- (1) For every pixel (i, j) of the source bitmap
 - (I) Extract the $C=(R,G,B)$ components of this pixel
 - (II) Mark pixel (i, j) on the output bitmap with color $(\text{Transform}[R], \text{Transform}[G], \text{Transform}[B])$

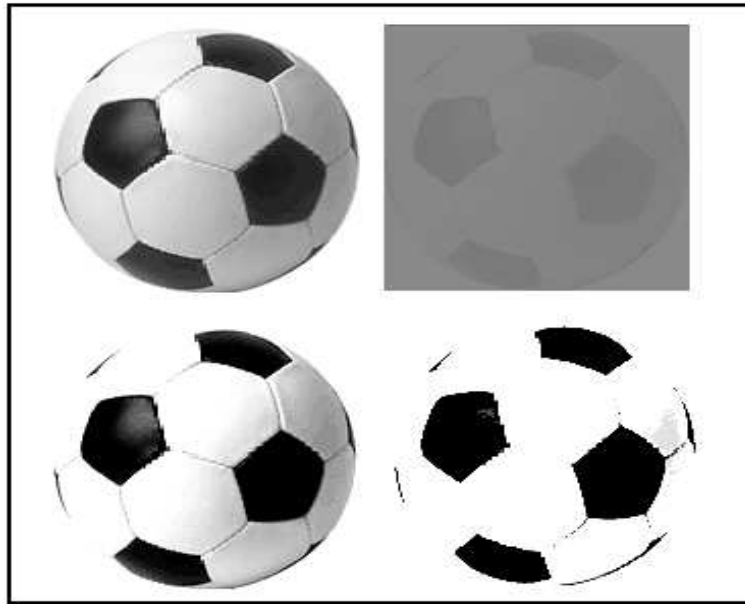
Οι πιο χαρακτηριστικοί τύποι τέτοιων απεικονίσεων είναι οι χρωματικοί μετασχηματισμοί της αντίθεσης (contrast) και της φωτεινότητας (brightness). Η αντίθεση ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην καμπύλη- γ του χρωματικού μετασχηματισμού και στον οριζόντιο άξονα. Στην περίπτωση του ταυτοτικού μετασχηματισμού η γραφική παράσταση του οποίου παρουσιάζεται στο σχήμα 61, η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην ευθεία $y = x$ και στον οριζόντιο άξονα, είναι ίση με 45° και η κλίση της είναι ίση με τη μονάδα. Αυτό σημαίνει πως τιμή αντίθεσης ίση με $\pi/4$ (σε μονάδες radians) αφήνει την εικόνα ανεπηρέαστη. Σημαντικές μεταβολές αρχίζουν να εμφανίζονται όταν η αντίθεση αυξηθεί τουλάχιστον κατά 15° . Εάν η αντίθεση γίνει ίση με το μηδέν, η καμπύλη- γ θα γίνει οριζόντια και θα απέχει από τον άξονα των x απόσταση ίση με 128. Αυτό σημαίνει πως όλες οι χρωματικές συνιστώσες θα απεικονισθούν κάτω από την εφαρμογή του χρωματικού μετασχηματισμού, στην τιμή 128, και επομένως όλα τα pixels της εικόνας θα λάβουν το χρώμα του ενδιάμεσου γκρι (intermediate gray). Από την άλλη πλευρά, εάν η αντίθεση λάβει πολύ μεγάλες τιμές, όλα τα χρώματα θα απεικονισθούν είτε στη θέση 0, είτε στη θέση 255, ανάλογα με την απόστασή τους από την τιμή 128. Επομένως, η εικόνα θα περιέχει μόνο οκτώ διαφορετικά χρώματα, που είναι τα $RGB(255, 255, 255)$, $RGB(255, 255, 0)$, $RGB(255, 0, 255)$, $RGB(0, 255, 255)$, $RGB(255, 0, 0)$, $RGB(0, 255, 0)$, $RGB(0, 0, 255)$ και $RGB(0, 0, 0)$. Το σχήμα 62 περιέχει την καμπύλη- γ του μετασχηματισμού της αντίθεσης, για τις τιμές $\varphi = 0^\circ$ (εικόνα 1), $\varphi = 30^\circ$ (εικόνα 2), $\varphi = 45^\circ$ (εικόνα 3), $\varphi = 60^\circ$ (εικόνα 4), $\varphi = 75^\circ$ (εικόνα 5) και $\varphi = 90^\circ$ (εικόνα 6).



Σχήμα 62: Η καμπύλη- γ του μετασχηματισμού της αντίθεσης για διάφορες τιμές της γωνίας φ

Η κατασκευή του πίνακα αναζήτησης για το μετασχηματισμό της αντίθεσης (η γραφική παράσταση του οποίου παρουσιάζεται στο σχήμα 62) μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον κώδικα C που ακολουθεί στη συνέχεια.

```
for (counter=0; counter < 256; counter++){
    if ((counter < (int)(128 + 128.0 * tan(phi))) &&
```

Σχήμα 63: Παράδειγμα εφαρμογής του μετασχηματισμού της αντίθεσης για τιμές αντίθεσης $\varphi = 45^\circ$ (εικόνα a), $\varphi = 4^\circ$ (εικόνα b), $\varphi = 60^\circ$ (εικόνα c) και $\varphi = 45^\circ$ (εικόνα d)

```

    ( counter > (int)(128 - 128 * tan(phi)) )
      contrast [ counter ] = (int) ( ( (double) counter - 128 ) / tan(phi) ) + 128;
  else if ( counter >= (int)(128 + 128 * tan(phi)) )
      contrast [ counter ] = COLORS - 1;
  else contrast [ counter ] = 0; }

```

Από τον παραπάνω κώδικα παρατηρούμε πως για χρώματα που βρίσκονται στο διάστημα $(128(1 - \tan(\varphi)), 128(1 + \tan(\varphi)))$ (με τη γωνία φ να είναι εκπεφρασμένη σε radians) η εικόνα του χρώματος i κάτω από την εφαρμογή του μετασχηματισμού της αντίθεσης είναι το χρώμα

$$Transform[i] = \frac{i - 128}{\tan(\varphi)} + 128 \quad (183)$$

Για $\varphi = 45^\circ$ είναι $\tan(\varphi) = 1$ και η παραπάνω σχέση γράφεται

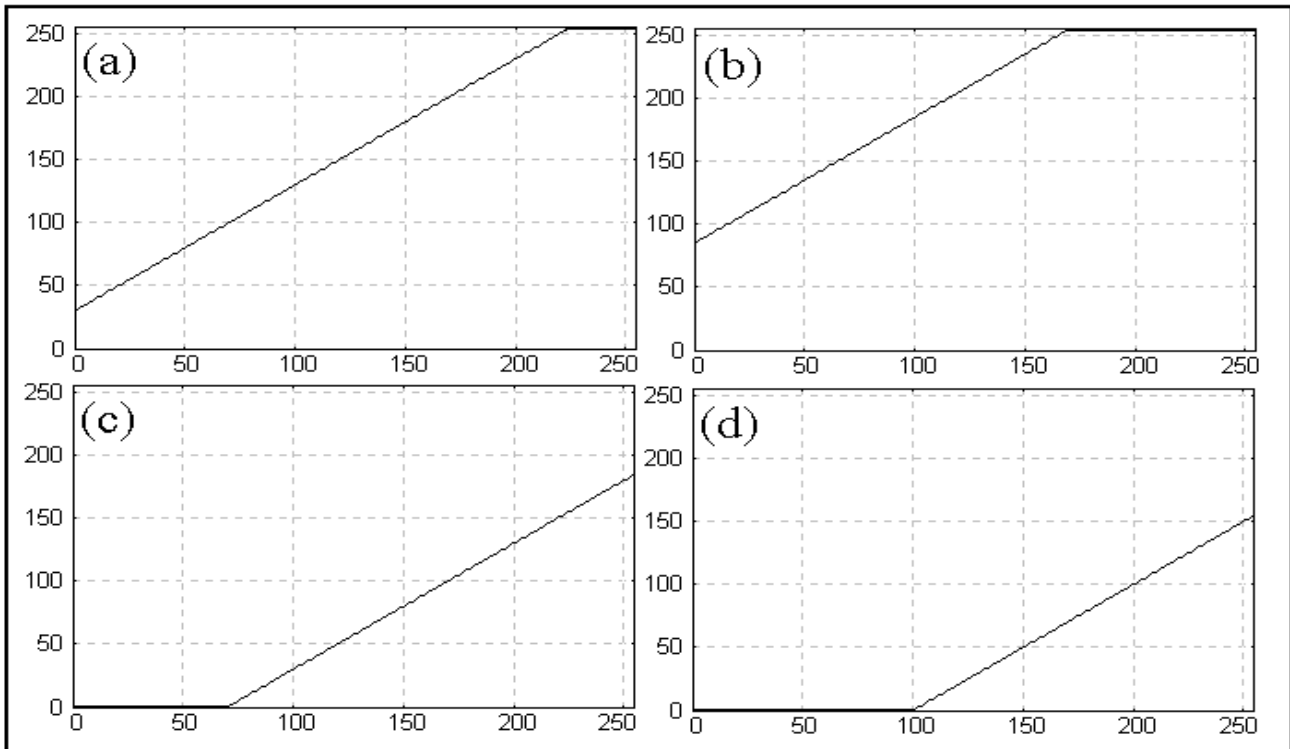
$$Transform[i] = \frac{i - 128}{\tan(\varphi)} + 128 = \frac{i - 128}{1} + 128 = i + 128 - 128 = i \quad (184)$$

και επομένως καταλήγουμε στον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Αυτό επαληθεύει την πρόταση στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως σύμφωνα με την οποία η τιμή της αντίθεσης ίση με 45° , αφήνει την εικόνα μας αμετάβλητη. Είναι ακόμη ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως για $\varphi = 45^\circ$, το διάστημα τιμών για το οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση, είναι το $(128(1 - \tan(\varphi)), 128(1 + \tan(\varphi))) = (128(1 - \tan(45^\circ)), 128(1 + \tan(45^\circ))) = (128(1 - 1), 128(1 + 1)) = (0, 256)$ που καλύπτει όλη τη χρωματική περιοχή. Αντίθετα για μεγαλύτερες τιμές της γωνίας φ , το διάστημα αυτό συρρικνώνεται. Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός της αντίθεσης θα εφαρμοσθεί μόνο στα χρώματα που βρίσκονται εντός αυτού του διαστήματος. Όσον αφορά τα υπόλοιπα χρώματα, αυτά που βρίσκονται πριν από την αρχή του διαστήματος θα απεικονισθούν στην τιμή 0, ενώ εκείνα που βρίσκονται μετά το πέρας του διαστήματος, θα απεικονισθούν στην τιμή 255, όπως εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει παρατηρώντας τις εικόνες του σχήματος 62.

Από την άλλη πλευρά, για τιμές της αντίθεσης μικρότερες από 45° , η κλίση της ευθείας ελλαττώνεται, ενώ η αρχή της δεν βρίσκεται πια στο μηδέν αλλά αρχίζει να ανεβαίνει προς τα πάνω. Μόλις η γωνία φ γίνει ίση με 0° , η καμπύλη $- \gamma$ του μετασχηματισμού της αντίθεσης έχει γίνει οριζόντια και ευρίσκεται στη θέση $y = 128$. Αυτό σημαίνει πως όλα τα χρώματα κάτω από την επίδραση του εν λόγω μετασχηματισμού θα απεικονισθούν τώρα στην τιμή 128, και σύμφωνα με τα όσα έχουμε ήδη αναφέρει, η εικόνα μας θα περιέχει ένα και μοναδικό χρώμα που είναι το ενδιάμεσο γκρι (intermediate gray).

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του μετασχηματισμού της αντίθεσης σε εικόνα τύπου BMP παρουσιάζεται στο σχήμα 63, για τιμές αντίθεσης $\varphi = 45^\circ$ (εικόνα a), $\varphi = 4^\circ$ (εικόνα b), $\varphi = 60^\circ$ (εικόνα c) και $\varphi = 45^\circ$ (εικόνα d).

Από την άλλη πλευρά, ο μετασχηματισμός της φωτεινότητας (brightness), δεν κάνει τίποτε άλλο, από το να προσθέτει σε κάθε μια από τις συνιστώσες R, G και B του κάθε χρώματος, μια σταθερά ποσότητα M . Εάν η ποσότητα αυτή είναι θετική ο μετασχηματισμός επιφέρει αύξηση της φωτεινότητας, ενώ εάν η ποσότητα αυτή είναι αρνητική, ο μετασχηματισμός επιφέρει μείωση της φωτεινότητας της εικόνας. Είναι προφανές, πως το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού της φωτεινότητας επηρεάζεται από το γεγονός πως η έξοδος του εν λόγω μετασχηματισμού, είναι φραγμένη, καθώς ανήκει στο διάστημα $[0, 255]$. Αυτό σημαίνει πως εάν η πρόσθεση της ποσότητας M σε κάποια από τις χρωματικές συνιστώσες οδηγήσει σε μία τιμή μεγαλύτερη από 255, αυτή η τιμή θα μειωθεί και θα εξισωθεί με την τιμή 255. Με εντελώς ανάλογο τρόπο, εάν η αφαίρεση της φωτεινότητας M , οδηγήσει σε μία τιμή μικρότερη από το μηδέν, αυτή θα αυξηθεί και θα εξισωθεί με την τιμή 0, έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να ανήκει πάντα στο διάστημα $[0, 255]$. Τυπικές μορφές της καμπύλης $-γ$ για το μετασχηματισμό της φωτεινότητας, παρουσιάζονται στο σχήμα 64.



Σχήμα 64: Τυπικές καμπύλες $-γ$ για το μετασχηματισμό της φωτεινότητας και για τις τιμές $M=30$ (εικόνα a), $M=85$ (εικόνα b), $M=-70$ (εικόνα c) και $M=-100$ (εικόνα d)

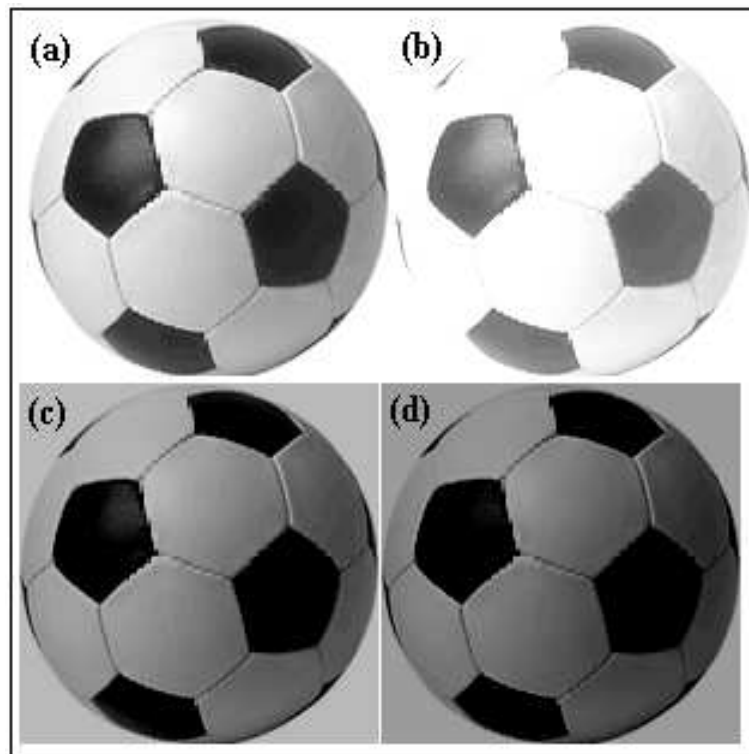
Από τα όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι προφανές πως η δημιουργία του πίνακα αναζήτησης για το μετασχηματισμό της φωτεινότητας είναι μια σχετικά απλή διαδικασία. Ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί τον εν λόγω πίνακα παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
int counter, bValue = GetBrightness();
for (counter=0; counter<COLORS; counter++) {
    brightness[counter]=counter+bValue;
    if (brightness[counter]>(COLORS-1))
        brightness[counter]=COLORS-1;
    else if (brightness[counter]<0)
        brightness[counter]=0; }
```

Τυπικά παραδείγματα εφαρμογής του μετασχηματισμού της φωτεινότητας παρουσιάζονται στο σχήμα 65.

35 Μεταβολή του μεγέθους της εικόνας

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση μετασχηματισμού εικόνας είναι η αλλαγή του μεγέθους της τόσο κατά την οριζόντια όσο και κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση. Το βασικό πρόβλημα που χαρακτηρίζει την περίπτωση αυτή,



Σχήμα 65: Τυπικές παραδείγματα εφαρμογής του μετασχηματισμού της φωτεινότητας για τις τιμές $M=0$ (εικόνα a), $M=70$ (εικόνα b), $M=-70$ (εικόνα c) και $M=-100$ (εικόνα d)

είναι το χρώμα με το οποίο θα ζωγραφίσουμε τα pixels της εικόνας που θα προκύψει, καθώς η αντιστοιχία των pixels της αρχικής και της τελικής εικόνας, δεν είναι πλέον ένα προς ένα. Υπάρχουν δύο τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ταυτοποίηση του χρώματος των pixels της εικόνας εξόδου, η πρώτη εκ των οποίων στηρίζεται στο χρωματισμό των εικονοστοιχείων χρησιμοποιώντας τα χρώματα των κοντινότερων γειτόνων (nearest neighbors) ενώ η δεύτερη είναι μια βελτιωμένη μέθοδος που στηρίζεται στην τεχνική της γραμμικής παρεμβολής (linear interpolation). Στις επόμενες παραγράφους θα αναπτύξουμε αυτές τις δύο μεθόδους για την περίπτωση της μεταβολής του πλάτους της εικόνας. Η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μεταβολή του ύψους της εικόνας, ενώ εάν η εν λόγω μέθοδος εφαρμοσθεί τόσο για το πλάτος όσο και για το ύψος της εικόνας, μπορούμε να μεταβάλλουμε το μέγεθος της εικόνας και προς τις δύο διαστάσεις.

Έστω W_1 το αρχικό πλάτος της εικόνας και W_2 η τιμή του πλάτους της μετά την μεταβολή των διαστάσεων της εικόνας. Εάν θεωρήσουμε ένα εικονοστοιχείο που βρίσκεται στη στήλη υπ' αριθμόν x της εικόνας εξόδου (η γραμμή στην οποία ευρίσκεται το εικονοστοιχείο δεν μας ενδιαφέρει διότι δεν πρόκειται να αλλάξει), τότε η αντίστοιχη στήλη c της εικόνας εισόδου που αντιστοιχεί στο εν λόγω εικονοστοιχείο, θα δίδεται από τη σχέση

$$c = x \frac{W_1}{W_2} \quad (185)$$

Το πρόβλημα που δημιουργείται στην προκειμένη περίπτωση είναι πως σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, η τιμή του c είναι πραγματικός αριθμός, και επομένως θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε κάποια ακέραια τιμή, δεδομένου ότι οι θέσεις των εικονοστοιχείων επί της οθόνης περιγράφονται από ακέραιες συντεταγμένες. Το ποια θα είναι αυτή η ακέραια τιμή, είναι κάτι που εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς c . Έστω ότι το αρχικό πλάτος μιας εικόνας είναι $W_1 = 650$ (σε μονάδες pixels) ενώ το τελικό της πλάτος είναι ίσο με $W_2 = 750$. Στην περίπτωση αυτή ο λόγος (W_1/W_2) είναι ίσος με 0.866666. Εάν τώρα θεωρήσουμε το pixel που βρίσκεται στην υπ' αριθμόν 350 στήλη της εικόνας εξόδου, τότε η αντίστοιχη στήλη της εικόνας εισόδου για αυτό το pixel είναι η 303.3. Επειδή το δεκαδικό μέρος αυτής της τιμής είναι μικρότερο από 0.5, η παραπάνω συντεταγμένη θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί στην αμέσως μικρότερη ακέραια τιμή που είναι η 303. Αντίθετα, εάν θεωρήσουμε την υπ' αριθμόν 345 στήλη της εικόνας εξόδου, τότε η αντίστοιχη στήλη της εικόνας εισόδου θα είναι η 298.9 η οποία προφανώς θα στρογγυλοποιηθεί στην αμέσως μεγαλύτερη τιμή που είναι η 299. Εάν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $I(c)$ για να συμβολίσουμε το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού c , είναι προφανές, πως η στήλη της εικόνας εισόδου που αντιστοιχεί στην υπ' αριθμόν x στήλη της εικόνας εξόδου, θα είναι είτε η $I(c)$ είτε η $I(c) + 1$ όπου η ποσότητα c υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση 185. Υπολογίζοντας την τιμή της παραπάνω στήλης, το μόνο που έχουμε να κάνουμε,

είναι να χρωματίσουμε το εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου, χρησιμοποιώντας το χρώμα του pixel που βρίσκεται στη θέση $I(c)$ ή $I(c) + 1$ (ανάλογα με την τιμή της ποσότητας c) της εικόνας εισόδου.

Η παραπάνω μέθοδος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση μεταβολής του πλάτους της εικόνας κατά ένα μικρό ποσοστό, αλλά δεν λειτουργεί σωστά σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η μεταβολή του πλάτους της εικόνας είναι αρκετά μεγάλη. Για να μπορέσουμε να λάβουμε πιο ομαλές χρωματικές μεταβολές σε περιπτώσεις σημαντικών μεταβολών του πλάτους της εικόνας, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής, σύμφωνα με την οποία το χρώμα του εικονοστοιχείου που βρίσκεται στην υπ' αριθμόν x στήλη της εικόνας εξόδου, βρίσκεται από την εφαρμογή της μεθόδου της γραμμικής παρεμβολής στα χρώματα των στηλών $I(c)$ και $I(c) + 1$. Σύμφωνα με τη θεωρία της γραμμικής παρεμβολής, το χρώμα του εικονοστοιχείου της στήλης x της εικόνας εξόδου θα δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} Color(x) &= Color(I(c)) + F(c) \times \frac{Color(I(c) + 1) - Color(I(c))}{(i + 1) - 1} \\ &= Color(I(c)) + F(c) \times (Color(I(c) + 1) - Color(I(c))) \end{aligned}$$

όπου $F(c)$ είναι το δεκαδικό μέρος της ποσότητας c έτσι όπως αυτή υπολογίζεται δια της εφαρμογής της εξίσωσης 185.

Η παραπάνω διαδικασία σε μορφή ψευδοκώδικα παρουσιάζεται στη συνέχεια:

- 1) Resize the bitmap object
- 2) For every pixel (i, j) on the output bitmap
 - I) Compute the value of the c column of the input bitmap
 - II) Extract the (R,G,B) components of the pixels (i, I(c)) and (i, I(c)+1) in the source bitmap
 - III) Mark pixel (i, j) on the output bitmap with color calculated through the linear interpolation equation

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εφόσον επιθυμούμε να αλλάξουμε το ύψος του bitmap (η παραπάνω διαδικασία έτσι όπως είναι γραμμένη χρησιμοποιείται στην περίπτωση μεταβολής του πλάτους του bitmap).

Είναι προφανές πως η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής θα πρέπει να εφαρμοσθεί σε κάθε μια από τις χρωματικές συνιστώσες ξεχωριστά. Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτή τη διαδικασία ας θεωρήσουμε τη στήλη x της εικόνας εξόδου, για την οποία η αντίστοιχη στήλη της εικόνας εισόδου έτσι όπως υπολογίζεται δια της εφαρμογής της εξίσωσης 185, είναι η c . Έστω $C_1 = (R_1, G_1, B_1)$ και $C_2 = (R_2, G_2, B_2)$ τα χρώματα των εικονοστοιχείων της εικόνας εισόδου που βρίσκονται στις θέσεις $(r, I(c))$ και $(r, I(c) + 1)$, για δεδομένη γραμμή r . Στην περίπτωση αυτή οι χρωματικές συνιστώσες του χρώματος με το οποίο θα ζωγραφίσουμε το εικονοστοιχείο (r, x) της εικόνας εξόδου, θα δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R' &= R_1 + F(c)(R_2 - R_1) \\ G' &= G_1 + F(c)(G_2 - G_1) \\ B' &= B_1 + F(c)(B_2 - B_1) \end{aligned}$$

όπου $F(c)$ είναι το δεκαδικό μέρος της παραμέτρου c . Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να ζωγραφίσουμε τα εικονοστοιχεία της εικόνας εξόδου σε περίπτωση μεταβολής του πλάτους της εικόνας, ενώ ανάλογη διαδικασία θα πρέπει να εφαρμοσθεί σε περίπτωση μεταβολής του ύψους της εικόνας.

Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται χωρίς κανένα πρόβλημα στην περίπτωση των εικόνων που χρησιμοποιούν 24 bits για την κωδικοποίηση του κάθε χρώματος. Στην περίπτωση αυτή η εικόνα δεν διαθέτει χρωματική παλέττα και αμέσως μετά τα περιεχόμενα των επικεφαλίδων BITMAPFILEHEADER και BITMAPINFOHEADER ακολουθούν απευθείας τα χρώματα των pixels της εικόνας αποθηκευμένα κατά την αντίστροφη σειρά (B, G, R) και κατά την αντίστροφη διάταξη (δηλαδή από κάτω προς τα πάνω και από αριστερά προς τα δεξιά). Προκειμένου λοιπόν να μεταβάλλουμε τις διαστάσεις της εικόνας δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε για κάθε εικονοστοιχείο τις νέες χρωματικές συνιστώσες, και να αντικαταστήσουμε με αυτές τις παλαιές τιμές (υποτίθεται βέβαια πως σε προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας έχουμε δεσμεύσει την κατάλληλη ποσότητα μνήμης). Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση κατά την οποία η εικόνα διαθέτει λιγότερα χρώματα και επομένως χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη χρωματικής παλέττας; Στην περίπτωση αυτή είναι πολύ πιθανό το νέο χρώμα που θα προκύψει, να μην ανήκει στα χρώματα της χρωματικής παλέττας. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο λύσεις όσον αφορά την προγραμματιστική πλευρά του θέματος: η πρώτη λύση είναι να υπολογίσουμε για κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας τις νέες χρωματικές συνιστώσες και στη συνέχεια να τις χρησιμοποιήσουμε για τη σχεδίαση του εικονοστοιχείου στην οθόνη του υπολογιστή μας χωρίς να μεταβάλλουμε το περιεχόμενο του αρχείου. Το προφανές πρόβλημα στην περίπτωση αυτή είναι πως εάν για κάποιο λόγο χρειαστεί να επανασχεδιάσουμε τη μετασχηματισμένη εικόνα θα πρέπει να τρέξουμε τον αλγόριθμο

από την αρχή, αφού τα περιεχόμενα του αρχείου δεν θα έχουν τροποποιηθεί. Η δεύτερη λύση στην οποία μπορούμε να καταφύγουμε, είναι να υπολογίσουμε το νέο χρώμα του κάθε εικονοστοιχείου, και εφόσον αυτό δεν υπάρχει στη χρωματική παλέττα, να το αντικαταστήσουμε με το πλησιέστερο προς αυτό χρώμα της παλέττας όπου η έννοια του πλησιέστερου χρώματος αναφέρεται σε εκείνο το χρώμα της παλέττας η απόσταση του οποίου από το υπολογισθέν χρώμα του εικονοστοιχείου, είναι η ελάχιστη δυνατή. Υπενθυμίζουμε από τη βασική θεωρία πως η αναπαράσταση των χρωμάτων ως η υπέρθεση των τριών χρωματικών συνιστώσων (R, G, B) , μας επιτρέπει να τα διαπραγματευτούμε ως διανύσματα ορισμένα σε ένα χρωματικό χώρο τριών διαστάσεων η απόσταση των οποίων σύμφωνα με τις αρχές της Ευκλείδειας γεωμετρίας, θα δίδεται από τη σχέση

$$d(\vec{C}_1, \vec{C}_2) = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (G_2 - G_1)^2 + (B_2 - B_1)^2} \quad (186)$$

όπου (R_1, G_1, B_1) και (R_2, G_2, B_2) είναι οι χρωματικές συνιστώσες των χρωμάτων C_1 και C_2 αντίστοιχα.

Η συνάρτηση `GetClosestColor(int red, int green, int blue)` που ακολουθεί στη συνέχεια, δέχεται ως είσοδο (υπό τη μορφή ορισμάτων) τις νέες χρωματικές συνιστώσες που υπολογίσθηκαν από τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής και επιστρέφει την είσοδο της χρωματικής παλέττας το χρώμα της οποίας απέχει τη μικρότερη απόσταση από το δεδομένο χρώμα εισόδου.

