$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.7}$$

Η μονάδα της επιτάχυνσης στο SI είναι m/s^2.

Με τη βοήθεια των συντεταγμένων στο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων *Oxyz*, η επιτάχυνση γράφεται:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.8}$$

ενώ το μέτρο της είναι:

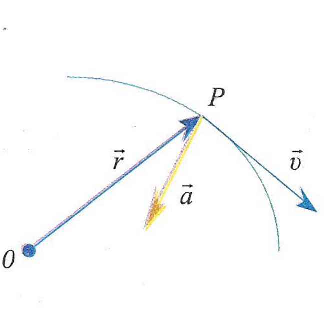
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{2.9}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2-1. Κυκλική κίνηση

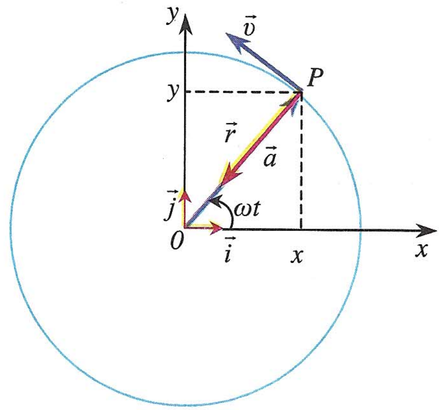
Ένα σωμάτιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Να βρεθούν οι εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης αυτού.

Λύση

Θα μελετήσουμε την κίνηση σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-3. Ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς με κατεύθυνση προς τα πάνω. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, που διαγράφει το διάνυσμα θέσης του σωματίου, εκφράζεται από τη ***γωνιακή ταχύτητα*** ω, που ορίζεται από τη σχέση



Σχήμα 2-2. *Επιτάχυνση ενός σωματίου.*



Σχήμα 2-3. *Ομαλή κυκλική κίνηση.*

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \tag{2.10}$$

και μετριέται σε rad/s.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή, η κίνηση ονομάζεται ***ομαλή κυκλική***. Στην περίπτωση αυτή η διαγραφόμενη γωνία θ είναι: $\theta = \omega t$. Χαρακτηριστικά της κίνησης αυτής είναι η ***περίοδος περιστροφής*** T και η ***συχνότητα*** f. Τα μεγέθη αυτά συνδέονται μεταξύ τους και με τη γωνιακή ταχύτητα με τη σχέση

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2.11}$$

Η συχνότητα f εκφράζεται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο, (c/s), ή Hz.

Γράφουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ του σωματίου σε κάθε χρονική στιγμή t, συναρτήσει των συνιστωσών του στους άξονες Ox και Oy.

$$\vec{r}(t) = r\cos\omega t\,\vec{i} + r\sin\omega t\,\vec{j} \tag{2.12}$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας, σύμφωνα με τον ορισμό της, είναι

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\omega r\sin\omega t\,\vec{i}+\omega r\cos\omega t\,\vec{j} \tag{2.13}$$

ενώ το μέτρο της είναι

$$\upsilon=\sqrt{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}}=\omega r\sqrt{\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}=\omega r \tag{2.14}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης, σύμφωνα με τον ορισμό της, είναι

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-\omega^2 r\cos\omega t\,\vec{i}-\omega^2 r\sin\omega t\,\vec{j}=-\omega^2\vec{r} \tag{2.15}$$

ενώ το μέτρο της είναι

$$a=\left|-\omega^2 r\right|=\omega^2 r. \tag{2.16}$$

Επειδή, $\upsilon=\omega r$, μπορούμε να γράψουμε το μέτρο της a με τη μορφή:

$$\boxed{a=\frac{\upsilon^2}{r}.} \tag{2.17}$$

Η επιτάχυνση αυτή είναι η ***κεντρομόλος επιτάχυνση***.

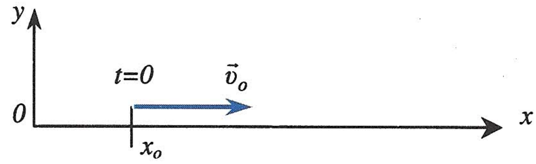
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2-2. Μονοδιάστατη κίνηση.

Ένα σωμάτιο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση a. Να προσδιοριστούν η ταχύτητα και η θέση του συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς με άξονα την τροχιά του σωματίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-4. Έστω ότι για $t=0$ η αρχική θέση είναι x_o και η αρχική ταχύτητα υ_o.

Αφού ξέρουμε την επιτάχυνση, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα από την Εξ.(2.7), από την οποία προκύπτει



Σχήμα 2-4. Μονοδιάστατη κίνηση

$$dv = a\,dt.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\,dt$$

και επειδή η επιτάχυνση a είναι σταθερή,

$$v = v_o + at \qquad (2\text{-}18)$$

Από τη γνωστή τώρα ταχύτητα προκύπτει η συνάρτηση της θέσης ως εξής:
Από την εξίσωση της ταχύτητας

$$v = \frac{dx}{dt}$$

προκύπτει

$$dx = v\,dt$$

Με αντικατάσταση της ταχύτητας v από την Εξ.(2.18) και ολοκλήρωση της τελευταίας έκφρασης προκύπτει:

$$\int_{x_o}^{x} dx = \int_{0}^{t} v_o dt + \int_{0}^{t} at\,dt$$

και επειδή υ_o και a σταθερές,

$$x = x_o + \upsilon_o t + \frac{1}{2} a t^2 . \tag{2.19}$$

Απαλείφοντας το χρόνο t ανάμεσα στις Εξ.(2.18) και (2.19) προκύπτει

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2a(x - x_o)} \tag{2.20}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2-1. Η θέση ενός κινητού ορίζεται από τις εξισώσεις:
$x = 2t$
$y = -2t^2+1$
$z = t^2-t$.
Προσδιορίστε:
α) την ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$ συναρτήσει του χρόνου (διάνυσμα και μέτρο),
β) την επιτάχυνσή του $\vec{a}$ συναρτήσει του χρόνου (διάνυσμα και μέτρο).

2-2. Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του a και η ταχύτητά του συνδέονται με τη σχέση $a = k\sqrt{\upsilon}$, όπου k μια θετική σταθερά. Να εκφραστούν συναρτήσει του χρόνου τα: υ, a και x, όπου x η θέση του κινητού. Για $t = 0$ είναι: $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$.

2-3. Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός χρόνος, που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο, για να διανύσει μια μικρή απόσταση d, αν ξεκινήσει από το ένα άκρο της και σταματήσει στο άλλο. Δεχόμαστε ότι η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση είναι a_1 και η μέγιστη δυνατή επιβράδυνση a_2.

2-4. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Περιγράψτε την κίνηση της προβολής του στον οριζόντιο άξονα, που περνάει από το κέντρο του κύκλου. Αποδώστε γραφικά τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου.