άκρα του δευτερεύοντος πηνίου το ψηφιακό βολτόμετρο επιλέγοντας την κατάλληλη κλίμακα a.c. Εισάγετε το δευτερεύον στο εσωτερικό του πρωτεύοντος. Θέστε τη συχνότητα του ημιτονοειδούς ρεύματος στο πρωτεύον στην τιμή των 200 Hz. Μεταβάλλετε το ρεύμα του πρωτεύοντος πηνίου από 10 – 45 mA με βήματα των 5 mA και μετρήστε την επαγόμενη ΗΕΔ στο δευτερεύον. Αποδώστε γραφικά τη σχέση $\mathcal{E}_{s,\mathrm{rms}} = f(I_{\mathrm{rms}})$. Σχολιάστε τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης και προσδιορίστε την ποσοτική σχέση μεταξύ των δυο μεγεθών.

2. Για το ίδιο δευτερεύον πηνίο και για σταθερό ρεύμα στο πρωτεύον 30 mA μεταβάλλετε τη συχνότητα f του ημιτονοειδούς ρεύματος του πρωτεύοντος από 50 έως 400 Hz με βήμα 50 Hz και μετρήστε την επαγόμενη ΗΕΔ στα άκρα του δευτερεύοντος. Αποδώστε γραφικά τη σχέση $\mathcal{E}_{s,\mathrm{rms}} = f(f)$. Σχολιάστε τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης. και προσδιορίστε την ποσοτική σχέση μεταξύ των δυο μεγεθών.
3. Ως δευτερεύον συνδέστε τα πηνία διατομής 0,0025 m^2 με αριθμό σπειρών 100, 200, 300 και για σταθερό ρεύμα 30 mA και συχνότητας 200 Hz μετρήστε την επαγόμενη ΗΕΔ σε κάθε πηνίο ξεχωριστά. Αποδώστε γραφικά τη σχέση $\mathcal{E}_{s,\mathrm{rms}} = f(N_s)$. Σχολιάστε τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης και προσδιορίστε την ποσοτική σχέση μεταξύ των δυο μεγεθών.
4. Ως δευτερεύον συνδέστε τα πηνία 300 σπειρών με διατομές 0,0010 m^2, 0,0015 m^2, 0,0025m^2 και για σταθερό ρεύμα 30 mA και συχνότητας 200 Hz μετρήστε την επαγόμενη ΗΕΔ σε κάθε πηνίο ξεχωριστά. Αποδώστε γραφικά τη σχέση $\mathcal{E}_{s,\mathrm{rms}} = f(S)$. Σχολιάστε τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης και προσδιορίστε την ποσοτική σχέση μεταξύ των δυο μεγεθών.
5. Συνδέστε την έξοδο του δευτερεύοντος πηνίου στην y – είσοδο του παλμογράφου και παρατηρήστε τη μορφή της επαγόμενης ΗΕΔ.
6. Εκθέστε τα συμπεράσματά σας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Δώστε τον ορισμό και τις μονάδες της μαγνητικής ροής.
2. Εξηγήστε το νόμο της μαγνητικής επαγωγής του Faraday.
3. Εξηγήστε πώς ο κανόνας του Lenz δίνει τη διεύθυνση της επαγόμενης ΗΕΔ εάν είναι γνωστή η μεταβολή της μαγνητικής ροής.
4. Κατά τη χρονική στιγμή που το ημιτονοειδές ρεύμα του πρωτεύοντος είναι μηδέν, ποια θα είναι η τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ στο δευτερεύον; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
5. Κατά τη χρονική στιγμή που το ημιτονοειδές ρεύμα του πρωτεύοντος είναι μέγιστο, ποια θα είναι η τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ στο δευτερεύον; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

4-1 *Πώς υπολογίζεται το έργο, που παράγει μια μεταβλητή δύναμη;*

Το έργο που παράγει μια μεταβλητή δύναμη, που είναι συνάρτηση της θέσης, υπολογίζεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου της δύναμης $\vec{F}(\vec{r})$ και της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r}$ με όρια ολοκλήρωσης τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$ των ακραίων θέσεων A και B:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

4-2 *Διατυπώστε το θεώρημα έργου – ενέργειας.*

Όταν ένα σωμάτιο κινείται από το σημείο A στο σημείο B υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, το έργο αυτής ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου:

$$W = K_B - K_A$$

4-3 *Πώς εκφράζεται η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ενός σωματίου σε πεδίο διατηρητικών δυνάμεων;*

Η δυναμική ενέργεια ενός σωματίου μέσα σε πεδίο διατηρητικών δυνάμεων είναι συνάρτηση των συντεταγμένων τέτοια, ώστε η μεταβολή της ανάμεσα σε μια αρχική θέση και σε μια τελική να ισούται με το αντίθετο του έργου που παράγουν οι δυνάμεις του πεδίου σ' αυτή τη μετακίνηση. Συμβολικά η πρόταση αυτή γράφεται

$$\Delta U = -W$$

ή

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

4-4 *Διατυπώστε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής.*

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα, που μπορεί να ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του, είτε με ροή θερμότητας, είτε μέσω έργου. Έτσι, το περιβάλλον μπορεί να παρέχει θερμότητα Q στο σύστημα (ή να αφαιρεί θερμότητα -Q απ' αυτό) και σε ανταπόδοση το σύστημα να παράγει έργο W στο περιβάλλον (ή το περιβάλλον να παράγει έργο -W στο σύστημα).

Αποτέλεσμα αυτών των αλληλεπιδράσεων είναι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος κατά ΔU. Η ολική όμως ενέργεια συστήματος – περιβάλλοντος διατηρείται. Κατά συνέπεια ισχύει:

$$Q = \Delta U + W$$

ή

$$\Delta U = Q - W$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής.

4-5 *Πώς ορίζεται η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος;*

Η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος για αντιστρεπτές μεταβολές ορίζεται με την εξίσωση:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

όπου: dQ η προσφερόμενη (ή αποβαλόμενη) θερμότητα στο σύστημα σε σταθερή θερμοκρασία και T η απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος.

4-6 *Διατυπώστε το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής.*

Στη διάρκεια πραγματικών διεργασιών, η εντροπία απομονωμένου συστήματος πάντοτε αυξάνει και γίνεται μέγιστη στην κατάσταση ισορροπίας. Η πρόταση αυτή εκφράζεται με την εξίσωση:

$$\Delta S \geq 0$$

4-7 *Πώς ορίζεται το ηλεκτρικό δυναμικό σ' ένα σημείο ενός ηλεκτρικού πεδίου και πώς συνδέεται με την ένταση στο ίδιο σημείο;*

Το ηλεκτρικό δυναμικό $V(r)$ στη θέση $\vec{r}$ ενός ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως η δυναμική ενέργεια μεταξύ της κατανομής φορτίων που δημιουργεί το πεδίο και ενός μοναδιαίου θετικού φορτίου ανά μονάδα θετικού φορτίου:

$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_o}$$

Το δυναμικό και η ένταση συνδέονται με την εξίσωση:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

4-8 *Πώς εκφράζεται η ενέργεια ενός ηλεκτρικού πεδίου;*

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται σε συνάρτηση με την ένταση του πεδίου από το ολοκλήρωμα όγκου

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_o \int_v E^2 dv$$

όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σ' όλο το χώρο του πεδίου.

4-9 *Διατυπώστε το νόμο της επαγωγής του Faraday.*

Ο *νόμος του Faraday*, αποδίδεται με την εξίσωση:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Η επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής, που διέρχεται από μια οποιαδήποτε ανοιχτή επιφάνεια που καταλήγει σ' έναν αγώγιμο βρόχο. Το αρνητικό πρόσημο καθορίζεται από τον *κανόνα του Lenz*: *Το ρεύμα που επάγεται από μια μεταβολή της μαγνητικής ροής αντιτίθεται σ' αυτή τη μεταβολή.*

Η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο είναι το άμεσο επακόλουθο ενός *επαγόμενου ηλεκτρικού* *πεδίου*. Η μεταξύ τους σχέση είναι

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα, μπορούμε να εκφράσουμε το νόμο του Faraday με τη γενικότερη μορφή

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Η έκφραση αυτή του νόμου του Faraday μας λέει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε μια οποιαδήποτε κλειστή γραμμή ισούται με το αντίθετο του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ_B ($= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$) διά μέσου μιας οποιασδήποτε επιφάνειας που καταλήγει στην εν λόγω γραμμή.

4-10 *Πώς εκφράζεται η μέση καταναλισκόμενη ισχύς σ' ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος;*
Η μέση καταναλισκόμενη ισχύς σ' ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος δίνεται από την έκφραση:

$$\overline{P} = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi$$

όπου $V_{\rm rms}$ η ενεργός τιμή της τάσης στα άκρα του καταναλωτή, $I_{\rm rms}$ η ενεργός τιμή του ρεύματος του καταναλωτή και φ η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

4-1 *Με τι ισούται το έργο που παράγει η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω σ' ένα σώμα;*
Το έργο που παράγει η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω σ' ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

4-2 *Το κεκλιμένο επίπεδο είναι μια απλή μηχανή, που μας επιτρέπει να προσφέρουμε έργο με την εφαρμογή μιας μικρότερης δύναμης απ' αυτή που αλλιώς απαιτείται. Το ίδιο ισχύει και για μια βίδα, ένα γρανάζι, ένα μοχλό, μια τροχαλία. Οι μηχανές αυτές μας εξοικονομούν έργο;*
Οι απλές μηχανές δεν μας εξοικονομούν έργο. Αν δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας υπό μορφή τριβών το παραγόμενο έργο είναι το ίδιο, μόνο που απαιτείται μικρότερη δύναμη, αλλά για μεγαλύτερη διαδρομή.

4-3 *Όταν οι δυνάμεις είναι διατηρητικές εξαρτάται το έργο που παράγουν κατά τη μετακίνηση ενός σώματος από την τροχιά που θα ακολουθήσει το σώμα για να μετακινηθεί από τη θέση Α στη θέση Β;*
Το έργο που παράγουν οι διατηρητικές δυνάμεις κατά τη μετακίνηση ενός σώματος από ένα σημείο Α σ' ένα σημείο Β δεν εξαρτάται από την τροχιά που θα ακολουθήσει το σώμα για τη μετακίνηση αυτή.

4-4 *Ένας κωπηλάτης που κωπηλατεί σε μια βάρκα αντίθετα προς το ρεύμα, ηρεμεί ως προς την ακτή.*
α) Παράγει καθόλου έργο;
β) Αν σταματήσει να κωπηλατεί και κινηθεί με το ρεύμα, παράγεται καθόλου έργο πάνω του;
α) Ως προς το σύστημα αναφοράς της ακτής ο κωπηλάτης παραμένει ακίνητος και επομένως δεν παράγει έργο. Ως προς το σύστημα αναφοράς του νερού ο κωπηλάτης μετακινείται και το παραγόμενο έργο είναι διάφορο του μηδενός.
β) Αν σταματήσει να κωπηλατεί, κινείται ως προς την ακτή και επομένως παράγεται πάνω του έργο.

