ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3-19 Δύναμη σε ορθογώνιο πλαίσιο

Βρείτε την συνισταμένη δύναμη στο ορθογώνιο του Σχ. 3-47, αν αυτό μεταφέρει ρεύμα της ίδιας έντασης όπως και το σύρμα.

Λύση

Η ασκούμενη δύναμη στις πλευρές του ορθογωνίου δίνεται από την Εξ. (3.107)

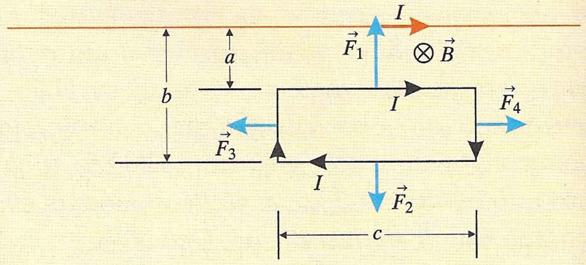
$$\vec{F} = I_1 \vec{\ell} \times \vec{B}_2$$

Οι κατευθύνσεις των δυνάμεων, όπως καθορίζονται από την εξίσωση αυτή, δείχνονται στο Σχ. 3-47. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ δίνεται από την Εξ. (3.129)

$$F_1 = \frac{\mu_0 I^2 c}{2\pi a}$$

Ομοίως της δύναμης $\vec{F}_2$

$$F_2 = \frac{\mu_0 I^2 c}{2\pi b}$$



Σχήμα 3-47

Τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$ είναι πιο δύσκολο να υπολογισθούν, επειδή τα διάφορα μέρη των πλάγιων πλευρών έχουν διαφορετική απόσταση από το σύρμα. Έτσι

$$F_3 = \int dF_3 = \int_a^b I\,dr\,B(r) = \int_a^b I\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\ln\frac{b}{a}$$

Είναι φανερό ότι $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$, οπότε οι δυνάμεις αυτές αλληλοεξουδετερώνονται. Επομένως η συνισταμένη δύναμη στο πλαίσιο είναι

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I^2 c}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 c}{2\pi}\frac{b-a}{ab}$$

με φορά προς τα πάνω.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

3-1 *Διατυπώστε τους νόμους του Νεύτωνα.*

1^{ος} *νόμος*: Όταν σ' ένα σώμα δεν επιδρά εξωτερική δύναμη, τότε η κινητική του κατάσταση παραμένει αμετάβλητη:

$$\text{όταν } \vec{F} = 0, \text{ τότε } \vec{a} = 0 \qquad (3.1)$$

2^{ος} *νόμος*: Η δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (3.3)$$

3^{ος} *νόμος*: Αν δυο σώματα A και B αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{AB}$ που ασκείται από το B στο A είναι αντίθετη από τη δύναμη $\vec{F}_{BA}$ που ασκείται από το A στο B:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (3.4)$$

3-2 *Πώς ορίζεται η ροή ενός πεδίου διά μέσου μιας επιφάνειας;*

Η ροή Φ ενός πεδίου διά μέσου μιας επιφάνειας S δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad (3.6)$$

όπου $\vec{E}$ είναι η συνάρτηση της έντασης του πεδίου.

3-3 *Ορίστε την ένταση σ' ένα πεδίο βαρύτητας. Με τι ισούται η δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα σ' ένα πεδίο βαρύτητας;*

Κάθε μάζα M δημιουργεί στο γύρω χώρο της ένα πεδίο βαρύτητας με ένταση

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u} \qquad (3.10)$$

Κάθε δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα μάζας m μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad (3.11)$$

3-4 *Τι ονομάζεται στατική και τι κινητική τριβή;*

Η δύναμη αντίστασης ανάμεσα σε επιφάνειες που ηρεμούν λέγεται δύναμη *στατικής τριβής* και είναι παράλληλη προς την επιφάνεια επαφής. Αν F_S είναι το μέτρο της δύναμης στατικής τριβής, μπορούμε να γράψουμε σύμφωνα με πειραματικά δεδομένα την εξίσωση:

$$F_S \le \mu_S N$$

όπου μ_S μια σταθερά που ονομάζεται *συντελεστής στατικής τριβής* και N η κάθετη συνιστώσα της δύναμης επαφής. Η ισότητα ισχύει όταν η F_S έχει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίδια με την ελάχιστη δύναμη που χρειάζεται για την έναρξη της κίνησης.

Η δύναμη που ενεργεί μεταξύ επιφανειών, που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, λέγεται δύναμη *κινητικής τριβής*. Αν F_K το μέτρο της δύναμης κινητικής τριβής, μπορούμε να γράψουμε σύμφωνα με πειραματικά δεδομένα την εξίσωση:

$$F_K = \mu_K N$$

όπου μ_K ο *συντελεστής κινητικής τριβής*.

3-5 *Διατυπώστε το νόμο του Gauss στο ηλεκτρικό πεδίο.*

Η ολική ροή του ηλεκτρικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη προς το ολικό φορτίο q που περικλείει η επιφάνεια και ανεξάρτητη από την ύπαρξη φορτίων στον εξωτερικό χώρο:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3.50)$$

3-6 *Πώς εκφράζεται η πυκνότητα ρεύματος σ' έναν μεταλλικό αγωγό σε συνάρτηση με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον αγωγό;*

Η πυκνότητα ρεύματος σ' έναν μεταλλικό αγωγό μπορεί να εκφρασθεί ως ακολούθως:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1}{A}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{A}\frac{enAv_d\Delta t}{\Delta t} = env_d$$

όπου v_d είναι η ταχύτητα μετακίνησης των ηλεκτρονίων και n η συγκέντρωσή τους στον αγωγό.

Η ταχύτητα μετακίνησης των ηλεκτρονίων είναι ανάλογη με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$v_d = \mu E$$

όπου μ η ευκινησία των ηλεκτρονίων.

Κατόπιν των ανωτέρω, η πυκνότητα ρεύματος μπορεί να εκφρασθεί ως

$$J = en\mu E = \sigma E = \frac{1}{\rho}E$$

όπου σ είναι η ειδική αγωγιμότητα και ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού.

3-7 *Με τι ισούται η μαγνητική δύναμη που ασκείται σ' ένα φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ σε μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$;*

Η μαγνητική δύναμη δίνεται από την έκφραση:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

3-8 *Με τι ισούται η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό;*

Η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την έκφραση:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

3-9 *Διατυπώστε το νόμο των Biot – Savart.*

Ο νόμος των Biot – Savart προσδιορίζει την ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' ένα σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς ένα απειροστό στοιχείο ρεύματος $Id\vec{l}$ μιας κατανομής και δίνεται από την ακόλουθη έκφραση

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

όπου $\vec{u}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ του θεωρούμενου σημείου ως προς το στοιχείο ρεύματος $Id\vec{l}$.

3-10 *Διατυπώστε το νόμο του Ampère.*
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ και της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{l}$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ανάλογο με το ρεύμα I που διαπερνά μια επιφάνεια που οριοθετείται από την εν λόγω διαδρομή.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

3-1 *Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι ένα σωμάτιο κινείται επ' άπειρο με σταθερή ταχύτητα, αν δεν ενεργούν σ' αυτό δυνάμεις που ν' ανθίστανται στην κίνησή του. Στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός σωματιδίου απαιτείται δύναμη;*
Το σωμάτιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (κίνηση με σταθερό μόνο το μέτρο της ταχύτητας και όχι τη διεύθυνσή της) έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, την οποία θα προσδίδει μια συνισταμένη δύναμη. Επομένως, για να εκτελέσει ένα σωμάτιο ομαλή κυκλική κίνηση απαιτείται δύναμη.

