ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι σημαντικότερες προτάσεις και ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και των πολυωνύμων θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την ενότητα. Σκοπός είναι να υπενθυμίσουμε βασικά στοιχεία και τεχνικές των μαθηματικών που είναι απαραίτητες στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σύνολα πολύ γνωστά που χρησιμοποιούμε είναι τα

$\mathbb{N}$, σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Z}$, σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Q}$, σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} | m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$, δηλαδή, οι ακέραιοι μαζί με τους κλασματικούς,

$\mathbb{R}$, σύνολο των πραγματικών αριθμών, συνολικά όλοι οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί

$\mathbb{C}$, σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 1

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι το $\mathbb{C}=\{a+bi:\ a,b\in\mathbb{R}\}$, όπου $i^2=-1$

Για έναν μιγαδικό αριθμό z γράφουμε $z=\alpha+i\beta=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z$, όπου με $\operatorname{Re}z$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z και με $\operatorname{Im}z$ συμβολίζουμε το φανταστικό μέρος του αριθμού.

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε από τον παραπάνω ορισμό τις δυνάμεις του i οι οποίες είναι :

$i=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=1$,
$i^5=i$, $i^6=i^2=-1$, $i^7=i^3=-i$, $i^8=i^4=1$, ……

Ορισμός 2 (ισότητα μιγαδικών)

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, όπου $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ***ίσοι****, $a+bi=c+di$, αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$,*

δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $a+bi$ με $a,b\in\mathbb{R}$.

Ορισμός 3 (άθροισμα, γινόμενο μιγαδικών)

Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ με $z=a+bi$ και $w=c+di$. Ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο μιγαδικών αριθμών ως εξής.

- *Πρόσθεση* $z+w=(a+c)+(b+d)i$.
- *Πολλαπλασιασμός* $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Παράδειγμα

Αν $z=\sqrt{2}-5i$ και $w=1+3i$, τότε

$z+w=(\sqrt{2}+1)+(-5+3)i=(\sqrt{2}+1)+(-2)i$,

$zw=(\sqrt{2}+5\cdot 3)+(3\sqrt{2}-5)i=(\sqrt{2}+15)+(3\sqrt{2}-5)i$.

Στα επόμενα όταν γράφουμε $z=a+bi$ θα εννοούμε ότι $a,b\in\mathbb{R}$.

Ορισμός 4 (αντίστροφος μιγαδικού)

Έστω $z=a+bi$ ένας **μη** μηδενικός μιγαδικός αριθμός, με $a,b\in\mathbb{R}$ και βέβαια κάποιος από αυτούς είναι διαφορετικός από το μηδέν. Οπότε $a^2+b^2\neq 0$. *Ο μιγαδικός αριθμός* $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$ *ονομάζεται ο* ***αντίστροφος*** *του z και συμβολίζεται με* z^{-1}.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αποδεικνύεται ότι

$$zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του $z=3-4i$ είναι ο $z^{-1}=\frac{3}{3^2+4^2}+\frac{4}{3^2+4^2}i=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$,

ο δε αντίστροφος του $z=-\frac{1}{2}+4i$ είναι ο $z^{-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4^2}+\frac{-4}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4^2}i=-\frac{2}{65}-\frac{16}{65}i$.

Ορισμός 5 (μέτρο μιγαδικού, συζυγής μιγαδικός)

- *Το* ***μέτρο*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο πραγματικός αριθμός* $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- *Ο* ***συζυγής*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο* $\overline{z}=a-bi$.

Παράδειγμα

Το μέτρο του $z=-3-\frac{1}{2}i$ *είναι* $|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$ *και ο συζυγής του είναι*

$\bar{z}=-3+\frac{1}{2}i$.

Σχόλια : Παρατήρησε (εφαρμόζοντας τους ορισμούς και κάνοντας πράξεις) ότι για ένα μιγαδικό αριθμό $z=a+bi$ ισχύει

$$|z|^2=z\bar{z}=a^2+b^2.$$

Ορισμός 6 (τριγωνομετρική μορφή)

Έστω $z=a+bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $\rho=|z|$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός θ τέτοιος ώστε

$$0\le\theta<2\pi,\quad \cos\theta=\frac{a}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{b}{\rho}.$$

*Ο θ ονομάζεται το **όρισμα** του z. Η παράσταση* $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ *ονομάζεται η **τριγωνομετρική μορφή** του z.*

Παράδειγμα

- Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z=\sqrt{3}+i$, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$$