4-5 *Κατά μια πλήρη αιώρηση ενός εκκρεμούς πόσο έργο παράγουν οι δυνάμεις, που δρουν πάνω σ' αυτό;*
Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σφαιρίδιο του εκκρεμούς είναι η δύναμη βαρύτητας και η τάση από το νήμα. Η τάση από το νήμα είναι κάθετη στη διαδρομή και δεν παράγει έργο. Η δύναμη βαρύτητας παράγει έργο. Η δύναμη βαρύτητας είναι διατηρητική δύναμη και επομένως το έργο που παράγει σε μια πλήρη διαδρομή είναι ίσο με μηδέν.

4-6 *Το έργο που απαιτείται για την ανύψωση ενός σώματος εξαρτάται από το πόσο γρήγορα ανυψώνεται;*

Το έργο που απαιτείται για την ανύψωση του σώματος ισούται με το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας κατά την ελεύθερη πτώση του και επομένως δεν εξαρτάται από το πόσο γρήγορα ανυψώνεται το σώμα.

4-7 *Δύο ελατήρια έχουν το ίδιο μήκος αλλά διαφορετικές σταθερές k_1 και k_2 με $k_1 > k_2$. Πάνω σε ποιο ελατήριο ξοδεύεται περισσότερο έργο; α) αν τεντωθούν κατά το ίδιο μήκος και β) τεντωθούν με την ίδια δύναμη.*

α) Έστω x η επιμήκυνση του κάθε ελατηρίου. Το έργο που ξοδεύεται σε κάθε ελατήριο είναι:

$$W_1 = \frac{1}{2}k_1x^2 \qquad W_2 = \frac{1}{2}k_2x^2 \tag{1}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις Εξ. (1) προκύπτει:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{k_1}{k_2} \tag{2}$$

Επειδή $k_1 / k_2 > 1$ από την Εξ. (2) προκύπτει ότι

$$W_1 > W_2$$

(β) Αν τεντωθούν με την ίδια δύναμη θα επιμηκυνθούν κατά x_1 και x_2 αντιστοίχως, οπότε θα ισχύει:

$$F = k_1x_1 = k_2x_2$$

οπότε

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1} \tag{3}$$

Το έργο που ξοδεύεται σε κάθε ελατήριο είναι:

$$W_1 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 \qquad W_2 = \frac{1}{2}k_2x_2^2 \tag{4}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις Εξ. (4) προκύπτει:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{k_1x_1^2}{k_2x_2^2} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3) στην Εξ. (5) προκύπτει:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{k_1k_2^2}{k_2k_1^2} = \frac{k_2}{k_1} \tag{6}$$

Επειδή $k_2 / k_1 < 1$, από την Εξ. (6) προκύπτει ότι

$$W_1 > W_2$$

4-8 *Ένας ανελκυστήρας κατεβαίνει από ύψος h. Ξεκινάει με μηδενική ταχύτητα και σταματά επίσης με μηδενική ταχύτητα. Τι έγινε η δυναμική ενέργεια που έχασε ο ανελκυστήρας;*

Η δυναμική ενέργεια του ανελκυστήρα μετατράπηκε σε θερμότητα στα διάφορα σημεία επαφής του μηχανισμού αντίστασης αυτού.

4-9 *Μπορεί η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός σώματος να είναι αρνητική;*

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος ποτέ δεν είναι αρνητική, επειδή είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική, ανάλογα με την εκλογή της θέσης αναφοράς (θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας) ως προς την οποία μετράμε τη δυναμική ενέργεια του σώματος. Για παράδειγμα, η δυναμική ενέργεια των ηλεκτρονίων ενός ατόμου ως προς τον πυρήνα είναι αρνητική, επειδή η θέση αναφοράς είναι η άπειρη απόσταση από τον πυρήνα του ατόμου.

4-10 *Μπορεί η ενέργεια ενός σωματίου να είναι αρνητική;*

Η ενέργεια ενός σωματίου είναι το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας. Επομένως είναι δυνατόν να είναι και αρνητική, αν η δυναμική ενέργεια αυτού είναι αρνητική και κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την κινητική του ενέργεια. Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, για την ενέργεια ενός ατομικού ηλεκτρονίου.

4-11 *Ποια είναι η ολική ενέργεια των σωματίων, που σχηματίζονται κατά τη δίδυμη γένεση από ένα φωτόνιο ενέργειας Ε;*

Κατά το φαινόμενο της δίδυμης γένεσης ένα φωτόνιο ικανής ενέργειας ($E \geq 1{,}02$ MeV), όταν βρεθεί κοντά στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πυρήνα, δίνει όλη του την ενέργεια και σχηματίζει δυο σωματίδια, ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο. Η ολική ενέργεια αυτών των σωματιδίων ισούται με την ενέργεια E του φωτονίου.

4-12 *Πόσο έργο παράγεται όταν ένα ηλεκτρόνιο διαγράψει πλήρη ελλειπτική τροχιά γύρω από τον πυρήνα ενός ατόμου;*
Το ηλεκτρόνιο διαγράφει ελλειπτική τροχιά γύρω από τον πυρήνα του ατόμου υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης από τον πυρήνα. Επειδή η ηλεκτρική δύναμη είναι μια διατηρητική δύναμη, το έργο που παράγει σε μια πλήρη διαδρομή είναι μηδενικό.

4-13 *Ποια είναι η βασική διαφορά μεταξύ θερμότητας και έργου;*
Η θερμότητα, όπως και το έργο, συνεπάγεται μια μεταφορά ενέργειας. Όμως το έργο, σε αντίθεση με τη θερμότητα, εμφανίζεται σε μεταφορές ενέργειας, με τέτοιο τρόπο που μια διαφορά της θερμοκρασίας να μην υπεισέρχεται στη διαδικασία της ενεργειακής μετατροπής.

4-14 *Σε θερμικά μονωμένο δωμάτιο υπάρχει ηλεκτρικό ψυγείο σε λειτουργία. Ποια μεταβολή θα υποστεί η θερμοκρασία του δωματίου με την πάροδο του χρόνου; Μπορεί το δωμάτιο να κρυώσει αφήνοντας την πόρτα του ψυγείου ανοικτή;*
Η θερμοκρασία του δωματίου θα αυξηθεί, επειδή προσφέρουμε ηλεκτρική ενέργεια για να αφαιρέσουμε ποσό θερμότητας Q_2 από το θάλαμο του ψυγείου και να μεταβιβάσουμε ποσό θερμότητας $Q_1 = Q_2 + W$ στο δωμάτιο. Αφήνοντας την πόρτα του ψυγείου ανοικτή, πάλι η θερμοκρασία του δωματίου θα αυξηθεί, επειδή μέρος της προσφερόμενης ηλεκτρικής ενέργειας από τον κινητήρα μετατρέπεται σε θερμότητα στον ίδιο τον κινητήρα.

4-15 *Περιγράψτε την αύξηση της εντροπίας κατά τη διάρκεια υγροποίησης του πάγου.*
Κατά τη διάρκεια υγροποίησης του πάγου το ποσό θερμότητας που απορροφάται από το περιβάλλον δεν καταναλίσκεται για την αύξηση της θερμοκρασίας, που παραμένει σταθερή και επομένως ούτε για την αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας, αλλά μόνο για την αύξηση της αταξίας των μορίων του. Μέτρο της αταξίας των μορίων του πάγου αποτελεί η εντροπία. Επομένως, κατά τη διάρκεια υγροποίησης του πάγου η εντροπία του αυξάνεται.

4-16 *Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται ελεύθερο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Θα κινηθεί προς περιοχές υψηλότερου ή χαμηλότερου δυναμικού;*
Το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παράγεται στο χώρο μεταξύ των πλακών ενός πυκνωτή. Το ηλεκτρόνιο θα κινηθεί προς τη θετική πλάκα του πυκνωτή, που έχει υψηλότερο δυναμικό.

4-17 *Θεωρείστε ένα σημειακό φορτίο q που κινείται στο ηλεκτρικό πεδίο ενός στατικού σημειακού φορτίου q'. Αν τα φορτία είναι ομώνυμα και η απόστασή τους r αυξάνει, πώς θα μεταβληθεί η ταχύτητα του q;*
Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δυο σημειακών φορτίων q' και q σε απόσταση r δίνεται από την έκφραση:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r}$$

Η κινητική ενέργεια του κινούμενου φορτίου q είναι:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, η ολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \text{σταθ.}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι, αυξανομένης της απόστασης r των φορτίων, μειώνεται η δυναμική τους ενέργεια και αυξάνεται η κινητική ενέργεια του φορτίου q. Επομένως, θα αυξηθεί και η ταχύτητα v αυτού.

4-18 *Μπορεί να υπάρχει ένα μη μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο σ' ένα σημείο όπου το δυναμικό είναι μηδέν; Μπορεί να υπάρχει ένα μη μηδενικό δυναμικό σ' ένα σημείο όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν;*

Η σχέση μεταξύ έντασης ηλεκτρικού πεδίου και δυναμικού δίνεται από την έκφραση:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

Σ' ένα σημείο ηλεκτρικού πεδίου η ένταση μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός, ενώ αν το σημείο καθορισθεί ως σημείο αναφοράς, το δυναμικό του θα είναι μηδενικό.

Σ' ένα σημείο ηλεκτρικού πεδίου η ένταση μπορεί να είναι μηδενική, ενώ το δυναμικό να είναι μη μηδενικό. Αυτό, για παράδειγμα, συμβαίνει σε μια μεταλλική σφαίρα, όπου το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της είναι μηδενικό, επειδή τα φορτία κατανέμονται ομοιόμορφα στην επιφάνειά της, ενώ το δυναμικό στο εσωτερικό της είναι σταθερό και ίσο με το δυναμικό της επιφάνειας, επειδή δεν λαμβάνει χώρα μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου.

4-19 *Στα άκρα ράβδου από γραφίτη, της οποίας η αντίσταση ελαττώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, εφαρμόζεται σταθερή τάση. Σε ποια περίπτωση αποδίδεται από τη ράβδο μεγαλύτερο ποσό θερμότητας; Όταν αυτή είναι γυμνή ή όταν καλύπτεται με αμίαντο;*

Όταν η ράβδος του γραφίτη καλύπτεται με αμίαντο, τότε στην ίδια τη ράβδο αναπτύσσεται μεγαλύτερη θερμοκρασία, οπότε η αντίστασή της ελαττώνεται. Εφόσον στη ράβδο εφαρμόζεται σταθερή τάση, το ποσό θερμότητας που αποδίδεται είναι αντιστρόφως ανάλογο της αντίστασης, ($U = V^2t\ /\ R$), οπότε η καλυμμένη με αμίαντο ράβδος αποδίδει μεγαλύτερο ποσό θερμότητας.