3-2 *Γιατί τα καταστρώματα των σιδηροδρόμων και των αυτοκινητοδρόμων έχουν κλίση στις στροφές; Από τι μπορεί να εξαρτάται αυτή η γωνία κλίσης;*
Η κλίση στις στροφές χρειάζεται για να αποκτήσει το όχημα την απαραίτητη κεντρομόλο επιτάχυνση για να εκτελέσει την κυκλική κίνηση στη στροφή, ιδιαίτερα αν η δύναμη τριβής δεν είναι για το σκοπό αυτό επαρκής. Η γωνία κλίσης εξαρτάται από την ταχύτητα του οχήματος και την ακτίνα καμπυλότητας του δρόμου.

3-3 *Γιατί οι δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου δεν τέμνονται ποτέ; Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου βαρύτητας τέμνονται;*
Η ένταση του πεδίου σ' ένα σημείο αυτού είναι εφαπτόμενη της δυναμικής γραμμής. Αν σ' ένα σημείο του πεδίου δύο δυναμικές γραμμές τέμνονταν, τότε στο σημείο αυτό η ένταση του πεδίου θα είχε δυο διευθύνσεις, που είναι αδύνατο. Αυτό ισχύει τόσο στο ηλεκτρικό πεδίο, όσο και στο πεδίο βαρύτητας.

3-4 *Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παριστάνεται γραφικά με δυναμικές γραμμές. Αφού ο νόμος του Coulomb και ο νόμος του Νεύτωνα είναι της ίδιας μορφής, μπορεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας να παρασταθεί με δυναμικές γραμμές; Αν ναι σε τι διαφέρουν οι δυναμικές γραμμές των δυο πεδίων;*
Αφού ο νόμος του Coulomb και ο νόμος του Νεύτωνα είναι της ίδιας μορφής (νόμοι αντιστρόφου τετραγώνου) και το πεδίο βαρύτητας μπορεί να παρασταθεί με δυναμικές γραμμές. Επειδή οι δυνάμεις βαρύτητας είναι μόνο ελκτικές, η ένταση του πεδίου βαρύτητας κατευθύνεται προς τη μάζα που δημιουργεί το πεδίο. Επομένως, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου βαρύτητας ξεκινούν από το άπειρο και καταλήγουν στη μάζα. Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε στο ηλεκτρικό πεδίο, επειδή υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικού φορτίου που δημιουργούν το πεδίο. Έτσι, οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ξεκινούν: (α) από το άπειρο και καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο, (β) από ένα θετικό φορτίο και καταλήγουν στο άπειρο, (γ) από ένα θετικό φορτίο και καταλήγουν σ' ένα αρνητικό.

3-5 *Είναι δυνατό η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο του χώρου και η δύναμη που ενεργεί σ' ένα φορτίο στο σημείο αυτό να έχουν αντίθετη κατεύθυνση;*
Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το φορτίο είναι αρνητικό.

3-6 *Μια δέσμη ηλεκτρονίων περνάει από μια περιοχή του χώρου και αποκλίνει από την αρχική διεύθυνση της κίνησής της. Μπορείτε να βρείτε αν η απόκλιση οφείλεται σε ηλεκτρικό ή σε μαγνητικό πεδίο, κάνοντας μετρήσεις πάνω στη δέσμη;*
Αν η δέσμη των ηλεκτρονίων κινείται σε ηλεκτρικό πεδίο, η ταχύτητά τους μεταβάλλεται τόσο κατά μέτρο, όσο και κατά διεύθυνση. Αν, όμως, κινείται σε μαγνητικό πεδίο, η ταχύτητά τους μεταβάλλεται μόνο κατά διεύθυνση και όχι κατά μέτρο. Επομένως, με μέτρηση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων μπορεί να βρεθεί το είδος του πεδίου.

3-7 *Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μπορεί ν' αλλάξει το μέτρο της ταχύτητας ενός φορτισμένου σωματίου, που κινείται μέσα σ' αυτό;*

Επειδή η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του σωματίου, το έργο που παράγει είναι ίσο με μηδέν. Η κινητική ενέργεια, επομένως, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας του σωματίου παραμένουν σταθερά. Πράγματι, η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση αυτή έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

οπότε η προηγούμενη έκφραση δίνει:

$$\frac{dK}{dt} = q\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

επειδή το διάνυσμα $\vec{v}\times\vec{B}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$. Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σωματίου είναι σταθερή. Συνεπώς και το μέτρο της ταχύτητας του σωματίου παραμένει σταθερό.

3-8 *Ένα φορτισμένο σωμάτιο κινείται ευθύγραμμα σε μια περιοχή όπου δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι στην περιοχή αυτή του χώρου δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο;*

Στην περιοχή αυτή μπορεί να υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ένταση να έχει τη διεύθυνση της κίνησης του φορτισμένου σωματίου. Στην περίπτωση αυτή η μαγνητική δύναμη $\vec{F}_M = q\vec{v}\times\vec{B}$ είναι μηδενική, επειδή το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{B}$ είναι μηδέν, και το σωμάτιο δεν θα επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο.

3-9 *Μπορείτε να επινοήσετε μια μέθοδο με την οποία να αντιστρέφεται η διεύθυνση κίνησης των ηλεκτρονίων, χωρίς αυτά να μεταβάλλουν το μέτρο της ταχύτητάς τους;*

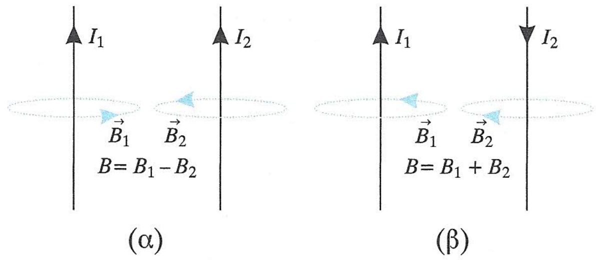
Αν τα ηλεκτρόνια εισέλθουν κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και διαγράψουν ημικυκλική τροχιά, τότε η ταχύτητα εξόδου τους από το πεδίο έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση.

3-10 *Η κοσμική ακτινοβολία αποτελείται από φορτισμένα σωμάτια. Στην επιφάνεια της Γης φτάνουν τέτοια σωμάτια, μόνον όταν έχουν πολύ μεγάλη ενέργεια. Οι λόγοι για τους οποίους γίνεται αυτό είναι δυο: πρώτο γιατί αυτά απορροφώνται από την ατμόσφαιρα και δεύτερο λόγω της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου της Γης. Εξηγήστε πώς επιδρά αυτό στην κίνησή τους. Πού νομίζετε ότι φτάνει περισσότερη ακτινοβολία, στους πόλους ή στον ισημερινό;*

Τα φορτισμένα σωμάτια της κοσμικής ακτινοβολίας μπαίνοντας στην περιοχή του γήινου μαγνητικού πεδίου υφίστανται την επίδραση της μαγνητικής δύναμης, η οποία τα εκτρέπει από την αρχική τους διεύθυνση. Όσα σωμάτια εισέρχονται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του γήινου μαγνητικού πεδίου (επίπεδο του μαγνητικού ισημερινού) διαγράφουν τμήμα κυκλικής τροχιάς. Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς τους είναι ανάλογη της ταχύτητάς τους ($r = mv/qB$). Όσα σωμάτια έχουν μεγάλη ταχύτητα θα διαγράψουν τροχιά μεγάλης ακτίνας και συνήθως προσπίπτουν στην επιφάνεια της Γης. Όσα σωμάτια έχουν μικρή ταχύτητα μπορεί να διαγράψουν ημικυκλική τροχιά μικρότερης ακτίνας και να εξέλθουν από το πεδίο, ή να απορροφηθούν στην ατμόσφαιρα της Γης. Στους πόλους φθάνει περισσότερη κοσμική ακτινοβολία, επειδή εκεί τα σωματίδια κινούνται σχεδόν παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου της Γης και δεν επηρεάζονται απ' αυτό.