- Για το όρισμα έχουμε $\cos\theta=\frac{a}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{b}{\rho}=\frac{1}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}$ και άρα $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Επειδή πρέπει $0\le\theta<2\pi$ έχουμε $\theta=\frac{\pi}{6}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ορισμός 7 (βαθμός, διαίρεση)

Με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και με $\mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

- *Έστω* $f(x) = f_n x^n + \ldots + f_1 x + f_0 \in \mathbb{F}[x]$. *Αν* $f_n \neq 0$, *θα λέμε ότι ο* ***βαθμός*** *του πολυωνύμου f(x) είναι n. Ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου ορίζεται να είναι το* $-\infty$.
- *Έστω* $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Θα λέμε ότι το πολυώνυμο f(x)* ***διαιρεί*** *το g(x) επί του* $\mathbb{F}$ *αν υπάρχει h(x)* $\in$*F[x] τέτοιο ώστε g(x) = f(x)h(x).*

Παράδειγμα

- ✓ Το $x^2 - 1$ διαιρεί το $x^3 + x^2 - x - 1$ επί του $\mathbb{R}$ αφού $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x+1)$.
- ✓ Το $x - 1$ διαιρεί το $x^4 - 1$ επί του $\mathbb{R}$ αφού $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.
- ✓ Το $x^2 + 1$ δεν διαιρεί το $x^3 + x^2 - x - 1$ επί του $\mathbb{R}$ αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2+1)h(x), \quad h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Αντικαθιστώντας το x με το i θα είχαμε $i^3 + i^2 - i - 1 = 0 \Rightarrow -2 - 2i = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Ορισμός 8 (ρίζα πολυωνύμου)

Ένας μιγαδικός αριθμός α λέγεται ***ρίζα*** *του πολυωνύμου* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, *αν f(a) = 0.*

Παράδειγμα

- ✓ Κάνοντας πράξεις διαπιστώνουμε ότι $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$, άρα ο πραγματικός αριθμός 2 είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $x^2 - 5x + 6$.
- ✓ Με πράξεις διαπιστώνουμε ότι $(i\sqrt{3})^2 + 3 = 0$, άρα ο μιγαδικός αριθμός $i\sqrt{3}$ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $x^2 + 3$.
- ✓ Τέλος, κάνοντας πράξεις διαπιστώνουμε ότι $(-1 + i\sqrt{3})^3 = 8$. Άρα ο μιγαδικός αριθμός $-1 + i\sqrt{3}$ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - 8$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρόταση 1 (μέτρο μιγαδικού αριθμού)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z| = |-z|$

2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

3. *αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Παράδειγμα

Για να βρούμε το μέτρο του $\dfrac{1}{2+3i} + \dfrac{4-5i}{1-i}$, έχουμε

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{4-5i}{1-i} = \frac{1-i+(4-5i)(2+3i)}{(2+3i)(1-i)} = \frac{24+i}{(2+3i)(1-i)}$$

και επομένως με βάση την 3 ιδιότητα

$$\left|\frac{1}{2+3i} + \frac{4-5i}{1-i}\right| = \left|\frac{24+i}{(2+3i)(1-i)}\right| = \frac{|24+i|}{|(2+3i)||(1-i)|} =$$

$$\frac{\sqrt{24^2+1^2}}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{\frac{577}{26}}.$$

Πρόταση 2 (συζυγείς μιγαδικοί)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z|^2 = z\overline{z}$

2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

4. *αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Πρόταση 3 (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού)

Έστω $z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ *και* $z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$. *Τότε έχουμε*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

και αν $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right).$$

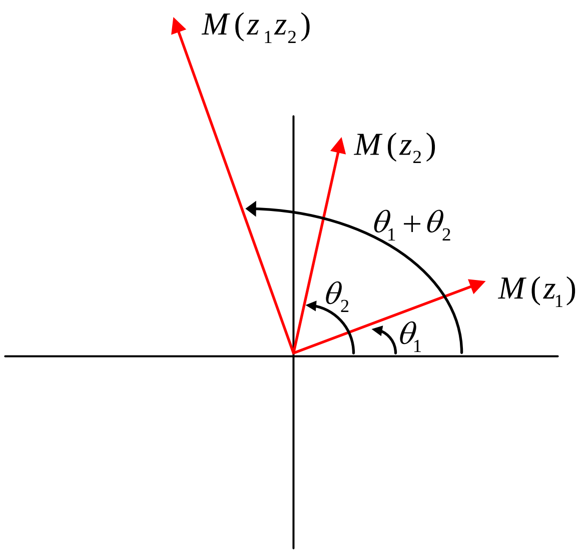
Θεώρημα 4 (του De Moivre)