4-20 *Τρεις ίδιες αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα σε μια πηγή με ΗΕΔ $\mathcal{E}$. Οι ίδιες αντιστάσεις και η ίδια πηγή συνδέονται σε σειρά. Σε ποιο κύκλωμα καταναλίσκεται μεγαλύτερη ισχύς;*

Η ολική αντίσταση του παράλληλου συνδυασμού είναι: $R_1 = R/3$ και του συνδυασμού σειράς: $R_2 = 3R$. Ο λόγος της καταναλισκόμενης ισχύος στον παράλληλο συνδυασμό αντιστάσεων προς αυτή στον συνδυασμό σειράς είναι:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R/3}}{\dfrac{\mathcal{E}^2}{3R}} = 9$$

Άρα στο κύκλωμα του παράλληλου συνδυασμού των αντιστάσεων καταναλίσκεται 9-πλάσια ισχύς ως προς το κύκλωμα του συνδυασμού σειράς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4-1 Ένα απλό εκκρεμές, που αποτελείται από μια σφαίρα μάζας $m = 100$ g δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $l = 50$ cm, εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση διαγράφοντας κωνική επιφάνεια. Η γωνία μεταξύ του νήματος και της κατακόρυφης είναι 60°. Υπολογίστε την ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο εκκρεμές από την κατάσταση ισορροπίας, ώστε να εκτελεί την κίνηση αυτή.

Λύση

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας του εκκρεμούς με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο ισορροπίας είναι

$$U = mgy \qquad (1)$$

όπου y είναι η κατακόρυφη ανύψωση της σφαίρας, η οποία από τη γεωμετρία του σχήματος μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\begin{aligned} y &= l - l\cos\theta \\ &= l(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad (2)$$

Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια της σφαίρας του εκκρεμούς είναι

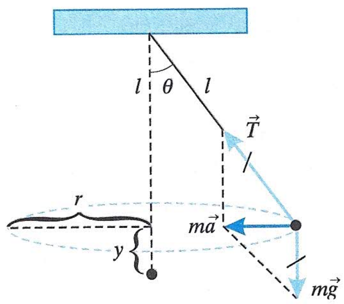
$$\begin{aligned} U &= mgl(1-\cos\theta) \qquad (3)\\ &= (0{,}1\text{ kg})(10\text{ m/s}^2)(0{,}5\text{ m})(1-\cos60^\circ) = 0{,}25\text{ J} \end{aligned}$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας του εκκρεμούς δίνεται από τη γνωστή έκφραση

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (4)$$

Η ταχύτητα v της σφαίρας μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Επειδή η σφαίρα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση, η επιτάχυνσή της έχει μόνο κεντρομόλο



Σχήμα 4-64

συνιστώσα, η οποία δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5}$$

όπου r είναι η ακτίνα της διαγραφόμενης κυκλικής τροχιάς, η οποία από τη γεωμετρία του σχήματος μπορεί να εκφρασθεί ως

$$r = l\sin\theta \tag{6}$$

Οι μόνες δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση της σφαίρας του εκκρεμούς είναι το βάρος της $m\vec{g}$ και η δύναμη από το νήμα $\vec{T}$, οι οποίες δίνουν ως συνισταμένη τη δύναμη $m\vec{a}$. Από το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων έχουμε

$$\frac{ma}{mg} = \tan\theta$$

ή

$$a = g\tan\theta \tag{7}$$

Από τις Εξ. (5), (6) και (7) προκύπτει

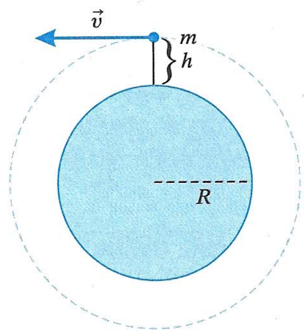
$$v^2 = gl\tan\theta\sin\theta \tag{8}$$

Από τις Εξ. (4) και (8) προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια της σφαίρας του εκκρεμούς είναι

$$K = \frac{1}{2}mgl\tan\theta\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}1\text{ kg})(10\text{ m/s}^2)(0{,}5\text{ m})\tan60^\circ\sin60^\circ = 0{,}375\text{ J} \tag{4}$$

Η ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο εκκρεμές από την κατάσταση ισορροπίας ώστε να εκτελεί την κίνηση αυτή είναι



Σχήμα 4-65

$$E = U + K = 0{,}25\text{ J} + 0{,}375\text{ J} = 0{,}625\text{ J}$$

4-2 Ένας δορυφόρος μάζας $m = 2000$ kg περιστρέφεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h = 600$ km, με γραμμική ταχύτητα $v = 28800$ km/h. Υπολογίστε την κινητική του ενέργεια, τη δυναμική του ενέργεια ως προς την επιφάνεια της Γης και την ολική του ενέργεια.
Δίνονται: $g_o = 9{,}8$ m/s², $R_\Gamma = 6400$ km.

Λύση

Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2000\text{ kg})(10\text{ m/s}^2)(28800000/3600\text{ m/s})^2 = \tag{1}$$

$$= 6{,}4\text{ x }10^{10}\text{ J}$$

Η δυναμική ενέργεια του δορυφόρου ως προς την επιφάνεια της Γης σε ύψος h βρίσκεται ως ακολούθως:

$$U = \int_0^h dW = \int_0^h F\,dz \tag{2}$$

όπου F είναι η δύναμη βαρύτητας σε ύψος z, η οποία μπορεί να εκφρασθεί ως

$g_o = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$

$$F = mg_z = mg_o\frac{R^2}{(R+z)^2} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3) στη (2) έχουμε

$$U = mg_oR^2\int_0^h \frac{dz}{(R+z)^2}$$

$$= mg_oR^2\left(-\frac{1}{R+z}\right)\Bigg|_0^h$$

$$= mg_o\frac{Rh}{R+h}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα προκύπτει

$$U = (2000\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)\,\frac{(6{,}4\times 10^6\ \text{m})(6\times 10^5\ \text{m})}{(6{,}4\times 10^6\ \text{m}) + (6\times 10^5\ \text{m})}$$

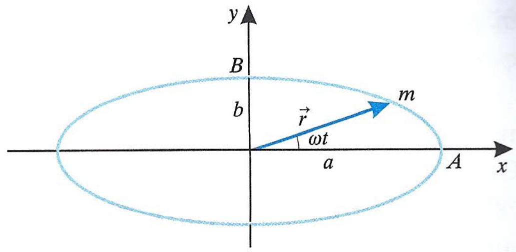
$$= 1{,}075 \times 10^{10}\ \text{J}$$

Η ολική ενέργεια του δορυφόρου είναι

$$E = K + U = 6{,}4 \times 10^{10}\ \text{J} + 1{,}075 \times 10^{10}\ \text{J}$$

$$= 7{,}475 \times 10^{10}\ \text{J}$$

4-3 Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy έτσι ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι: $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$, όπου a, b και ω θετικές σταθερές με $a>b$. (α) Βρείτε την κινητική ενέργεια του σωματίου στα σημεία A και B. (β) Βρείτε το παραγόμενο έργο από τη δύναμη του πεδίου κατά τη μετακίνηση του σωματίου από το σημείο A στο σημείο B. Με τι ισούται το παραγόμενο έργο; (γ) Με τι ισούται το παραγόμενο έργο από τη δύναμη του πεδίου σε μια πλήρη περιστροφή;



Σχήμα 4-66

Λύση

(α) Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega a\sin\omega t\vec{i} + \omega b\cos\omega t\vec{j} \qquad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$v = \sqrt{\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)} \qquad (2)$$

Η κινητική ενέργεια του σωματίου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) \qquad (3)$$

Η κινητική ενέργεια στο σημείο A είναι

$$K_A = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \qquad (4)$$

Η κινητική ενέργεια στο σημείο B είναι

$$K_B = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \qquad (5)$$

(β) Η επιτάχυνση του σωματίου είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 a\cos\omega t\vec{i} - \omega^2 b\sin\omega t\vec{j} = -\omega^2\vec{r} \qquad (6)$$

Η ασκούμενη δύναμη είναι

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \qquad (7)$$

Το παραγόμενο έργο κατά τη μετακίνηση του σωματίου από το σημείο A στο σημείο B είναι

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (-m\omega^2\vec{r})\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\frac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d(\vec{r}\cdot\vec{r}) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\Big|_a^b \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$$

Το αποτέλεσμα αυτό φανερώνει ότι το παραγόμενο έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας

$$W = K_B - K_A \qquad (9)$$

(γ) Επειδή η ασκούμενη δύναμη στο σωμάτιο είναι κεντρική και επομένως διατηρητική, το παραγόμενο από αυτή έργο σε μια πλήρη περιστροφή είναι μηδέν.

4-4 Σωμάτιο μάζας m ξεκινά από την ηρεμία και ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια μιας λείας και ακλόνητης σφαίρας ακτίνας r. Θεωρήστε τη στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας την κορυφή της σφαίρας. Βρείτε:

(α) τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σωματίου.

(β) την κινητική ενέργεια αυτού,

(γ) την κεντρομόλο και εφαπτομενική επιτάχυνση αυτού, (δ) τη γωνία στην οποία το σωμάτιο εγκαταλείπει τη σφαίρα.