3-11 *Θεωρήστε το μαγνητικό πεδίο σε σημεία μεταξύ δυο ρευματοφόρων ευθύγραμμων και παράλληλων συρμάτων μεγάλου μήκους. Πότε το μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρότερο; Όταν τα ρεύματα είναι ομόρροπα, ή όταν είναι αντίρροπα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

Όταν τα ρεύματα των παράλληλων συρμάτων είναι ομόρροπα (Σχ. 3-48α), οι εντάσεις των μαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από κάθε ρεύμα σε σημεία μεταξύ των συρμάτων έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και επομένως το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενέστερο. Όταν τα ρεύματα είναι αντίρροπα (Σχ. 3-48β), οι εντάσεις των δημιουργούμενων μαγνητικών πεδίων είναι ομόρροπες, οπότε το μαγνητικό πεδίο σε σημεία μεταξύ των συρμάτων είναι ισχυρότερο.



Σχήμα 3-48

3-12 *Θεωρήστε έναν κυκλικό ρευματοφόρο βρόχο λεπτού σύρματος. Σε ποια σημεία του επιπέδου του βρόχου το μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρότερο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*
Το πεδίο είναι ισχυρότερο σε σημεία εσωτερικά του βρόχου, διότι οι συνεισφορές από κάθε στοιχείο ρεύματος προστίθενται. Σε σημεία εξωτερικά του βρόχου οι συνεισφορές από κάθε στοιχείο ρεύματος έχουν αντίθετη κατεύθυνση και το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενέστερο.

3-13 *Ποια είναι η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης μεταξύ δυο παράλληλων ρευματοφόρων συρμάτων μεγάλου μήκους, όταν τα ρεύματα είναι της ίδιας φοράς και όταν είναι αντίθετης φοράς;*
Όταν τα ρεύματα είναι ομόρροπα, οι δυνάμεις μεταξύ των συρμάτων είναι ελκτικές, ενώ όταν είναι αντίρροπα είναι απωστικές. Η φορά της κάθε δύναμης καθορίζεται από τη φορά του ρεύματος του σύρματος στο οποίο ασκείται και τη φορά του μαγνητικού πεδίου στο ίδιο σύρμα, που οφείλεται στο ρεύμα του άλλου σύρματος

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

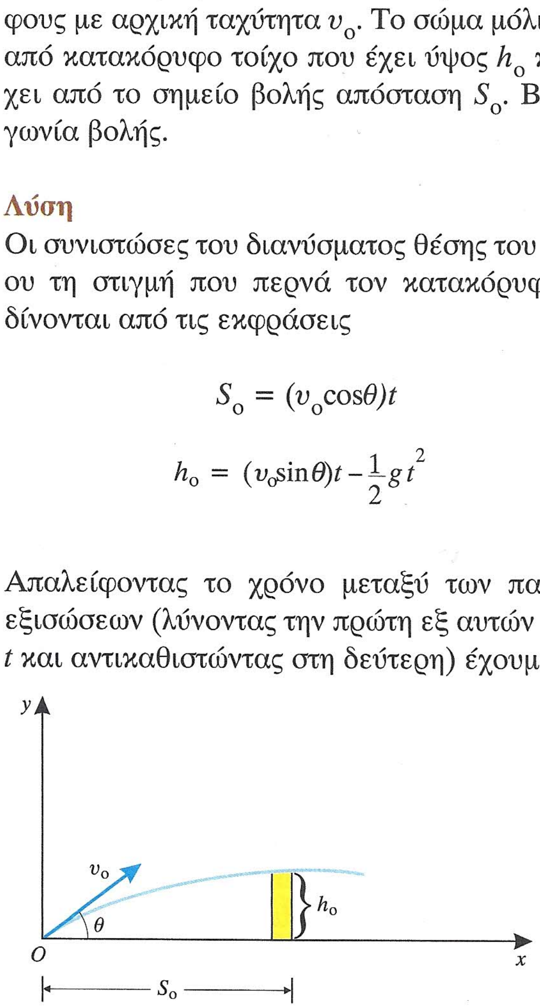
3-1 Ένα σώμα βάλλεται από το σημείο O του εδάφους με αρχική ταχύτητα υ_o. Το σώμα μόλις περνά από κατακόρυφο τοίχο που έχει ύψος h_o και απέχει από το σημείο βολής απόσταση S_o. Βρείτε τη γωνία βολής.

Λύση
Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης του σωματίου τη στιγμή που περνά τον κατακόρυφο τοίχο δίνονται από τις εκφράσεις

$$S_o = (\upsilon_o \cos\theta)t \qquad (1)$$

$$h_o = (\upsilon_o \sin\theta)t - \frac{1}{2}g t^2 \qquad (2)$$

Απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των παραπάνω εξισώσεων (λύνοντας την πρώτη εξ αυτών ως προς t και αντικαθιστώντας στη δεύτερη) έχουμε



Σχήμα 3-49

$$h_o = S_o \tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{S_o^2}{\upsilon_o^2 \cos^2\theta} \qquad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} \qquad (4)$$

και αντικαθιστώντας την στην Εξ. (3) έχουμε

$$gS_o^2\tan^2\theta - 2S_o\upsilon_o^2\tan\theta + gS_o^2 + 2h_o\upsilon_o^2 = 0 \quad (5)$$

Επιλύοντας κατά τα γνωστά τη δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση βρίσκουμε την $\tan\theta$ και επομένως τη γωνία βολής θ.

3-2 Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται σε ευθεία γραμμή υπό την επίδραση σταθερής δύναμης αντίστασης μέτρου F. Αν η αρχική του ταχύτητα είναι υ_o, βρείτε (α) το χρόνο μέχρις ότου σταματήσει και (β) την απόσταση που θα διανύσει.

Λύση
(α) Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του σωματίου κατά τον άξονα των x υπό την επίδραση της δύναμης αντίστασης F έχουμε διαδοχικά

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -F$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m}$$

$$dv = -\frac{F}{m}dt$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_{v_o}^{v} dv = -\frac{F}{m}\int_0^t dt$$

$$v - v_o = -\frac{F}{m}t$$

$$v = v_o - \frac{F}{m}t \qquad (2)$$

Η Εξ. (2) για $v = 0$ δίνει τη χρονική στιγμή που το σωμάτιο σταματά

$$t_{max} = \frac{mv_o}{F} \qquad (3)$$

(β) Η Εξ. (2) λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ταχύτητας δίνει

$$\frac{dx}{dt} = v_o - \frac{F}{m}t$$

$$dx = \left(v_o - \frac{F}{m}\right)dt$$

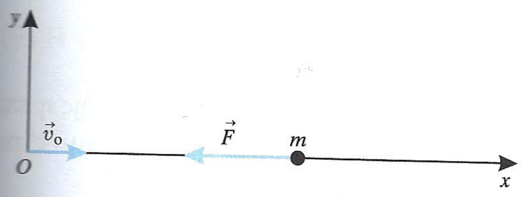
Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_0^x dx = v_o\int_0^t dt - \frac{F}{m}\int_0^t t\,dt$$

$$x = v_o t - \frac{F}{2m}t^2 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (4) την Εξ. (3) βρίσκουμε το διανυθέν διάστημα που το σωμάτιο σταματά

$$x_{max} = \frac{mv_o^2}{2F} \qquad (5)$$



Σχήμα 3-50

3-3 Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 kg επιταχύνεται από την ηρεμία. Κατά τη διάρκεια των πρώτων 10 s η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί σ' αυτό δίνεται από την εξίσωση $F = F_o - kt$, όπου $F_o = 1000$ N, $k = 50$ N/s και t ο χρόνος σε sec μετά την εκκίνηση. Βρείτε την ταχύτητα μετά το πέρας των 10 s και τη διανυθείσα απόσταση στο χρόνο αυτό.