```
int GetClosestColor (int red , int green , int blue) {
    int i , minColor = 0 , colors = GetColorNumber ();
    double distance , minDist = 0.0;
    for (i=0;i<colors;i++) {
        distance = CalcDist (red , green , blue , rgbTable [i].rgbRed ,
                               gbTable [i].rgbGreen , rgbTable [i].rgbBlue);
        if (distance<minDist) {
            minDist = distance;
            minColor = i; }
    return (minColor); }
```

Η συνάρτηση `CalcDist` που χρησιμοποιείται στον παραπάνω κώδικα, δέχεται ως είσοδο τις χρωματικές συνιστώσες δύο χρωμάτων και επιστρέφει τη μεταξύ τους απόσταση:

```
double CalcDist (int r1 , int g1 , int b1 ,
                 int r2 , int g2 , int b2) {
    return sqrt (pow ((r2-r1),2)+pow ((g2-g1),2)+
                pow ((b2-b1),2)); }
```

Με τη βοήθεια των παραπάνω συναρτήσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση `ConfigureResizedBitmap`. Αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιεί δύο αντικείμενα τύπου `TBitmap` εκ των οποίων το αντικείμενο `bmpFile` περιέχει το αυθεντικό αρχείο εικόνας, ενώ το αντικείμενο `tempBmpFile` περιέχει το αρχείο εικόνας μετά τη διαδικασία μεταβολής του πλάτους της. Η συνάρτηση χρησιμοποιεί δύο μεταβλητές, τις `prev` και `next` για να αποθηκεύσει τις τιμές $I(c)$ και $I(c) + 1$ (στον κώδικα που ακολουθεί η μεταβλητή `column` αντιστοιχεί στην παράμετρο c της θεωρητικής εισαγωγής που προηγήθηκε), ενώ η παράμετρος `frac` περιέχει το δεκαδικό μέρος της μεταβλητής `column` που χρησιμοποιείται στις εξισώσεις της γραμμικής παρεμβολής για τον υπολογισμό των τιμών των νέων χρωματικών συνιστωσών. Αν και αυτός ο τρόπος προγραμματισμού είναι εξαιρετικά απλόιχος και επιδέχεται προφανείς διαδικασίες βελτιστοποίησης, εν τούτοις υιοθετείται για λόγους πληρέστερης κατανόησης της διαδικασίας, και ευκολότερης αντιπαράβολής της θεωρητικής εισαγωγής με τον επόμενο κώδικα.

```
void ConfigureResizedBitmap (void) {
    int i , width = tempBmpFile->GetWidth ();
    int j , height = tempBmpFile->GetHeight ();
    double ratio = (double)(bmpFile->GetWidth())/width;
    double column; int prev , next; double frac;
    int prevColor , nextColor , colors = bmpFile->GetColorNumber ();
    int prevRed , prevGreen , prevBlue , nextRed , nextGreen , nextBlue;
    int newRed , newGreen , newBlue;
    // this code is executed if we have a 16-colors
    // or a 256-colors bitmap
    for (i=0;i<width-1;i++) {
        for (j=0;j<height-1;j++) {
            column = (double)(i)*ratio;
```

```

prev = (int)column; next = prev+1;
frac = column - prev;
prevColor = bmpFile->pixels [prev][j];
nextColor = bmpFile->pixels [next][j];
prevRed = bmpFile->rgbTable [prevColor].rgbRed;
prevGreen = bmpFile->rgbTable [prevColor].rgbGreen;
prevBlue = bmpFile->rgbTable [prevColor].rgbBlue;
nextRed = bmpFile->rgbTable [nextColor].rgbRed;
nextGreen = bmpFile->rgbTable [nextColor].rgbGreen;
nextBlue = bmpFile->rgbTable [nextColor].rgbBlue;
newRed = (int)(prevRed + frac * (nextRed-prevRed));
newGreen = (int)(prevGreen + frac * (nextGreen-prevGreen));
newBlue = (int)(prevBlue + frac * (nextBlue-prevBlue));
if (colors)
    tempBmpFile->pixels [i][j] =
        GetClosestColor (newRed, newGreen, newBlue);
else {
    tempBmpFile->pixMap [i][j].rgbRed = newRed;
    tempBmpFile->pixMap [i][j].rgbGreen = newGreen;
    tempBmpFile->pixMap [i][j].rgbBlue = newBlue; }
tempBmpFile->DrawBitmap (); }

```

Στον παραπάνω κώδικα χρησιμοποιούμε τη σύμβαση σύμφωνα με την οποία εάν μια εικόνα έχει χρωματική παλέττα το πλήθος των χρωμάτων της (που επιστρέφεται από τη συνάρτηση GetColorNumber()) είναι διαφορετικό του μηδενός, ενώ στην αντίθετη περίπτωση (που αναφέρεται σε εικόνες των 24 bit) το πλήθος των χρωμάτων είναι ίσο με το μηδέν.

36 Περιστροφή της εικόνας

Μετά την ανάπτυξη κώδικα για τη μεταβολή του μεγέθους της εικόνας, ας περάσουμε τώρα στην περιγραφή του αλγορίθμου που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να περιστρέψουμε την εικόνα κατά μια ορισμένη γωνία φ . Εάν (x, y) είναι οι συντεταγμένες ενός εικονοστοιχείου μιας εικόνας, η οποία στη συνέχεια περιστρέφεται κατά γωνία φ γύρω από το κέντρο της (που έχει συντεταγμένες (x_0, y_0)) τότε, οι συντεταγμένες του αντίστοιχου εικονοστοιχείου της εικόνας που έχει περιστραφεί, θα δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x' &= (x - x_0)\cos(\varphi) - (y - y_0)\sin(\varphi) + x_0 \\y' &= (x - x_0)\sin(\varphi) + (y - y_0)\cos(\varphi) + y_0\end{aligned}$$

Εάν εφαρμόσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό συντεταγμένων σε κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου, θα λάβουμε μια εικόνα εξόδου, με πολλές κενές περιοχές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι συντεταγμένες των pixels μιας εικόνας είναι ακέραιοι αριθμοί, και επομένως κάποια ζεύγη συντεταγμένων (x', y') δεν πρόκειται να υπολογισθούν ποτέ. Για το λόγο αυτό εκείνο που κάνουμε είναι να ξεκινήσουμε από τα pixels της εικόνας εξόδου, και εφαρμόζοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς, να υπολογίσουμε το αντίστοιχο pixel της εικόνας εισόδου. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, εκείνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ζωγραφίσουμε το pixel της εικόνας εξόδου, χρησιμοποιώντας το χρώμα που φέρει το αντίστοιχο pixel της εικόνας εισόδου, που έχει προκύψει δια της εφαρμογής των αντίστροφων μετασχηματισμών. Όσον αφορά τη μαθηματική μορφή αυτών των μετασχηματισμών, αυτή παρουσιάζεται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned}x &= (x' - x_0)\cos(-\varphi) - (y' - y_0)\sin(-\varphi) + x_0 \\y &= (x' - x_0)\sin(-\varphi) + (y' - y_0)\cos(-\varphi) + y_0\end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία σε μορφή ψευδοκώδικα έχει τη μορφή

```

For every pixel (x',y') on the output bitmap
1) Compute the antecedent pixel of the input image (x,y)
2) Mark pixel (x',y') on the output bitmap with the same
   color as pixel (x,y) of the input bitmap

```

Ας περάσουμε τώρα στις λεπτομέρειες υλοποίησης του παραπάνω ψευδοκώδικα στη γλώσσα προγραμματισμού *C*. Το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να κάνουμε είναι να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση η οποία να δέχεται ως είσοδο ένα ζεύγος συντεταγμένων (x, y) και να ελέγχει εάν αυτό ανήκει ή όχι στην εικόνα εισόδου. Αυτή η διαδικασία ελέγχου είναι αναγκαία καθώς είναι πολύ πιθανό, η εφαρμογή του ανωτέρω μετασχηματισμού σε ένα ζεύγος συντεταγμένων της εικόνας εξόδου, να οδηγήσει σε ένα σημείο που να μην ανήκει στην εικόνα εισόδου, αλλά σε μια περιοχή εκτός αυτής. Στην περίπτωση κατά την οποία το pixel της εικόνας εξόδου απεικονίζεται σε κάποιο pixel της εικόνας εισόδου, τότε ζωγραφίζεται με το χρώμα που αντιστοιχεί σε αυτό το pixel, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ζωγραφίζεται με κάποιο προεπιλεγμένο χρώμα (για παράδειγμα το λευκό χρώμα). Ο κώδικας της συνάρτησης `BelongsToBitmap` παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```

BOOL BelongsToBitmap (int x, int y) {
    int width = GetWidth(), height = GetHeight();
    if ((x>0)&&(x<width)&&(y>0)&&(y<height)) return (TRUE);
    else return (FALSE); }

```

Από τη μελέτη του παραπάνω κώδικα δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε πως η λειτουργία του είναι εξαιρετικά απλή. Εκείνο που κάνουμε είναι να διαβάζουμε τις συντεταγμένες εισόδου (x, y) καθώς επίσης το πλάτος και το ύψος του bitmap. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε πως το σημείο (x, y) αντιστοιχεί σε εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου, εάν οι συντεταγμένες x και y είναι θετικές και τέτοιες ώστε το x να είναι μικρότερο από το πλάτος του bitmap ενώ το y να είναι μικρότερο από το ύψος του bitmap. Εάν ικανοποιούνται όλες αυτές οι συνθήκες, το σημείο (x, y) ανήκει στην εικόνα εισόδου και η συνάρτηση επιστρέφει τιμή `TRUE`, ενώ στην αντίθετη περίπτωση το σημείο δεν ανήκει στην εικόνα εισόδου και η συνάρτηση επιστρέφει τιμή `FALSE`.

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας εκείνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε όλα τα pixels της εικόνας εξόδου, και για κάθε ένα από αυτά να ταυτοποιήσουμε το αντίστοιχο pixel της εικόνας εισόδου όπως αυτό υπολογίζεται δια της εφαρμογής των παραπάνω μετασχηματισμών. Αυτοί οι μετασχηματισμοί περιέχουν μεταξύ των άλλων τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του κέντρου της εικόνας. Έχοντας διαβάσει το ύψος και το πλάτος της εικόνας, οι συντεταγμένες του κέντρου προφανώς θα δίδονται από τις σχέσεις $x_0 = (int)(width/2)$ και $y_0 = (int)(height/2)$ όπου ο μετασχηματισμός τύπου (type casting) σε ακέραιο επιβάλλεται από το γεγονός ότι οι συντεταγμένες των εικονοστοιχείων μιας εικόνας είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί. Η άλλη παράμετρος που χρειαζόμαστε είναι το πλήθος των χρωμάτων της εικόνας που το διαβάζουμε με μια εντολή της μορφής `int colors = GetColorNumber()`. Η γνώση του πλήθους των χρωμάτων της εικόνας είναι αναγκαία, διότι εάν η εικόνα έχει μέχρι 256 χρώματα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη χρωματικής παλέτας, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση εικόνων που χρησιμοποιούν 24 bits για το κάθε χρώμα, όπου μετά τις δύο επικεφαλίδες ακολουθούν απευθείας τα δεδομένα της εικόνας.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν αυτές τις δύο περιπτώσεις. Στην περίπτωση ύπαρξης χρωματικής παλέτας τα δεδομένα της εικόνας αποτελούνται από τις εισόδους της χρωματικής παλέτας που αντιστοιχούν στα χρώματα των pixels της εικόνας. Εάν για δεδομένο pixel της εικόνας εξόδου (i, j) υπάρχει το αντίστοιχο pixel της εικόνας εισόδου (x, y) , εκείνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διαβάσουμε την είσοδο της χρωματικής παλέτας που αντιστοιχεί στο χρώμα αυτού του εικονοστοιχείου (και που βρίσκεται στη θέση `sourceBitmap->pixels[x][y]`) και να το αντιγράψουμε στη θέση `targetBitmap->pixels[i][j]` της εικόνας εξόδου:

```

for (i=0;i<width;i++) {
    for (j=0;j<height;j++) {
        x = (int)((i-x0)*cos(-a)-(j-y0)*sin(-a)+x0);
        y = (int)((i-x0)*sin(-a)+(j-y0)*cos(-a)+y0);
        if (BelongsToBitmap(x, y)==TRUE)
            targetBitmap->pixels[i][j] = sourceBitmap->pixels[x][y];
        else targetBitmap->pixels[i][j] = defaultColor; }}

```

Στον παραπάνω κώδικα η παράμετρος a αναφέρεται στη γωνία περιστροφής (εκπεφρασμένη σε ακτίνια), ενώ η μεταβλητή `defaultColor` περιέχει το χρώμα με το οποίο θα ζωγραφίσουμε το pixel της εικόνας εξόδου, εάν η εικόνα του κάτω από την εφαρμογή του παραπάνω μετασχηματισμού, δεν αντιστοιχεί σε pixel της εικόνας εισόδου. Η τιμή αυτής της μεταβλητής θα πρέπει να είναι κάποια από τις εισόδους της χρωματικής παλέτας η οποία μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα.

Από την άλλη πλευρά, εάν η εικόνα χαρακτηρίζεται από τη χρήση 24 bits για το κάθε χρώμα, τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά καθώς δεν χρειάζεται να καταφύγουμε στη χρήση χρωματικής παλέτας. Για κάθε pixel (i, j) της εικόνας εξόδου, βρίσκουμε την εικόνα του (x, y) κάτω από το μετασχηματισμό της περιστροφής, και εάν το σημείο που προκύπτει ανήκει στην εικόνα εισόδου, αντιγράφουμε τις χρωματικές συνιστώσες του ενός pixel στο άλλο, ενώ διαφορετικά αποδίδουμε στο pixel (i, j) ένα προεπιλεγμένο χρώμα. Ο κώδικας σε γλώσσα *C* που υλοποιεί αυτή η διαδικασία, παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```

for (i=0;i<width;i++) {
  for (j=0;j<height;j++) {
    x = (int)((i-x0)*cos(-a)-(j-y0)*sin(-a)+x0);
    y = (int)((i-x0)*sin(-a)+(j-y0)*cos(-a)+y0);
    if (BelongsToBitmap(xSource, ySource)==TRUE) {
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed =
        sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbRed;
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen =
        sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbGreen;
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue =
        sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbBlue; }
    else {
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed = 255;
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen = 255;
      targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue = 255; }}}

```

Στο παράδειγμα του παραπάνω κώδικα, το προεπιλεγμένο χρώμα που αποδώσαμε στα pixels της εικόνας εξόδου, των οποίων οι εικόνες κάτω από την εφαρμογή του μετασχηματισμού της περιστροφής, δεν ανήκουν στην εικόνα εισόδου, είναι το λευκό χρώμα, με χρωματικές συνιστώσες (R,G,B)=(255,255,255). Ο πλήρης κώδικας σε γλώσσα C που πραγματοποιεί την περιστροφή ενός bitmap κατά δεδομένη τιμή γωνίας a παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```

#define PI 4.0*(atan(1.0))
void RotateBitmap (double a) {
  int i, width = sourceBitmap->GetWidth();
  int j, height = sourceBitmap->GetHeight();
  int x, y, defaultColor = 0;
  int colors = sourceBitmap->GetColorNumber();
  int x0 = (int)(width/2), y0 = (int)(height/2);
  angle *= (PI/180);
  for (i=0;i<width;i++) {
    for (j=0;j<height;j++) {
      x = (int)((i-x0)*cos(-a)-(j-y0)*sin(-a)+x0);
      y = (int)((i-x0)*sin(-a)+(j-y0)*cos(-a)+y0);
      if (colors) {
        if (BelongsToBitmap(x, y)==TRUE)
          targetBitmap->pixels[i][j] =
            sourceBitmap->pixels[x][y];
        else targetBitmap->pixels[i][j] = defaultColor; }
      else {
        if (BelongsToBitmap(x, y)==TRUE) {
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed =
            sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbRed;
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen =
            sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbGreen;
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue =
            sourceBitmap->pixMap[x][y].rgbBlue; }
        else {
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed = 255;
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen = 255;
          targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue = 255; }}}}}
  targetBitmap->DrawBitmap(); }

```

Στον παραπάνω κώδικα η τιμή της γωνίας a πολλαπλασιάστηκε με την ποσότητα $\pi/180$ έτσι ώστε να μετατραπεί σε ακτίνια (radians). Αυτή η μετατροπή είναι αναγκαία, διότι οι συναρτήσεις \sin και \cos του αρχείου `math.h` που υπολογίζουν ημίτονα και συνημίτονα γωνιών αντίστοιχα, απαιτούν να λάβουν ως όρισμα γωνίες εκπεφρασμένες σε ακτίνια. Μία άλλη σύμβαση που ακολουθήσαμε κατά τη συγγραφή του παραπάνω κώδικα, είναι να θεωρήσουμε πως το πλήθος των χρωμάτων μιας εικόνας (που το διαβάζουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `GetColorNumber()`) είναι διάφορο του μηδενός για εικόνες των 8 και 16 χρωμάτων, και ίσο με το μηδέν για εικόνες που χρησιμοποιούν 24



Σχήμα 66: Περιστροφή εικόνας κατά γωνία 45° και κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού

bits για το κάθε χρώμα. Αυτό συμβαίνει διότι αυτή η μεταβλητή περιέχει τον αριθμό των χρωμάτων της χρωματικής παλέτας, η οποία όμως απουσιάζει από τις εικόνες των 24 bits. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του παραπάνω αλγορίθμου παρουσιάζεται στο σχήμα 66:

37 Μίξη Χρωμάτων (Blending)

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση επεξεργασίας εικόνας, είναι η ανάμειξη των χρωμάτων δύο εικόνων και η δημιουργία μιας νέας εικόνας η οποία θα χαρακτηρίζεται από το φαινόμενο της διαφάνειας (transparency effect). Αυτό σημαίνει πως αν και η δεύτερη εικόνα βρίσκεται κάτω από την πρώτη, εν τούτοις θα φαίνεται και αυτή, καθώς η πρώτη εκ των δύο εικόνων θα είναι διαφανής. Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτόν τον μετασχηματισμό ανάμεσα σε μια εικόνα και σε ένα χρώμα. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ζωγραφίσουμε ένα τετράγωνο κάποιου χρώματος πάνω από την εικόνα αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνεται το bitmap που βρίσκεται από κάτω.