Λύση

(α) Θεωρώντας ως στάθμη αναφοράς το επίπεδο που εφάπτεται στην κορυφή A της σφαίρας, η δυναμική ενέργεια του σωματίου στη θέση B είναι

$$U_B = -mgy = -mg(r - r\cos\theta) = -mgr(1-\cos\theta) \quad (1)$$

(β) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται και επομένως η κινητική ενέργεια του σωματίου μπορεί να βρεθεί ως ακολούθως

$$E = K_B + U_B = K_A + U_A = 0 \qquad (2)$$

$$K_B = -U_B = mgr(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

(γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση της σημειακής μάζας δίνεται από την έκφραση

$$a_k = \frac{v^2}{r} \qquad (4)$$

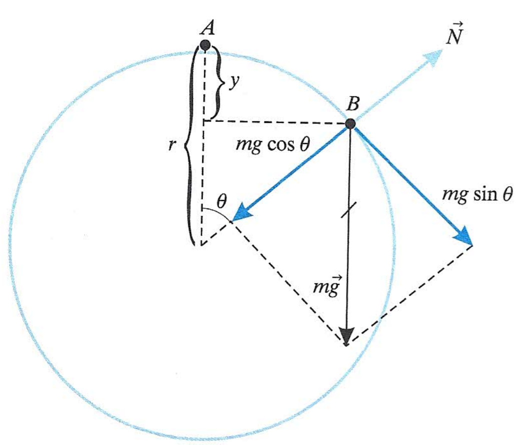
Η ταχύτητα της μάζας βρίσκεται από την έκφραση της κινητικής ενέργειας

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (5) στην Εξ. (4) έχουμε για την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$a_k = 2g(1-\cos\theta) \qquad (6)$$

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα κατά



Σχήμα 4-67

τη διεύθυνση της εφαπτομένης της σφαίρας στη θέση B βρίσκουμε για την επιτρόχιο επιτάχυνση

$$ma_\varepsilon = mg\sin\theta$$

$$a_\varepsilon = g\sin\theta \qquad (7)$$

(δ) Όταν η μάζα εγκαταλείπει τη σφαίρα, η αντίδραση από τη σφαίρα μηδενίζεται. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στο σημείο αυτό δίνει

$$ma_k = mg\cos\theta \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (6) στην (8) βρίσκουμε

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \qquad (9)$$

και

$$\theta = 48^\circ$$

4-5 Να εξεταστεί το ποσό της ενέργειας που παρέχεται σε ηλεκτροκίνητη σκάλα ύψους h και γωνίας κλίσης θ, που κινείται με ταχύτητα v_1, (α) όταν ένας άνθρωπος μάζας m στέκεται πάνω σ' αυτή και (β) όταν βαδίζει συγχρόνως πάνω στη σκάλα με σχετική ταχύτητα v_2. Ποια είναι η απαιτούμενη ισχύς στις δύο περιπτώσεις;

Λύση

(α) Όταν ο άνθρωπος μάζας m στέκεται πάνω στη σκάλα ανυψωθεί σε ύψος h, η ενέργεια που παρέχεται στη σκάλα για την ανύψωσή του είναι

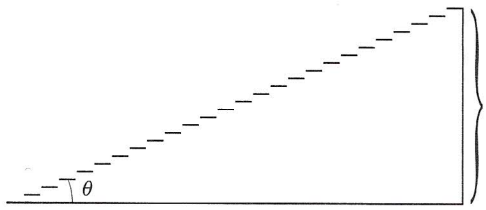
$$E_1 = mgh \qquad (1)$$

Ο άνθρωπος φθάνει στην κορυφή της σκάλας κινούμενος με τη σταθερή ταχύτητα v_1 της σκάλας σε χρόνο

$$t_1 = \frac{h/\sin\theta}{v_1} = \frac{h}{v_1\sin\theta} \qquad (2)$$

Η απαιτούμενη ισχύς για την ανύψωση του ανθρώπου είναι

$$P_1 = \frac{E_1}{t_1} = mgv_1\sin\theta \qquad (3)$$



Σχήμα 4-68

(β) Όταν ο άνθρωπος βαδίζει καθώς ανυψώνεται με σχετική ταχύτητα v_2 ως προς τη σκάλα, η ταχύτητά του ως προς το έδαφος είναι $v_1 + v_2$ και φθάνει στην κορυφή της σκάλας σε χρόνο

$$t_2 = \frac{h/\sin\theta}{v_1 + v_2} = \frac{h}{(v_1 + v_2)\sin\theta} \tag{4}$$

Αν στο χρόνο αυτό η σκάλα έχει ανυψωθεί κατά h_1, θα ισχύει επίσης

$$t_2 = \frac{h_1/\sin\theta}{v_1} = \frac{h_1}{v_1 \sin\theta} \tag{5}$$

Από τις Εξ. (4) και (5) προκύπτει

$$h_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} h \tag{6}$$

Η ενέργεια που παρέχεται στη σκάλα στην περίπτωση αυτή είναι

$$E_2 = mgh_1 = mgh \frac{v_1}{v_1 + v_2} \tag{7}$$

Η απαιτούμενη ισχύς για την ανύψωση του ανθρώπου είναι

$$P_2 = \frac{E_2}{t_2} = \frac{mgh_1}{h_1 / v_1 \sin\theta} = mg\, v_1 \sin\theta \tag{8}$$

Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση στη σκάλα παρέχεται μικρότερη ενέργεια, ενώ απαιτείται η ίδια ισχύς.

4-6 Από ποιο ύψος h πρέπει να ξεκινήσει μια σφαίρα μάζας m χωρίς αρχική ταχύτητα, ώστε να κινηθεί ασφαλώς μέσα στη στεφάνη ανακύκλωσης, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει τριβή;

Λύση

Στο σημείο εκκίνησης η μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι μόνο δυναμική ως προς το οριζόντιο επίπεδο

$$E = U = mgh \tag{1}$$

Στο υψηλότερο σημείο κατακόρυφης ανακύκλωσης η μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι

$$E = U + K = mg(2r) + \frac{1}{2} m v^2 \tag{2}$$

Επειδή δεν υπάρχει τριβή, η μηχανική ενέργεια διατηρείται, οπότε έχουμε

$$mgh = 2mgr + \frac{1}{2} m v^2 \tag{3}$$

Η εξίσωση της κίνησης σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το ανώτερο σημείο της ανακύκλωσης είναι

$$m\frac{v^2}{r} = mg + N \tag{4}$$

όπου N η αντίδραση από τη στεφάνη στη σφαίρα. Για να κινηθεί η σφαίρα ασφαλώς στη στεφάνη πρέπει να ισχύει

$$N \geq 0$$

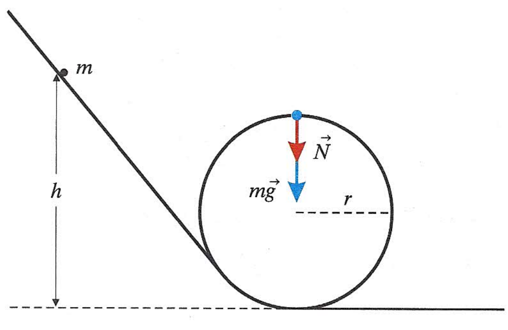
$$m\frac{v^2}{r} \geq mg$$

$$v^2 \geq gr \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (5) στην Εξ. (3) έχουμε

$$mgh \geq 2mgr + \tfrac{1}{2} mgr$$

$$h \geq 2{,}5r$$



Σχήμα 4-69

4-7 Το καλώδιο ενός ανελκυστήρα μάζας $m = 1500$ kg σπάει όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας στον πρώτο όροφο. Η βάση του τότε απέχει απόσταση $L = 3{,}5$ m από το πάνω μέρος ελατηρίου σταθεράς $k = 150000$ N/m. Ένας μηχανισμός ασφαλείας ανθίσταται στην πτώση με δύναμη τριβής $F_T = 4000$ N. Βρείτε: (α) την ταχύτητα του ανελκυστήρα μόλις φτάσει στο ελατήριο, (β) τη συμπίεση του ελατηρίου, (γ) την απόσταση αναπήδησης του ανελκυστήρα μετά την πρόσκρουσή του στο ελατήριο, (δ) τη συνολική απόσταση που θα διανύσει ο ανελκυστήρας μέχρις ότου φτάσει σε κατάσταση ηρεμίας.

Λύση

(α) Για να βρούμε την ταχύτητα του ανελκυστήρα μόλις φθάσει στο ελατήριο, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του ανελκυστήρα από τη θέση ηρεμίας μέχρι το πάνω άκρο του ελατηρίου

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL - F_T L \qquad (1)$$

οπότε

$$v = \sqrt{\frac{2mgL - 2F_T L}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(1500\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) - 2(4000\ \text{N})(3{,}5\ \text{m})}{1500\ \text{kg}}} =$$

$$= 7{,}16\ \text{m/s}$$

(β) Για να βρούμε τη συμπίεση Δx του ελατηρίου εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για τη διαδρομή από το σημείο άφιξης στο πάνω μέρος του ελατηρίου μέχρι το σημείο της μέγιστης συμπίεσής του

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = mg(\Delta x) - F_T(\Delta x) - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \qquad (2)$$

οπότε

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + (F_T - mg)\Delta x - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$7500\,(\Delta x)^2 - 11000(\Delta x) - 38500 = 0$$

$$\Delta x = 0{,}8\ \text{m}$$

(γ) Για να βρούμε την απόσταση αναπήδησης h του ανελκυστήρα μετά την πρόσκρουσή του στο ελατήριο, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για τη διαδρομή αυτή

$$0 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - mgh - F_T h \qquad (3)$$

οπότε

$$h = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta x)^2}{mg + F_T} = \frac{\frac{1}{2}(150000\ \text{N/m})(0{,}8\ \text{m}^2)}{(1500\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) + 4000\ \text{N}} = 2{,}53\ \text{m}$$

(δ) Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων όταν ο ανελκυστήρας φθάσει σε κατάσταση ηρεμίας, έχουμε

$$mg = k(\Delta y) \qquad (4)$$

όπου (Δy) η συμπίεση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Η συμπίεση Δy είναι

$$\Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{(1500\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)}{150000\ \text{N/m}} = 0{,}1\ \text{m}$$

Η αρχική ενέργεια του ανελκυστήρα είναι η δυναμική του ενέργεια ως προς την τελική θέση του ελατηρίου

$$E_1 = mg(L + \Delta y) \qquad (5)$$

Η τελική ενέργεια του ανελκυστήρα είναι η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο

$$E_2 = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 \qquad (6)$$

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης του ανελκυστήρα ισούται με την απώλεια ενέργειας υπό μορφή τριβών καθ' όλη τη διαδρομή S

$$E_1 - E_2 = F_T S \qquad (7)$$

οπότε η συνολική απόσταση που διανύει ο ανελκυστήρας είναι

$$S = \frac{E_1 - E_2}{F_T}$$

$$= \frac{mg(L + \Delta y) - \frac{1}{2}k(\Delta y)^2}{F_T}$$

$$= \frac{(1500\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(3{,}5\ \text{m} + 0{,}1\ \text{m}) - \frac{1}{2}(150000\ \text{N/m})(0{,}1\ \text{m})^2}{4000\ \text{N}}$$

$= 13{,}3$ m

4-8 Θεωρήστε μια ομογενή ράβδο μάζας m και μήκους l. Η ράβδος έχει μια γραμμική πυκνότητα μάζας $\lambda = m/l$. Όταν η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση με το κάτω άκρο της στη θέση $y = 0$, κάθε στοιχειώδες τμήμα της πάχους dy έχει μάζα $dm = \lambda dy$. Αυτό το στοιχειώδες τμήμα έχει μια δυναμική ενέργεια $dU = gydm$. (α) Βρείτε την ολική δυναμική ενέργεια βαρύτητας της ράβδου αθροίζοντας τα dU για όλες τις στοιχειώδεις μάζες από $y = 0$ έως $y = l$. (β) Αν κάποιος θελήσει να υπολογίσει την παραπάνω δυναμική ενέργεια ως εάν όλη η μάζα $m = \lambda l$ ήταν τοποθετημένη σ' ένα σημείο, ποια θα ήταν η συντεταγμένη αυτού του σημείου;