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι

$$m\frac{dv}{dt} = F_o - kt \qquad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της κίνησης έχουμε

$$\int_{v_o}^{v} dv = \frac{F_o}{m}\int_0^t dt - \frac{k}{m}\int_0^t t dt$$

$$v = \frac{F_o}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην Εξ. (2) βρίσκουμε $v = 7{,}5$ m/s.

Ολοκληρώνοντας την Εξ. (2) βρίσκουμε για τη θέση

$$x = \frac{F_o t^2}{2m} - \frac{kt^3}{6m} \qquad (3)$$

και μετά την αντικατάσταση των δεδομένων $x = 41{,}7$ m.

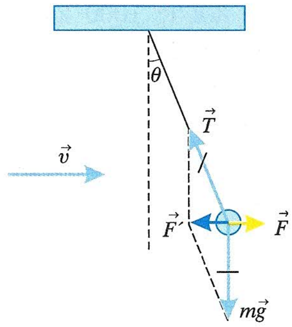
3-4 Μια σφαίρα ακτίνας $r = 10$ cm και πυκνότητας 11,34 g/cm^3 εξαρτάται από ένα σταθερό σημείο O με ένα σχοινί και βρίσκεται σ' ένα ρεύμα αέρα. Η ταχύτητα του αέρα είναι οριζόντια με τιμή 10 m/s, ενώ το σχοινί σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία $\theta = 1{,}68 \times 10^{-2}$ rad.

(α) Γνωρίζοντας ότι η αντίσταση του αέρα δίνεται από την έκφραση $F = k\,\pi\,r^2\,v^2$, υπολογίστε το συντελεστή k (στο SI). Δίνεται: $g = 9{,}8$ m/s^2.

(β) Η σφαίρα αυτή αφήνεται στον αέρα χωρίς αρχική ταχύτητα. Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει.

Λύση

(α) Η σφαίρα ισορροπεί και επομένως η συνισταμένη $\vec{F}'$ των $\vec{T}$ και $m\vec{g}$ είναι αντίθετη της δύναμης $\vec{F}$



Σχήμα 3-51

που ασκεί στη σφαίρα το ρεύμα του αέρα. Αυτό σημαίνει ότι τα μέτρα των $\vec{F}$ και $\vec{F'}$ είναι ίσα:

$$k\pi r^2 v^2 = mg\tan\theta \qquad (1)$$

Η μάζα της σφαίρας μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με την πυκνότητά της ρ και τον όγκο της V με τη γνωστή σχέση

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (2)$$

Μετά την αντικατάσταση της Εξ. (2) στην Εξ.(1) προκύπτει ότι ο συντελεστής k είναι

$$k = \frac{4\rho r g \tan\theta}{3 v_o^2} \qquad (3)$$

Μετά την αντικατάσταση των δεδομένων στην Εξ. (3) προκύπτει ότι ο συντελεστής k στο SI είναι $k = 2{,}49$ kg/m^3.

(β) Υποθέτουμε ότι η σφαίρα πέφτει ελεύθερα στον αέρα εν ηρεμία. Κατά την πτώση της η αντίσταση του αέρα αυξάνει μέχρις ότου εξισωθεί κατά μέτρο με το βάρος της, οπότε

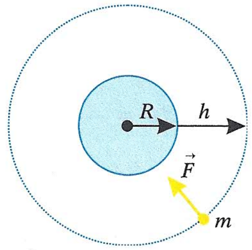
$$F = mg$$

$$k\pi r^2 v_o^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g$$

$$v = \sqrt{\frac{4\rho r g}{3k}} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην Εξ. (4) βρίσκουμε ότι η οριακή της ταχύτητα είναι $v = 77$ m/s.

3-5 Βρείτε την περίοδο ενός τηλεπικοινωνιακού δορυφόρου που κινείται κυκλικά σε απόσταση 35900 km πάνω από τη επιφάνεια της Γης.



Σχήμα 3-52

Δίνονται: Ακτίνα Γης: $R = 6{,}38 \times 10^6$ m, Μάζα Γης: $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης του δορυφόρου σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης και το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι

$$G \cdot \frac{mM}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

οπότε:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου δίνεται επίσης και από τη γνωστή έκφραση

$$v = \omega(R + h) \qquad (2)$$

όπου ω η γωνιακή του ταχύτητα, η οποία εκφραζόμενη σε συνάρτηση με την περίοδο είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των Εξ. (1) και (2) μετά και την αντικατάσταση της (3) προκύπτει

$$T = 2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην Εξ. (4) βρίσκουμε ότι η περίοδος του δορυφόρου είναι

$$T = 86490 \text{ s} \approx 24 \text{ h}$$

3-6 Σε ποια απόσταση από το κέντρο της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι η μισή της τιμής της στην επιφάνεια της Γης;

Λύση
Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση r από το κέντρο της μπορεί να εκφρασθεί ως εξής

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = g_o\frac{R^2}{r^2} \qquad (1)$$

όπου R η ακτίνα της γης και g_o η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Σε απόσταση r από το κέντρο της Γης η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι

$$g = \frac{g_o}{2} \qquad (2)$$

Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι η ζητούμενη απόσταση είναι

$$r = R\sqrt{2} \qquad (3)$$

3-7 Αγνοώντας την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο και την κίνηση του Ήλιου στο γαλαξιακό χώρο, υπολογίστε (α) τη γωνιακή ταχύτητα, (β) τη γραμμική ταχύτητα και (γ) την επιτάχυνση ενός σώματος που ηρεμεί στο έδαφος και στον ισημερινό.
Ακτίνα της Γης: $R = 6{,}38 \times 10^6$ m.

Λύση
(α) Η γωνιακή ταχύτητα ω ενός σωματίου στην επιφάνεια της Γης και στον ισημερινό μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με της περίοδο της Γης κατά την ιδιοπεριστροφή της, $T = 86400$ s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400\ \text{s}} = 7{,}26 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}$$

(β) Η γραμμική του ταχύτητα είναι

$$\upsilon = \omega R = (7{,}26 \times 10^{-5}\ \text{rad/s})(6{,}38 \times 10^6\ \text{m}) = 463\ \text{m/s}$$

(γ) Η επιτάχυνσή του είναι

$$a = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(463\ \text{m/s})^2}{6{,}38 \times 10^6\ \text{m}} = 3{,}4 \times 10^{-2}\ \text{m/s}^2$$

3-8 Ένας κυκλικός δρόμος χωρίς κλίση έχει ακτίνα καμπυλότητας 80 m. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ένα αυτοκίνητο αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,81;

Λύση
Αν F_s είναι η δύναμη στατικής τριβής μεταξύ αυτοκινήτου και δρόμου, η εξίσωση της κίνησής του είναι

$$ma = F_s \qquad (1)$$

Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι μόνον κεντρομόλος και δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$a = \frac{\upsilon^2}{r} \qquad (2)$$

όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.
Η δύναμη στατικής τριβής σε οριζόντιο δρόμο έχει μέγιστη τιμή

$$F_{s,\max} = \mu_s mg \qquad (3)$$

Από τις Εξ. (1), (2) και (3) προκύπτει

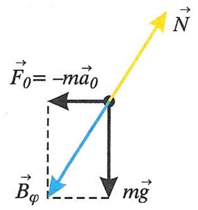
$$m\frac{\upsilon_{\max}^2}{r} = \mu_s mg$$

Επομένως, η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο είναι

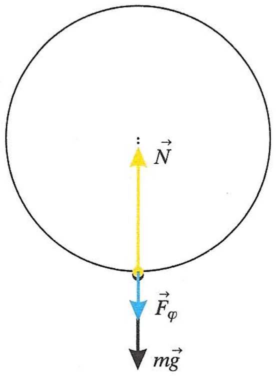
$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\mu_s g r} = \sqrt{(0{,}81)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(80\ \text{m})} = 25{,}2\ \text{m/s} = 91\ \text{km/h}$$

3-9 Το βάρος του πιλότου ενός αεροπλάνου θα πρέπει να παραμείνει μικρότερο από το τριπλάσιο του πραγματικού του. (α) Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπτή οριζόντια επιτάχυνση του αεροπλάνου; (β) Ποια είναι η ελάχιστη επιτρεπτή ακτίνα κατακόρυφης ανακύκλωσης, όταν η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 540 km/h; ($g = 10$ m/s^2).

Λύση
(α) Έστω $m\vec{g}$ το πραγματικό βάρος του πιλότου. Όταν το αεροπλάνο επιταχύνεται με οριζόντια επιτάχυνση $\vec{a}_o$, ο πιλότος αισθάνεται την αντίδραση $\vec{N}$ του καθίσματος, η οποία εξισορροπεί το φαινόμενο βάρος του $\vec{B}_\varphi$. Το φαινόμενο βάρος είναι η



Σχήμα 3-53α



Σχήμα 3-53β

συνισταμένη του πραγματικού του και της δύναμης αδράνειας $\vec{F}_o = -m\vec{a}_o$.

Η κατάσταση ισορροπίας του πιλότου ως προς το επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{N} + m\vec{g} + (-m\vec{a}_o) = 0 \quad (1)$$

Το μέτρο του φαινόμενου βάρους είναι

$$B_\varphi = \sqrt{(mg)^2 + (ma_o)^2} \quad (2)$$

Η απαίτηση για το φαινόμενο βάρος είναι

$$B_\varphi \leq 3mg \quad (3)$$

Από τις Εξ. (2) και (3) προκύπτει ότι η μέγιστη επιτρεπτή οριζόντια επιτάχυνση του αεροπλάνου είναι

$$a_{o,\max} = \sqrt{8}\, g \quad (4)$$

(β) Κατά την κατακόρυφη ανακύκλωση (Σχ. 3-53β) το φαινόμενο βάρος του πιλότου είναι μεγαλύτερο στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του. Στο σημείο αυτό το φαινόμενο βάρος του, που εξισορροπεί την αντίδραση $\vec{N}$ του καθίσματος είναι η συνισταμένη του πραγματικού του $m\,\vec{g}$ και της φυγόκεντρης δύναμης $\vec{F}_\varphi$, της οποίας το μέτρο δίνεται από την έκφραση

$$F_\varphi = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r} \quad (5)$$

Το μέτρο του φαινόμενου βάρους είναι

$$B_\varphi = F_\varphi + mg \quad (6)$$

Από τις Εξ. (3), (5) και (6) προκύπτει

$$m\frac{v^2}{r} + mg \leq 3mg \quad (7)$$

Επομένως, η ελάχιστη επιτρεπτή ακτίνα κατακόρυφης ανακύκλωσης είναι

$$r_{\min} = \frac{v^2}{2g} = \frac{[(540\ \text{km/h})(1000\ \text{m/km})/3600\ \text{s/h}]^2}{2(10\ \text{m/s}^2)} =$$

$$= 1125\ \text{m}$$

3-10 Λεπτότοιχος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R και μήκους L έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q. Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυτής της κατανομής φορτίου.

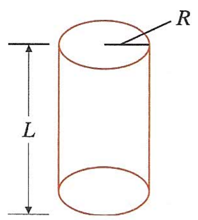
Λύση

Θεωρούμε μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας $r < R$. Το περικλειόμενο ολικό φορτίο είναι μηδέν. Ο νόμος του Gauss για την επιφάνεια αυτή δίνει

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Επομένως, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι μηδέν, ($\vec{E} = 0$).

Για $r > R$ θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους L και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss. Η ροή που διέρχεται από τις βάσεις της κυλινδρικής επιφάνειας είναι



Σχήμα 3-54

μηδέν, διότι τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{S}$ είναι κάθετα. Επομένως, ροή διέρχεται μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια, για την οποία τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{S}$ είναι συγγραμμικά.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E(2\pi rL) = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{Lr}$$

3-11 Ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία διανύει απόσταση 1 cm επιταχυνόμενο από ηλεκτρικό πεδίο έντασης 3×10^4 V/m. Ποια είναι η τελική του ταχύτητα;

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης του ηλεκτρονίου σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι

$$m\vec{a} = -e\vec{E} \tag{1}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{(1{,}6\times10^{-19}\ \text{C})(3\times10^{4}\ \text{V/m})}{9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg}} = 5{,}3\times10^{15}\ \text{m/s}^2$$

Η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι

$$\upsilon_\tau = \sqrt{2ax} = \sqrt{2(5{,}3\times10^{15}\ \text{m/s}^2)(10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 10^7\ \text{m/s}$$

3-12 Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o και εισέρχεται στο χώρο μεταξύ των παράλληλων πλακών ενός επίπεδου πυκνωτή πολύ κοντά στην κάτω θετικά φορτισμένη πλάκα υπό γωνία θ. Το μήκος των πλακών είναι L και η μεταξύ τους απόσταση d. (α) Πόση πρέπει να είναι η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών, ώστε το ηλεκτρόνιο να βγει από τις πλάκες χωρίς να χτυπήσει σε καμία από αυτές; (β) Για ποια γωνία θ_1 είναι αυτό δυνατό;

Λύση

(α) Για να βγει το ηλεκτρόνιο από τις πλάκες θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί

$$y_{max} \le d \tag{1}$$

και

$$x_{max} \ge L \tag{2}$$

Η εξίσωση της κίνησης του ηλεκτρονίου στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του εσωτερικού των πλακών

$$ma_y = -eE \tag{3}$$

Με μια ολοκλήρωση της εξίσωσης της κίνησης προκύπτει

$$\upsilon_y = \upsilon_o \sin\theta - \frac{eE}{m}t \tag{4}$$

Όταν το ηλεκτρόνιο φθάσει στο μέγιστο ύψος της παραβολικής του τροχιάς η συνιστώσα υ_y της ταχύτητάς του μηδενίζεται. Από την Εξ. (4) προκύπτει ότι ο χρόνος στο σημείο αυτό είναι

$$t_a = \frac{m\upsilon_o \sin\theta}{eE} \tag{5}$$

Με μια ακόμα ολοκλήρωση της Εξ. (4) προκύπτει

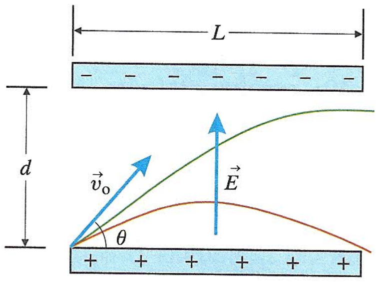
$$y = (\upsilon_o \sin\theta)\,t - \frac{eE}{2m}t^2 \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας το χρόνο t_a από την Εξ. (5) στην Εξ. (6) προκύπτει

$$y_{max} = \frac{m\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2eE} \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (7) στην Εξ. (1) προκύπτει

$$E \ge \frac{m\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2ed} \tag{8}$$