Έστω $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \neq 0$. *Τότε για κάθε ακέραιο αριθμό* n *έχουμε*

$$z^n = \rho^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)\right).$$

Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών

Από την Πρόταση 3 βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία: στο γινόμενο $z_1 z_2$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα που το μέτρο του είναι το γινόμενο $|z_1||z_2|$ και σχηματίζει γωνία με τον άξονα των x ίση με $\theta_1+\theta_2$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Θεώρημα 5 (n – στές ρίζες μιγαδικού)

Έστω $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$. *Η εξίσωση* $z^n = a$ *έχει* n *διακεκριμένες λύσεις που δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

όπου ρ *είναι το μέτρο του* a *και* θ *είναι το όρισμά του.*

Παράδειγμα

Για να λύσουμε την εξίσωση $z^3 = i$ έχουμε να υπολογίσουμε πρώτα την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού i, και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο του Θεωρήματος 5.

- Σύμφωνα με τον Ορισμό 6, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho = |i| = |0+i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1,$$

και κατόπιν το όρισμά του, για το οποίο έχουμε $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{0}{1} = 0,\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$.

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2},\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$, άρα $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή πρέπει $0 \le \theta < 2\pi$ έχουμε $\theta = \frac{\pi}{2}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Οπότε από τον τύπο του προηγουμένου θεωρήματος έχουμε

$$z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k = 0,1,2.$$

Άρα οι λύσεις είναι

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$$

Παρατήρηση :. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου που είναι κορυφές του κανονικού n - γώνου.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πρόταση 6 (βαθμός πολυωνύμου)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Τότε* $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$, *όπου* $\deg f(x)$ *είναι ο βαθμός του f(x).*

Πρόταση 7 (αλγόριθμος διαίρεσης)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ *με* $g(x) \neq 0$. *Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα* $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ *τέτοια ώστε* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *και* $\deg r(x) < g(x)$.

Πρόταση 8 (ρίζες πολυωνύμων)

Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *και* $a \in \mathbb{F}$. *Ισχύουν τα εξής*

1. *Το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $f(x)$ *με το* $x - a$ *είναι το* $f(a)$.
2. *Το a είναι ρίζα του* $f(x)$ *αν και μόνο αν το* $x - a$ *διαιρεί το* $f(x)$ *επί του* $\mathbb{F}$.
3. *Αν* $f(x) \neq 0$, *τότε το πλήθος των ριζών του είναι το πολύ* $\deg f(x)$.

Παράδειγμα

Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ με το $x - 2$ είναι 3. Τότε από το 1 της προηγούμενης Πρότασης έχουμε $f(2) = 3$, δηλαδή

$$2^3 + a2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow a = -2.$$

Θεώρημα 9 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)

Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με συντελεστές από το $\mathbb{C}$ *έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα.*

Θεώρημα 10 (πλήθος ριζών πολυωνύμου)

Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού με* $\deg f(x) = n$. *Τότε υπάρχουν* $c, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ *τέτοια ώστε* $f(x) = c(x - a_1)...(x - a_n)$.

Πρόταση 11

Αν το $z \in \mathbb{C}$ *είναι ρίζα ενός πολυωνύμου που έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής* $\overline{z}$ *είναι ρίζα του πολυωνύμου αυτού.*

Για συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής των προηγούμενων αποτελεσμάτων παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 5, 6 ,7.

Θεώρημα 12 (σχέσεις του Vieta)

Αν το $f(x)=f_n x^n+\ldots+f_1 x+f_0$ *είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και* $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ *είναι οι ρίζες του, τότε*

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} a_{i_1}\ldots a_{i_k}=(-1)^k\frac{f_{n-k}}{f_n}.$$

Παράδειγμα

Αν a_1,a_2,a_3 είναι οι ρίζες του x^3-4x^2-3x-1, τότε

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3=4\\&a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-3\\&a_1a_2a_3=1\end{aligned}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω $z=1+i\sqrt{3},\quad w=\sqrt{3}-i$

i) *Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του* $\dfrac{z}{w}$.

ii) *Να βρεθούν οι ακέραιοι k τέτοιοι ώστε* $\dfrac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Λύση

1. Παρατηρούμε ότι $iw=z$ και άρα $\dfrac{z}{w}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, που είναι η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή.