Λύση

(α) Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι

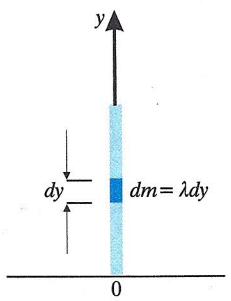
$$U = \int_0^l gydm = \int_0^l gy\lambda dy = g\lambda\int_0^l ydy = g\lambda\frac{y^2}{2}\Big|_0^l \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2}g\lambda l^2 = \frac{1}{2}g\frac{m}{l}l^2 = \frac{1}{2}mgl$$

(β) Αν όλη η μάζα της ράβδου ήταν τοποθετημένη σ' ένα σημείο με συντεταγμένη $y = h$, η δυναμική της ενέργεια θα ήταν

$$U = mgh \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι η συντεταγμένη αυτού του σημείου θα ήταν



Σχήμα 4-70

$$h = \frac{l}{2}$$

4-9 Σε υδροηλεκτρικό εργοστάσιο ισχύος 10 MW αναλογεί κατανάλωση νερού με ρυθμό 1 kg/s για ισχύ 1 kW. Από τη διαθέσιμη ενέργεια του νερού τα 30% μετατρέπονται σε θερμότητα, η οποία απορροφάται από το νερό, ενώ άλλα 10% αποτελούν θερμικές απώλειες στο περιβάλλον. Βρείτε: (α) το ύψος της υδατόπτωσης, (β) την παροχή του νερού, (γ) την συνολικά παραγόμενη θερμική ενέργεια και (δ) την ανύψωση της θερμοκρασίας του νερού.

Λύση

(α) Η ισχύς της υδατόπτωσης ισούται με το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του νερού

$$P_\upsilon = \frac{dU}{dt} = \frac{d(mgh)}{dt} = \frac{dm}{dt}gh \qquad (1)$$

όπου h το ύψος της υδατόπτωσης και dm/dt ο ρυθμός κατανάλωσης του νερού.

Οι συνολικές απώλειες είναι 40%, οπότε η απόδοση του εργοστασίου είναι 60% και ο συντελεστής απόδοσής του είναι 0,6. Ο συντελεστής απόδοσης είναι ο λόγος της παραγόμενης ισχύος P_π προς την ισχύ της υδατόπτωσης P_υ, ήτοι

$$\eta = \frac{P_\pi}{P_\upsilon} \qquad (2)$$

Επειδή για παραγόμενη ισχύ $P_\pi = 1$ kW αντιστοιχεί κατανάλωση νερού με ρυθμό $m/t = 1$ kg/s, από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει:

$$h = \frac{P_\pi}{\eta\left(\frac{dm}{dt}\right)g} = \frac{10^3\,\text{W}}{(0{,}6)(1\ \text{kg/s})(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 170\ \text{m}$$

(β) Επειδή για παραγόμενη ισχύ $P_\pi = 1$ kW αντιστοιχεί κατανάλωση νερού με ρυθμό $dm/dt = 1$ kg/s, η ολική παροχή $\Pi_{o\lambda}$ που αντιστοιχεί σε παραγόμενη ισχύ $P_{o\lambda} = 10$ MW είναι

$$\Pi_{o\lambda} = \frac{P_{o\lambda}}{P_\pi}(dm/dt) = \frac{10^4\,\text{kW}}{1\,\text{kW}}(1\ \text{kg/s}) = 10^4\ \text{kg/s}$$

(γ) Η μετατρεπόμενη σε θερμότητα ισχύς της υδατόπτωσης είναι

$$P_\theta = 0{,}4P_\upsilon \qquad (3)$$

όπου $P_\upsilon = P_\pi + P_\theta$, οπότε η Εξ. (3) γίνεται

$$P_\theta = 0{,}4(P_\pi + P_\theta)$$

η οποία καταλήγει στην

$$P_\theta = \frac{2}{3}P_\pi \qquad (4)$$

Το συνολικά παραγόμενο ποσό θερμότητας σε χρόνο $t = 1$ s είναι

$$Q = P_\theta t = \frac{2}{3}(10^7\,\mathrm{W})(1\,\mathrm{s}) = \frac{2}{3}10^7\,\mathrm{J}$$

(δ). Το ποσό θερμότητας που απορροφάται από το νερό αποτελεί τα 3/4 του συνολικά παραγόμενου ποσού θερμότητας, που βρέθηκε προηγουμένως

$$Q_v = \frac{3}{4}Q = C\Delta T \qquad (5)$$

όπου C η θερμοχωρητικότητα του νερού και ΔT η προκαλούμενη ανύψωση της θερμοκρασίας του. Η θερμοχωρητικότητα ανά μονάδα μάζας ενός σώματος καλείται ειδική θερμότητα c

$$c = \frac{C}{m} \qquad (6)$$

Η διεθνώς αποδεκτή ειδική θερμότητα του νερού είναι $c = 4185{,}5$ J/kg °C
Αντικαθιστώντας την Εξ. (6) στην Εξ. (5) προκύπτει

$$mc\Delta T = \frac{3}{4}Q \qquad (7)$$

όπου m είναι η μάζα που διέρχεται από την υδατόπτωση σε χρόνο $t = 1$s. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην Εξ. (7) βρίσκουμε για την ανύψωση της θερμοκρασίας του νερού ανά sec

$$\Delta T = \frac{Q}{4mc} = \frac{3\left(\frac{2}{3}10^7\,\mathrm{J}\right)}{4(10^4\,\mathrm{kg/s})(4185{,}5\,\mathrm{J/kg\,°C})} = 0{,}12\,\mathrm{°C/s}$$

4-10 1 mole ιδανικού αερίου πραγματοποιεί μια κυκλική θερμοδυναμική διεργασία, που περιλαμβάνει τα παρακάτω τέσσερα στάδια: (α) υπό σταθερό όγκο από την κατάσταση (T_1, V_1) στην (T_2, V_1), (β) ισόθερμα στην (T_2, V_2), (γ) υπό σταθερό όγκο στην (T_1, V_2) και (δ) ισόθερμα στην αρχική κατάσταση (T_1, V_1). Βρείτε το έργο που παράγει το αέριο και τη θερμότητα που απορροφά κατά τη διάρκεια του κύκλου αυτού.

Λύση

Σχεδιάζουμε την κυκλική θερμοδυναμική διεργασία του ιδανικού αερίου σε διάγραμμα P-V, υποθέτοντας ότι $T_2 > T_1$ και $V_2 > V_1$.

Κατά την ισόχωρη μεταβολή από την κατάσταση (T_1, V_1) στην (T_2, V_1) το αέριο δεν παράγει έργο. Κατά την ισόθερμη εκτόνωση στην κατάσταση (T_2, V_2) το αέριο παράγει έργο ίσο με

$$W_1 = RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Κατά την ισόχωρη μεταβολή στην κατάσταση (T_1, V_2) το αέριο δεν παράγει έργο. Κατά την ισόθερμη συμπίεση το παραγόμενο έργο στο αέριο είναι

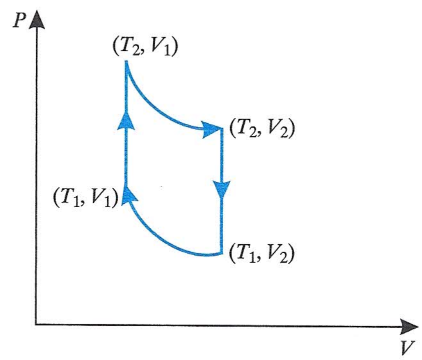
$$W_2 = RT_1 \ln\frac{V_1}{V_2} = -RT_1\frac{V_2}{V_1}$$

Το συνολικό έργο που παράγει το αέριο είναι

$$W = W_1 + W_2 = R(T_2 - T_1)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $T_2 > T_1$ και $V_2 > V_1$ το ολικό έργο είναι θετικό. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή το αέριο παράγει έργο στο περιβάλλον.

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU κατά την κυκλική θερμοδυναμική διεργασία είναι μηδέν. Επομένως, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, η θερμότητα Q που απορροφά το



Σχήμα 4-71

αέριο κατά τη διάρκεια του κύκλου ισούται με το έργο W που παράγει το αέριο.

4-11 Δυο ακριβώς ίδια σώματα με διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2 τοποθετούνται σε μονωμένο δοχείο και αφού έλθουν σε θερμική επαφή επέρχεται θερμική ισορροπία. Αν Q είναι η θερμότητα που μεταφέρεται από το θερμό στο ψυχρότερο σώμα, βρείτε την αύξηση της εντροπίας του συστήματος. Η θερμοχωρητικότητα C των σωμάτων υποτίθεται ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι $T_1 > T_2$. Έστω T η κοινή θερμοκρασία των δύο σωμάτων.

Η μεταβολή της εντροπίας του θερμότερου σώματος είναι

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T}{T_1}$$

Η μεταβολή της εντροπίας του ψυχρότερου σώματος είναι

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T} \frac{dQ}{T} = \int_{T_2}^{T} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T}{T_2}$$

Η ολική μεταβολή της εντροπίας του συστήματος είναι

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T^2}{T_1 T_2}$$

η οποία είναι πάντοτε θετική.

4-12 Σε ένα ψυγείο που λειτουργεί με κύκλο Carnot μετατρέπονται 50 kg νερού θερμοκρασίας 0° C σε πάγο 0° C. Αν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι 20° C, βρείτε το ποσό της ηλεκτρικής ενέργειας που χρειάσθηκε. Η θερμότητα μετατροπής του νερού σε πάγο είναι 335200 J/kg.

Λύση

Ο συντελεστής απόδοσης του ψυγείου είναι

$$\eta = \frac{Q_2}{W} \qquad (1)$$

όπου Q_2 το απαγόμενο ποσό θερμότητας και W η απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια.

Ο συντελεστής απόδοσης ενός ιδανικού ψυγείου δίνεται από την έκφραση

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \qquad (2)$$

όπου T_2 η θερμοκρασία του ψυγείου και T_1 η θερμοκρασία περιβάλλοντος. Η θερμοκρασία του ψυγείου είναι t_2 = 0° C, ή T_2 = 273 K. Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι t_1 = 20° C, ή T_1 = 273 +20 = 293 K. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές της θερμοκρασίας στην Εξ. (2) βρίσκουμε η = 13,65.