Σχήμα 3-55

Κατά τον οριζόντιο άξονα δεν ενεργεί δύναμη και επομένως η ταχύτητα είναι σταθερή. Η θέση του ηλεκτρονίου δίνεται από την εξίσωση

$$x = (v_o \cos\theta)t \tag{9}$$

Όταν το ηλεκτρόνιο φθάσει στο μέγιστο βεληνεκές θα είναι $y = 0$, οπότε ο ολικός χρόνος είναι

$$t = \frac{2mv_o \sin\theta}{eE} \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (10) στην Εξ. (9) έχουμε

$$x_{max} = \frac{2mv_o^2 \sin\theta \cos\theta}{eE} \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (11) στην Εξ. (2) έχουμε

$$E \le \frac{2mv_o^2 \sin\theta \cos\theta}{eL} \tag{12}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (8) και (12) έχουμε

$$\frac{mv_o^2 \sin^2\theta}{2ed} \le E \le \frac{2mv_o^2 \sin\theta \cos\theta}{eL} \tag{13}$$

(β) Από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\frac{mv_o^2 \sin^2\theta}{2ed} < \frac{2mv_o^2 \sin\theta \cos\theta}{eL}$$

$$\tan\theta < \frac{4d}{L}$$

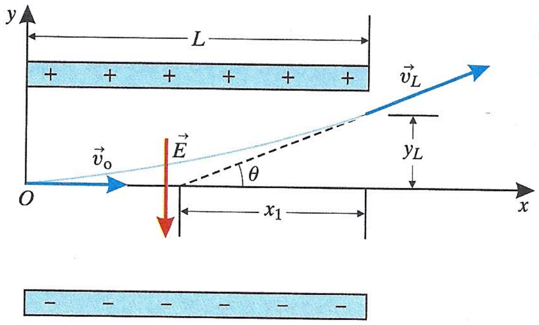
Επομένως για να ισχύουν οι περιορισμοί του μέρους (α) θα πρέπει η γωνία βολής να είναι

$$\theta_1 < \tan^{-1}\frac{4d}{L}$$

3-13 Δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται κάθετα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E. Το πεδίο σχηματίζεται ανάμεσα σε δυο μεταλλικές πλάκες μήκους L. Να αποδειχθεί ότι η προέκταση της ταχύτητας εξόδου της δέσμης τέμνει τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας (οριζόντιος άξονας) σε θέση $L/2$.

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης των ηλεκτρονίων είναι



Σχήμα 3-56

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \tag{1}$$

Η επίλυσή της δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις

$$v_x = v_o \tag{2}$$

$$v_y = \frac{eE}{m}t \tag{3}$$

$$x = v_o t \tag{4}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \tag{5}$$

Για $x = L$ έχουμε

$$L = v_o t \tag{6}$$

και

$$y_L = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{L^2}{v_o^2} \tag{7}$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε

$$x_1 = \frac{y_L}{\tan\theta} \tag{8}$$

και

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$= \frac{eEL/m\,v_o}{v_o} \tag{9}$$

Η Εξ. (8) μετά την αντικατάσταση των (7) και (9) δίνει

$$x_1 = \frac{L}{2}$$

3-14 Ο R. A. Millikan επινόησε μια συσκευή μέσα στην οποία μπορεί να κινείται μια φορτισμένη σταγόνα λαδιού ακτίνας r. Το πείραμα συνίσταται στη μέτρηση της οριακής ταχύτητας υ_o χωρίς ηλεκτρικό πεδίο και της οριακής ταχύτητας υ_1με ηλεκτρικό πεδίο έντασης E. Η δύναμη εσωτερικής τριβής κατά την κίνηση της σταγόνας στον αέρα δίνεται από την εξίσωση Stokes $F = 6\pi r\eta\upsilon$, όπου η ο συντελεστής εσωτερικής τριβής (ιξώδες) του αέρα. Βρείτε το φορτίο q της σταγόνας.
Δίνονται: Ένταση ηλεκτρικού πεδίου $E = 30000$ V/m, ιξώδες του αέρα $\eta = 18{,}2 \times 10^{-6}$ Ns/m^2, πυκνότητα λαδιού $\varrho = 875$ kg/m^3, ένταση πεδίου βαρύτητας $g = 9{,}8$ m/s^2, $\upsilon_o = 10^{-4}$ m/s, $\upsilon_1 = 2 \times 10^{-4}$ m/s. Από πόσα ηλεκτρόνια αποτελείται η σταγόνα;

Λύση
(α) Απουσία ηλεκτρικού πεδίου η εξίσωση της κίνησης της σταγόνας είναι

$$mg - 6\pi r\eta\upsilon_o = 0 \qquad (1)$$

Η μάζα m της σταγόνας μπορεί να εκφρασθεί ως

$$m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (2)$$

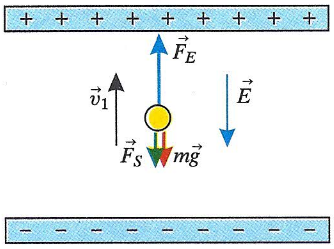
Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει

$$r = \frac{9\eta\upsilon_o^2}{2\rho g} \qquad (3)$$

Όταν μεταξύ των πλακών υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο (Σχ. 3-57) η εξίσωση της κίνησης σε αρνητικά φορτισμένη σταγόνα είναι

$$qE - mg - 6\pi r\eta\upsilon_1 = 0 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1) και (3) στην (4) προκύπτει



Σχήμα 3-57

$$q = \frac{6\pi}{E}\sqrt{\frac{9\eta^3\upsilon_o}{2\rho g}}\,(\upsilon_o + \upsilon_1) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην Εξ. (5) προκύπτει

$$q = 33{,}5 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Η σταγόνα αποτελείται από

$$N = \frac{q}{e} = 21$$

επί πλέον ηλεκτρόνια.

3-15 Μια σταγόνα λαδιού στη συσκευή του πειράματος του Millikan φέρει ολικό ηλεκτρικό φορτίο πενταπλάσιο του ηλεκτρονικού φορτίου και έχει ακτίνα 10^{-6} m. Ποια είναι η οριακή της ταχύτητα, όταν κινείται στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών με ένταση μέτρου 5×10^4 V/m και κατεύθυνσης προς τα κάτω;
Δίνονται: Πυκνότητα λαδιού 800 kg/m^3, πυκνότητα αέρα 1,29 kg/m^3, ιξώδες αέρα $1{,}8 \times 10^{-5}$ Ns/m^2.