Σημείωση. Η προηγούμενη λύση βασίστηκε στην ‘τυχερή’ παρατήρηση ότι $iw=z$. Ένας πιο γενικός και συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης της άσκησης είναι η μετατροπή των μιγαδικών αριθμών σε τριγωνομετρική μορφή και εφαρμογή των ιδιοτήτων σύμφωνα με την Πρόταση 3. Έτσι έχουμε το μέτρο των μιγαδικών είναι

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2,\quad |w| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1\right)^2} = 2$. Επίσης για τα ορίσματα έχουμε :

- για τον $z = 1 + i\sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3},\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$, άρα $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή πρέπει $0 \le \theta < 2\pi$ έχουμε $\theta = \frac{\pi}{3}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
- για τον $z = \sqrt{3} - i$, $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-1}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι

$$\cos\theta = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6},\ \sin\theta = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6},$$

άρα $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή πρέπει $0 \le \theta < 2\pi$ έχουμε $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $w = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Από την Πρόταση 3 συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{z}{w} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2} = i$$

Η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $\frac{z}{w} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, όπως υπολογίσαμε στο παράδειγμα του Θεωρήματος 5.

2. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4 και την Πρόταση 3 παίρνουμε

$$\frac{z}{w^k}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)^k}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2^k\left(\cos\frac{11k\pi}{6}+i\sin\frac{11k\pi}{6}\right)}$$

$$=2^{1-k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}k\right)\right).$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}k\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}k\neq n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2-11k\neq 6n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

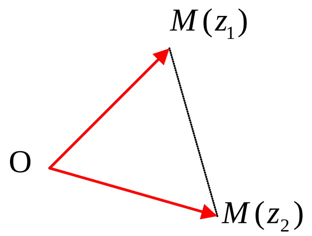
$$\Leftrightarrow k\neq\frac{2-6n}{11},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση 2

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$. Δείξτε ότι $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}=0$.

Λύση

Ας δούμε μια λύση που είναι γεωμετρική. Από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από την αρχή των αξόνων O και τα πέρατα $M(z_1),M(z_2)$ των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς z_1,z_2 είναι ισόπλευρο.



Άρα η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM(z_1)},\overrightarrow{OM(z_2)}$ είναι $\pi/3$. Έστω $w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών συμπεραίνουμε ότι έχουμε $z_1=wz_2$ (ή $z_2=wz_1$). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$z_1^{\,3}+z_2^{\,3}=w^3z_2^{\,3}+z_2^{\,3}=(w^3+1)z_2^{\,3}=\left(\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3+1\right)z_2^{\,3}$$

$$=\left(\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)+1\right)z_2^{\,3}=(-1+1)z_2^{\,3}=0.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, και με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}=0$.

Άσκηση 3

Έστω $z=\cos\frac{2\pi}{2004}+i\sin\frac{2\pi}{2004}$.

i) *Αποδείξτε ότι* $1+z^4+z^8+\ldots+z^{2000}=0$.

ii) *Αποδείξτε ότι για κάθε* $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}$, *έχουμε* $\left|z^{n_1}+\ldots+z^{n_k}\right|\le k$.

Λύση

i) Θέτοντας $w=z^4$ παρατηρούμε ότι

$$w^{501}=\left(z^4\right)^{501}=z^{2004}=\left(\cos\frac{2\pi}{2004}+i\sin\frac{2\pi}{2004}\right)^{2004}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 4 θεώρημα του De Moivre. Άρα έχουμε

$$1+z^4+z^8+\ldots+z^{2000}=1+w+w^2+\ldots+w^{500}=\frac{w^{501}-1}{w-1}=\frac{1-1}{w-1}=0.$$

<u>*Σημείωση.*</u> Έχουμε $w-1\neq 0$.

ii) Επειδή $|z|=1$, έχουμε $\left|z^n\right|=1$ για κάθε ακέραιο n. Άρα από την τριγωνική

ανισότητα παίρνουμε $\left|z^{n_1}+\ldots+z^{n_k}\right|\le\left|z^{n_1}\right|+\ldots+\left|z^{n_k}\right|=1+\ldots+1=k$.

Άσκηση 4

Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε $4z\overline{z}+z^2+\overline{z}^2+4\,\mathrm{Im}(z)=58$.

Λύση

Θέτοντας $z=x+yi$ έχουμε

$$z\overline{z}=x^2+y^2,\quad z^2=x^2-y^2+2xyi,\quad \overline{z}^2=x^2-y^2-2xyi,\quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

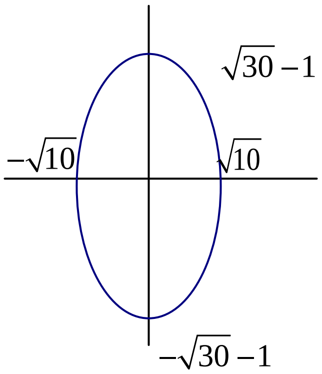
Αντικαθιστώντας στην αρχική ισότητα βρίσκουμε $6x^2+2y^2+4y=58$.