Το απαγόμενο ποσό θερμότητας Q_2 για τη μετατροπή του νερού σε πάγο είναι

$$Q_2 = mL = (50 \text{ kg})(335200 \text{ J/kg}) = 16{,}76 \times 10^6 \text{ J}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (1) τις ευρεθείσες τιμές των η και Q_2 βρίσκουμε ότι η απαιτούμενη ενέργεια για τη μετατροπή αυτή είναι

$$W = \frac{Q_2}{\eta} = \frac{16{,}76 \times 10^6 \text{ J}}{13{,}65} = 1227839 \text{ J} = 0{,}34 \text{ kWh}$$

4-13 Ηλεκτρόνιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r = 0,53 x 10^{-10} m γύρω από ένα ακίνητο πρωτόνιο. Βρείτε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου, την κινητική του ενέργεια, τη δυναμική του ενέργεια και την ολική του ενέργεια. Ποια είναι η ενέργεια ιονισμού του συστήματος; Οι ενέργειες να εκφρασθούν σε J και σε eV. Δίνεται: e = 1,6 x 10^{-19} C.

Λύση

Η μόνη δύναμη που προκαλεί την κίνηση του ηλεκτρονίου είναι η ηλεκτρική

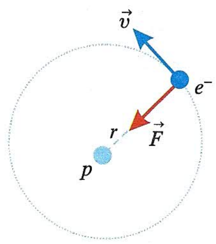
$$F = k\frac{e^2}{r^2} \qquad (1)$$

όπου $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ είναι η ηλεκτρική σταθερά.

Η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου είναι μόνο κεντρομόλος, οπότε σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \qquad (2)$$

Επομένως, η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι



Σχήμα 4-72

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = \sqrt{\frac{(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})(1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{9{,}1\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(0{,}53\times10^{-10}\,\mathrm{m})}}$$

$$= 2{,}2 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})\frac{(1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(0{,}53\times10^{-10}\,\mathrm{m})}$$

$$= 21{,}74 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = -\,27{,}2\ \mathrm{eV}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U = -k\frac{e^2}{r} = -(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})\frac{(1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(0{,}53\times10^{-10}\,\mathrm{m})}$$

$$= -\,43{,}47 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = -\,27{,}2\ \mathrm{eV}$$

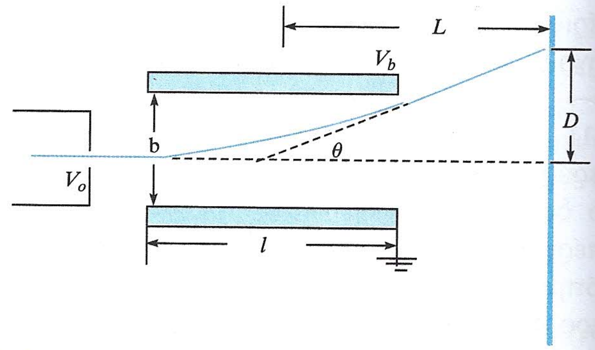
Η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E = K + U = -\,21{,}74 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = -\,13{,}6\ \mathrm{eV}$$

Η ενέργεια ιονισμού του συστήματος είναι η ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο ηλεκτρόνιο ώστε να αποδεσμευτεί από το πρωτόνιο

$$E_i \geq |E| = 13{,}6\ \mathrm{eV}$$

4-14 Σε σωλήνα καθοδικών ακτίνων δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται στο χώρο των πλακών κατακόρυφης απόκλισης με ταχύτητα, που αποκτήθηκε από υψηλό επιταχυντικό δυναμικό V_o. Το μήκος των πλακών είναι l και η μεταξύ τους απόσταση b. Η δέσμη εκτρέπεται από το κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο που εμφανίζεται μεταξύ των πλακών με εφαρμογή μεταξύ αυτών διαφοράς δυναμικού V_b. Η φθορίζουσα οθόνη είναι τοποθετημένη σε απόσταση L από το κέντρο των πλακών. Βρείτε την



Σχήμα 4-73

απόκλιση D της κηλίδας πάνω στην οθόνη. Εφαρμογή: $V_o = 400$ V, $V_b = 20$ V, $l = 3$ cm, $b = 1$ cm, $L = 20$ cm.

Λύση

Η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων της δέσμης ισούται με την ενέργεια που παρέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο διαφοράς δυναμικού V_o

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = eV_o \tag{1}$$

Επομένως, η ταχύτητα εισόδου των ηλεκτρονίων στο κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$v_o^2 = \sqrt{\frac{2eV_o}{m}} \tag{2}$$

Η εξίσωση της κίνησης των ηλεκτρονίων στο κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \tag{3}$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση του κατακόρυφου ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με μέτρο

$$E = \frac{V_b}{b} \tag{4}$$

Η εξίσωση της κίνησης έχει τις ακόλουθες λύσεις

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_o \\ v_y &= \frac{eE}{m}t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

και

$$\left.\begin{aligned} x &= \upsilon_o t \\ y &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από τις πλάκες τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{l}{\upsilon_o} \tag{7}$$

με κατακόρυφη ταχύτητα

$$\upsilon_y = \frac{eV_b l}{mb\upsilon_o} \tag{8}$$

Γνωρίζουμε (βλέπε Πρόβλημα 3-13) ότι η προέκταση της ταχύτητας εξόδου των ηλεκτρονίων τέμνει την διεύθυνση εισόδου σε θέση $l/2$ και επομένως η δυναμική απόκλιση της κηλίδας πάνω στην οθόνη μπορεί να εκφρασθεί ως

$$D = L\tan\theta \tag{9}$$

όπου

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{eV_b l}{mb\upsilon_o^2} \tag{10}$$

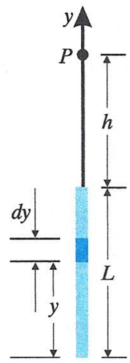
Από τις Εξ. (9), (10) και (2) προκύπτει

$$D = \frac{Ll}{2b}\frac{V_b}{V_o} \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα βρίσκουμε

$$D = \frac{(20\text{ cm})(3\text{ cm})}{2(1\text{ cm})}\frac{20\text{ V}}{400\text{ V}} = 1{,}5\text{ cm}$$

4-15 Φορτίο q κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους L. Προσδιορίστε: (α) Το ηλεκτρικό δυναμικό (που θεωρείται μηδέν στο άπειρο) σ' ένα σημείο που απέχει απόσταση h από το πάνω άκρο του φορτισμένου τμήματος και πάνω στην ίδια ευθεία. (β) Τη συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο κατά μήκος της ευθείας. (γ) Τη συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε διεύθυνση κάθετη προς την ευθεία.



Σχήμα 4-74

Λύση

(α) Το δυναμικό στο σημείο P που οφείλεται στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dy και φορτίου dq δίνεται από τη γνωστή έκφραση για σημειακό φορτίο

$$dV_p = k\frac{dq}{r} \tag{1}$$

όπου $k = 1/4\pi\varepsilon_o$ η ηλεκτρική σταθερά και r η απόσταση από το στοιχειώδες τμήμα μέχρι το σημείο P, η οποία μπορεί να εκφρασθεί ως $r = h+L-y$. Το στοιχειώδες φορτίο dq του στοιχειώδους τμήματος dy μπορεί να εκφρασθεί ως $dq = \lambda dy$, όπου λ είναι η σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου με ολοκλήρωση της παραπάνω έκφρασης είναι: $\lambda = q/L$. Επομένως, το δυναμικό στο σημείο P που οφείλεται σ' όλο το φορτισμένο τμήμα είναι

$$\begin{aligned} V_p &= \int_0^L k\frac{\lambda dy}{h+L-y} = -k\frac{q}{L}\int_0^L \frac{d(h+L-y)}{h+L-y} \\ &= -k\frac{q}{L}\ln(h+L-y)\Big|_0^L = k\frac{q}{L}\ln\frac{L+h}{h} \end{aligned} \tag{2}$$

(β) Η συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο κατά μήκος της διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος είναι

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{dV_p}{dy} = -\frac{d}{dy}k\frac{q}{L}\ln\frac{(L+y)}{y}\Big|_{y=h} \\ &= -k\frac{q}{L}\left(\frac{y}{L+y}\frac{d}{dy}\frac{(L+y)}{y}\right)\Big|_{y=h} = k\frac{q}{(L+h)h} \end{aligned} \tag{3}$$

(γ) Η συνιστώσα της έντασης του πεδίου σε διεύθυνση κάθετη στην ευθεία είναι

$$E_x = -\frac{dV_p}{dx} = 0$$

4-16 Να βρεθεί η κατανομή δυναμικού και η ενέργεια μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας φορτίου Q και ακτίνας R.

Λύση

Για τον προσδιορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας θεωρούμε μια υποθετική επιφάνεια S ακτίνας r και φορτίου q, (Σχ.4-75α). Εφαρμόζοντας για την επιφάνεια αυτή το νόμο του Gauss έχουμε

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2} \qquad (1)$$

Επειδή η σφαίρα είναι ομοιόμορφα φορτισμένη, ο λόγος των φορτίων θα ισούται με το λόγο των όγκων των αντίστοιχων σφαιρών, ήτοι

$$\frac{q}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (2)$$

$$q = \frac{r^3}{R^3}Q$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2) στην Εξ. (1) προκύπτει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας είναι

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qr}{R^3} \quad r < R \qquad (3)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εξωτερικό της σφαίρας, όπως προκύπτει από το νόμο του Gauss, ισούται με την ένταση ως εάν το φορτίο της σφαίρας ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της, ήτοι

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} \quad r \geq R \qquad (4)$$

Για $r \geq R$ το δυναμικό είναι:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_2 dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Q\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Q\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r} \qquad (5)$$

Η μεταβολή του δυναμικού στο εσωτερικό της σφαίρας, ($r < R$) είναι

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_R^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qr}{R^3}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^3}\frac{r^2}{2}\Bigg|_R^r \qquad (6)$$

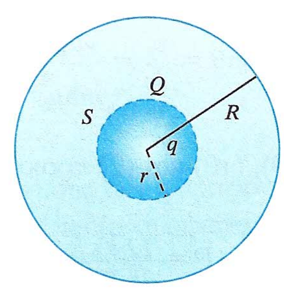
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qr^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{2R}$$

Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας, σύμφωνα με την Εξ. (5) είναι

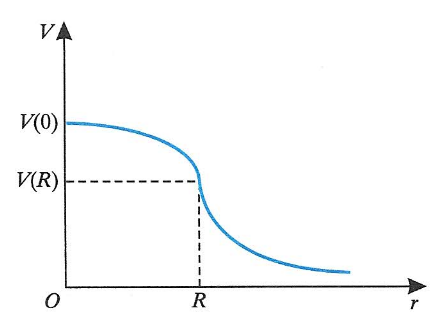
$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R} \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (7) στην Εξ. (6) προκύπτει

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qr^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{2R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R}$$



(α)



(β)

Σχήμα 4-75 (α) Ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγής σφαίρα. (β) Κατανομή δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο της σφαίρας.

