Το μέτρο του διανύσματος $\vec{C}$ εξ ορισμού ισούται με:

$$C = AB \sin\theta \qquad (1.93)$$

Η διεύθυνση του $\vec{C}$ είναι κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$, ενώ η φορά του καθορίζεται από τον *κανόνα του δεξιού χεριού*. Σύμφωνα μ' αυτόν τον κανόνα, τοποθετούμε νοερά την παλάμη του δεξιού χεριού έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{A}$ να στραφεί προς το διάνυσμα $\vec{B}$ κατά τη μικρότερη γωνιακή διαδρομή. Ο τεντωμένος αντίχειρας τότε δείχνει την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{C}$, (Σχ. 1-17).

Οι βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου είναι:

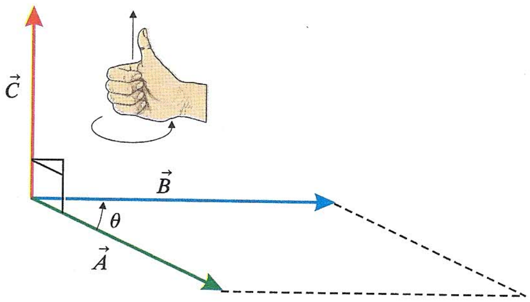
1. $$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (1.94)$$

2. $$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad (1.95)$$

3. Αν $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ και τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι μη μηδενικά, τότε τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι παράλληλα, ή αντιπαράλληλα.

4. Αν $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ και $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$, τότε

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1.96)$$



Σχήμα 1-17 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

όπου $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z, αντιστοίχως.

Ειδικά για τα μοναδιαία διανύσματα θα έχουμε σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \qquad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \end{aligned} \qquad (1.98)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1-13 Ροπή δύναμης

Η ροπή $\vec{\tau}$ μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.99)$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$.

Ποια είναι η ροπή της δύναμης $\vec{F} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ σε N, που εφαρμόζεται σ' ένα σημείο με συντεταγμένες (2, 1, 3) σε m ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων;.

Λύση

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ξεκινά από το σημείο με συντεταγμένες (0, 0, 0) και καταλήγει στο σημείο με συντεταγμένες (2, 1, 3). Επομένως:

$$\vec{r} = (2-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (3-0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

Σύμφωνα με την Εξ. (1.96) η ζητούμενη ροπή είναι:

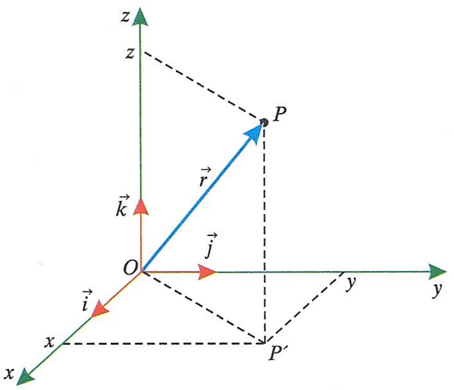
$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-3)\vec{i} - (4-9)\vec{j} + (2-3)\vec{k}$$

$$= (-\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})\ \text{Nm}$$

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1-1 *Πότε ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται βαθμωτό; Αναφέρετε παραδείγματα.*

Ένα φυσικό μέγεθος, που καθορίζεται μόνο από το μέτρο του, καλείται *βαθμωτό*. Παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών είναι: η μάζα ενός σώματος, η χρονική διάρκεια ενός γεγονότος, η θερμοκρασία ενός σώματος, κ.λπ.



Σχήμα 1-18 Διάνυσμα θέσης σε τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

1–2 *Πότε ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται διανυσματικό; Αναφέρετε παραδείγματα.*

Ένα φυσικό μέγεθος, που καθορίζεται εκτός από το μέτρο του και από την κατεύθυνσή του και που υπακούει σε ειδικούς μαθηματικούς κανόνες, καλείται *διανυσματικό*. Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών είναι: η μετατόπιση ενός σωματίου, η ταχύτητα ενός σώματος, η δύναμη που ενεργεί σ' ένα σώμα, η ένταση ενός πεδίου, κ.λπ.

1–3 *Πώς εκφράζεται το διάνυσμα θέσης ενός σωματίου σε συνάρτηση με τις συνιστώσες του σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων;*

Το *διάνυσμα θέσης* $\vec{r}$ ενός σωματιδίου *P* ως προς την αρχή *O* ενός τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων *Oxyz* εκφράζεται με την εξίσωση:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

όπου *x, y, z* οι συνιστώσες του διανύσματος στους άξονες *Ox, Oy, Oz* και $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων, αντιστοίχως. Το διάνυσμα θέσης παριστάνεται στο Σχ. 1-18.

1-4 *Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;*

Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων ορίζεται με την εξίσωση

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

όπου θ η μεταξύ τους γωνία.