Λύση
Η εξίσωση της κίνησης της σταγόνας είναι

$$F_E - F_g - F_s = 0$$

ή

$$qE - \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \sigma)g - 6\pi r\eta\upsilon_1 = 0$$

όπου ϱ η πυκνότητα του λαδιού και σ η πυκνότητα του αέρα.
Η οριακή ταχύτητα της σταγόνας είναι

$$\upsilon_1 = \frac{qE - \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \sigma)g}{6\pi r\eta}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε

$$\upsilon_1 = 2 \times 10^{-3}\ \text{m/s}$$

3-16 Υποθέστε ότι στα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου ενεργεί μια επιβραδυντική δύναμη, η

οποία είναι ανάλογη με την ταχύτητά τους.
α) Βρείτε τη μεταβολή της ταχύτητας των ηλεκτρονίων με το χρόνο, όταν στον μεταλλικό αγωγό εφαρμόζεται ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο.
β) Ποια είναι η οριακή ταχύτητα των ηλεκτρονίων;

Λύση

(α) Η εξίσωση της κίνησης των ηλεκτρονίων είναι

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_E + \vec{F}_R \qquad (1)$$

όπου $\vec{F}_E$ η ηλεκτρική δύναμη και $\vec{F}_R$ η επιβραδυντική δύναμη.
Η επιβραδυντική δύναμη μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\vec{F}_R = -b\vec{v} \qquad (2)$$

όπου b μια σταθερά.
Επειδή η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι μονοδιάστατη, η εξίσωση της κίνησης μπορεί να γραφεί ως

$$m\frac{dv}{dt} = eE - bv \qquad (3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι

$$\frac{dv}{dt} = \frac{eE - bv}{m} \qquad (4)$$

(β) Τα ηλεκτρόνια αποκτούν οριακή ταχύτητα, όταν μηδενισθεί η επιτάχυνσή τους. Στην περίπτωση αυτή από την Εξ. (4) έχουμε

$$v_o = \frac{eE}{b} \qquad (5)$$

3-17 Ρεύμα εντάσεως 5 A διαρρέει ένα χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1 mm. Πόση είναι η ταχύτητα μετακίνησης των ηλεκτρονίων;
Δίνονται: Ατομικό βάρος χαλκού: $M = 64$, πυκνότητα χαλκού: $\rho = 9$ g/cm^3, αριθμός Avogadro: $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$ άτομα ανά γραμμοάτομο.

Λύση

Ο όγκος του χαλκού που καταλαμβάνεται από N_A άτομα είναι

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{64 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{9 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 7{,}1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Για ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο ανά άτομο, ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου είναι

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{6{,}023 \times 10^{23}}{7{,}1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 8{,}47 \times 10^{28}\ \text{ηλεκτρόνια/m}^3$$

Η διατομή του σύρματος είναι

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (10^{-3}\ \text{m})^2}{4} = 7{,}8 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$$

Το ρεύμα των ηλεκτρονίων δίνεται από την έκφραση

$$I_n = q_n n A v_n$$

Από την έκφραση αυτή προκύπτει ότι η ταχύτητα μετακίνησης των ηλεκτρονίων είναι

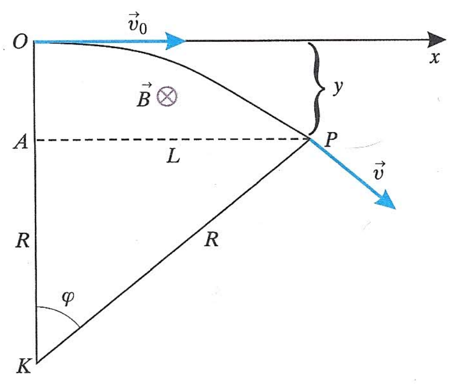
$$v_n = \frac{I_n}{q_n n A} =$$

$$= \frac{5\ \text{A}}{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(8{,}47 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(7{,}8 \times 10^{-7}\ \text{m}^2)} =$$

$$= 4{,}7 \times 10^{-4}\ \text{m/s}$$

Μ' αυτή την ταχύτητα μετακίνησης τα ηλεκτρόνια χρειάζονται 35 min για να διανύσουν απόσταση 1 m.

3-18 Τα ηλεκτρόνια μιας δέσμης στο δέκτη της τηλεόρασης εκπέμπονται με οριζόντια ταχύτητα 6×10^7 m/s κατά τη διεύθυνση της οριζόντιας συνιστώσας του γήινου μαγνητικού πεδίου. Η κατακόρυφη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου της Γης είναι $B = 6 \times 10^{-5}$ T. Πόσο εκτρέπεται η δέσμη όταν κινείται κατά $L = 30$ cm στη διεύθυνση του άξονα του σωλήνα του δέκτη;



Σχήμα 3-58

Λύση

Τα ηλεκτρόνια διαγράφουν κατά μήκος του σωλήνα του δέκτη τμήμα κυκλικής τροχιάς ακτίνας

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})(6\times10^{7}\ \text{m/s})}{(1{,}6\times10^{-19}\ \text{C})(6\times10^{-5}\ \text{T})} = 5{,}7\ \text{m} \quad (1)$$

Η εκτροπή της δέσμης από την αρχική της διεύθυνση είναι

$$y = OK - KA = R - \sqrt{R^2 - L^2} = R\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{R}\right)^2}\right] \quad (2)$$

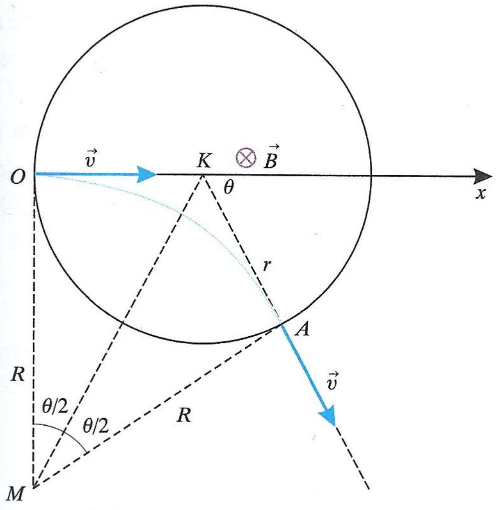
Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του διωνύμου

$$\sqrt{1-b^2} \approx 1 - \frac{b^2}{2} \quad (3)$$

η Εξ. (2) γίνεται

$$y \approx R\left[1 - \left(1 - \frac{L^2}{2R^2}\right)\right] \approx \frac{L^2}{2R} = \frac{(0{,}3\ \text{m})^2}{2(5{,}7\ \text{m})} = 7{,}9\times10^{-3}\ \text{m}$$

3-19 Ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα $v = 10^7$ m/s κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς κυλινδρικού μαγνητικού πεδίου ακτίνας $r = 10$ cm, κατευθυνόμενο προς το κέντρο του, (Σχ. 3-59). Ποια πρέπει να είναι η ένταση B του μαγνητικού πεδίου, ώστε η εκτροπή του ηλεκτρονίου από την αρχική του τροχιά να είναι $\theta = 60^o$;
Δίνονται: Μάζα ηλεκτρονίου $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, φορτίο ηλεκτρονίου $|e| = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.



Σχήμα 3-59

Λύση

Τα ηλεκτρόνια διαγράφουν στο χώρο του πεδίου τμήμα κυκλικής τροχιάς ακτίνας

$$R = \frac{mv}{eB} \quad (1)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε

$$R = \frac{r}{\tan\theta/2} \quad (2)$$

Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι το μέτρο της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου είναι

$$B = \frac{mv\tan\theta/2}{er} = \frac{(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})(10^{7}\ \text{m/s})\tan30^\circ}{1{,}6\times10^{-19}\ \text{C})(0{,}1\ \text{m})} =$$

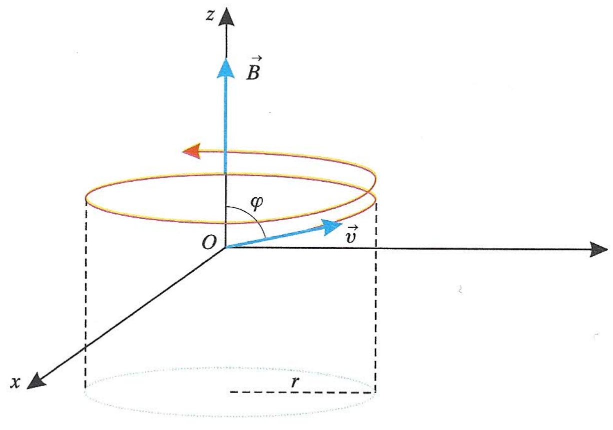
$$= 3{,}3 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και προς τα μέσα.