ή

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qr^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3Q}{2R} \qquad (8)$$

Στο κέντρο της σφαίρας το δυναμικό είναι

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3Q}{2R} \qquad (9)$$

Η γραφική απεικόνιση της μεταβολής του δυναμικού δίνεται στο Σχ. 4-75β.

Η ενέργεια της ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας οφείλεται τόσο στο εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, όσο και στο εξωτερικό:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_v E^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_0^R E_1^2 dv + \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_R^\infty E_2^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_0^R \frac{1}{(4\pi\varepsilon_o)^2}\frac{Q^2r^2}{R^6}4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_R^\infty \frac{1}{(4\pi\varepsilon_o)^2}\frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^6}\int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{r^6}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Q^2\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{5R} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{R} \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

4-17 Ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερικής αντίστασης r τροφοδοτεί φορτίο αντίστασης R. (α) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των αντιστάσεων r και R, ώστε να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος. (β) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ της καταναλισκόμενης ισχύος στο φορτίο και της προσφερόμενης ισχύος.

Λύση

(α) Η πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερικής αντίστασης r παρέχει ρεύμα I, που δίνεται από την έκφραση

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \qquad (1)$$

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο φορτίο αντίστασης R δίνεται από την έκφραση

$$P_o = I^2 R \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το ρεύμα I από την Εξ. (1) έχουμε

$$P_o = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} \qquad (3)$$

Για να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{dP_o}{dR} = 0$$

$$\frac{\mathcal{E}^2(R+r)^2 - 2\mathcal{E}^2R(R+r)}{(R+r)^4} = 0$$

$$\mathcal{E}^2(R+r)(R+r-2R) = 0$$

$$r - R = 0$$

οπότε

$$R = r \qquad (4)$$

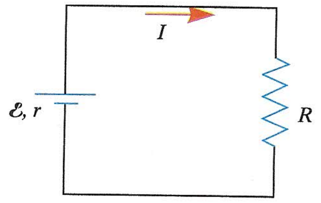
(β) Η προσφερόμενη ισχύς δίνεται από την έκφραση

$$P_i = \mathcal{E} I \qquad (5)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις Εξ. (2) και (5), και αντικαθιστώντας τις Εξ. (1) και (5) έχουμε

$$\frac{P_0}{P_i} = \frac{I^2R}{\mathcal{E}I} = \frac{IR}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}R}{\mathcal{E}(R+r)} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η καταναλισκόμενη ισχύς ισούται με το ήμισυ της προσφερόμενης.



Σχήμα 4-76

4-18 Ένας ορθογώνιος αγώγιμος βρόχος κείται στο ίδιο επίπεδο μ' ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα που φέρει χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα $I(t) = I_o \sin\omega t$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-77. Προσδιορίστε (α) τη ροή διά μέσου του βρόχου και (β) την επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο.

Λύση

(α) Η στοιχειώδης ροή που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια μήκους a και πλάτους dr είναι:

$$d\Phi_B = Bds = Badr \qquad (1)$$

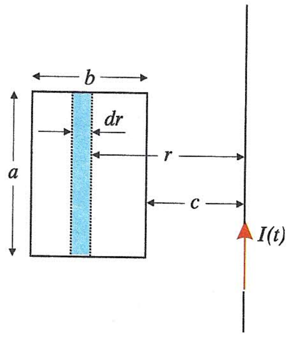
Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί το ρεύμα $I(t)$ στη θέση r της στοιχειώδους επιφάνειας είναι:

$$B = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi r} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2) στην Εξ. (1) έχουμε:

$$d\Phi_B = \frac{\mu_o I(t) a\, dr}{2\pi r} \qquad (3)$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε για την ολική ροή που



Σχήμα 4-77

διέρχεται από το βρόχο:

$$\Phi_B = \frac{\mu_o I(t) a}{2\pi}\int_c^{c+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I(t) a}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}$$

$$= \frac{\mu_o a I_o \sin\omega t}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{c}\right)$$

(β) Η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο είναι:

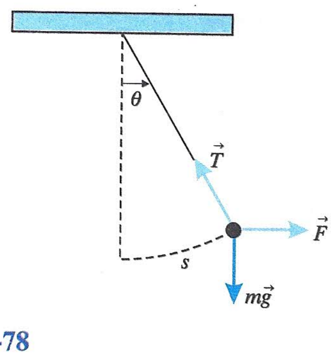
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_o a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{c}\right)\frac{dI(t)}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_o a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{c}\right)I_o\omega\cos\omega t$$

ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4-19 Μια οριζόντια μεταβλητή δύναμη ασκείται στη σφαίρα μάζας m = 0,2 kg ενός απλού εκκρεμούς μήκους L = 0,8 m και την εκτρέπει πολύ αργά από την ηρεμία μέχρις ότου το νήμα του εκκρεμούς να σχηματίσει γωνία θ = 60° με την κατακόρυφη. (α) Υπολογίστε το έργο της δύναμης $\vec{F}$. (β) Αν η σφαίρα αφεθεί ελεύθερη με πόση ταχύτητα θα περάσει από την κατακόρυφη;

Απάντηση: (α) W =0,8 J, (β) υ = 2,8 m/s.

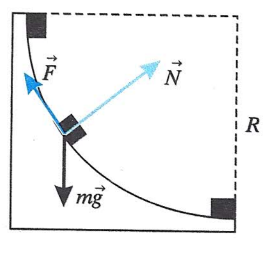


Σχήμα 4-78

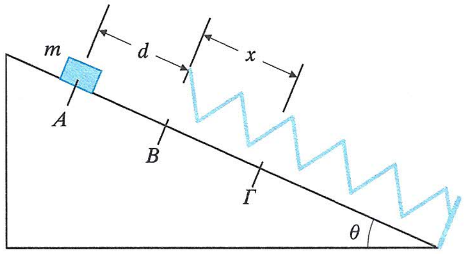
4-20 Ένα σώμα μάζας m = 0,5 kg ολισθαίνει προς τα κάτω σε μια κυκλική τροχιά ακτίνας R = 1 m. Η ταχύτητά του στη βάση της τροχιάς λόγω τριβών είναι μόνο υ = 3 m/s. Υπολογίστε το έργο της δύναμης τριβής που ενεργεί στο σώμα.

Απάντηση: W_f =-2,75 J.

4-21 Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ολισθαίνει προς τα κάτω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ = 30°, η επιφάνεια του οποίου έχει συντελεστή τριβής ολισθήσεως μ = 0,3. Το



Σχήμα 4-79



Σχήμα 4-80

σώμα συγκρούεται με ένα ελατήριο σταθεράς k = 50 N/m ξεκινώντας από την ηρεμία και από απόσταση d = 0,5 m από το άκρο του ελατηρίου. Υπολογίστε τη μέγιστη συμπίεση x του ελατηρίου.

Απάντηση: x = 0,42 m

4-22 Ένα σωματίδιο άλφα με ενέργεια 1 MeV πλησιάζει κεντρικά έναν πυρήνα και οπισθοσκεδάζεται. (α) Μέχρι τη στιγμή της πλησιέστερης προσέγγισης πόσο έργο παρέχει ο πυρήνας στο σωματίδιο άλφα; (β) Όσο διαρκεί η όλη κίνηση του σωματιδίου άλφα κατά την προσέγγιση προς τον πυρήνα και την απομάκρυνση από αυτόν, πόσο ολικό έργο παρέχει ο πυρήνας στο σωματίδιο άλφα;

Απάντηση: (α) W = -1 MeV, (β) W = 0.

4-23 Ένας δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 2R$ γύρω από τη Γη. Προσδιορίστε: (α) την ταχύτητά του υ και (β) το λόγο της κινητικής προς τη δυναμική του ενέργεια.

Δίνονται: G = 6,67 x 10^{-11} Nm^2/kg^2, Μάζα Γης, M = 5,98 x 10^{24} kg, Ακτίνα Γης, R = 6,38 x 10^6 m.

Απάντηση: (α) υ = 5,6 x 10^3 m/s, (β) K/U = ½.

4-24 Χρησιμοποιώντας για τη Σελήνη τις τιμές: R_Σ = 1,7 x 10^6 m και m_Σ = 7,3 x 10^{22} kg, υπολογίστε: (α) την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης και (β) την ταχύτητα διαφυγής από τη Σελήνη.

Απάντηση: g_Σ = 1,68 m/s^2, υ_o = 2,4 km/s.

4-25 Υπολογίστε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας κατά τη μετατροπή 1 mole υγρού νερού πίεσης 1 atm (1,013 x 10^5 N/m^2)και θερμοκρασίας 100° C σε υδρατμούς της ίδιας πίεσης και θερμοκρασίας, αν είναι γνωστό ότι στις συνθήκες αυτές οι γραμμομοριακοί όγκοι του υγρού και των ατμών είναι 18,8 cm^3/mole και 3,02 x 10^4 cm^3/mole και ότι η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης είναι 4,06 x 10^4 J/mole.

Απάντηση: ΔU = 3,75 x 10^4 J/mole.

4-26 Δυο δοχεία περιέχουν το καθένα 1 mole από το ίδιο μονατομικό αέριο. Αρχικά τα δυο δοχεία είναι θερμικά μονωμένα το ένα από το άλλο και τα δυο αέρια έχουν την ίδια πίεση P και θερμοκρασίες T_A και T_B αντίστοιχα. Τα δυο δοχεία φέρονται τώρα σε θερμική επαφή και η πίεση των δυο αερίων διατηρείται σταθερή στην τιμή P. Βρείτε τη μεταβολή της εντροπίας του συστήματος μετά την αποκατάσταση ισορροπίας και δείξτε ότι η μεταβολή αυτή είναι μη αρνητική.

Απάντηση: $\Delta S = C_v \ln \dfrac{T^2}{T_A T_B} \geq 0$

4-27 Η βενζινομηχανή ενός αυτοκινήτου προσλαμβάνει 2000 J θερμότητας και αποδίδει 400 J μηχανικού έργου ανά κύκλο. Η θερμότητα προέρχεται από την καύση βενζίνης με θερμότητα καύσης L = 5 x 10^4 J/g. (α) Ποια είναι η θερμική απόδοση της μηχανής; (β) Πόση θερμότητα αποβάλλεται ανά κύκλο; (γ) Πόση βενζίνη καταναλίσκεται ανά κύκλο; (δ) Αν η μηχανή πραγματοποιεί 90 κύκλους ανά δευτερόλεπτο, πόση είναι η ισχύς εξόδου σε watt και σε ίππους; (ε) Πόση βενζίνη καταναλίσκεται ανά δευτερόλεπτο και ανά ώρα;

Απάντηση: (α) η =20%, (β) Q_2 = 1600 J,
(γ) m = 0,04 g/c, (δ) P = 48,2 HP,
(ε) m = 3,6 g/s

4-28 Υποθέστε ότι φέρουμε σε επαφή 1 kg νερού θερμοκρασίας 100° C με 1 kg νερού θερμοκρασίας 0° C. Πόση είναι η ολική μεταβολή της εντροπίας; Υποθέστε ότι η ειδική θερμότητα του νερού είναι σταθερή και ίση με 4190 J/kg K στην περιοχή αυτή των θερμοκρασιών.