Μιλώντας γενικά, εάν θεωρήσουμε δύο χρώματα C_1 και C_2 , μπορούμε να ορίσουμε ένα μέσο χρώμα ως τη μίξη των δύο χρωμάτων C_1 και C_2 . Το νέο αυτό χρώμα θα δίδεται από τη σχέση

$$NewColor = \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{\alpha + \beta} \quad (187)$$

όπου α και β σταθεροί συντελεστές οι τιμές των οποίων καθορίζουν με μοναδικό τρόπο και το οπτικό αποτέλεσμα της μίξης των χρωμάτων. Πιο συγκεκριμένα, εάν τα α και β είναι ίσα μεταξύ τους, τότε το τελικό χρώμα θα είναι ακριβώς ο μέσος όρος των δύο χρωμάτων, καθώς η παραπάνω σχέση γίνεται

$$NewColor = \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha C_1 + \alpha C_2}{\alpha + \alpha} = \frac{\alpha(C_1 + C_2)}{2\alpha} = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad (188)$$

Από την άλλη πλευρά εάν θέλουμε το τελικό χρώμα να είναι πιο κοντά προς το χρώμα C_1 ή το χρώμα C_2 , θα χρησιμοποιήσουμε πολύ μεγάλη τιμή για το α και πολύ μικρή τιμή για το β και αντίστροφα. Είναι προφανές πως για $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$ θα λάβουμε το χρώμα C_1 , ενώ για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ θα λάβουμε το χρώμα C_2 .

Θεωρώντας τα χρώματα της παραπάνω σχέσης ως τριδιάστατα διανύσματα της μορφής $C_1 = (R_1, G_1, B_1)$ και $C_2 = (R_2, G_2, B_2)$, είναι προφανές πως η εξίσωση 187 είναι μια διανυσματική εξίσωση. Επομένως, εάν το χρώμα που προκύπτει δια της εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας, έχει συνιστώσες (R', G', B') , τότε, η διανυσματική εξίσωση 187 αναλύεται στο σύστημα των τριών αριθμητικών εξισώσεων

$$R' = \frac{\alpha R_1 + \beta R_2}{\alpha + \beta} \quad G' = \frac{\alpha G_1 + \beta G_2}{\alpha + \beta} \quad B' = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{\alpha + \beta}$$

Ας περάσουμε τώρα στην περιγραφή της διαδικασίας που θα χρησιμοποιήσουμε για την υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου. Η πρώτη περίπτωση είναι να εφαρμόσουμε τη διαδικασία, ανάμεσα σε ένα bitmap και σε ένα χρώμα. Στην

περίπτωση αυτή θα πρέπει να ορίσουμε ένα τετράγωνο με διαστάσεις μικρότερες ή ίσες του bitmap και ζωγραφισμένο με κάποιο χρώμα. Στη συνέχεια θα πάρουμε ένα προς ένα τα pixels του bitmap και θα εξετάσουμε εάν στη θέση τους αντιστοιχεί και κάποιο pixel του τετραγώνου που βρίσκεται από πάνω. Εάν πράγματι υπάρχει ένα τέτοιο pixel, θα διαβάσουμε το χρώμα του pixel που ανήκει στο bitmap, και εφαρμόζοντας τη σχέση 187 ανάμεσα στο χρώμα του τετραγώνου και σε αυτό το χρώμα, θα υπολογίσουμε το ενδιάμεσο χρώμα με το οποίο θα ζωγραφίσουμε το συγκεκριμένο εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου. Στην αντίθετη περίπτωση θα αφήσουμε το pixel ανεπηρέαστο. Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί για την ανάμειξη δύο αρχείων εικόνων. Στην περίπτωση αυτή βέβαια, το κάθε pixel του bitmap που βρίσκεται από πάνω θα έχει το δικό του διαφορετικό χρώμα, το οποίο θα πρέπει να διαβάσουμε πριν τον υπολογισμό του νέου χρώματος δια της χρήσεως της εξίσωσης 187.

Η διαδικασία της μίξης μιας εικόνας bitmap με ένα χρώμα C , σε μορφή ψευδοκώδικα διατυπώνεται με τη μορφή

```

1) Set the blending color C1=(R1,G1,B1) and the dimensions
   of the blending rectangle
2) For every pixel (i,j) on the output bitmap
   If this pixel belongs to the blending rectangle
   a) Identify the color C2=(R2,G2,B2) of this pixel
   b) Apply the blending equations to the color pairs
      (R1,R2),(G1,G2) and (B1,B2) to get the new
      components (R',G',B')
.....c) Mark pixel with the new color C'=(R',G',B')
.....Otherwise leave the pixel unchanged

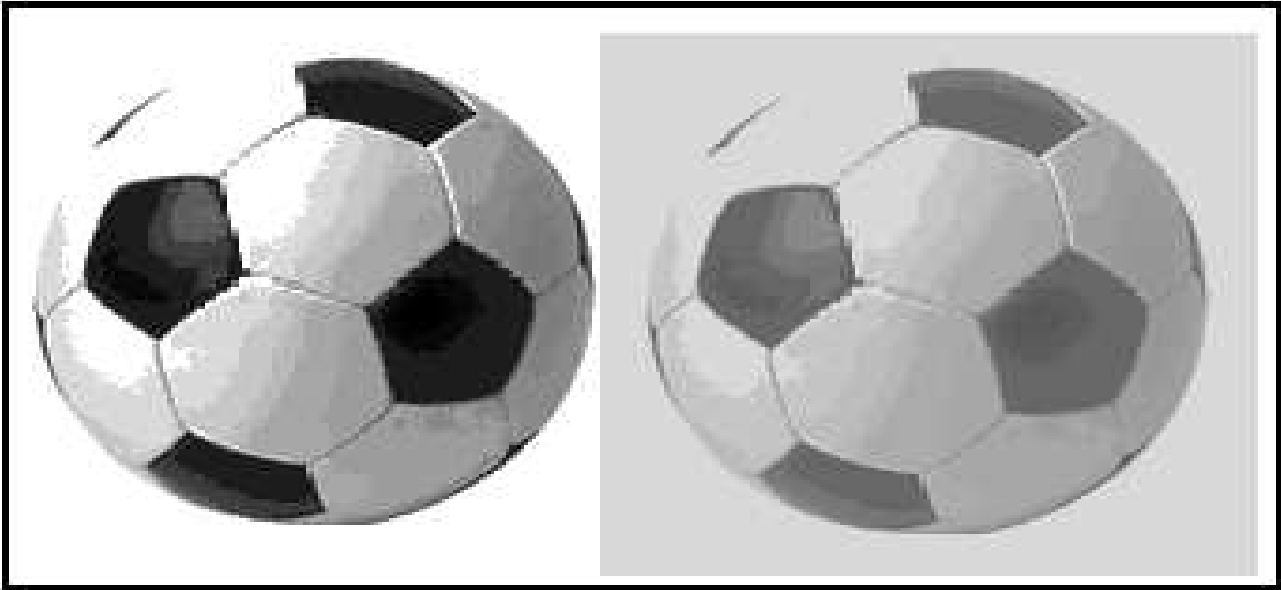
```

ενώ ο πραγματικός κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία ακολουθεί στη συνέχεια.

```

void FixedBitmapColorBlending (void) {
    int xSt = sourceBitmap->GetXStart();
    int ySt = sourceBitmap->GetYStart();
    int bitmapWidth = sourceBitmap->GetWidth();
    int bitmapHeight = sourceBitmap->GetHeight();
    int i, j, rectWidth = GetRectangleWidth();
    int rectHeight = GetRectangleHeight();
    int colors = pDoc->sourceBitmap->GetColorNumber();
    int color, r1, g1, b1;
    int r2 = GetBlendingRedColor();
    int g2 = GetBlendingGreenColor();
    int b2 = GetBlendingBlueColor();
    double a = GetAParam(), b = GetBParam();
    for (i=0;i<bitmapWidth;i++) {
        for (j=0;j<bitmapHeight;j++) {
            if (colors) {
                color = sourceBitmap->pixels[i][j];
                r1 = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbRed;
                g1 = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbGreen;
                b1 = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbBlue;
                if ((i<=rectangleWidth)&&(j<=rectangleHeight)) {
                    r1 = (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
                    g1 = (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
                    b1 = (int)((a*b1+b*b2)/(a+b)); }
                DrawPixel (xSt+i,ySt+j, RGB(r1, g1, b1)); }
            else {
                r1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbRed;
                g1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen;
                b1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue;
                if ((i<=rectangleWidth)&&(j<=rectangleHeight)) {
                    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed =
                        (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
                    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen =
                        (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
                    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue =

```



Σχήμα 67: Το αποτέλεσμα της μίξης των χρωμάτων μιας εικόνας με ένα συγκεκριμένο χρώμα

```

        (int)((a*b1+b*b2)/(a+b)); }}}}
if (!colors) targetBitmap->DrawBitmap(); }

```

Στον παραπάνω κώδικα, η συνάρτηση `FixedBitmapColorBlending` αναφέρεται στη διαδικασία μίξης των χρωμάτων μιας εικόνας BMP και ενός χρώματος C , με τις παραμέτρους a και b να διατηρούν προκαθορισμένες σταθερές τιμές. Στο πρώτο βήμα της διαδικασίας, η συνάρτηση διαβάζει τις παραμέτρους του αλγορίθμου, που περιλαμβάνουν μεταξύ των άλλων, τις διαστάσεις της εικόνας και του τετραγώνου που είναι ζωγραφισμένο με το χρώμα C , τις χρωματικές συνιστώσες r_2 , g_2 και b_2 αυτού του χρώματος, το πλήθος των χρωμάτων της εικόνας, και τις τιμές των παραμέτρων a και b . Στη συνέχεια, για κάθε ένα από τα pixels της εικόνας, ο αλγόριθμος ελέγχει εάν αυτό ανήκει μόνο στην εικόνα, ή ταυτόχρονα και στο τετράγωνο χρώματος C . Στην πρώτη περίπτωση το pixel διατηρείται αμετάβλητο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπολογίζεται το νέο χρώμα σύμφωνα με τις εξισώσεις μίξης που έχουν παρουσιαστεί, και λαμβάνει χώρα σχεδίαση του pixel με αυτό το νέο χρώμα. Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται με τον τρόπο που περιγράψαμε τόσο στις εικόνες των 8 και 256 χρωμάτων όσο και σε εκείνες που χρησιμοποιούν 24-bits για το κάθε χρώμα. Η μοναδική διαφοροποίηση όσον αφορά αυτές τις δύο κατηγορίες εικόνων είναι πως στην πρώτη περίπτωση ο σχεδιασμός του εικονοστοιχείου γίνεται σε πραγματικό χρόνο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι νέες τιμές του χρώματος για το κάθε εικονοστοιχείο αποθηκεύονται στην εικόνα εξόδου (`target bitmap`) και η σχεδίαση της εικόνας γίνεται μια και μοναδική φορά και μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας μίξης. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας μίξης χρώματος ανάμεσα σε εικόνα και σε κάποιο χρώμα παρουσιάζεται στο σχήμα 67. Χρησιμοποιώντας εντελώς ανάλογες τεχνικές μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση `FixedBitmapBitmapBlending` η οποία εφαρμόζει τη διαδικασία της μίξης ανάμεσα σε δύο εικόνες. Η διαδικασία είναι εντελώς ανάλογη με αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως. Η μοναδική διαφορά είναι πως ενώ στην προηγούμενη περίπτωση είχαμε ένα και μοναδικό χρώμα το οποίο το αναμειγνύαμε με το χρώμα του κάθε εικονοστοιχείου της τρέχουσας εικόνας, τώρα το κάθε pixel της δεύτερης εικόνας, έχει και αυτό το δικό του χρώμα, το οποίο επομένως θα πρέπει να διαβάσουμε πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου της μίξης ανάμεσα στις δύο εικόνες. Η κάθε μια από τις δύο εικόνες μπορεί να διαθέτει ή να μη διαθέτει χρωματική παλέττα, γεγονός που μας υποχρεώνει να εξετάσουμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις: (α) και οι δύο εικόνες να διαθέτουν χρωματική παλέττα (β) μόνο η πρώτη εικόνα να διαθέτει χρωματική παλέττα (γ) μόνο η δεύτερη εικόνα να διαθέτει χρωματική παλέττα και (δ) και οι δύο εικόνες να διαθέτουν χρωματική παλέττα. Το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε για να διαπιστώσουμε εάν μια εικόνα έχει χρωματική παλέττα, είναι το πλήθος των χρωμάτων της, που το διαβάζουμε καλώντας τη συνάρτηση `GetColorNumber()`. Εάν η τιμή αυτής της παραμέτρου είναι ίση με το μηδέν, η εικόνα δεν διαθέτει χρωματική παλέττα, καθώς για κάθε εικονοστοιχείο αποθηκεύονται απευθείας οι χρωματικές συνιστώσες (R, G, B). Η αλγόριθμος της μίξης δύο εικόνων σε μορφή ψευδοκώδικα έχει τη μορφή

```

1) For every pixel (i,j) on the background bitmap
   If this pixel belongs to the foreground bitmap
      a) Identify the pixel color C1=(R1,G1,B1)

```

```

    for the background bitmap
b) Identify the pixel color C2=(R2,G2,B2)
    for the foreground bitmap
c) Apply the blending equations to the color pairs
   (R1,R2),(G1,G2) and (B1,B2) to get the new
   components (R',G',B')
.....d) Mark pixel with the new color C'=(R',G',B')
.....Otherwise leave the pixel unchanged

```

ενώ η πραγματικός C κώδικας που υλοποιεί τον αλγόριθμο της μίξης δύο εικόνων, παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```

void FixedBitmapBitmapBlending (void) {
    int xSt = sourceBitmap->GetXStart();
    int ySt = sourceBitmap->GetYStart();
    double a = GetAParam(), b = GetBParam();
    int i, j, color1, color2, r1, g1, b1;
    int r2, g2, b2, r3, g3, b3;
    int sourceWidth = sourceBitmap->GetWidth();
    int sourceHeight = sourceBitmap->GetHeight();
    int targetWidth = targetBitmap->GetWidth();
    int targetHeight = targetBitmap->GetHeight();
    int sourceColors = sourceBitmap->GetColorNumber();
    int targetColors = targetBitmap->GetColorNumber();
    for (i=0;i<sourceWidth;i++) {
        for (j=0;j<sourceHeight;j++) {
            // Both bitmaps have a color palette
            if ((sourceColors)&&(targetColors)) {
                color1 = sourceBitmap->pixels[i][j];
                r1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbRed;
                g1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbGreen;
                b1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbBlue;
                if ((i<targetWidth)&&(j<targetHeight)) {
                    color2 = targetBitmap->pixels[i][j];
                    r2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbRed;
                    g2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbGreen;
                    b2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbBlue;
                    r3 = (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
                    g3 = (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
                    b3 = (int)((a*b1+b*b2)/(a+b));
                    DrawPixel(xSt+i,ySt+j, RGB(r3, g3, b3)); }
                else
                    DrawPixel(xSt+i,ySt+j, RGB(r1, g1, b1)); }
            // Only the background bitmap has a color palette
            // Foreground bitmap is an 24-bit image
            if ((sourceColors)&&(!targetColors)) {
                color1 = sourceBitmap->pixels[i][j];
                r1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbRed;
                g1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbGreen;
                b1 = sourceBitmap->rgbTable[color1].rgbBlue;
                if ((i<targetWidth)&&(j<targetHeight)) {
                    r2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed;
                    g2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen;
                    b2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue;
                    r3 = (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
                    g3 = (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
                    b3 = (int)((a*b1+b*b2)/(a+b));
                    DrawPixel(xSt+i,ySt+j, RGB(r3, g3, b3)); }
                else
                    DrawPixel(xSt+i,ySt+j, RGB(r1, g1, b1)); }
        }
    }
}

```



Σχήμα 68: Το αποτέλεσμα της μίξης των χρωμάτων δύο εικόνων για σταθερές τιμές των παραμέτρων a και b