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$6x^2+2y^2+4y=58\Leftrightarrow 6x^2+2(y^2+2y+1-1)=58\Leftrightarrow$$

$$6x^2+2(y+1)^2=60\Leftrightarrow\frac{x^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{30}=1.$$

Συνεπώς το ζητούμενο σύνολο είναι μια έλλειψη όπως φαίνεται στο σχήμα.



Άσκηση 5

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)=x^4-6x^3-2x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$, *αν γνωρίζουμε ότι μια ρίζα του είναι ο μιγαδικός αριθμός* $2+i$.

Λύση

Αφού η $2+i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου σύμφωνα με την Πρόταση 11 συμπεραίνουμε πως και η $2-i$ είναι ρίζα του $f(x)$. Από το Θεώρημα 10 προκύπτει ότι το πολυώνυμο $(x-(2+i))(x-(2-i))=x^2-4x+5$ διαιρεί το $f(x)$ επί του $\mathbb{C}$. Πραγματοποιώντας τη διαίρεση αυτή κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι

$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15)+(a-50)x+75+b$. Επειδή το υπόλοιπο οφείλει να είναι μηδέν, έχουμε

$$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15).$$

Για να βρούμε τις άλλες ρίζες του $f(x)$ λύνουμε την εξίσωση $x^2-2x-15=0$ και βρίσκουμε $x_{1,2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-15)}}{2}=\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$.

Τελικά οι ρίζες είναι οι $2+i,\quad 2-i,\quad 5,-3$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι το x^2-2x-1 *διαιρεί το* $f(x)=x^3+ax+b\in\mathbb{R}[x]$, *αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του f(x) με το* $x-1$ *(αντίστοιχα,* $x-2$*) είναι –6 (αντίστοιχα –4).*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 8 και την υπόθεση έχουμε τις σχέσεις

για $x=1$ προκύπτει $f(1)=1+a+b=-6$,

και για $x=2$ προκύπτει $f(2)=8+2a+b=-4$.

Λύνοντας το προηγούμενο σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε $a=-5, b=-2$, οπότε $f(x)=x^3-5x-2$. Κάνοντας τη διαίρεση του x^3-5x-2 με το x^2-2x-1 βρίσκουμε μηδενικό υπόλοιπο, $x^3-5x-2=\left(x^2-2x-1\right)\left(x+2\right)$.

Άσκηση 7

Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ενός πολυωνύμου $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ με τα $x-2$ και $x-3$ είναι αντίστοιχα 4,5, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$.

Λύση

Από τον Αλγόριθμο Διαίρεσης έχουμε $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)+r(x)$, συνεπώς το ζητούμενο υπόλοιπο $r(x)$ έχει βαθμό το πολύ 1. Άρα είναι της μορφής $r(x)=ax+b$. Από την υπόθεση και την Πρόταση 8 έχουμε $f(2)=4,\quad f(3)=5$. Θέτοντας διαδοχικά $x=2$ και $x=3$ στη σχέση $f(x)=(x-2)(x-3)+ax+b$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}2a+b&=4\\3a+b&=5\end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση $a=1,\quad b=2$, άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $x+2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση $z^6+z^4+z^2+1=0$ και να γίνει η γραφική παράσταση των λύσεων.

Υπόδειξη $z^6+z^4+z^2+1=\left(z^2\right)^3+\left(z^2\right)^2+z^2+1=\dfrac{\left(z^2\right)^4-1}{z^2-1}=\dfrac{z^8-1}{z^2-1}$ Εφαρμόστε το Θεώρημα 12.

Απάντηση Οι λύσεις είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, i, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις 6 κορυφές του κανονικού οκταγώνου που δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα των *x*.

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η δύναμη $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006}$.

Υπόδειξη $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006}=\ldots$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του de Moivre. **Απάντηση** *i*.

Άσκηση 3

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ με το $x-1$ και $x-2$ είναι αντίστοιχα 2,3, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-1)(x-2)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7. **Απάντηση** $x+1$

Άσκηση 4

Δίνεται ότι μια ρίζα του πολυωνύμου $f(x)=x^3+ax^2+43x-65$ είναι η $x=5$. Να βρεθούν οι άλλες ρίζες.

Υπόδειξη Από τη σχέση $f(5)=0$ παίρνουμε $a=-11$. Στη συνέχεια διαιρούμε το $f(x)$ με το $x-5$. **Απάντηση** $3\pm 2i$.

Άσκηση 5

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)=x^4-8x^3+39x^2-62x+a$ αν γνωρίζουμε ότι μια από αυτές είναι η $3-4i$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. Απάντηση $1\pm i, 3\pm 4i$.