1-5 *Πώς εκφράζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε συνάρτηση με τις συνιστώσες τους σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων;*

Αν $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ και $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$, τότε

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

1-6 *Πώς εκφράζεται το μέτρο ενός διανύσματος σε συνάρτηση με τις συνιστώσες του σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων;*

Το μέτρο *A* ενός διανύσματος $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ εκφράζεται ως

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1-7 *Πώς ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;*

Το *εξωτερικό γινόμενο* δυο διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ με κατεύθυνση που καθορίζεται από των κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο

$$C = AB\sin\theta$$

όπου θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

1-8 *Πώς εκφράζεται το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων σε συνάρτηση με τις συνιστώσες τους σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων;*

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων με βάση τις συνιστώσες τους δίνεται από την έκφραση

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1-1 Προσδιορίστε το διάνυσμα με αρχή το σημείο (2, -1, 2) και πέρας το σημείο (3, 1, -3).

Λύση

Το διάνυσμα θέσης του πρώτου σημείου είναι

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \qquad (1)$$

Το διάνυσμα θέσης του δεύτερου σημείου είναι

$$\vec{r}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \qquad (2)$$

Το ζητούμενο διάνυσμα είναι

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\\ &= (3-2)\vec{i} + (1-(-1))\vec{j} + (-3-2)\vec{k}\\ &= \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}\end{aligned}$$

1-2 Προσδιορίστε το μέτρο του διανύσματος $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Λύση

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{A}$ είναι

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

1-3 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ και $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Υπολογίστε το $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$.

Λύση

Το διάνυσμα $(\vec{A}+\vec{B})$ είναι

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) + (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\\ &= (2+4)\vec{i} + (-3+2)\vec{j} - (5-1)\vec{k}\\ &= 6\vec{i} + -\vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

Το διάνυσμα $\vec{A}-\vec{B}$ είναι

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B} &= (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) - (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\\ &= (2-4)\vec{i} + (-3-2)\vec{j} + (5+1)\vec{k}\\ &= -2\vec{i} + -5\vec{j} + 6\vec{k}\end{aligned}$$

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο των παραπάνω διανυσμάτων εφαρμόζουμε την αλγεβρική έκφραση του αθροίσματος των γινομένων των συνιστωσών (Ερώτηση 1.5)

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = 6(-2) + (-1)(-5) + 4\cdot 6 =$$
$$= -12 + 5 + 24 = 17$$

1-4 Προσδιορίστε το λ έτσι ώστε τα διανύσματα $3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ και $2\vec{i} - \lambda\vec{j} + 4\vec{k}$ να είναι κάθετα.

Λύση

Για να είναι κάθετα τα δοθέντα διανύσματα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν, ήτοι

$$3\cdot 2 + (-1)(-\lambda) + 2\cdot 4 = 0$$

$$6 + \lambda + 8 = 0$$
$$\lambda = -14$$

1-5 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Υπολογίστε το

$$|(\vec{A} + 2\vec{B})\times(2\vec{A} - \vec{B})|$$

Λύση

Το διάνυσμα $(\vec{A} + 2\vec{B})$ είναι

$$\begin{aligned}(\vec{A} + 2\vec{B}) &= (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) + 2(4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\\ &= 11\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

Το διάνυσμα $(2\vec{A} - \vec{B})$ είναι

$$\begin{aligned}(2\vec{A} - \vec{B}) &= 2(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) - (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\\ &= 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

Το εξωτερικό γινόμενο των παραπάνω διανυσμάτων είναι

$$(\vec{A} + 2\vec{B})\times(2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 11 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$= (9-4)\vec{i} - (33+2)\vec{j} + (-44-6)\vec{k}$$
$$= 5\vec{i} - 35\vec{j} - 50\vec{k}$$

Το μέτρο του ευρεθέντος εξωτερικού γινομένου είναι

$$|(\vec{A} + 2\vec{B})\times(2\vec{A} - \vec{B})| = \sqrt{5^2 + (-35)^2 + (-50)^2} = \sqrt{3750}$$

1-6 Αν $\vec{A} = t^2\,\vec{i} + \cos 2t\vec{k}$ και $\vec{B} = \vec{i} - \sin t\vec{j} + \cos 2t\vec{k}$, βρείτε την παράγωγο του $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

Λύση

Το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων είναι:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = t^2 + \cos 2t\cos t$$

Η παράγωγος του $\vec{A}\cdot\vec{B}$ είναι:

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dx} = 2t - 2\sin 2t\cos t - \cos 2t\sin t$$

1-7 Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ είναι μεταξύ τους κάθετα. Υπολογίστε το εξωτερικό τους γινόμενο.

Λύση

Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 4 - 2 - 2 = 0$$

Το εξωτερικό τους γινόμενο είναι

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-1)\vec{i} - (-8-1)\vec{j} + (4+2)\vec{k} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

1-8 Δίνονται δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$ στο επίπεδο x-y με μέτρα 8 και 40 αντιστοίχως, που σχηματίζουν γωνίες 30° και 60° με τον άξονα των x και με αρχή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Βρείτε το μέτρο και τη διεύθυνση του αθροίσματός τους.