```

// Only the foreground bitmap has a color palette
// Background bitmap is an 24-bit image
if ((!sourceColors)&&(targetColors)) {
    r1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbRed;
    g1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen;
    b1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue;
    if ((i<targetWidth)&&(j<targetHeight)) {
        color2 = pDoc->targetBitmap->pixels[i][j];
        r2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbRed;
        g2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbGreen;
        b2 = targetBitmap->rgbTable[color2].rgbBlue;
        r3 = (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
        g3 = (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
        b3 = (int)((a*b1+b*b2)/(a+b));
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbRed=r3;
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen=g3;
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue=b3; }}
// Both bitmaps are 24-bit images
// No color palettes are available
if ((!sourceColors)&&(!targetColors)) {
    r1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbRed;
    g1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen;
    b1 = sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue;
    if ((i<targetWidth)&&(j<targetHeight)) {
        r2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed;
        g2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen;
        b2 = targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue;
        r3 = (int)((a*r1+b*r2)/(a+b));
        g3 = (int)((a*g1+b*g2)/(a+b));
        b3 = (int)((a*b1+b*b2)/(a+b));
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbRed=r3;
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen=g3;
        sourceBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue=b3; }}}
if ((!sourceColors)&&(!targetColors))
    sourceBitmap->DrawBitmap(); }

```

Το αποτέλεσμα της μίξης δύο εικόνων χρησιμοποιώντας σταθερές τιμές των a και b παρουσιάζεται στο σχήμα `bitbitBlending`. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας σταθερές τιμές για τις παραμέτρους a και b , θα λάβουμε ένα συγκεκριμένο και σταθερό τύπο διαφάνειας. Εάν θέλουμε το αποτέλεσμα της διαφάνειας να είναι διαφορετικό και να μεταβάλλεται κατά μήκος της εικόνας (`gradient blending`), θα πρέπει να διαμορφώσουμε

τις τιμές των α και β , με τέτοιο τρόπο ώστε αυτές να μην είναι σταθερές αλλά να μεταβάλλονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα τιμών.

38 Εισαγωγή στα βασικά ψηφιακά φίλτρα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η έξοδος $y(t)$ ενός μονοδιάστατου συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (189)$$

όπου $x(t)$ είναι η είσοδος που δέχεται το σύστημα τη χρονική στιγμή t . Η παραπάνω σχέση ισχύει για συνεχή συστήματα, ενώ στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημα είναι διακριτό, λαμβάνει τη μορφή

$$y[k] = h[k] \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[k - i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k - i]x[i] \quad (190)$$

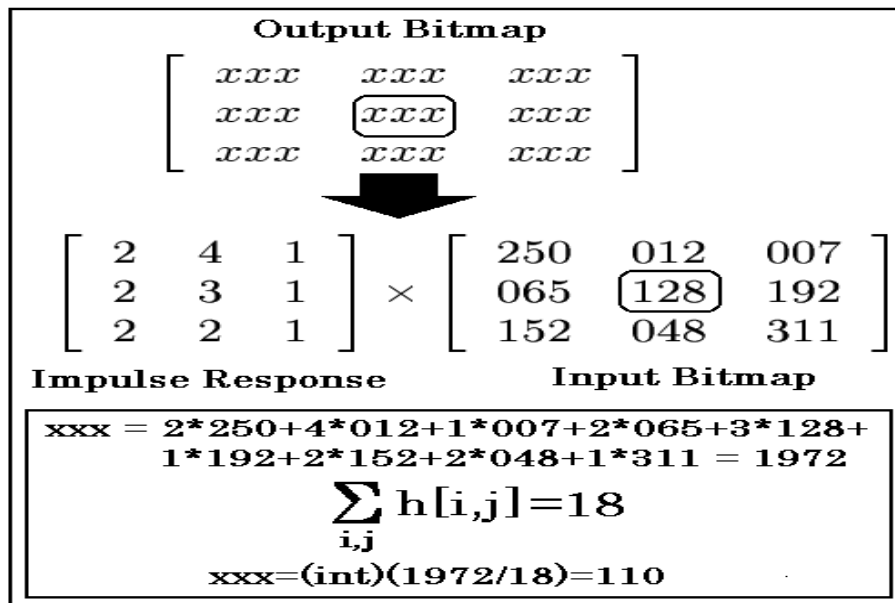
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την έξοδο μονοδιάστατων συστημάτων, τα οποία δέχονται στην είσοδό τους μονοδιάστατα σήματα (δηλαδή χρονοσειρές) όπως είναι τα ηχητικά και τα φωνητικά σήματα. Εάν θέλουμε να επεκτείνουμε την ανάλυση και να προσδιορίσουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής αυτών των συστημάτων πάνω σε μία εικόνα, θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν πως η εικόνα ορίζεται ως ένα διδιάστατο σήμα, και επομένως οι παραπάνω σχέσεις θα πρέπει να ορισθούν στο χώρο των δύο διαστάσεων, R^2 . Μιλώντας γενικά, το αποτέλεσμα της διέλευσης μιας εικόνας από ένα διδιάστατο σύστημα συνεχούς ή διακριτού χρόνου, καθορίζεται ξανά από την κρουστική απόκριση του συστήματος η οποία σε πλήρη αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση, ορίζεται ως η έξοδος του συστήματος όταν διαβιβάσουμε στην είσοδό του τη συνάρτηση δ ορισμένη στο χώρο των δύο διαστάσεων.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές πως η κρουστική απόκριση ενός ψηφιακού φίλτρου επεξεργασίας εικόνας θα είναι ένας διδιάστατος πίνακας. Εάν λάβουμε υπ' όψιν το γεγονός πως μια εικόνα είναι και αυτή ένας διδιάστατος πίνακας, δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό πως η έξοδος ενός φίλτρου θα είναι μια εικόνα η οποία θα προκύψει ως το αποτέλεσμα της συνέλιξης ανάμεσα στην εικόνα εισόδου και στην κρουστική απόκριση του φίλτρου. Πιο συγκεκριμένα, εάν συμβολίσουμε με X την εικόνα εισόδου και με Y την εικόνα που θα λάβουμε στην έξοδο του φίλτρου, το εικονοστοιχείο $y[r, c]$ της εικόνας εξόδου που αντιστοιχεί στο εικονοστοιχείο $x[i, j]$ της εικόνας εισόδου, θα δίδεται από τη σχέση

$$y[r, c] = \frac{1}{\sum_{i,j} h[i, j]} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} h[i, j]x[r - j, c - i] \quad (191)$$

όπου $h[i, j]$ ($i, j = 1, 2, \dots, M$) είναι τα στοιχεία του πίνακα της διδιάστατης κρουστικής απόκρισης του συστήματος, ενώ οι διαστάσεις της εικόνας θεωρούμε ότι είναι $M \times M$. Είναι χρήσιμο να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως η διδιάστατη συνέλιξη που περιγράψαμε παραπάνω συχνά περιγράφεται με το όνομα συνέλιξη πινάκων (matrix convolution) και για το λόγο αυτό όλα τα ψηφιακά φίλτρα που ορίζονται με τη βοήθεια αυτού του ειδικού τύπου συνέλιξης, ονομάζονται και φίλτρα συνέλιξης πινάκων (matrix convolution filters).

Η ύπαρξη του όρου $(1/\sum_{i,j} h[i, j])$ στην εξίσωση 191 (ο όρος αυτός ονομάζεται όρος κανονικοποίησης) δικαιολογείται από το γεγονός πως η τιμή του εικονοστοιχείου $y[r, c]$ θα πρέπει να ανήκει στο κλειστό διάστημα τιμών $[0, 255]$ εφόσον αναφέρεται σε κάποια από τις χρωματικές συνιστώσες του εν λόγω εικονοστοιχείου. Είναι προφανές, πως οι πράξεις συνέλιξης μεγάλων σε διάσταση εικόνων με μεγάλους πίνακες κρουστικών αποκρίσεων, απαιτούν τεράστιο πλήθος υπολογισμών και πολύ μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Θεωρώντας για παράδειγμα μια εικόνα με διαστάσεις 640×480 pixels και μια κρουστική απόκριση με διαστάσεις 9×9 , το πλήθος των πολλαπλασιασμών και προσθέσεων που θα πρέπει να γίνουν για τον υπολογισμό της εικόνας εξόδου, είναι $N = 640 \times 480 \times 9 \times 9 = 24.883.200$, αριθμός που είναι εξαιρετικά μεγάλος. Για το λόγο αυτό, ποτέ δεν χρησιμοποιούμε μεγάλες σε διαστάσεις κρουστικές αποκρίσεις, και στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις, ένα μικρό φίλτρο με διαστάσεις 3×3 , οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μια εναλλακτική προσέγγιση που μπορούμε να ακολουθήσουμε, είναι να μετασχηματίσουμε τον πίνακα του φίλτρου, γράφοντάς τον ως το γινόμενο ενός πίνακα γραμμής με ένα πίνακα στήλης. Η μέθοδος αυτή είναι εξαιρετικά αποδοτική, καθώς ελαττώνει την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου από $O(N^2M^2)$ σε $O(N^2M)$ όπου N και M είναι το πλήθος των γραμμών και των στηλών αντίστοιχα. Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη των δύο πινάκων χρησιμοποιώντας το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform, FFT), ορισμένο στο χώρο των δύο διαστάσεων, R^2 .



Σχήμα 69: Παράδειγμα εφαρμογής ψηφιακού φίλτρου επί τμήματος εικόνας εισόδου

Προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο εφαρμογής ενός φίλτρου πάνω σε μία εικόνα, ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του σχήματος 69. Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται ο τρόπος εφαρμογής κρουστικής απόκρισης με διαστάσεις 3×3 και περιεχόμενο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

επί ενός τμήματος εικόνας εισόδου με τις ίδιες διαστάσεις που περιέχει τις τιμές

$$B = \begin{bmatrix} 250 & 012 & 007 \\ 065 & 128 & 192 \\ 152 & 048 & 311 \end{bmatrix}$$

οι οποίες παραπέμπουν στις εισόδους του πίνακα χρωμάτων της εικόνας που περιέχει τα χρώματα που χρησιμοποιούνται για τη σχεδιάσή της. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η δημιουργία του αντίστοιχου τμήματος της εικόνας εξόδου με τις τιμές του οποίου να υπολογίζονται δια της εφαρμογής της επόμενης διαδικασίας:

Για κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου θεωρούμε μόνο εκείνα τα εικονοστοιχεία που το περιβάλλουν με τέτοιο τρόπο ώστε το εν λόγω εικονοστοιχείο να βρίσκεται στο κέντρο ενός πίνακα τιμών με διαστάσεις 3×3 (η γενίκευση αυτής της διαδικασίας για μεγαλύτερο πλήθος διαστάσεων είναι προφανής). Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο του πίνακα της κρουστικής απόκρισης με το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα των εικονοστοιχείων που ορίσαμε προηγουμένως, και αθροίζουμε τα επιμέρους γινόμενα. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, βρίσκουμε το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα της κρουστικής απόκρισης (που αντιστοιχεί στον παράγοντα κανονικοποίησης που αναφέραμε προηγουμένως) και διαιρούμε την τιμή που υπολογίσαμε στο προηγούμενο στάδιο με αυτό το άθροισμα. Εάν η τιμή που θα βρούμε δεν είναι ακέραια (κάτι που είναι και το πιο πιθανό) την στρογγυλοποιούμε στον προηγούμενο ή στον επόμενο ακέραιο ανάλογα με την τιμή του δεκαδικού της μέρους. Η τιμή που θα βρούμε (και η οποία ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0, 255]$) θα καταχωρηθεί στο εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου που αντιστοιχεί στο εικονοστοιχείο που χρησιμοποιήσαμε κατά την έναρξη αυτής της διαδικασίας.

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα την εικόνα του εικονοστοιχείου με τιμή ίση με 128 κάτω από την εφαρμογή του ψηφιακού φίλτρου του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ο διδιάστατος πίνακας A. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε τα pixels της εικόνας εισόδου που βρίσκονται γύρω από το προηγούμενο εικονοστοιχείο και τα οποία σχηματίζουν ένα πίνακα με διαστάσεις 3×3 . Τα pixels αυτά έχουν τις τιμές 250 (πάνω αριστερά), 012 (πάνω και στο κέντρο), 007 (πάνω δεξιά), 065 (αριστερό εικονοστοιχείο), 192 (δεξί εικονοστοιχείο), 152 (κάτω αριστερά), 048 (κάτω κέντρο) και 311 (κάτω δεξιά). Στη συνέχεια διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα της κρουστικής απόκρισης, και πολλαπλασιάζουμε τις τιμές αυτών των στοιχείων με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A. Η ποσότητα που υπολογίζουμε με τον τρόπο αυτό είναι η

$$xxx = 2 * 250 + 4 * 012 + 1 * 007 + 2 * 065 + 3 * 128 + 1 * 192 + 2 * 152 + 2 * 048 + 1 * 311 = 1972$$

Διαιρώντας την ποσότητα αυτή με το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα που είναι ίσο με

$$N = \sum_{i,j} \alpha_{ij} = 2 + 4 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 1 = 18$$

και στρογγυλοποιώντας τον πραγματικό αριθμό που συνήθως προκύπτει στον αμέσως πλησιέστερο ακέραιο, καταλήγουμε τελικά στην τιμή $xxx = (int)(1972/18) = (int)109.555 = 110$. Επομένως στο εικονοστοιχείο με τιμή 128 της εικόνας εισόδου αντιστοιχεί το εικονοστοιχείο με τιμή 110 της εικόνας εξόδου. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία για όλα τα εικονοστοιχεία της εικόνας εισόδου μπορούμε τελικά να δημιουργήσουμε την εικόνα εξόδου για το ψηφιακό φίλτρο που χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση.

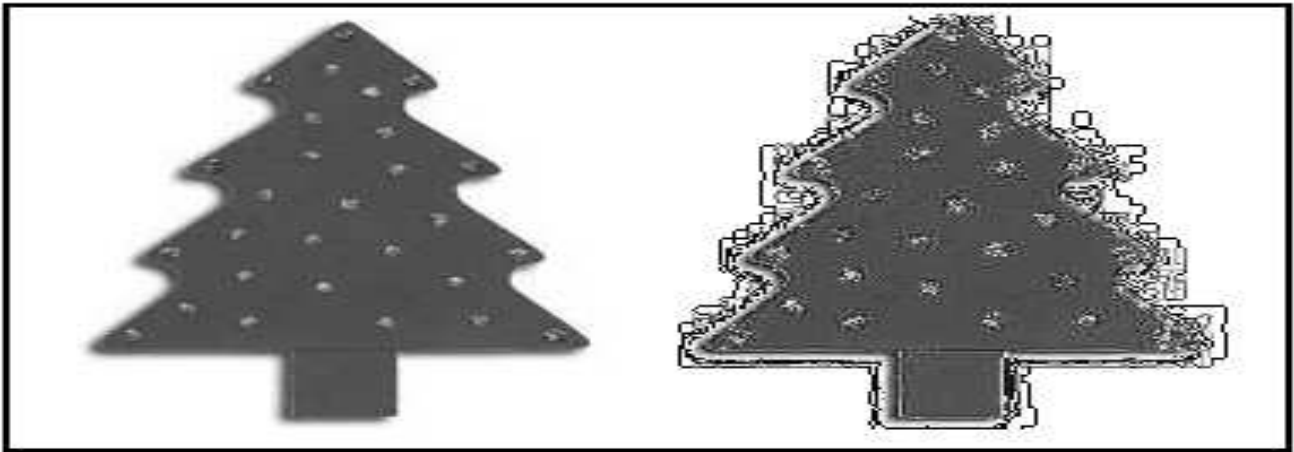
Ας περάσουμε τώρα στην περιγραφή των πιο χαρακτηριστικών από τα ψηφιακά φίλτρα τα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω σε μία εικόνα. Το πρώτο φίλτρο που θα εξετάσουμε είναι το φίλτρο της ευκρίνειας (sharpness) το οποίο εφαρμόζεται πάνω στην εικόνα προκειμένου να βελτιώσει την αναπαράστασή της και να αναδείξει τις χρωματικές διαφορές που υφίστανται ανάμεσα σε γειτονικά εικονοστοιχεία. Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις, η διδιάστατη χρυστική απόκριση (για την περίπτωση διαστάσεων 3×3 έχει μια από τις ακόλουθες μορφές)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} -k & -k & -k \\ -k & 8k+1 & -k \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}$$

για τις διάφορες τιμές της σταθεράς k . Εκείνο που κάνει στην ουσία το φίλτρο της ευκρίνειας για κάθε ένα από τα εικονοστοιχεία της εικόνας εισόδου, είναι να υπολογίζει τις χρωματικές διαφορές ανάμεσα στο κάθε εικονοστοιχείο και στα γειτονικά του, και να υπολογίζει ένα μέσο όρο ανάμεσα σε αυτές τις διαφορές και στο πραγματικό χρώμα του εικονοστοιχείου. Είναι προφανές πως η εφαρμογή αυτού του φίλτρου σε μια εικόνα, κάνει τις ακμές τις εικόνες να εμφανίζονται με μεγαλύτερη ευκρίνεια. Η υλοποίηση του φίλτρου της ευκρίνειας στη γλώσσα προγραμματισμού C παρουσιάζεται στη συνέχεια.

```
#define SHARPWIDTH 3
#define SHARPEIGHT 3

void Sharpness (double ** filterKernel) {
    int xSt = sourceBitmap->GetXStart();
    int ySt = sourceBitmap->GetYStart();
    int width = sourceBitmap->GetWidth();
    int height = sourceBitmap->GetHeight();
    int colors = sourceBitmap->GetColorNumber();
    int i, j, k, l, row, col, color, red, green, blue;
    double sumRed=0, sumGreen=0, sumBlue=0, sumKernel=0;
    for (i=0; i<SHARPWIDTH; i++)
        for (j=0; j<SHARPEIGHT; j++)
            sumKernel += filterKernel[i][j];
    for (i=1; i<width-1; i++) {
        for (j=1; j<height-1; j++) {
            sumRed = sumGreen = sumBlue = 0;
            for (k=0; k<SHARPWIDTH; k++) {
                for (l=0; l<SHARPEIGHT; l++) {
                    row = i - ((SHARPWIDTH-1)>>1)+k;
                    col = j - ((SHARPEIGHT-1)>>1)+l;
                    if (colors) {
                        color = sourceBitmap->pixels[row][col];
                        red = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbRed;
                        green = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbGreen;
                        blue = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbBlue; }
                    else {
                        red = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbRed;
                        green = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbGreen;
                        blue = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbBlue; }
                    sumRed += red*filterKernel[k][l];
                    sumGreen += green*filterKernel[k][l];
                    sumBlue += blue*filterKernel[k][l]; } }
        }
    }
```

Σχήμα 70: Παράδειγμα εφαρμογής του φίλτρου της ευκρίνειας επί εικόνας εισόδου

```

sumRed = (int)(sumRed/sumKernel);
sumGreen = (int)(sumGreen/sumKernel);
sumBlue = (int)(sumBlue/sumKernel);
if (colors)
    DrawPixel(xSt+i, ySt+j,
              RGB(sumRed, sumGreen, sumBlue));
else {
    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed = (int)sumRed;
    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen = (int)sumGreen;
    targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue = (int)sumBlue; } }
if (!colors) targetBitmap->DrawBitmap(); }

```

Στον παραπάνω κώδικα, οι σταθερές SHARPWIDTH και SHARPHEIGHT χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των διαστάσεων (δηλαδή του πλήθους των γραμμών και των στηλών) της διδιάστατης κρουστικής απόκρισης του φίλτρου της ευκρίνειας. Όσον αφορά τον πίνακα της κρουστικής απόκρισης, αυτός διαβιβάζεται ως όρισμα στη συνάρτηση Sharpness και στον παραπάνω κώδικα φέρει το όνομα filterKernel. Είναι προφανές πως ο πίνακας αυτός έχει ήδη αρχικοποιηθεί σε προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας, καθώς στον παραπάνω κώδικα χρησιμοποιείται απευθείας. Αυτή η αρχικοποίηση μπορεί να γίνει είτε με τον απευθείας καθορισμό των παραμέτρων του φίλτρου μέσω μιας εντολής της μορφής `double filterKernel[SHARPWIDTH][SHARPHEIGHT]={{0,-1,0},{-1,5,-1},{0,-1,0}}` είτε δια της ανάγνωσης των τιμών των παραμέτρων του φίλτρου από το πληκτρολόγιο ή από κάποιο αρχείο. Εκείνο που κάνει η συνάρτηση Sharpness δεν είναι τίποτε άλλο από το να υπολογίζει για κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου το νέο του χρώμα σύμφωνα με τη σχέση 191 (όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, η σχέση αυτή χρησιμοποιείται σε όλες τις υλοποιήσεις ψηφιακών φίλτρων καθώς το μόνο που αλλάζει σε κάθε περίπτωση, είναι οι τιμές των παραμέτρων του φίλτρου). Η συνάρτηση διαβάζει το πλήθος των χρωμάτων της εικόνας, και εάν η εικόνα διαθέτει χρωματική παλέττα ζωγραφίζει απευθείας το κάθε εικονοστοιχείο στην οθόνη του χρήστη, ενώ στην αντίθετη περίπτωση αποθηκεύει τα νέα χρώματα στο αρχείο της εικόνας εξόδου (η οποία περιγράφεται από τη μεταβλητή targetBitmap) και ζωγραφίζει την εικόνα μια και μοναδική φορά στο τέλος της διαδικασίας. Τυπικό παράδειγμα εφαρμογής του φίλτρου της ευκρίνειας απεικονίζεται στο σχήμα 70.

Το δεύτερο σημαντικό φίλτρο που αξίζει τον κόπο να αναφερθεί, είναι εκείνο της ανίχνευσης ακμών (edge detection), που επιτρέπει την ανίχνευση των ακμών μιας εικόνας. Αυτός ο αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί σε προηγούμενη ενότητα με τη βοήθεια του υπολογισμού της χρωματικής απόστασης δύο γειτονικών εικονοστοιχείων, αλλά μπορεί να υλοποιηθεί και ως ψηφιακό φίλτρο, με τον καθορισμό του κατάλληλου πίνακα κρουστικής απόκρισης. Τυπικά περιεχόμενα πίνακα κρουστικής απόκρισης για το φίλτρο της ανίχνευσης ακμών, παρουσιάζονται στη συνέχεια.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Από το περιεχόμενο των παραπάνω πινάκων δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό πως ο παράγοντας κανονικοποίησης που ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα της κρουστικής απόκρισης του ψηφιακού φίλτρου, έχει τιμή ίση με το μηδέν. Για το λόγο αυτό, δεν προχωρούμε στη διάρεση των αθροισμάτων με την τιμή αυτού του παράγοντα

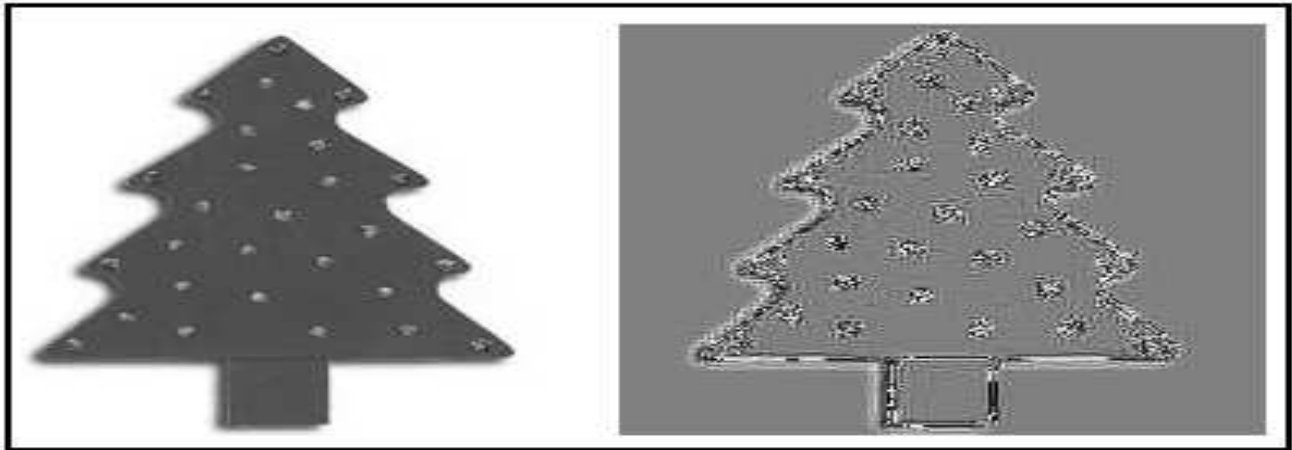
όπως κάναμε στον προηγούμενο αλγόριθμο. Αντίθετα σε κάθε ένα από αυτά τα αθροίσματα, προσθέτουμε την τιμή 128, έτσι ώστε να μεταφέρουμε την τιμή τους στο κλειστό διάστημα $[0, 255]$ στο οποίο ορίζονται οι χρωματικές συνιστώσες για κάθε ένα από τα χρώματα της εικόνας. Ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί το ψηφιακό φίλτρο της ανίχνευσης ακμών, ακολουθεί στη συνέχεια. Σε πλήρη αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση, ο διδιάστατος πίνακας της χρουστικής απόκρισης διαβιβάζεται ως όρισμα στη συνάρτηση EdgeDetection και υποτίθεται πως έχει αρχικοποιηθεί σε προηγούμενο στάδιο της διαδικασίας.

```
#define EDGEWIDTH 3
#define EDGEHEIGHT 3

void EdgeDetection (double ** filterKernel) {
    int xSt = sourceBitmap->GetXStart();
    int ySt = sourceBitmap->GetYStart();
    int width = sourceBitmap->GetWidth();
    int height = sourceBitmap->GetHeight();
    int colors = sourceBitmap->GetColorNumber();
    int i, j, k, l, row, col, color, red, green, blue;
    double sumRed=0, sumGreen=0, sumBlue=0;
    for (i=1; i<width-1; i++) {
        for (j=1; j<height-1; j++) {
            sumRed = sumGreen = sumBlue = 0;
            for (k=0; k<EDGEWIDTH; k++) {
                for (l=0; l<EDGEHEIGHT; l++) {
                    row = i - ((EDGEWIDTH-1)>>1) + k;
                    col = j - ((EDGEHEIGHT-1)>>1) + l;
                    if (colors) {
                        color = sourceBitmap->pixels[row][col];
                        red = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbRed;
                        green = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbGreen;
                        blue = sourceBitmap->rgbTable[color].rgbBlue; }
                    else {
                        red = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbRed;
                        green = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbGreen;
                        blue = sourceBitmap->pixMap[row][col].rgbBlue; }
                    sumRed += red*filterKernel[k][l];
                    sumGreen += green*filterKernel[k][l];
                    sumBlue += blue*filterKernel[k][l]; } }
            sumRed += 128;
            sumGreen += 128;
            sumBlue += 128;
            if (colors)
                DrawPixel(xSt+i, ySt+j,
                    RGB(sumRed, sumGreen, sumBlue));
            else {
                targetBitmap->pixMap[i][j].rgbRed = (int)sumRed;
                targetBitmap->pixMap[i][j].rgbGreen = (int)sumGreen;
                targetBitmap->pixMap[i][j].rgbBlue = (int)sumBlue; } } }
    if (!colors) targetBitmap->DrawBitmap(); }
```

Οι σταθερές EDGEWIDTH και EDGEHEIGHT χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των διαστάσεων του πίνακα της χρουστικής απόκρισης του ψηφιακού φίλτρου, οι οποίες, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση είναι 3×3 . Τυπικό παράδειγμα εφαρμογής του ψηφιακού φίλτρου ανίχνευσης ακμών επί εικόνας εισόδου, απεικονίζεται στο σχήμα 71.

Το επόμενο φίλτρο που θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα (embossing filter) είναι αρκετά ενδιαφέρον, διότι προσδίδει στην εικόνα μια ανάγλυφη, τριδιάστατη υφή. Το φίλτρο αυτό λειτουργεί ακριβώς όπως και το προηγούμενο με τη διαφορά ότι στο πρώτο βήμα της διαδικασίας θα πρέπει να γίνει μετατροπή της εικόνας σε εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι (gray scale conversion). Αυτή η μετατροπή όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι πάρα πολύ εύκολη καθώς το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε την κάθε χρωματική συνιστώσα του κάθε χρώματος με το μέσο όρο των τιμών των χρωματικών συνιστωσών για αυτό το χρώμα. Η συνάρτηση GrayScaleConversion



Σχήμα 71: Παράδειγμα εφαρμογής του φίλτρου της ανίχνευσης ακμών επί εικόνας εισόδου

έχει περιγραφεί σε προηγούμενη ενότητα και η υλοποίησή της επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους αυτοδυναμίας του κειμένου.