Απάντηση: ΔS = 101,6 J/K.

4-29 Ένα σωματίδιο άλφα με φορτίο 2e προσεγγίζει κεντρικά έναν πυρήνα με φορτίο Ze. (α) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ θεωρώντας ότι $U(\infty)$ = 0 και σχεδιάστε το διάγραμμά της (β) Υπολογίστε την απόσταση της πλησιέστερης προσέγγισης, αν το σωματίδιο άλφα έχει αρχική ενέργεια 1 MeV και προσεγγίζει έναν πυρήνα χρυσού ($Z = 79$).

Απάντηση: $x_{min} = 2{,}3 \times 10^{-13}$ m.

4-30 Υποθέστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στην ατμόσφαιρα της Γης μεταξύ της επιφάνειάς της και της ιονόσφαιρας μπορεί να θεωρηθεί κατά μεγάλη προσέγγιση ομογενές με μέτρο 100 V/m. Η ακτίνα της γης είναι 6400 km και το ύψος της ιονόσφαιρας 100 km. Προσδιορίστε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου της ατμόσφαιρας.

Απάντηση: $U = 2{,}3 \times 10^{12}$ J

4-31 Προσδιορίστε την ηλεκτροστατική ενέργεια ενός κυλινδρικού πυκνωτή μήκους L, εσωτερικής ακτίνας R_1, εξωτερικής ακτίνας R_2 και φορτίου Q.

Απάντηση: $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{T^2}{L}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

4-32 Πέντε αντιστάσεις των 100 Ω συνδέονται κατά τρόπο που να σχηματίζουν το γράμμα Η. Μια ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ 4,5 V και εσωτερικής αντίστασης 2 Ω συνδέεται μεταξύ των πάνω άκρων του γράμματος, ενώ ένα αμπερόμετρο εσωτερικής αντίστασης 10 Ω συνδέεται μεταξύ των κάτω άκρων αυτού. Υπολογίστε το ρεύμα που μετρά το αμπερόμετρο.

Απάντηση: $I = 5{,}38$ mA

4-33 Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 2$ μF φορτίζεται από μια μπαταρία ΗΕΔ 4,5 V μέσω μιας αντίστασης $R = 1000$ Ω. Προσδιορίστε: (α) Το φορτίο του πυκνωτή, την τάση στα άκρα του πυκνωτή και το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t = 1$ ms μετά τη σύνδεση του κυκλώματος. (β) Την αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή και την θερμότητα που αναπτύχθηκε στην αντίσταση μετά την ολοκλήρωση της φόρτισης.

Απάντηση: (α) $q = 3{,}5$ μC, $V_c = 1{,}8$ V,
$I = 2{,}7$ mA,
(β) $U_c = U_R = 20{,}25$ μJ.

4-34 Ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα πλάτους 15 A. Υπολογίστε το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί σε απόσταση 3 m.

Απάντηση: $B_o = 10^{-6}$ T.

4-35 Ένα κυκλικό πηνίο με 200 σπείρες έχει ακτίνα 2 cm και περιστρέφεται με συχνότητα 50 Hz σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η επαγόμενη ΗΕΔ έχει μέγιστη τιμή 12 V. Υπολογίστε την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Απάντηση: 0,15 T

4-36 Ένα σωληνοειδές διαμέτρου 0,1 m έχει 485 σπείρες/m και το ρεύμα των σπειρών του μεταβάλλεται αρμονικά με πλάτος 40 mA και συχνότητα 3 kHz. Υπολογίστε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση 0,01 m από τον άξονά του.

Απάντηση: 2,3 mV/m

4-37 Ένα δακτυλιοειδές πηνίο διατομής $S = 10$ cm^2 και με μέσο μήκος περιφέρειας $l = 0{,}5$ m έχει $N = 100$ σπείρες. Υπολογίστε το συντελεστή αυτεπαγωγής L αυτού.

Απάντηση: 25×10^{-6} H

4-38 Ένα ρεύμα 10 A ρέει σ' ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα κοντά σ' ένα ορθογώνιο πλαίσιο. Το πλαίσιο έχει πλευρές 10 cm και 20 cm και απέχει από το σύρμα 5 cm. Το ρεύμα διακόπτεται και πέφτει στο μηδέν σε χρόνο 0,02 s. Υπολογίστε της επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο και τη φορά του επαγόμενου ρεύματος.

Απάντηση: 22×10^{-6} V

4-39 Ένα κυκλικό πηνίο 400 σπειρών και ακτίνας 6 cm βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0{,}4$ T και περιστρέφεται περί άξονα μια διάμετρό του με γωνιακή ταχύτητα 600 rpm. Υπολογίστε το μέγιστο ρεύμα που ρέει στη συνδεδεμένη στην έξοδό του αντίσταση $R = 33$ Ω.

Απάντηση: 3,45 A

4-40 Ένα δακτυλιοειδές πηνίο ορθογωνίου διατομής έχει $N_1 = 600$ σπείρες, εσωτερική ακτίνα $R_1 = 8$ cm, εξωτερική $R_2 = 12$ cm και ύψος $h = 4$ cm. Ένας ορθογώνιος αγώγιμος βρόχος έχει $N_2 = 36$ σπείρες και το επίπεδό του συμπίπτει με μια διατομή του δακτυλιοειδούς πηνίου. Εάν το ρεύμα του δακτυλιοειδούς πηνίου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό από 2 A σε 6 A σε χρόνο 0,2 s, ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στον ορθογώνιο βρόχο;

Απάντηση: 1,4 mV

4-41 Ένα σωληνοειδές 1000 σπειρών μήκους 60 cm και διαμέτρου 41 mm είναι ομοαξονικό με κυκλικό αγώγιμο βρόχο διαμέτρου 60 mm. Το ρεύμα που δημιουργείται στο σωληνοειδές μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση όπου $I_o = 2$ A. Υπολογίστε την επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο και το επαγόμενο ρεύμα κατά τη χρονική στιγμή $t = 5$ s, αν η αντίστασή του είναι 1 Ω.

Απάντηση: $\mathcal{E} = 0{,}396$ μV, $I = 0{,}396$ μA

4-42 Ένα κυλινδρικό μαγνητικό πεδίο ακτίνας $R = 40$ cm μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $B(t) = B_o e^{-t/4}$, όπου $B_o = 1$T. Υπολογίστε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο κατά τη χρονική στιγμή $t = 2$ s: (α) σε απόσταση $r = 20$ cm από τον άξονά του και (β) σε απόσταση $r = 60$ cm.

Απάντηση: (α) $E = 0{,}015$ V/m,
(β) $E = 0{,}020$ V/m

4-43 Κύκλωμα αποτελείται από δυο πυκνωτές με χωρητικότητες $C_1 = 68$ nF και $C_2 = 82$ nF συνδεδεμένους σε σειρά με πηγή εναλλασσόμενης ΗΕΔ της μορφής $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \sin \omega t$, όπου $\mathcal{E}_o = 2$ V και $\omega = 100\,\pi$ rad/s.

(α) Υπολογίστε το φορτίο κάθε πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου.

(β) Βρείτε και σχεδιάστε τις συναρτήσεις της ισχύος και της αποθηκευμένης ενέργειας στους πυκνωτές. Πόση είναι η μέγιστη ενέργεια στους πυκνωτές; Πόση είναι η μέση χρονική τιμή της ενέργειας;

Απάντηση: (α) $74{,}35 \times 10^{-9} \sin 100\pi t$,
(β) $74{,}35 \times 10^{-9}$ J, $37{,}17 \times 10^{-9}$ J

4-44 Πηνίο αυτεπαγωγής 2 mH είναι συνδεδεμένο με πηγή εναλλασσόμενης ΗΕΔ της μορφής $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \sin \omega t$, όπου $\mathcal{E}_o = 3$ V και $\omega = 1000\,\pi$ rad/s.

(α) Υπολογίστε το ρεύμα στο κύκλωμα. Πόσο είναι το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα;

(β) Βρείτε και σχεδιάστε τις συναρτήσεις της ισχύος και της αποθηκευμένης ενέργειας στο πηνίο.

Απάντηση: $I_o = 0{,}48$ A

4-45 Πηνίο αυτεπαγωγής L και πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέονται παράλληλα και τροφοδοτούνται από πηγή εναλλασσόμενης ΗΕΔ της μορφής $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \sin \omega t$.

(α) Υπολογίστε το στιγμιαίο ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και το πηνίο.

(β) Υπολογίστε το στιγμιαίο ρεύμα με το οποίο η πηγή τροφοδοτεί το κύκλωμα.

(γ) Υπολογίστε τη στιγμιαία ισχύ που αποδίδεται στο κύκλωμα.

Απάντηση: (α) $I_C = \omega C\, \mathcal{E}_o \cos \omega t$

$$I_L = -\frac{\mathcal{E}_o}{\omega L} \cos \omega t$$

(β) $I = (\omega C - 1/\omega L)\mathcal{E}_o \cos \omega t$
(γ) $P = (\omega C - 1/\omega L)\mathcal{E}_o^{\,2} \cos \omega t \sin \omega t$

4-46 Ένα επίπεδο πηνίο 500 σπειρών επιφάνειας 50 cm^2 περιστρέφεται γύρω από μια διάμετρό του σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 0,14 T, με γωνιακή ταχύτητα 150 rad/s. Το πηνίο έχει αντίσταση 5 Ω και η επαγόμενη ΗΕΔ εφαρμόζεται σε φορτίο αντίστασης 10 Ω. Υπολογίστε το μέγιστο ρεύμα και τη μέση καταναλισκόμενη ισχύ στο φορτίο.

Απάντηση: 3,5 A, 61,25 W.

4-47 Ένα κύκλωμα *RLC* τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης ΗΕΔ που δημιουργεί μια τάση στα άκρα του φορτίου:
$V = (17\text{ V})\sin[(314\text{ rad/s})t]$, και ένα ρεύμα:
$I = (0.1\text{ A})\sin[(314\text{ rad/s})t + 0{,}82\text{ rad}]$.
Προσδιορίστε τη μέση καταναλισκόμενη ισχύ στο κύκλωμα.

Απάντηση: $\overline{P} = 0{,}58$ W