Λύση

Η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι $\theta = 30°$. Το μέτρο του αθροίσματος $\vec{C}$ των δυο διανυσμάτων είναι

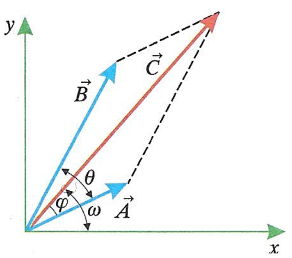
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$
$$= \sqrt{8^2 + 40^2 + 2\cdot 8\cdot 40\cos 30°} = 47$$

Έστω φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{C}$ με το διάνυσμα $\vec{A}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ημιτόνων στο τρίγωνο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{C}$ έχουμε

$$\frac{C}{\sin 150°} = \frac{B}{\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = 0{,}425$$
$$\varphi = 25°$$

Η γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{C}$ με τον άξονα των x είναι



Σχήμα 1-19

$$\omega = 30° + \varphi = 55°$$

1-9 Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι 4 και 9, αντιστοίχως. Το μέτρο της συνισταμένης $\vec{C}$ είναι 10. Ποια είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$;

Λύση

Έστω θ η γωνία μεταξύ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Το μέτρο του αθροίσματος δίνεται από τη σχέση

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

από την οποία προκύπτει

$$\cos\theta = \frac{C^2 - A^2 - B^2}{2AB}$$
$$= \frac{10^2 - 4^2 - 9^2}{2\cdot 4\cdot 9} = 0{,}042$$

και $\theta = 87{,}6°$.

1-10 Θεωρήστε ένα διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή O ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και πέρας το σημείο με συντεταγμένες $x = 6$ και $y = 2$. Βρείτε την κάθετη απόσταση h προς αυτό από ένα σημείο P με συντεταγμένες $x = 1$ και $y = 8$.

Λύση

Έστω $\vec{A}$ το πρώτο διάνυσμα, $\vec{B}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου P και θ η μεταξύ τους γωνία. Το διάνυσμα $\vec{A}$ εκφραζόμενο συναρτήσει των συνιστωσών του γράφεται

$$\vec{A} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

Το μέτρο του $\vec{A}$ είναι

$$A = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 6{,}3$$

Ομοίως, το διάνυσμα $\vec{B}$ γράφεται

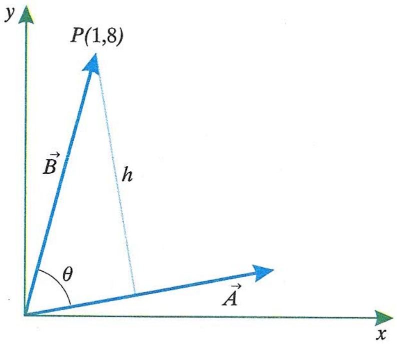
$$\vec{B} = \vec{i} + 8\vec{j}$$

και το μέτρο του είναι

$$B = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$$

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ εκφραζόμενο συναρτήσει των συνιστωσών τους δίνει

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 6\cdot 1 + 2\cdot 8 = 22$$



Σχήμα 1-20

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και το αποτέλεσμά του έχουμε

$$22 = 6{,}3 \cdot 8{,}06 \cos\theta$$
$$\cos\theta = 0{,}43$$
$$\theta = 64{,}3^\circ$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$h = B\sin\theta$$
$$h = 8{,}06 \cdot 0{,}902$$
$$h = 7{,}27$$

ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1-11 Δυο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ έχουν μέτρα 4 και 5 αντιστοίχως και η μεταξύ τους γωνία είναι 60°. Προσδιορίστε το μέτρο του αθροίσματός τους $\vec{C}$ και της διαφοράς τους $\vec{D}$.

Απάντηση: $C = \sqrt{61}$, $D = \sqrt{21}$.

1-12 Δίνονται τα διανύσματα:
$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{B} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{C} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Προσδιορίστε τα γινόμενα: (α) $\vec{A} \times \vec{B}$, (β), $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$, και (γ) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.

Απάντηση: (α) $6\vec{k}$, (β) 0, (γ) $-18\vec{i} - 12\vec{j}$

1-13 Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{A} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ και $\vec{B} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$
Προσδιορίστε: (α) το μέτρο του εξωτερικού τους γινομένου και (β) τη μεταξύ τους γωνία θ.

Απάντηση: (α) 36, (β) $\theta = 45^\circ$.
34 90°

1-14 Δίνεται το διάνυσμα: $\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Προσδιορίστε: (α) το μέτρο του και (β) τις γωνίες που σχηματίζει με κάθε άξονα του συστήματος συντεταγμένων.

Απάντηση: (α) 6,2 , (β) $71{,}1^\circ$ $119{,}1^\circ$ $35{,}8^\circ$