```

void GrayScaleConversion (void) {
    int i, j, colors = GetColorNumber();
    int red, green, blue, gray;
    int width = GetWidth();
    int height = GetHeight();
    if (colors) {
        for (i=0;i<colors;i++) {
            red = rgbTable[i].rgbRed;
            green = rgbTable[i].rgbGreen;
            blue = rgbTable[i].rgbBlue;
            gray = (int)((red+green+blue)/3);
            rgbTable[i].rgbRed = gray;
            rgbTable[i].rgbGreen = gray;
            rgbTable[i].rgbBlue = gray; }
    }
    else {
        for (i=0;i<width-1;i++) {
            for (j=0;j<height-1;j++) {
                red = pixMap[i][j].rgbRed;
                green = pixMap[i][j].rgbGreen;
                blue = pixMap[i][j].rgbBlue;
                gray = (int)((red+green+blue)/3);
                pixMap[i][j].rgbRed = gray;
                pixMap[i][j].rgbGreen = gray;
                pixMap[i][j].rgbBlue = gray; }}}}

```

Έχοντας μετατρέψει την εικόνα μας σε εικόνα διαβαθμίσεων του γκρι μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω της ένα φίλτρο παρόμοιο με αυτό που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η μοναδική διαφορά αυτού του φίλτρου με το προηγούμενο, είναι πως το τελευταίο δεν είναι συμμετρικό, και πως τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα της κρουστικής απόκρισης βρίσκονται μόνο επί της κύριας διαγωνίου του. Τυπικά παραδείγματα του πίνακα της κρουστικής απόκρισης για το φίλτρο της ανάγλυφης υψής παρουσιάζονται στη συνέχεια:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση αυτή, η τιμή του παράγοντα κανονικοποίησης (που ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα της κρουστικής απόκρισης) είναι ξανά ίση με το μηδέν. Επομένως για να λάβουμε την τελική τιμή των χρωματικών συνιστωσών δεν θα διαιρέσουμε με την τιμή αυτού του παράγοντα, αλλά προσθέτουμε

στα αθροίσματα που προκύπτουν την τιμή 128. Ο κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί το φίλτρο της προσθήκης ανάγλυφης υφής, παρουσιάζεται στη συνέχεια