3-20 Ηλεκτρόνιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 8 \times 10^{-4}$ T με ταχύτητα $v = 8 \times 10^6$ m/s, που σχηματίζει γωνία 80° με την ένταση του πεδίου. Να δείξετε ότι η τροχιά είναι έλικα με άξονα τη διεύθυνση του B. Να βρείτε την περίοδο T, το βήμα β και την ακτίνα r της έλικας.

Λύση

Το ηλεκτρόνιο εισερχόμενο στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ με ταχύτητα $\vec{v}$ υπό γωνία φ (Σχ. 3-60) υφίσταται τη δράση της μαγνητικής δύναμης. Η εξίσωση της κίνησης είναι



Σχήμα 3-60

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v}\times\vec{B} \tag{1}$$

Η επίλυση της εξίσωσης της κίνησης δίνει για τις συνιστώσες της ταχύτητας τις λύσεις

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \sin\omega t \\ v_y &= v_1 \cos\omega t \\ v_z &= v \cos\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

όπου

$$v_1 = v \sin\varphi \tag{3}$$

και

$$\omega = \frac{eB}{m} \tag{4}$$

Επομένως το ηλεκτρόνιο μετατοπίζεται κατά τον άξονα των z με σταθερή ταχύτητα, ενώ η προβολή της τροχιάς του στο επίπεδο xy είναι κύκλος. Η πλήρης τροχιά του ηλεκτρονίου είναι έλικα.

Η περίοδος της κίνησης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})}{(9{,}1\times10^{-19}\ \text{C})(8\times10^{-4}\ \text{T})} =$$

Το βήμα της έλικας είναι

$$\beta = Tv_z = T\cos\varphi = (4{,}47 \times 10^{-8}\ \text{s})(8 \times 10^{6}\ \text{m/s})\cos 80^\circ = $$
$$= 6{,}2 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

Η ακτίνα της έλικας είναι

$$r = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv\sin\varphi}{eB} = \frac{(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})(8\times10^{6}\ \text{m/s})\sin 80^\circ}{(1{,}6\times10^{-19}\ \text{C})(8\times10^{-4}\ \text{T})} =$$
$$= 5{,}6 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

3-21 Ένα σύρμα μήκους ℓ φέρει ρεύμα I. Το σύρμα κείται κατά μήκος του άξονα των x, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-61. Στα σημεία κατά μήκος αυτού του άξονα το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο μια y συνιστώσα, η οποία μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: $B_y = A/x$, όπου A είναι μια θετική σταθερά. Προσδιορίστε (α) την κατεύθυνση και (β) το μέτρο της μαγνητικής δύναμης στο σύρμα.

Λύση

(α) Η μαγνητική δύναμη στο σύρμα δίνεται από την έκφραση

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

και επομένως είναι κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων $d\vec{l}$ και $\vec{B}$. Επειδή τα διανύσματα αυτά έχουν την κατεύθυνση των αξόνων x και y αντιστοίχως, η κατεύθυνση της δύναμης θα είναι ο άξονας των z.

(β) Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης, αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην προηγούμενη έκφραση, είναι:

$$F = \int_{\ell}^{2\ell} I\,dx\frac{A}{x} = IA\int_{\ell}^{2\ell}\frac{dx}{x} = IA\ln 2$$

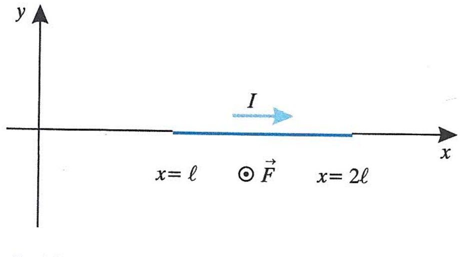
3-22 Ένας μακρύς, κοίλος αγώγιμος κύλινδρος φέρει ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο, του οποίου η διατομή παριστάνεται στο Σχ. 3-62. Προσδιορίστε την ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' ένα σημείο που απέχει απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου, όταν:

(α) $r \le b$, (β) $b \le r \le a$ και (γ) $r \ge a$.

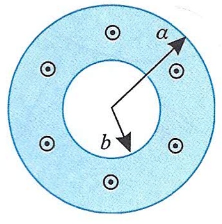
Λύση

Για τον προσδιορισμό της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα εφαρμόσουμε το νόμο του Ampère, που εκφράζεται με την εξίσωση $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I$ και στις τρεις περιπτώσεις.

(α) Στο εσωτερικό του κοίλου κυλίνδρου, $r \le b$, το ρεύμα που διαπερνά μια επιφάνεια που οριοθετείται από μια κλειστή διαδρομή είναι μηδενικό.



Σχήμα 3-61



Σχήμα 3-62

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampère, έχουμε:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0, \text{ οπότε } \vec{B} = 0$$

β) Για $b \le r \le a$, το ρεύμα που διαπερνά μια επιφάνεια που οριοθετείται από μια κλειστή διαδρομή ακτίνας r είναι:

$$I_1 = \frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(a^2-b^2)}I$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampère στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$B(2\pi r) = \mu_o \frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(a^2-b^2)}I$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{r^2-b^2}{r}$$

Για $r = b$, η προηγούμενη έκφραση δίνει $B = 0$, όπως και στην πρώτη περίπτωση.
Για $r = a$, η προηγούμενη έκφραση δίνει:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

(γ) Για $r \ge a$, το ρεύμα που διαπερνά μια επιφάνεια που οριοθετείται από μια κλειστή διαδρομή ακτίνας r είναι ίσο με I, οπότε ο νόμος του Ampère δίνει:

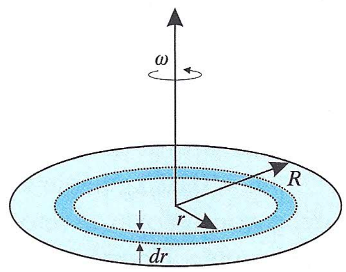
$$B(2\pi r) = \mu_o I$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

3-23 Προσδιορίστε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ενός μονωτικού δίσκου ακτίνας R, φορτισμένου ομοιόμορφα με φορτίο Q και περιστρεφόμενου με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονά του.

Λύση

Θεωρούμε ένα λεπτό δακτύλιο ακτίνας r και



Σχήμα 3-63

πάχους dr. Επειδή έχουμε ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, ο λόγος των φορτίων δακτυλίου – δίσκου θα ισούται με το λόγο των αντίστοιχων επιφανειών:

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2}$$

Το φορτίο dq σε χρόνο μιας περιόδου, $T = 2\pi/\omega$, εκτελεί μια πλήρη περιστροφή, δημιουργώντας ένα στοιχειώδες ρεύμα:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{Q2r\,dr}{R^2 2\pi/\omega} = \frac{Q\omega r\,dr}{\pi R^2} \qquad (1)$$

Το στοιχειώδες αυτό ρεύμα δημιουργεί στο κέντρο του δίσκου ένα στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο που δίνεται από το νόμο των Biot – Savart:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dI\,dl}{r^2}$$

Για να προσδιορίσουμε το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου ολοκληρώνουμε την προηγούμενη έκφραση από $r = 0$ έως R:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dI\,dl}{r^2} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (1) στην Εξ. (2) και θεωρώντας ότι $\int dl = l = 2\pi r$, προκύπτει:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Q\omega r\,dr\,2\pi r}{\pi R^2 r^2} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{Q\omega}{R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{Q\omega}{R}$$