```

void Embossing (void) {
    int xSt = sourceBitmap->GetXStart();
    int ySt = sourceBitmap->GetYStart();
    int width = sourceBitmap->GetWidth();
    int height = sourceBitmap->GetHeight();
    int colors = sourceBitmap->GetColorNumber();
    int i, j, k, l, row, col;
    int color, curCol;
    double sumCol=0;
    targetBitmap->GrayScaleConversion();
    for (i=1;i<width-1;i++) {
        for (j=1;j<height-1;j++) {
            sumCol=0;
            for (k=0;k<EMBOS.WIDTH;k++) {
                for (l=0;l<EMBOS.HEIGHT;l++) {
                    row = counter - ((EMBOS.WIDTH-1)>>1)+cnt;
                    col = index - ((EMBOS.HEIGHT-1)>>1)+ndx;
                    if (colors) {
                        color = sourceBitmap->
                            pixels [row] [column];
                        curCol = sourceBitmap->
                            rgbTable [color] . rgbRed;
                    }
                    else {
                        curCol = sourceBitmap->
                            pixMap [row] [column] . rgbRed;
                        sumCol += curCol*filterKernel [cnt] [ndx]; }
                sumCol += 128;
            }
            if (colors)
                DrawPixel(xSt+i, ySt+j, RGB(sumCol, sumCol, sumCol));
            else {
                targetBitmap->pixMap [i] [j] . rgbRed = (int)sumCol;
                targetBitmap->pixMap [i] [j] . rgbGreen = (int)sumCol;
                targetBitmap->pixMap [i] [j] . rgbBlue = (int)sumCol; }
        }
    }
    if (!colors) targetBitmap->DrawBitmap(); }

```

ενώ το αποτέλεσμα της εφαρμογής αυτού του φίλτρου σε εικόνα εισόδου, απεικονίζεται στο σχήμα 72.

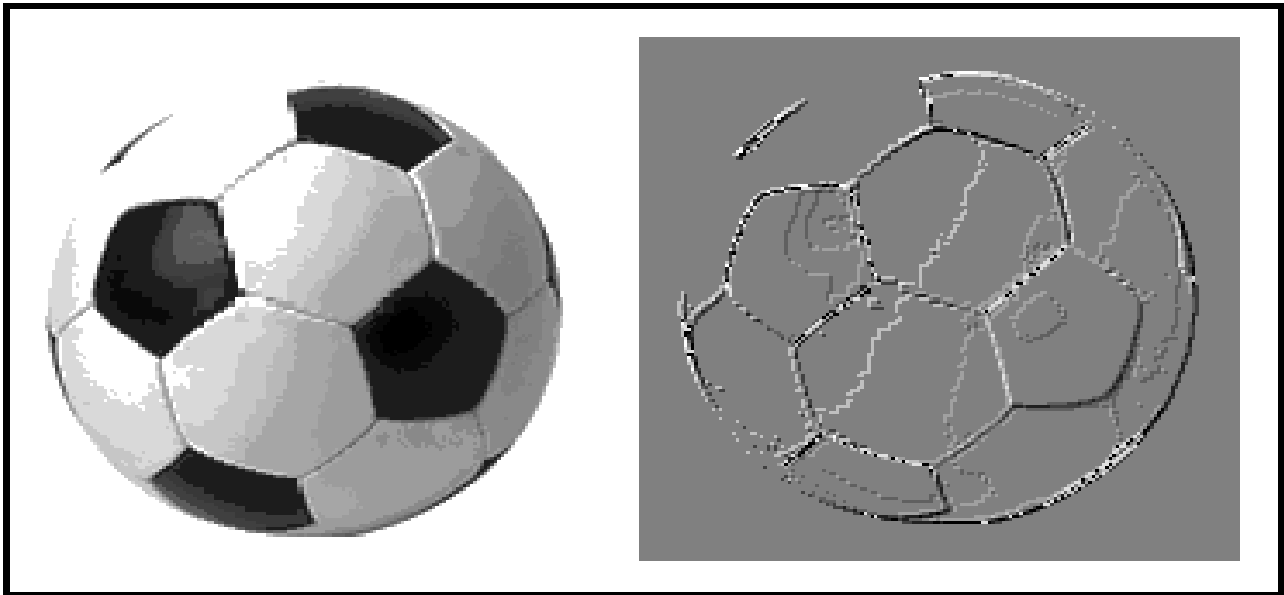
Το τελευταίο ψηφιακό φίλτρο που θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα είναι εκείνο που προκαλεί τη θόλωση της εικόνας εισόδου (Gaussian blur filter). Τα φίλτρα αυτού του είδους είναι χαμηλοπερατά φίλτρα που χαρακτηρίζονται από κυκλική συμμετρία όσον αφορά τις τιμές του πίνακα της κρουστικής απόκρισης. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι πως ο διδιάστατος πίνακας της κρουστικής απόκρισης μπορεί πάντοτε να γραφεί ως γινόμενο ενός πίνακα-γραμμής επί ενός πίνακα-στήλης γεγονός που καθιστά την εφαρμογή τους επί της εικόνας εισόδου μια ταχύτατη διαδικασία. Τυπικό παράδειγμα πίνακα κρουστικής απόκρισης είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ που μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times [1 \ 2 \ 1]$$

Ο πηγαίος κώδικας σε γλώσσα C που υλοποιεί το φίλτρο της θόλωσης εικόνας, είναι παρόμοιος με εκείνον του φίλτρου της ευκρίνειας (το μόνο που αλλάζει είναι οι τιμές του πίνακα της κρουστικής απόκρισης) και για το λόγο αυτό δεν επαναλαμβάνεται εκ νέου. Τυπικό παράδειγμα του φίλτρου θόλωσης εικόνας σε εικόνα εισόδου, παρουσιάζεται στο σχήμα 73.

39 Συμπίεση εικόνας - ο αλγόριθμος JPEG

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα από τα βασικά στάδια της επεξεργασίας εικόνας είναι η συμπίεση της εικόνας (image compression), διαδικασία η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις εικόνων που έχουν μεγάλες διαστάσεις και



Σχήμα 72: Παράδειγμα εφαρμογής του φίλτρου της ανάγλυφης υφής επί εικόνας εισόδου



Σχήμα 73: Παράδειγμα εφαρμογής του φίλτρου θόλωσης εικόνας επί εικόνας εισόδου

χρησιμοποιούν μεγάλο αριθμό από bits για την κωδικοποίηση των χρωμάτων τους. Θεωρώντας για παράδειγμα μια εικόνα με διαστάσεις 1024×768 και 24-bits για κάθε χρώμα, είναι προφανές πως το συνολικό μέγεθος της εικόνας θα είναι ίσο με $1024 \times 768 \times 24 = 18.874.368$ bits = 18 MBytes. Αυτό το μέγεθος είναι πάρα πολύ μεγάλο και δημιουργεί αρκετά προβλήματα σε διαδικασίες που έχουν να κάνουν τόσο με την αποθήκευση της εικόνας όσο και με τη χρήση της (για παράδειγμα τη λήψη της εικόνας από το διαδίκτυο μέσω τηλεφωνικής σύνδεσης).

Ένας από τους πιο γνωστούς και ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους συμπίεσης εικόνων, είναι ο αλγόριθμος JPEG ο οποίος υλοποιήθηκε από την ομάδα Joint Photographic Experts Group στα τέλη της δεκαετίας του '80 και στις αρχές της δεκαετίας του '90. Αυτός ο αλγόριθμος επιτρέπει τη συμπίεση τόσο έγχρωμων εικόνων όσο και εικόνων που περιέχουν μόνο αποχρώσεις του γκρι. Χαρακτηρίζεται από μεγάλη απόδοση και υψηλό ποσοστό συμπίεσης όταν εφαρμόζεται σε φωτογραφίες και ψηφιοποιημένα έργα τέχνης, αλλά δεν λειτουργεί και τόσο καλά σε περιπτώσεις εφαρμογής του σε σκίτσα και εικόνες που περιέχουν μεγάλη ποσότητα κειμένου. Ο αλγόριθμος JPEG μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τη συμπίεση εικόνων, αν και τα τελευταία χρόνια έχει δημιουργηθεί ένας παρόμοιος αλγόριθμος που επιτρέπει τη συμπίεση κινούμενων εικόνων και ταινιών video, και φέρει το όνομα MPEG.

Το βασικό χαρακτηριστικό του αλγόριθμου JPEG είναι η απώλεια πληροφορίας που συσχετίζεται με τη διαδικασία συμπίεσης της εικόνας, γεγονός που μας επιτρέπει να τον χαρακτηρίσουμε ως απωλεστικό αλγόριθμο συμπίεσης. Ωστόσο η πληροφορία που χάνεται κατά τη συμπίεση της εικόνας, δεν γίνεται εύκολα αντιληπτή με γυμνό μάτι, και επομένως οι διαφορές που υφίστανται ανάμεσα στην αυθεντική και στη συμπιεσμένη εικόνα, θεωρούνται αμελητέες. Ας σημειωθεί πως υπάρχουν αλγόριθμοι συμπίεσης εικόνας που δεν χαρακτηρίζονται από απώλεια πληροφορίας. Η απόδοσή τους ωστόσο όσον αφορά το ποσοστό συμπίεσης της εικόνας δεν είναι τόσο μεγάλη όσο αυτή του αλγόριθμου JPEG. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου αλγόριθμου είναι ο αλγόριθμος GIF. Εάν συμπιέσουμε μια εικόνα χρησιμοποιώντας αυτό τον αλγόριθμο, μπορούμε να επιτύχουμε ένα λόγο συμπίεσης με τιμή 4 : 1 -δηλαδή το μέγεθος του συμπιεσμένου αρχείου θα είναι τέσσερις φορές μικρότερο σε σχέση με το μέγεθος της αυθεντικής εικόνας- τιμή που είναι παρά πολύ μικρή σε σχέση με το λόγο συμπίεσης του αλγόριθμου JPEG που μπορεί να προσεγγίσει ακόμη και το 20 : 1. Ένα δεύτερο μειονέκτημα του αλγόριθμου GIF σε σχέση με τον αλγόριθμο JPEG είναι πως ο πρώτος μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε εικόνες με μέγιστο πλήθος χρωμάτων ίσο με 256, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο JPEG, ο οποίος βρίσκει εφαρμογή και σε περιπτώσεις εικόνων που χρησιμοποιούν 24-bits για την αναπαράσταση του κάθε χρώματος. Από την άλλη πλευρά ωστόσο, η ανάγνωση μιας εικόνας JPEG είναι πολύ πιο αργή σε σχέση με τη διαδικασία ανάγνωσης μιας εικόνας GIF. Το μειονέκτημα αυτό ωστόσο θεωρείται αμελητέο μπροστά στον πολύ υψηλό λόγο συμπίεσης που προσφέρει το πρότυπο JPEG, έτσι ώστε σχεδόν ποτέ δεν λαμβάνεται υπ' όψιν.

Ας περάσουμε τώρα σε ορισμένες τεχνικές λεπτομέρειες όσον αφορά τον τρόπο λειτουργίας του αλγόριθμου JPEG. Μιλώντας γενικά, η συμπίεση ενός αρχείου εικόνας από τον εν λόγω αλγόριθμο, μπορεί να οριστεί ως μια διαδικασία τεσσάρων βημάτων. Στο πρώτο βήμα, τα δεδομένα της εικόνας εισόδου, ομαδοποιούνται σε μικρές ομάδες δεδομένων οι οποίες αποθηκεύονται σε διδιάστατους πίνακες με διαστάσεις 8×8 . Στο επόμενο βήμα υπολογίζουμε το διακριτό μετασχηματισμό συννημιτόνου (Direct Cosine Transform, DTC) για κάθε ένα από τα στοιχεία αυτών των πινάκων. Στη συνέχεια οι συντελεστές του παραπάνω μετασχηματισμού υφίστανται τη διαδικασία του κβαντισμού (quantization) και στρογγυλοποιούνται προς κάποιες τιμές η επιλογή των οποίων εξαρτάται από την ακρίβεια της συμπίεσης και την ποιότητα της εικόνας που επιθυμούμε σε κάθε περίπτωση. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας λαμβάνει χώρα συμπίεση των στρογγυλοποιημένων συντελεστών, οι οποίοι αποθηκεύονται σε αρχείο. Η συμπίεση αυτής της πληροφορίας μπορεί να πραγματοποιηθεί με κωδικοποίηση κατά Huffman (Huffman) ή με αριθμητική κωδικοποίηση (arithmetic coding) με την πρώτη μορφή κωδικοποίησης να είναι αυτή που χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις.

Σε μια πιο αναλυτική περιγραφή, η διαδικασία συμπίεσης μιας εικόνας δια της χρήσης του προτύπου JPEG, έχει ως εξής:

ΒΗΜΑ 1: Μετασχηματισμός του χρωματικού χώρου (color space transformation): Από τη βασική θεωρία είναι γνωστό πως μια έγχρωμη εικόνα περιγράφεται ως ένα σύνολο εικονοστοιχείων, κάθε ένα εκ των οποίων φέρει κάποιο χρώμα. Αυτά τα χρώματα ορίζονται σε ένα τριδιάστατο χρωματικό χώρο τα βασικά χρώματα του οποίου είναι το κόκκινο, το πράσινο και το μπλέ. Για το λόγο αυτό, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα χρώματα μιας εικόνας περιγράφονται ως τριάδες (R, G, B) όπου οι σταθερές R , G και B παίρνουν ακέραιες τιμές στο διάστημα $[0,255]$ οι οποίες καθορίζουν τη συνεισφορά του κάθε βασικού χρώματος στο τελικό χρώμα του κάθε εικονοστοιχείου.

Είναι ωστόσο σημαντικό να αναφερθεί, πως κατά τη διαδικασία της ψηφιοποίησης μια εικόνας δεν χρησιμοποιείται η παραπάνω τριάδα για την αναπαράσταση της χρωματικής πληροφορίας, αλλά μια δεύτερη τριάδα, η οποία προκύπτει από την πρώτη δια της εφαρμογής κάποιου μετασχηματισμού. Αυτή η νέα τριάδα συνίσταται από τις τιμές τριών νέων μεγεθών, εκ των οποίων το πρώτο ονομάζεται απόλυτη φωτεινότητα ή απλά φωτεινότητα (luminance) και συμβολίζεται με Y , ενώ τα άλλα δύο χαρακτηρίζονται ως χρωματικά σήματα και αναπαρίστανται από τα σύμβολα C_b και C_r . Όσον αφορά τη φυσική σημασία αυτών των μεγεθών, η φωτεινότητα συσχετίζεται μόνο με τη λαμπρότητα του εικονοστοιχείου και είναι ανεξάρτητη από την απόχρωση ή χρωματικό τόνο (hue) που συσχετίζεται με αυτό. Αντίθετα

αυτή η πληροφορία - που ορισμένες φορές αποδίδεται από τον όρο χρωματικότητα (chrominance) - περιλαμβάνεται στις τιμές των παραμέτρων C_b και C_r . Εάν γνωρίζουμε τις τιμές των χρωματικών συνιστωσών R , G και B και την τιμή της απόλυτης φωτεινότητας Y , μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων C_b και C_r από τις σχέσεις $C_b = B - Y$ και $C_r = R - Y$ - αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο τα χρωματικά σήματα C_b και C_r χαρακτηρίζονται πολλές φορές και ως σήματα διαφοράς χρώματος (color difference signals). Σε διανυσματική ορολογία, η τριάδα των διανυσμάτων (Y, C_b, C_r) συνιστά μια ορθοκανονική βάση του χρωματικού χώρου, με τον άξονα των Y να κείται επί της κύριας διαγωνίου του χρωματικού χώρου RGB που ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$ - ή ισοδύναμα από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(255,255,255)$.

Ο λόγος για τον οποίο λαμβάνει χώρα ο μετασχηματισμός της χρωματικής αναπαράστασης από το χώρο RGB στο χώρο YC_bC_r , είναι πως στη δεύτερη περίπτωση είναι δυνατός ο διαχωρισμός της λαμπρότητας του χρώματος από την απόχρωση που συσχετίζεται με αυτό. Επειδή τώρα το ανθρώπινο μάτι αντιλαμβάνεται πολύ πιο εύκολα τις μεταβολές της λαμπρότητας ενός χρώματος σε σχέση με εκείνες που αφορούν την απόχρωσή του, μπορούμε να καταγράψουμε μια εικόνα δια της χρήσης της κατάλληλης διάταξης καταγραφής, χρησιμοποιώντας πολύ μικρότερη συχνότητα δειγματοληψίας για την απόχρωση σε σχέση με εκείνη που χρησιμοποιούμε για τη λαμπρότητα. Αλλά αυτό οδηγεί προφανώς σε μείωση του πλήθους των καταγεγραμμένων δειγμάτων, και επομένως σε μικρότερο μέγεθος εικόνας. Ας σημειωθεί πως δεν είναι υποχρεωτικό να πραγματοποιήσουμε αυτό το μετασχηματισμό κατά τη διαδικασία συμπίεσης μιας εικόνας δια της χρήσης του προτύπου JPEG. Ωστόσο, σε μια τέτοια περίπτωση, δεν είναι δυνατό να επιτύχουμε υψηλούς λόγους συμπίεσης, καθώς όλη η χρωματική πληροφορία θα καταγραφεί με τη συχνότητα δειγματοληψίας της φωτεινότητας, που είναι αρκετά υψηλή.

Θεωρώντας τις τιμές των σταθερών R , G και B στο κλειστό διάστημα $[0,255]$, αποδεικνύεται πως το εύρος τιμών της φωτεινότητας Y είναι το κλειστό διάστημα $[16,235]$ με την τιμή 16 να αντιστοιχεί στο πιο σκοτεινό άκρο και την τιμή 235 να αντιστοιχεί στο πιο φωτεινό άκρο της χρωματικής περιοχής. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται πως οι τιμές των σταθερών C_r και C_b ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[16,240]$ με την τιμή 128 να αντιστοιχεί στο 0 της χρωματικής κλίμακας RGB . Αυτό σημαίνει πως στο χρωματικό χώρο YC_bC_r , το μαύρο χρώμα αναπαρίσταται από την τριάδα $(16,128,128)$ ενώ το άσπρο χρώμα αναπαρίσταται από την τριάδα $(235,128,128)$. Αντίθετα, εάν εργασθούμε στον κανονικοποιημένο χώρο - στο χώρο αυτό όλες οι τιμές διαιρούνται με την τιμή 255 έτσι ώστε το μαύρο χρώμα να αναπαρίσταται από την τριάδα $(1,1,1)$ - η φωτεινότητα Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, ενώ το εύρος τιμών των χρωματικών διαφορών C_r και C_b είναι το κλειστό διάστημα $[-0.5, +0.5]$.

Ο μετασχηματισμός της αναπαράστασης κάποιου χρώματος από το χώρο RGB στο χώρο YC_bC_r , απαιτεί την κανονικοποίηση των τιμών των χρωματικών συνιστωσών R , G και B (δηλαδή τη διαίρεσή τους με την τιμή 255), έτσι ώστε αυτές να μεταφερθούν στο διάστημα $[0,1]$. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των ποσοτήτων Y , C_r και C_b από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.299 & +0.587 & +0.114 \\ -0.169 & -0.331 & +0.500 \\ +0.500 & -0.419 & -0.081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (192)$$

που μπορεί να αναλυθεί στο γραμμικό σύστημα των αριθμητικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} Y &= +0.299R + 0.587G + 0.114B \\ C_b &= -0.169R - 0.331G + 0.500B \\ C_r &= +0.500R - 0.419G - 0.081B \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, εάν γνωρίζουμε τις τιμές (Y, C_b, C_r) , μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των (R, G, B) , εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Αυτός περιγράφεται από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.000 & +0.000 & +1.402 \\ +1.000 & -0.344 & -0.714 \\ +1.000 & +1.771 & +0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{bmatrix} \quad (193)$$

που μπορεί να αναλυθεί στο σύστημα των αριθμητικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} R &= +1.000Y + 0.000C_b + 1.402C_r = Y + 1.402C_r \\ G &= +1.000Y - 0.344C_b - 0.714C_r = Y - 0.344C_b - 0.714C_r \\ B &= +1.000Y + 1.771C_b + 0.000C_r = Y + 1.771C_b \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί πως σε πλήρη αναλογία με τον ευθύ μετασχηματισμό, ο αντίστροφος μετασχηματισμός απαιτεί την αναγωγή της τιμής της μεταβλητής Y στο διάστημα $[0, 1]$ και των τιμών των μεταβλητών C_b και C_r στο διάστημα $[-0.5, +0.5]$. Αυτή η αναγωγή μπορεί να πραγματοποιηθεί δια της χρήσης των εξισώσεων

$$Y = 219Y + 16 \quad C_b = 224C_b + 128 \quad \text{και} \quad C_r = 224C_r + 128$$

Είναι προφανές πως η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε έγχρωμες εικόνες (που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη των χρωματικών συνιστωσών RGB) και όχι σε εικόνες των αποχρώσεων του γκρι. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως ο μετασχηματισμός του χρωματικού χώρου προκαλεί μια πρώτη απώλεια πληροφορίας καθώς οι παραπάνω πράξεις οδηγούν στον υπολογισμό δεκαδικών ποσοτήτων, οι οποίες εν τούτοις καταχωρούνται σε ακέραιες μεταβλητές. Ωστόσο η επίδραση αυτής της πληροφορίας στην ποιότητα της τελικής εικόνας είναι αμελητέα, έτσι ώστε να μην λαμβάνεται καθόλου υπ' όψιν.

Μετά την ολοκλήρωση της παραπάνω διαδικασίας και πριν περάσουμε στο επόμενο βήμα που είναι η χρήση του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου, μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια πρώτη συμπίεση της εικόνας, ομαδοποιώντας τα εικονοστοιχεία της εικόνας σε ομάδες του ενός ή των δύο εικονοστοιχείων, και κρατώντας μόνο το ένα από αυτά (downsampling). Αυτή η ομαδοποίηση αφορά μόνο τις συνιστώσες της απόχρωσης του κάθε χρώματος, ενώ η πληροφορία που αφορά τη φωτεινότητα των εικονοστοιχείων παραμένει αμετάβλητη διότι είναι και η πιο σημαντική. Με τον τρόπο αυτό το μέγεθος της εικόνας ελλατώνεται αρκετά εφόσον μειώνεται κατά το ένα δεύτερο ή κατά το ένα τρίτο. Αυτή η διαδικασία οδηγεί προφανώς σε απώλεια πληροφορίας, η οποία ωστόσο δεν επηρεάζει την ποιότητα της τελικής εικόνας αφού οι διαφορές της απόχρωσης που εισάγει δεν γίνονται σχεδόν καθόλου αντιληπτές. Όπως και η προηγούμενη διαδικασία, έτσι και αυτή εφαρμόζεται μόνο στις έγχρωμες εικόνες, οι οποίες για το λόγο αυτό συμπίεζονται πολύ περισσότερο σε σχέση με τις εικόνες που περιέχουν μόνο αποχρώσεις του γκρι χρώματος.

ΒΗΜΑ 2: Εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου επί των μετασχηματισμένων δεδομένων εισόδου (DCT Transform Application): Αμέσως μετά τη μετατροπή των χρωματικών δεδομένων της εικόνας από το χώρο RGB στο χώρο YC_bC_r , αυτά ομαδοποιούνται σε διδιάστατες ομάδες στοιχείων με διαστάσεις 8×8 και για κάθε μια από αυτές τις ομάδες, υπολογίζουμε το διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου (Discrete Cosine Transform, DCT). Η λειτουργία αυτού του μετασχηματισμού είναι παρόμοια με εκείνη του μετασχηματισμού Fourier και επιτρέπει την αναπαράσταση των δεδομένων εισόδου στο χώρο συχνοτήτων (frequency domain). Αυτό σημαίνει πως μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, η ομάδα των 64 χρωματικών συνιστωσών με διαστάσεις 8×8 θα έχει μετατραπεί στην αντίστοιχη ομάδα συχνοτήτων (frequency map) με το ίδιο πλήθος διαστάσεων. Σε πλήρη αναλογία με το μετασχηματισμό Fourier, η πρώτη από αυτές τις συχνοτήτες που θεωρείται ως η συνεχής συνιστώσα (DC component) και ονομάζεται θεμελιώδη συχνότητα, δεν είναι παρά ο μέσος όρος των υπολοίπων 63 συχνοτήτων που ονομάζονται συντελεστές DCT (DCT coefficients). Εάν $Y(u, v)$, $C_b(u, v)$ και $C_r(u, v)$ είναι οι τιμές της φωτεινότητας Y και των δύο χρωματικών καναλιών C_b και C_r στο εικονοστοιχείο με συντεταγμένες (u, v) , τότε, ο διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου για τις τρεις χρωματικές συνιστώσες, θα δίδεται από τις σχέσεις

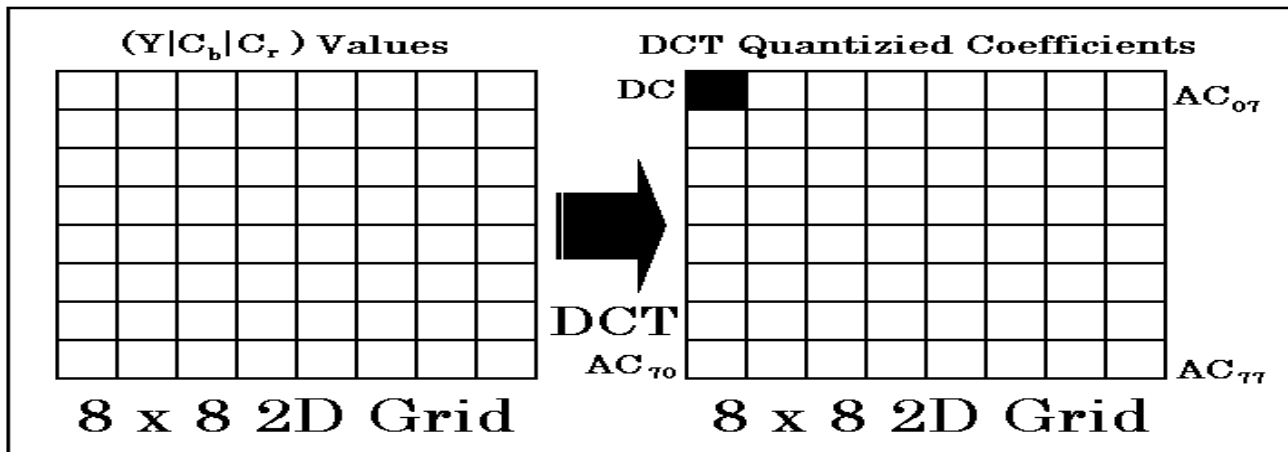
$$C_Y(u, v) = \frac{2}{N} \alpha(u) \alpha(v) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} Y(i, j) \cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2N}\right)$$

$$C_{C_b}(u, v) = \frac{2}{N} \alpha(u) \alpha(v) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} C_b(i, j) \cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2N}\right)$$

$$C_{C_r}(u, v) = \frac{2}{N} \alpha(u) \alpha(v) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} C_r(i, j) \cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2N}\right)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις η τιμή της σταθεράς N είναι ίση με 8, ενώ η συνάρτηση $\alpha(x)$ ($x \in \{u, v\}$) έχει την τιμή $(1/\sqrt{2})$ για $x = 0$ ενώ είναι ίση με το μηδέν για τις υπόλοιπες τιμές του x . Στην παραπάνω διαδικασία, ο διδιάστατος πίνακας με διαστάσεις 8×8 θεωρείται ως ένα μονοδιάστατο διακριτό σήμα με μήκος 64 στοιχεία, που είναι συνάρτηση των χωρικών συνιστωσών i και j . Το σήμα αυτό κάτω από την εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου, αποσυντίθεται σε 64 ορθογώνια σήματα βάσης (orthogonal basis signals) κάθε ένα εκ των οποίων περιέχει και μια από τις 64 διδιάστατες χωρικές συχνότητες (spatial frequencies) που συνιστούν το φάσμα (spectrum) της εικόνας. Σε πλήρη αναλογία με το μετασχηματισμό Fourier, το σύνολο της πληροφορίας της εικόνας περιλαμβάνεται στη θεμελιώδη συχνότητα και στις περιοχές χαμηλών συχνοτήτων, ενώ οι υψηλές συχνότητες περιέχουν ένα πολύ μικρό ποσοστό αυτής της πληροφορίας. Επομένως η μετατροπή των χρωματικών συνιστωσών στο χώρο συχνοτήτων επιτρέπει την ταυτοποίηση των υψηλών συχνοτήτων και στη συνέχεια την απαλοιφή τους, χωρίς σημαντική απώλεια της ποιότητας της εικόνας. Αυτή η διαδικασία απαλοιφής, αποτελεί από μόνη της, μια επιπρόσθετη μορφή συμπίεσης της εικόνας.

Το σχήμα 74 παρουσιάζει τον πίνακα των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου που αντιστοιχεί στον πίνακα των δεδομένων που έχουν προκύψει από το μετασχηματισμό $RGB \Rightarrow YC_bC_r$. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει ένας αλλά τρεις τέτοιοι πίνακες (έναν για κάθε μια από τις συνιστώσες Y , C_b και C_r) οι οποίοι αντιστοιχούν σε ισάριθμους πίνακες συντελεστών DCT. Από το σχήμα 74 δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε, πως η συνεχής (DC) συνιστώσα που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη συχνότητα, αποθηκεύεται στο πρώτο κελί



Σχήμα 74: Ο πίνακας των συντελεστών DCT που αντιστοιχεί στον πίνακα των δεδομένων εισόδου και έχει προκύψει από την εφαρμογή επί αυτών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου

του πίνακα εξόδου (αυτό που ορίζεται από την τομή της πρώτης γραμμής με την πρώτη στήλη) ενώ, οι υπόλοιποι 63 συντελεστές αποθηκεύονται στα υπόλοιπα κελιά του πίνακα εξόδου και καταλαμβάνουν διαδοχικές θέσεις από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω. Έτσι η πρώτη AC συνιστώσα βρίσκεται στο κελί (0, 1) του πίνακα, ενώ η τελευταία (δηλαδή η 63^η) συνιστώσα βρίσκεται στο κελί (7, 7) του πίνακα των συντελεστών DCT .

ΒΗΜΑ 3: Χβαντισμός των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου (DCT Coefficient Quantization): Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες, η μέχρι τώρα διαδικασία συμπίεσης μιας εικόνας δια της χρήσης του προτύπου JPEG, περιελάμβανε την ομαδοποίηση των χρωματικών συνιστωσών σε ομάδες των 64 στοιχείων με διαστάσεις 8×8 και την εφαρμογή επί αυτών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου, προκειμένου να υπολογισθούν οι ομώνυμοι συντελεστές. Είναι προφανές πως μέχρι αυτό το στάδιο δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια ουσιαστική συμπίεση δεδομένων. Για το λόγο αυτό η πληροφορία που χάνθηκε μέχρι τώρα είναι αμελητέα, και δεν έχει καμία ουσιαστική επίδραση στην ποιότητα εμφάνισης της εικόνας. Αυτή η απώλεια πληροφορίας οφείλεται στα σφάλματα στρογγυλοποίησης (roundoff errors) που χαρακτηρίζουν τη διαδικασία μετατροπής των χρωματικών δεδομένων από το χώρο RGB στο χώρο $YCbCr$, στη διαδικασία ομαδοποίησης των εικονοστοιχείων (downsampling) που συμβάλλει σε μία πρώτη ελάττωση του μεγέθους της εικόνας και στην απώλεια των υψηλών συχνοτήτων που λαμβάνει χώρα κατά τη διαδικασία υπολογισμού των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου.

Η διαδικασία εκείνη που πραγματοποιεί την ουσιαστική συμπίεση της εικόνας και προκαλεί μεγάλη απώλεια πληροφορίας, είναι ο χβαντισμός των συντελεστών DCT που έχουν υπολογιστεί κατά το προηγούμενο στάδιο της μετατροπής. Ο κάθε ένας από αυτούς τους συντελεστές διαιρείται με κάποια σταθερά χβαντισμού (η σταθερά αυτή είναι διαφορετική για κάθε συντελεστή) και ο δεκαδικός αριθμός που προκύπτει στρογγυλοποιείται προς τον πλησιέστερο ακέραιο. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα να απομακρυνθούν οι συντελεστές που έχουν μικρή τιμή και θεωρούνται ασήμαντοι, και να παραμείνουν μόνο οι συντελεστές που έχουν μεγάλη τιμή και περιέχουν το συντριπτικό ποσοστό της αποθηκευμένης πληροφορίας. Το πρότυπο JPEG ορίζει δύο πίνακες σταθερών χβαντισμού (quantization tables), έναν για τη φωτεινότητα και έναν για τη χρωματικότητα. Οι τιμές των σταθερών που περιλαμβάνονται σε αυτούς τους πίνακες υπολογίζονται με κριτήριο την επιθυμητή σε κάθε περίπτωση ποιότητα της παραγόμενης εικόνας, η οποία με τη σειρά της, είναι μια παράμετρος που καθορίζεται από το χρήστη και που η τιμή της αποθηκεύεται στο αρχείο JPEG που θα προκύψει.

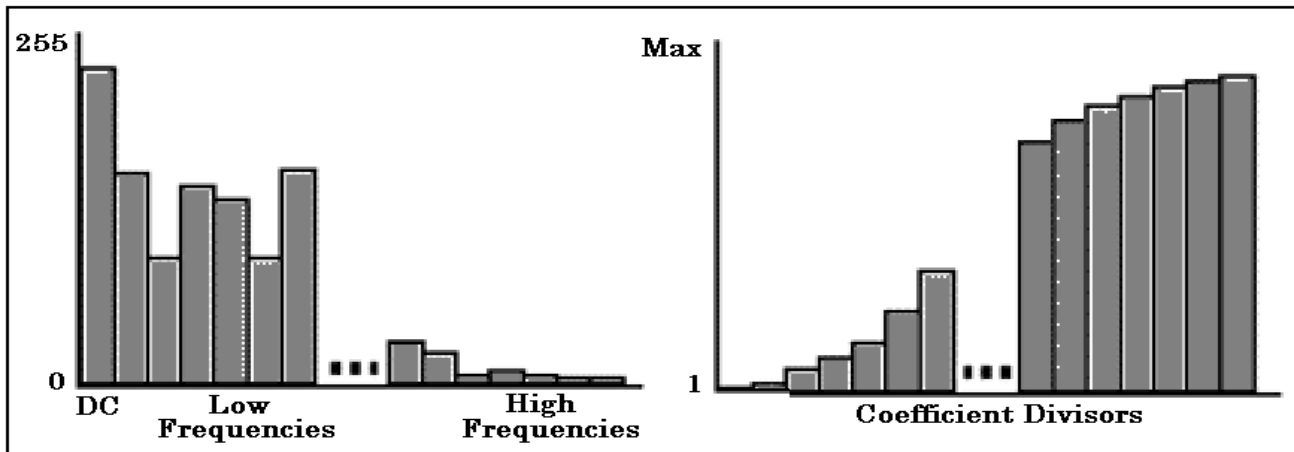
Σε μαθηματική περιγραφή, εάν F είναι ο πίνακας των συντελεστών DCT και Q ο πίνακας χβαντισμού για τη φωτεινότητα ή τη χρωματικότητα, η τιμή $F^Q(u, v)$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή της διαδικασίας του χβαντισμού επί του κελιού $F(u, v)$, δίδεται από τη σχέση

$$F^Q(u, v) = \text{Integer Round} \left(\frac{F(u, v)}{Q(u, v)} \right) \quad (194)$$

όπου $Q(u, v)$ η τιμή του πίνακα χβαντισμού που αντιστοιχεί στο κελί $F(u, v)$.

Τυπικά περιεχόμενα των πινάκων χβαντισμού για τη φωτεινότητα και τη χρωματικότητα και για downsampling με λόγο 2 : 1 ως προς τα χρωματικά κανάλια, παρουσιάζονται στους πίνακες 9 και 10. Όσον αφορά δε τα μέτρα των τιμών των εν λόγω πινάκων σε σχέση με τις τιμές των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου, αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 75. Από το σχήμα αυτό δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό πως όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα που συσχετίζεται με τον κάθε συντελεστή, τόσο μεγαλύτερο είναι και το μέτρο της σταθεράς

χβαντισμού με την οποία αυτός διαφείται. Αυτό, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, έχει ως αποτέλεσμα την εξάλειψη των συντελεστών που συσχετίζονται με τις περιοχές υψηλών συχνοτήτων.



Σχήμα 75: Η σχέση των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου με τις τιμές των σταθερών χβαντισμού με τις οποίες αυτοί διαιρούνται

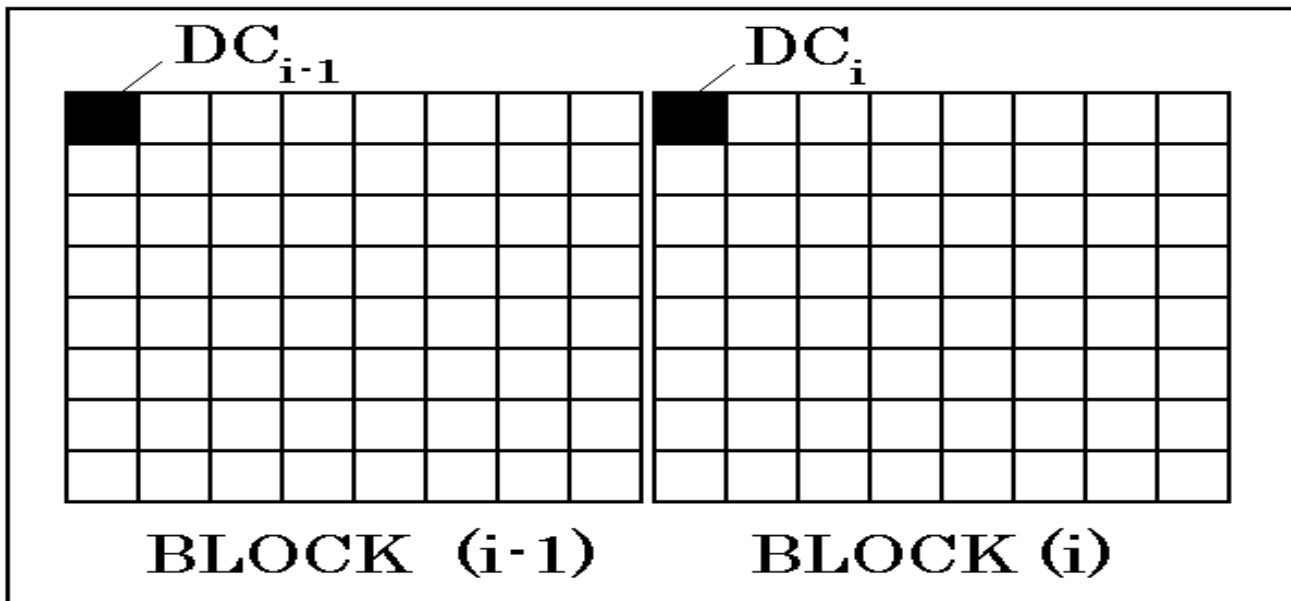
Πίνακας 9: Τυπικά περιεχόμενα του πίνακα χβαντισμού για το μέγεθος της φωτεινότητας

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 016 | 011 | 010 | 016 | 024 | 040 | 051 | 061 |
| 012 | 012 | 014 | 019 | 026 | 058 | 060 | 055 |
| 012 | 013 | 016 | 024 | 040 | 057 | 069 | 056 |
| 014 | 017 | 022 | 029 | 051 | 087 | 080 | 062 |
| 018 | 022 | 037 | 056 | 068 | 109 | 103 | 077 |
| 024 | 035 | 055 | 064 | 081 | 104 | 113 | 092 |
| 049 | 064 | 078 | 087 | 103 | 121 | 120 | 101 |
| 072 | 092 | 095 | 098 | 112 | 100 | 103 | 099 |

Πίνακας 10: Τυπικά περιεχόμενα του πίνακα χβαντισμού για το μέγεθος της χρωματικότητας

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 017 | 018 | 024 | 047 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 018 | 021 | 026 | 066 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 024 | 026 | 056 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 047 | 066 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |
| 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 | 099 |

Είναι προφανές πως η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας χαρακτηρίζεται από απώλεια πληροφορίας, όπως άλλωστε συμβαίνει και σε κάθε διαδικασία χβαντισμού. Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές των συντελεστών των πινάκων χβαντισμού, τόσο πιο μεγάλη είναι και η πληροφορία που απομακρύνεται από την εικόνα. Είναι χρήσιμο να αναφερθεί στο σημείο αυτό, πως ο χβαντισμός των συντελεστών DCT που αντιστοιχούν σε μεγάλες συχνότητες, δεν είναι τόσο ακριβής, όσο ο χβαντισμός των χαμηλών συχνοτήτων, κάτι που είναι αναμενόμενο, δεδομένου πως οι μεγάλες συχνότητες ούτως ή άλλως δεν γίνονται εύκολα αντιληπτές με γυμνό μάτι. Το ίδιο καθεστώς ισχύει και για τις συνιστώσες της φωτεινότητας, ο χβαντισμός των οποίων είναι πολύ πιο ακριβής από τον χβαντισμό των συνιστωσών της χρωματικότητας. Αυτός είναι και ο λόγος χρήσης δύο ξεχωριστών πινάκων χβαντισμού, έναν για τη φωτεινότητα και έναν για τη χρωματικότητα. Δεν είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό πως η επιλογή των βέλτιστων τιμών για τα περιεχόμενα των πινάκων χβαντισμού, είναι μια πάρα πολύ σημαντική παράμετρος



Σχήμα 77: Διαφορική παλμοκωδική κωδικοποίηση των τιμών των συντελεστών DC

σε αυτούς, και αναπαρίσταται με γραφικό τρόπο στο σχήμα 77.

ΒΗΜΑ 4: Κωδικοποίηση των χβαντισμένων συντελεστών DCT (Quantum DCT Coefficient Coding): Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας μετατροπής λαμβάνει χώρα κωδικοποίηση και περαιτέρω συμπίεση των χβαντισμένων συντελεστών DCT δια της χρήσης μιας μη απωλεστικής μεθόδου η οποία στηρίζεται στις στατιστικές ιδιότητες των δεδομένων εισόδου. Όπως έχει αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, το πρότυπο JPEG προτείνει δύο μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να πραγματοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία, με τη μέθοδο του Huffman να είναι αυτή που χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται ως μια διαδικασία δύο βημάτων. Στο πρώτο βήμα η νέα ακολουθία δεδομένων που έχει προκύψει από την αναδιάταξη των χβαντισμένων συντελεστών DCT μετατρέπεται σε μια ενδιάμεση ακολουθία συμβόλων. Στο δεύτερο βήμα της διαδικασίας, τα σύμβολα αυτά μετατρέπονται σε μια ροή δεδομένων (data stream) και με τέτοιο τρόπο ώστε να μην είναι διαχωρίσιμα τό ένα από το άλλο.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της μεθόδου του Huffman, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως η εν λόγω μέθοδος δεν εφαρμόζεται απευθείας στους χβαντισμένους συντελεστές DCT , καθώς αυτοί υφίστανται μια πρώτη μέθοδο συμπίεσης που είναι γνωστή ως συμπίεση RLC (Run Length Coding). Η επιλογή αυτής της μεθόδου συμπίεσης δικαιολογείται από το γεγονός πως η ακολουθία των αναδιατεταγμένων χβαντισμένων συντελεστών DCT (zigzag sequence) χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη πολλών συνεχόμενων μηδενικών. Εκείνο που κάνουμε λοιπόν είναι να καταμετρούμε το πλήθος των εν λόγω ψηφίων και να αντικαθιστούμε την ακολουθία των μηδενικών που έχει προκύψει (run lengths) με την τιμή του πλήθους που έχει καταμετρηθεί. Με τον τρόπο αυτό το μήκος της ακολουθίας των δεδομένων μειώνεται πάρα πολύ. Μετά τη διαδικασία αυτή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Huffman για να συμπίεσουμε ακόμη περισσότερο τα μήκη των ακολουθιών που περιέχουν στοιχεία με τιμή ίση με το μηδέν.

Η κωδικοποίηση Huffman απαιτεί την ύπαρξη ενός ή περισσότερων πινάκων με κωδικούς (code tables) οι οποίοι θα πρέπει να καθοριστούν από την εφαρμογή και οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν τόσο κατά τη συμπίεση όσο και κατά την αποσυμπίεση της εικόνας. Αυτοί οι πίνακες μπορούν να καθορισθούν εκ των προτέρων και να χρησιμοποιηθούν για κάθε εικόνα, αν και υπάρχει η δυνατότητα να δημιουργηθούν και να χρησιμοποιηθούν για τη συμπίεση μιας συγκεκριμένης εικόνας.

Ας περάσουμε τώρα σε μια αναλυτική περιγραφή του αλγορίθμου συμπίεσης του Huffman, ο οποίος επινοήθηκε από τον David A. Huffman το 1952. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στην καταγραφή της συχνότητας εμφάνισης των συμβόλων προς κωδικοποίηση τα οποία στη συνέχεια με βάση την τιμή αυτής της συχνότητας, τοποθετούνται στους κόμβους ενός δέντρου που είναι γνωστό ως δέντρο του Huffman (Huffman tree). Το δέντρο αυτό χαρακτηρίζεται από τρεις σημαντικές ιδιότητες: (α) είναι δυαδικό δέντρο (binary tree) που σημαίνει πως ο κάθε γονικός κόμβος (parent node) έχει ακριβώς δύο παιδιά (child nodes), (β) σε κάθε κλάδο του δέντρου (branch) αποδίδεται μια τιμή βάρους η οποία είναι ίση με το μηδέν για τους αριστερούς κλάδους και ίση με τη μονάδα για τους δεξιούς κλάδους και (γ) τα στοιχεία της λίστας τοποθετούνται στα φύλλα (leaves) του δέντρου, με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτά που χαρακτηρίζονται από μεγάλη συχνότητα εμφάνισης να τοποθετούνται αρκετά ψηλά στη δεντρική δομή και σε κόμβους που βρίσκονται κοντά στη ρίζα του δέντρου (root), ενώ εκείνα που χαρακτηρίζονται από μικρή συχνότητα

εμφάνισης να τοποθετούνται σε κόμβους του δέντρου που βρίσκονται στα χαμηλότερα επίπεδα.

Προκειμένου να κωδικοποιήσουμε μια ακολουθία δεδομένων εισόδου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Huffman θα πρέπει να διαβάσουμε τα δεδομένα προς κωδικοποίηση, δύο φορές. Την πρώτη φορά καταγράφουμε τη συχνότητα εμφάνισης για κάθε ένα από τα δεδομένα εισόδου και δημιουργούμε μια λίστα που περιέχει αυτά τα δεδομένα και την τιμή της συχνότητας εμφάνισης που έχει καταμετρηθεί για κάθε ένα από αυτά. Αυτή η λίστα χαρακτηρίζεται από αύξουσα ταξινόμηση και επομένως τα δεδομένα με μικρή συχνότητα εμφάνισης θα τοποθετηθούν στην αρχή της λίστας, ενώ τα δεδομένα με μεγάλη συχνότητα εμφάνισης θα τοποθετηθούν στο τέλος της λίστας. Αμέσως μετά τη δημιουργία αυτής της λίστας, το δέντρο του Huffman δημιουργείται με τον εξής τρόπο:

Εντοπίζουμε τα δύο στοιχεία της λίστας που χαρακτηρίζονται από τη μικρότερη συχνότητα εμφάνισης. Στη συνέχεια προσθέτουμε τις τιμές των συχνοτήτων αυτών των στοιχείων, και δημιουργούμε ένα δέντρο η ρίζα του οποίου περιέχει το άθροισμα αυτών των τιμών, ενώ τα παιδιά αυτής της ρίζας είναι τα δύο στοιχεία που έχουν ταυτοποιηθεί. Αυτό το δέντρο προστίθεται στην ταξινομημένη λίστα των δεδομένων και με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρείται η αύξουσα ταξινόμηση. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, αφαιρούμε από τη λίστα τα στοιχεία που έχουμε προσθέσει στο δέντρο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρι τελικά στη λίστα να παραμείνει ένα και μοναδικό στοιχείο, που αποτελεί και τη ρίζα του δέντρου του Huffman.

Μετά την κατασκευή του δέντρου του Huffman αποδίδουμε στους κλάδους του μια τιμή βάρους, η οποία είναι ίση με το μηδέν για τους αριστερούς κλάδους, και ίση με τη μονάδα για τους δεξιούς κλάδους. Χρησιμοποιώντας αυτά τα βάρη μπορούμε για κάθε ένα από τα σύμβολα προς κωδικοποίηση, να κατασκευάσουμε ένα κωδικό αριθμό εκπεφρασμένο στο δυαδικό σύστημα, που θα το ταυτοποιεί πλήρως. Για να το κάνουμε αυτό ξεκινάμε από τον κόμβο στον οποίο έχει τοποθετηθεί το κάθε σύμβολο κατά τη διάρκεια της προηγούμενης διαδικασίας, και αρχίζουμε να μετακινούμαστε προς τα πίσω (backwards) μέχρι να φτάσουμε στη ρίζα του δέντρου. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε μια διαδρομή μέσα στο δέντρο η οποία ξεκινά από το θεωρούμενο σε κάθε περίπτωση σύμβολο και τερματίζεται στη ρίζα. Η διαδρομή αυτή αποτελείται από μια σειρά από κλάδους, για κάθε ένα εκ των οποίων καταγράφουμε την τιμή βάρους που έχει αποδοθεί σε αυτόν. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε ένα δυαδικό κωδικό αριθμό ο οποίος ταυτοποιεί πλήρως το κάθε ένα από τα σύμβολα προς κωδικοποίηση.

Η εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου σε μια πληθώρα εφαρμογών συμπίεσης δεδομένων, έχει δείξει πως σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, ο δυαδικός αριθμός που θα προκύψει από την παραπάνω δυαδικασία, είναι σχεδόν πάντοτε μικρότερος (όσον αφορά το πλήθος των bits που περιέχει) από τον αρχικό τρόπο αναπαράστασης των δεδομένων που συνήθως είναι ένας κωδικός ASCII με μήκος 8 bits. Εάν λοιπόν αντικαταστήσουμε το κάθε σύμβολο προς κωδικοποίηση με τον κωδικό που έχει δημιουργηθεί για αυτό το σύμβολο δια της εφαρμογής της ανωτέρω διαδικασίας, θα λάβουμε τελικά μια ακολουθία δεδομένων που θα χαρακτηρίζεται από πολύ μικρότερο μέγεθος σε σχέση με την αρχική. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή η συμπίεση δεδομένων. Είναι προφανές πως επειδή κατά την αποκωδικοποίηση θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι κωδικοί που χρησιμοποιήθηκαν και κατά την κωδικοποίηση των δεδομένων, οι κωδικοί που έχουν δημιουργηθεί, θα πρέπει να αποθηκευτούν και αυτοί στο αρχείο εξόδου που θα προκύψει.

Προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου του Huffman, ας τον χρησιμοποιήσουμε για να συμπίεσουμε τη φράση

DIGITAL SIGNAL AND IMAGE PROCESSING

Αυτή η φράση αποτελείται από 31 γράμματα και λαμβάνοντας υπό όψιν πως το κάθε γράμμα αναπαρίσταται από τον κατάλληλο ASCII χαρακτήρα με μήκος 8 bits, είναι προφανές πως το συνολικό μέγεθος αυτή της φράσης είναι ίσο με 248 bits.

Το πρώτο βήμα εφαρμογής του αλγορίθμου του Huffman, περιλαμβάνει την ταυτοποίηση των διαφορετικών γραμμάτων που περιλαμβάνονται στην παραπάνω φράση, και την καταμέτρηση της συχνότητας εμφάνισης για κάθε ένα από αυτά. Αυτή η διαδικασία καταγραφής, αναδεικνύει την ύπαρξη δεκατεσσάρων διαφορετικών γραμμάτων, τα οποία, μαζί με τη συχνότητα εμφάνισης που τα χαρακτηρίζει, περιλαμβάνονται στον πίνακα 11.

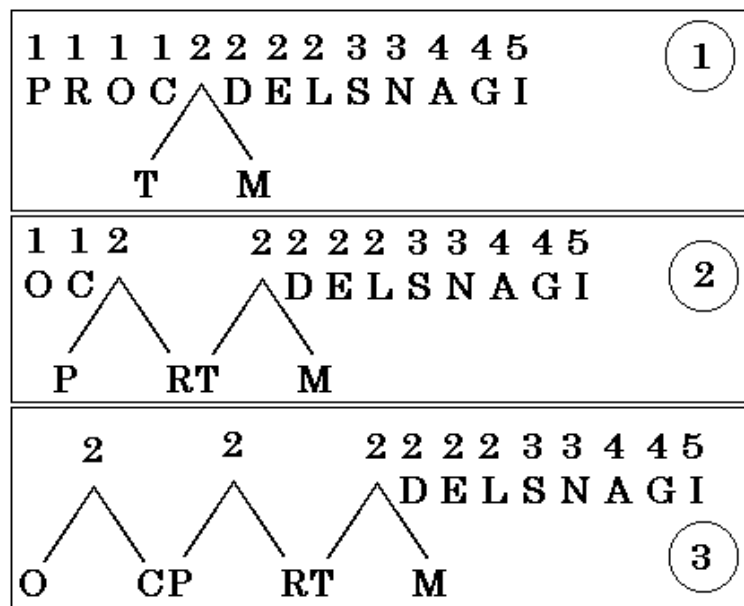
Αμέσως μετά τη δημιουργία του παραπάνω πίνακα, λαμβάνει χώρα δημιουργία μιας ταξινομημένης λίστας που περιέχει τους χαρακτήρες που έχουν εντοπιστεί, ταξινομημένους κατά αύξουσα ταξινόμηση ως προς τη συχνότητα εμφάνισης που τους χαρακτηρίζει. Η λίστα αυτή έχει τη μορφή

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| T | M | P | R | O | C | D | E | L | S | N | A | G | I |

Τέλος η δημιουργία του δέντρου Huffman πραγματοποιείται δια της εφαρμογής του αλγορίθμου που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας επιλέγουμε τα δύο στοιχεία με τη μικρότερη

Πίνακας 11: Τα 14 διαφορετικά γράμματα της φράσης του παραδείγματος μαζί με τις αντίστοιχες συχνότητες εμφάνισης

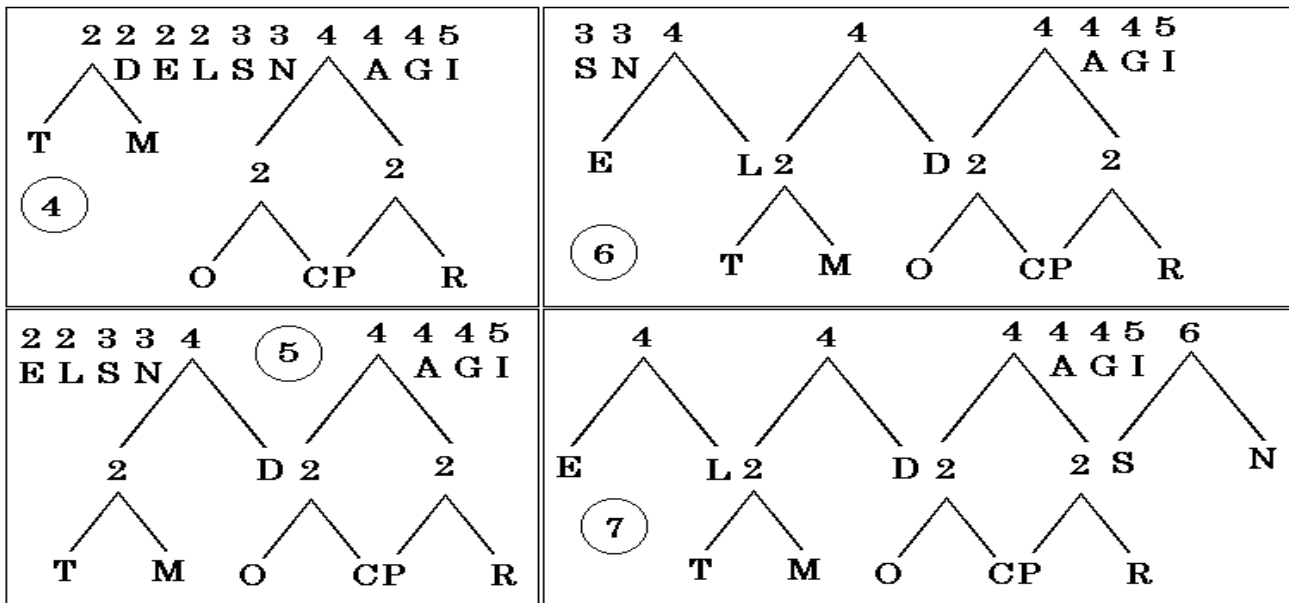
| Καταγεγραμμένος Χαρακτήρας | Συχνότητα Εμφάνισης | Καταγεγραμμένος Χαρακτήρας | Συχνότητα Εμφάνισης |
|----------------------------|---------------------|----------------------------|---------------------|
| D | 02 | N | 03 |
| I | 05 | M | 01 |
| G | 04 | E | 02 |
| T | 01 | P | 01 |
| A | 04 | R | 01 |
| L | 02 | O | 01 |
| S | 03 | C | 01 |



Σχήμα 78: Τα Βήματα 01, 02 και 03 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

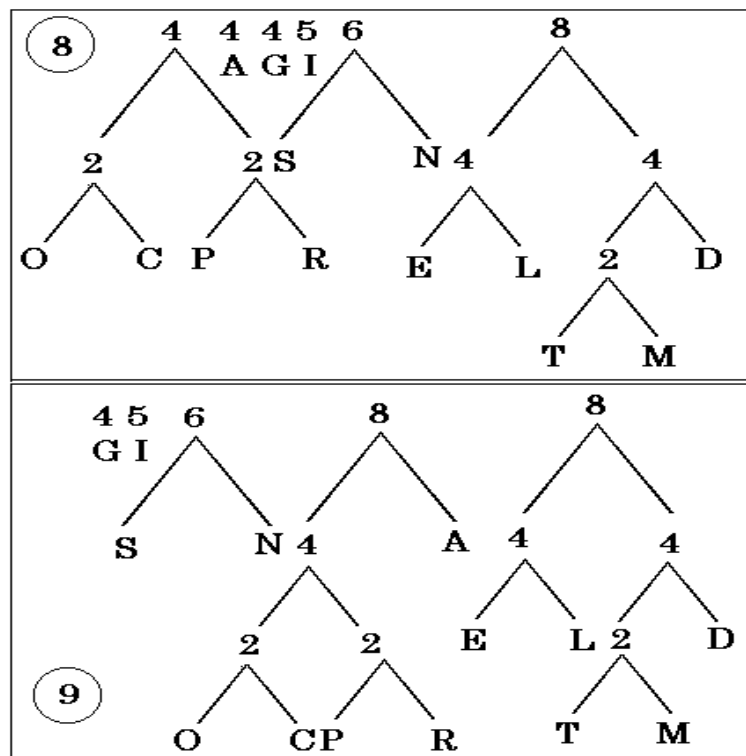
συχνότητα εμφάνισης, δημιουργούμε το γονικό κόμβο αυτών των δύο στοιχείων ο οποίος περιέχει το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισης των παραπάνω στοιχείων και τοποθετούμε αυτόν τον κόμβο στην κατάλληλη θέση μέσα στη λίστα, απομακρύνοντας ταυτόχρονα τα στοιχεία που έχουμε χρησιμοποιήσει σε κάθε στάδιο. Στο παράδειγμα που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα, η δημιουργία του δέντρου Huffman περιλαμβάνει 13 βήματα, τα οποία σε γενικές γραμμές είναι τα ακόλουθα:

- Βήμα 01: Από τη λίστα δεδομένων που παρουσιάσαμε προηγουμένως διαπιστώνουμε πως υπάρχουν έξι στοιχεία με συχνότητα εμφάνισης ίση με τη μονάδα. Διαλέγουμε τα δύο πρώτα που αντιστοιχούν στα γράμματα *T* και *M* (το ποια στοιχεία θα διαλέξουμε εφ' όσον είναι περισσότερα από δύο δεν έχει καμιά σημασία) και κατασκευάζουμε ένα γονικό κόμβο για αυτά τα στοιχεία. Η τιμή αυτού του κόμβου είναι το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισης των γραμμάτων *T* και *M* που είναι η τιμή 2. Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας τοποθετούμε τον κόμβο στην κατάλληλη θέση μέσα στην ταξινομημένη λίστα, έτσι ώστε να μην χαθεί αυτή η ταξινόμηση. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζεται στο σχήμα 78.
- Βήμα 02: Η εφαρμογή της διαδικασίας που πραγματοποιήθηκε στο προηγούμενο βήμα, έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση των στοιχείων που έχουν συχνότητα εμφάνισης ίση με ένα, από έξι σε τέσσερα. Από αυτά τα τέσσερα στοιχεία διαλέγουμε τα δύο πρώτα (που αντιστοιχούν στα γράμματα *P* και *R*) και δημιουργούμε για αυτά ένα γονικό κόμβο με τιμή ίση με 2. Αυτός ο κόμβος τοποθετείται στην τρίτη θέση της λίστας και αμέσως μετά το γράμμα *C*. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία, ελαττώνουμε ακόμη περισσότερο το πλήθος των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με τη μονάδα, καθώς υπάρχουν μόνο δύο τέτοια στοιχεία. Το αποτέλεσμα πραγματοποίησης αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο σχήμα 78.



Σχήμα 79: Τα Βήματα 04, 05, 06 και 07 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

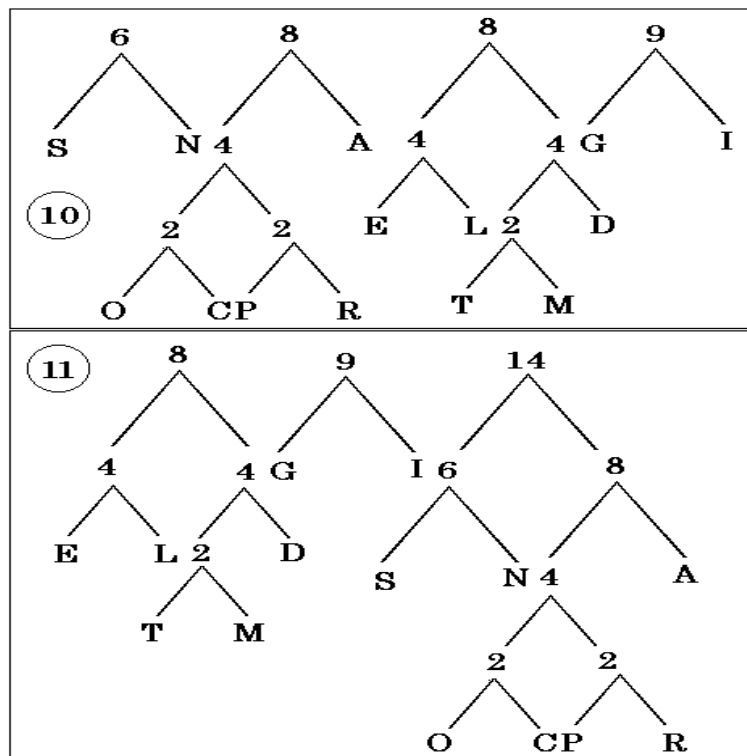
- Βήμα 03: Στο βήμα αυτό ολοκληρώνουμε την επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με ένα, θεωρώντας τα δύο τέτοια στοιχεία που έχουν απομείνει - και αντιστοιχούν στα γράμματα *O* και *C*. Τα στοιχεία αυτά προσταρτώνται σε ένα νέο γονικό κόμβο που αντιστοιχεί στην τιμή 2 και ο οποίος προστίθεται στην αρχή της λίστας των δεδομένων εισόδου. Η νέα μορφή της λίστας που έχει προκύψει μετά την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας, παρουσιάζεται και αυτή στο σχήμα 78.
- Βήμα 04: Μετά την επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με ένα ας περάσουμε τώρα στα στοιχεία με την αμέσως μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης (που είναι η τιμή 2). Υπάρχουν έξι τέτοια στοιχεία: τα τρία δέντρα που περιέχουν τα σύμβολα (*O, C*), (*P, R*) και (*T, M*) αντίστοιχα, και τα γράμματα *D, E* και *L*. Στο τέταρτο αυτό βήμα ομαδοποιούμε τα δύο πρώτα δέντρα σε ένα μεγαλύτερο δέντρο που περιέχει το άθροισμα των τιμών των δύο δέντρων (δηλαδή την τιμή 4), και στη συνέχεια, τοποθετούμε αυτό το δέντρο στην έβδομη θέση της λίστας και αμέσως μετά το σύμβολο *N*. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 79.
- Βήμα 05: Στο βήμα αυτό συνεχίζεται η επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με 2. Για να το κάνουμε αυτό διαλέγουμε τα δύο πρώτα στοιχεία αυτού του είδους το πρώτο εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα δέντρο με τιμή 2 που περιέχει τα σύμβολα (*T, M*) ενώ το δεύτερο αντιστοιχεί στο σύμβολο *D*. Για τα δύο αυτά στοιχεία κατασκευάζουμε ένα γονικό κόμβο με τιμή ίση με 4 ο οποίος τοποθετείται στην πέμπτη θέση της λίστας και αμέσως μετά το σύμβολο *N*. Η διαδικασία που πραγματοποιείται σε αυτό το βήμα, παρουσιάζεται και αυτή στο σχήμα 79.
- Βήμα 06: Στο στάδιο αυτό ολοκληρώνουμε την επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με 2. Τα δύο τελευταία στοιχεία που έχουν απομείνει είναι τα σύμβολο *E* και *L*. Αυτά, σε πλήρη εφαρμογή της γνωστής διαδικασίας τοποθετούνται κάτω από ένα γονικό κόμβο που έχει την τιμή 4, και ο οποίος στη συνέχεια προστίθεται στην τρίτη θέση της λίστας, και αμέσως μετά το σύμβολο *N*. Η νέα μορφή της λίστας μετά την εφαρμογή αυτού του βήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 79.
- Βήμα 07: Μετά την επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με 2, ας περάσουμε στα στοιχεία με την αμέσως μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, που είναι η τιμή 3. Υπάρχουν μόνο δύο τέτοια στοιχεία, τα οποία αντιστοιχούν στα σύμβολα *S* και *N*. Για τα δύο αυτά στοιχεία δημιουργούμε ένα γονικό κόμβο, η τιμή του οποίου είναι ίση με 6. Αυτός ο κόμβος τοποθετείται στο τέλος της λίστας των δεδομένων καθώς η τιμή 6 είναι η μεγαλύτερη από αυτές που υπάρχουν ήδη στη λίστα. Το αποτέλεσμα εφαρμογής αυτής της διαδικασίας, παρουσιάζεται και αυτό στο σχήμα 79.
- Βήμα 08: Στο όγδοο βήμα της διαδικασίας προχωρούμε στην επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης ίση με 4. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε τα δύο πρώτα τέτοια στοιχεία. Από αυτά τα δύο στοιχεία το πρώτο είναι το δέντρο που περιέχει τα σύμβολα (*E, L*) ενώ το δεύτερο περιέχει το σύμβολο *D* και το υποδέντρο



Σχήμα 80: Τα Βήματα 08 και 09 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

(T, M). Για τα δύο αυτά στοιχεία δημιουργούμε ένα γονικό κόμβο με τιμή ίση με 8 ο οποίος τοποθετείται στο τέλος της λίστας αφού η τιμή 8 είναι μεγαλύτερη από όλες τις τιμές που υπάρχουν ήδη στη λίστα. Η νέα μορφή της λίστας μετά την εφαρμογή αυτού του βήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 80.

- Βήμα 09: Στο βήμα αυτό ολοκληρώνουμε την επεξεργασία των στοιχείων με συχνότητα εμφάνισης 4. Τα δύο στοιχεία που έχουν απομείνει είναι το δέντρο που αποτελείται από τα υποδέντρα (O, C) και (P, R) και το σύμβολο A . Για τα δύο αυτά στοιχεία κατασκευάζουμε ένα γονικό κόμβο με τιμή ίση με 8, ο οποίος τοποθετείται στην τέταρτη θέση της λίστας και αμέσως μετά το υποδέντρο που περιέχει τα σύμβολα (S, N). Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο σχήμα 80.
- Βήμα 10: Στο στάδιο αυτό προχωρούμε στην επεξεργασία των δύο πρώτων στοιχείων της λίστας που είναι το σύμβολο G και συχνότητα εμφάνισης 4, και το σύμβολο I με συχνότητα εμφάνισης 5. Για τα δύο αυτά στοιχεία κατασκευάζουμε ένα γονικό κόμβο με τιμή ίση με 9 ο οποίος και τοποθετείται στο τέλος της λίστας, αφού η τιμή 9 είναι μεγαλύτερη από όλες τις συχνότητες εμφάνισης που περιλαμβάνονται στη λίστα των δεδομένων εισόδου. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας απεικονίζεται στο σχήμα 81.
- Βήμα 11: Στο ενδέκατο βήμα του αλγορίθμου κατασκευάζουμε ένα γονικό δέντρο για τα δύο πρώτα στοιχεία της λίστας. Από τα δύο αυτά στοιχεία, το πρώτο είναι ένα υποδέντρο με συχνότητα εμφάνισης 6 που περιέχει τα σύμβολα (S, N), ενώ το δεύτερο είναι ένα υποδέντρο με συχνότητα εμφάνισης 8 που περιέχει το σύμβολο A και το μια δεντρική δομή δύο επιπέδων, τα φύλλα της οποίας περιέχουν τα σύμβολα O, C, P και R . Για αυτά τα δύο στοιχεία κατασκευάζουμε ένα γονικό κόμβο με συχνότητα εμφάνισης 14 που τοποθετείται στο τέλος της λίστας των δεδομένων εισόδου. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται και αυτό στο σχήμα 81.
- Βήμα 12: Στο βήμα αυτό της διαδικασίας, τα δύο πρώτα στοιχεία της λίστας που συνιστούν πλέον ολόκληρες δεντρικές δομές πολλών επιπέδων και χαρακτηρίζονται από συχνότητες εμφάνισης 8 και 9 αντίστοιχα, τοποθετούνται κάτω από ένα νέο γονικό κόμβο με συχνότητα εμφάνισης 17, ο οποίος τοποθετείται στο τέλος της λίστας δεδομένων και αμέσως μετά από το στοιχείο με συχνότητα εμφάνισης 14. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής αυτής της διαδικασίας, παρουσιάζεται στο σχήμα 82.
- Βήμα 13: Στο τελευταίο βήμα της διαδικασίας, τα δύο στοιχεία που έχουν απομείνει και τα οποία συνιστούν και αυτά ολόκληρες δεντρικές δομές πολλών επιπέδων με συχνότητες εμφάνισης 14 και 17 αντίστοιχα, ενώνονται

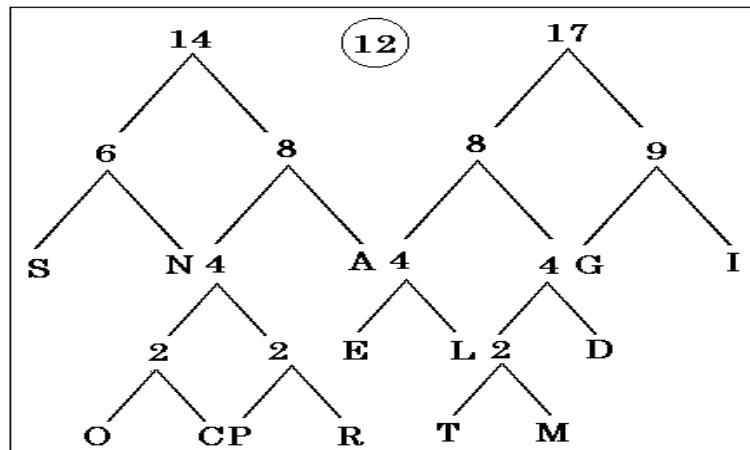


Σχήμα 81: Τα Βήματα 10 και 11 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

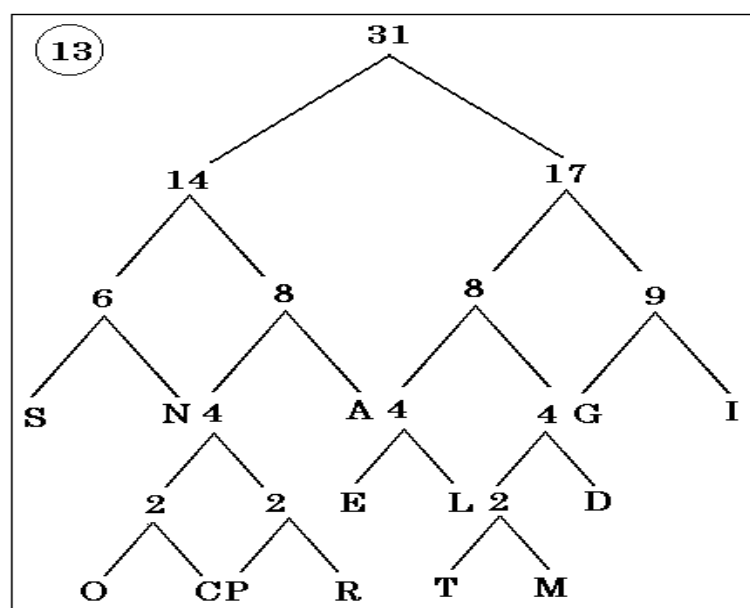
σε ένα γονικό κόμβο, ο οποίος όντας το μοναδικό στοιχείο της λίστας, αποτελεί και τη ρίζα του δέντρου του Huffman, η κατασκευή του οποίου έχει πλέον ολοκληρωθεί. Η τελική μορφή του δέντρου του Huffman έτσι όπως έχει διαμορφωθεί μετά την πραγματοποίηση του τελευταίου αυτού βήματος, παρουσιάζεται στο σχήμα 83.

Παρατηρώντας το σχήμα 83, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως τα δεκατέσσερα διακριτά γράμματα της φράσης προς συμπίεση αναπαρίστανται από τα φύλλα (leaves) του δέντρου του Huffman, και επομένως δεν αποτελούν τα ίδια γονικούς κόμβους άλλων στοιχείων. Όσον αφορά τη θέση τους στη γενικότερη δεντρική δομή, εκείνα τα φύλλα που χαρακτηρίζονται από μικρή συχνότητα εμφάνισης βρίσκονται πολύ βαθιά μέσα στη δομή και αρκετά μακριά από τη ρίζα του δέντρου, ενώ αντίθετα, τα γράμματα που εμφανίζονται πολλές φορές μέσα στη φράση, βρίσκονται αρκετά ψηλά στο δέντρο και πολύ κοντά στη ρίζα. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να κωδικοποιήσουμε τους χαρακτήρες χρησιμοποιώντας μεταβλητό αριθμό από bits, και μάλιστα με τέτοιο τρόπο, ώστε τα στοιχεία με μικρή συχνότητα εμφάνισης να αναπαρίστανται από περισσότερα bits σε σχέση με τα στοιχεία που εμφανίζονται πολλές φορές. Αυτό είναι κάτι το επιθυμητό, δεδομένου πως εκείνο που θέλουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν λιγότερα bits για την αναπαράσταση των χαρακτήρων που εμφανίζονται πολλές φορές, έτσι ώστε να μειώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο το μέγεθος του τελικού αρχείου. Αντίθετα, η χρήση περισσότερων bits για τους χαρακτήρες που εμφανίζονται λίγες φορές, δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα, καθώς, ούτως ή άλλως, η συχνότητα εμφάνισης αυτών των χαρακτήρων είναι πάρα πολύ μικρή. Ένα τελευταίο ενδιαφέρον στοιχείο που είναι σημαντικό να σχολιασθεί, αφορά την τιμή της ρίζας του δέντρου, η οποία προφανώς είναι ίση με το πλήθος των γραμμάτων της φράσης προς κωδικοποίηση - στο παράδειγμά μας η φράση DIGITAL SIGNAL AND IMAGE PROCESSING περιέχει συνολικά 31 γράμματα.

Προκειμένου τώρα να κωδικοποιήσουμε τους χαρακτήρες που έχουν ταυτοποιηθεί, θα πρέπει, όπως έχουμε ήδη αναφέρει να συσχετίσουμε τους κλάδους του δέντρου με κατάλληλα επιλεγμένες τιμές βαρών και με τέτοιο τρόπο ώστε οι αριστεροί κλάδοι να λάβουν τιμή βάρους ίση με το μηδέν, ενώ οι δεξιοί κλάδοι να λάβουν τιμή βάρους ίση με τη μονάδα. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται με διαγραμματικό τρόπο στο σχήμα 84. Εκείνο που πρέπει να κάνουμε στη συνέχεια για να δημιουργήσουμε τους κωδικούς των γραμμάτων της λέξης είναι να ξεκινήσουμε από τον κόμβο που αναπαριστά το κάθε γράμμα, και κινούμενοι προς τα πίσω (backwards) να προσεγγίσουμε τη ρίζα του δέντρου. Αυτή η κίνηση καθορίζει με μοναδικό τρόπο μια διαδρομή η οποία αποτελείται από μια σειρά από κλάδους. Εάν για κάθε κλάδο καταγράψουμε τον κωδικό που αντιστοιχεί σε αυτόν και τοποθετήσουμε όλους αυτούς τους κωδικούς τον ένα πίσω από τον άλλο (δηλαδή από αριστερά προς τα δεξιά) δημιουργείται ένας δυαδικός αριθμός ο οποίος αποτελεί τον κωδικό που αντιστοιχεί σε αυτόν το χαρακτήρα. Η διαδικασία ορισμού αυτής της διαδρομής



Σχήμα 82: Το Βήμα 12 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

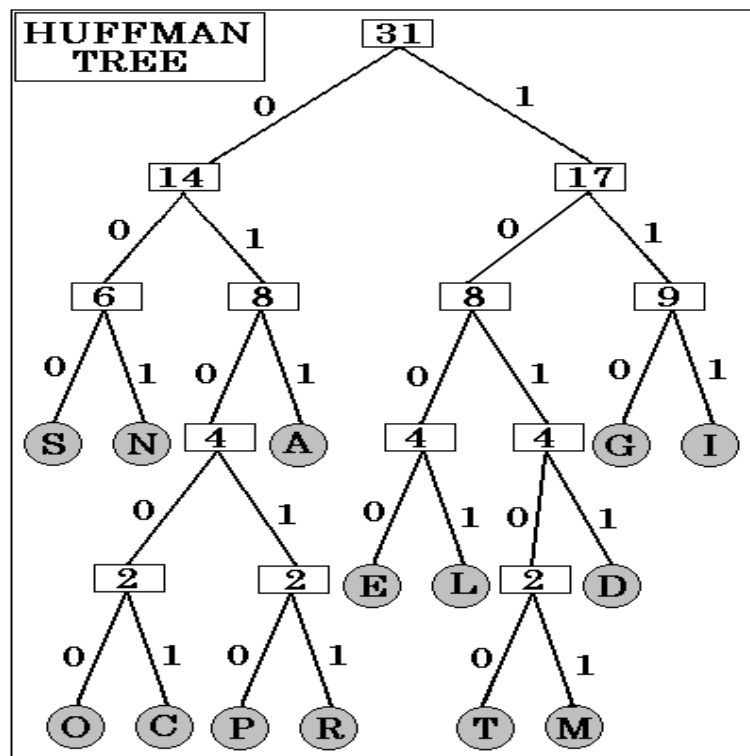


Σχήμα 83: Το Βήμα 13 της διαδικασίας κατασκευής του δέντρου του Huffman

από κάτω προς τα πάνω έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία κωδικών με μεγαλύτερο αριθμό από bits για τα στοιχεία με μικρή συχνότητα εμφάνισης (που βρίσκονται βαθιά μέσα στη ρίζα) σε σχέση με τους κωδικούς των στοιχείων που χαρακτηρίζονται από μεγάλη συχνότητα εμφάνισης και βρίσκονται στα ανώτερα στρώματα, χαρακτηριστικό, που όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ιδιαίτερα επιθυμητό.

Προκειμένου να κατανοήσουμε τη διαδικασία δημιουργίας των κωδικών των γραμμάτων της φράσης, ας υπολογίσουμε για παράδειγμα τον κωδικό που αντιστοιχεί στο γράμμα *R*. Αυτό το γράμμα χαρακτηρίζεται από συχνότητα εμφάνισης ίση με τη μονάδα, και βρίσκεται στο τελευταίο επίπεδο του δέντρου του Huffman. Εάν ξεκινήσουμε από τον κόμβο του γράμματος *R* και κινηθούμε προς τα πίσω μέχρι να φτάσουμε στη ρίζα, θα ορίσουμε τη διαδρομή $R \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 14 \rightarrow 31$. Η διαδρομή αυτή αποτελείται από τους κλάδους $(R, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 14)$ και $(14, 31)$ με βάρη 1,1,0,1, και 0 αντίστοιχα. Επομένως ο κωδικός που αντιστοιχεί στο γράμμα *R* είναι ο 11010. Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε τους κωδικούς όλων των γραμμάτων της φράσης προς συμπίεση, οι οποίοι και παρουσιάζονται στον πίνακα 12.

Ο πίνακας 12 ονομάζεται πίνακας κωδικών (code table) ή λεξικό (dictionary) και περιέχει για κάθε γράμμα που έχει ταυτοποιηθεί τον κωδικό Huffman που έχει υπολογισθεί δια της εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας. Παρατηρούμε πως το μήκος των κωδικών Huffman είναι μικρότερο από 8 bits και επομένως η νέα αναπαράσταση της φράσης με τη μέθοδο αυτή χαρακτηρίζεται από συμπίεση δεδομένων (υπενθυμίζουμε πως η αρχική αναπαράσταση της φράσης προς συμπίεση έγινε χρησιμοποιώντας για τον κάθε χαρακτήρα τον αντίστοιχο κωδικό ASCII που έχει μήκος ίσο με 8 bits). Εάν λοιπόν αντικαταστήσουμε το κάθε γράμμα της αρχικής μας φράσης



Σχήμα 84: Η τελική μορφή του δέντρου του Huffman

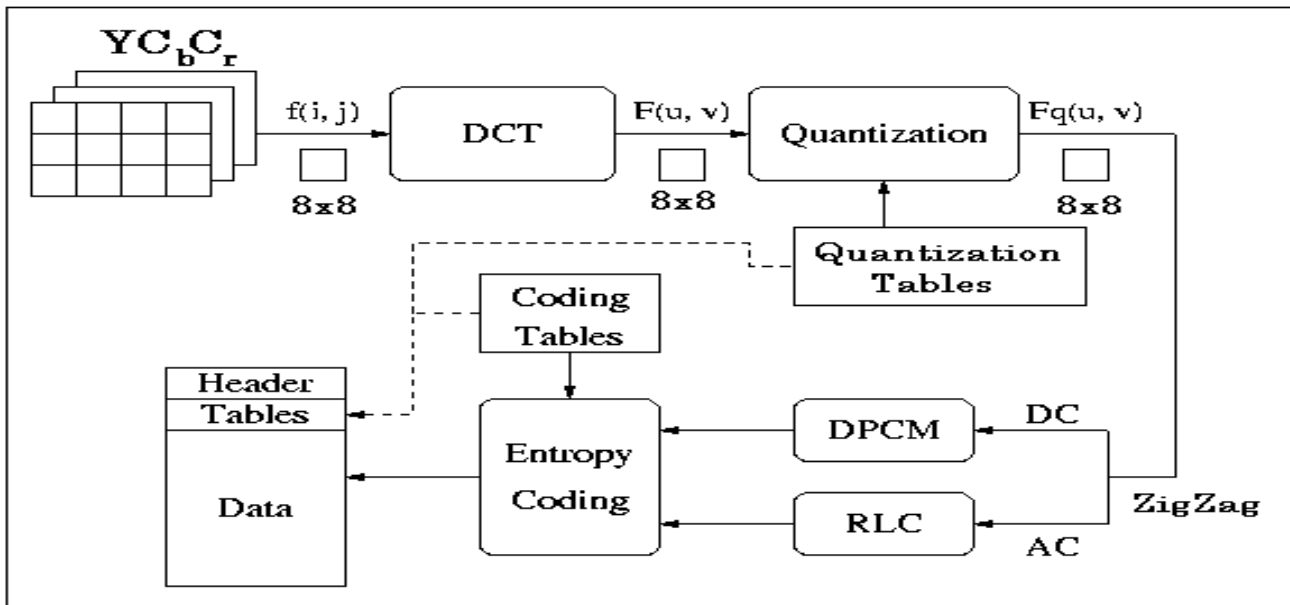
Πίνακας 12: Οι κωδικοί του Huffman για τα 14 διαφορετικά γράμματα της φράσης του παραδείγματος

| Καταγεγραμμένος Χαρακτήρας | Κωδικός Huffman | Καταγεγραμμένος Χαρακτήρας | Κωδικός Huffman |
|----------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------|
| S | 000 | E | 0001 |
| N | 100 | L | 1001 |
| O | 00010 | T | 00101 |
| C | 10010 | M | 10101 |
| P | 01010 | D | 1101 |
| R | 11010 | G | 011 |
| A | 110 | I | 111 |

με τον αντίστοιχο κωδικό Huffman θα λάβουμε την ακολουθία δυαδικών ψηφίων 110111101111100101110100100011101110011010011101001001111101011110011000010101101000010100100001000000111100011 το μήκος της οποίας είναι 110 bits, πολύ μικρότερο από τα 248 bits που καταλαμβάνουν οι ASCII χαρακτήρες των 31 γραμμάτων της φράσης. Επομένως με τον τρόπο αυτό μπορούμε να επιτύχουμε συμπίεση δεδομένων. Είναι σημαντικό να τονίσουμε στο σημείο αυτό, πως η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας σε μια πραγματική εφαρμογή θα απαιτούσε τη δημιουργία ενός κωδικού Huffman και για το χαρακτήρα του κενού διαστήματος (space) που μεσολαβεί ανάμεσα στις λέξεις της φράσης. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε προηγουμένως, και η τροποποίηση του δέντρου του Huffman έτσι ώστε να υποστηρίζει και το χαρακτήρα του κενού διαστήματος, αφήνεται ως άσκηση στους αναγνώστες.

Ο παραπάνω αλγόριθμος συμπίεσης χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των χβαντισμένων συντελεστών *DCT* οι οποίοι στη συνέχεια αποθηκεύονται σε αρχείο. Υπενθυμίζουμε πως πριν την πραγματοποίηση αυτής της διαδικασίας λαμβάνει χώρα μια πρώτη κωδικοποίηση των συντελεστών, η οποία για την περίπτωση των συντελεστών *DC* είναι η διαφορική παλμοκωδική διαμόρφωση (DPCM) ενώ για την περίπτωση των υπόλοιπων συντελεστών *AC* είναι η κωδικοποίηση *RLC*. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί πως σε αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιούνται δύο πίνακες Huffman εκ των οποίων ο πρώτος χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση της συνιστώσας της φωτεινότητας, ενώ ο άλλος χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των δύο συντελεστών της χρωματικότητας.

Το σχήμα 85 παρουσιάζει με διαγραμματικό τρόπο το σύνολο των διαδικασιών που απαιτούνται για τη συμπίεση



Σχήμα 85: Σχηματικό διάγραμμα του αλγορίθμου συμπίεσης που περιγράφεται από το πρότυπο JPEG

μιας εικόνας σύμφωνα με το πρότυπο JPEG.