# Αντίστροφα συστήματα

- Το αντίστροφο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση h(n) είναι ένα σύστημα με κρουστική απόκριση g(n), τέτοια ώστε h(n)*g(n)=δ(n)
- Ισοδύναμα:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)G\left(e^{j\omega}\right)=1\Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Το αντίστροφο σύστημα ενδέχεται:
  – Να μην υπάρχει, πχ στην περίπτωση του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου
  – Να μην είναι αιτιατό, πχ:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=1-2e^{-j\omega}\Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}\Rightarrow g\left(n\right)=-2^{-n}u\left(-n-1\right)$$

# Παράδειγμα αντίστροφου συστήματος

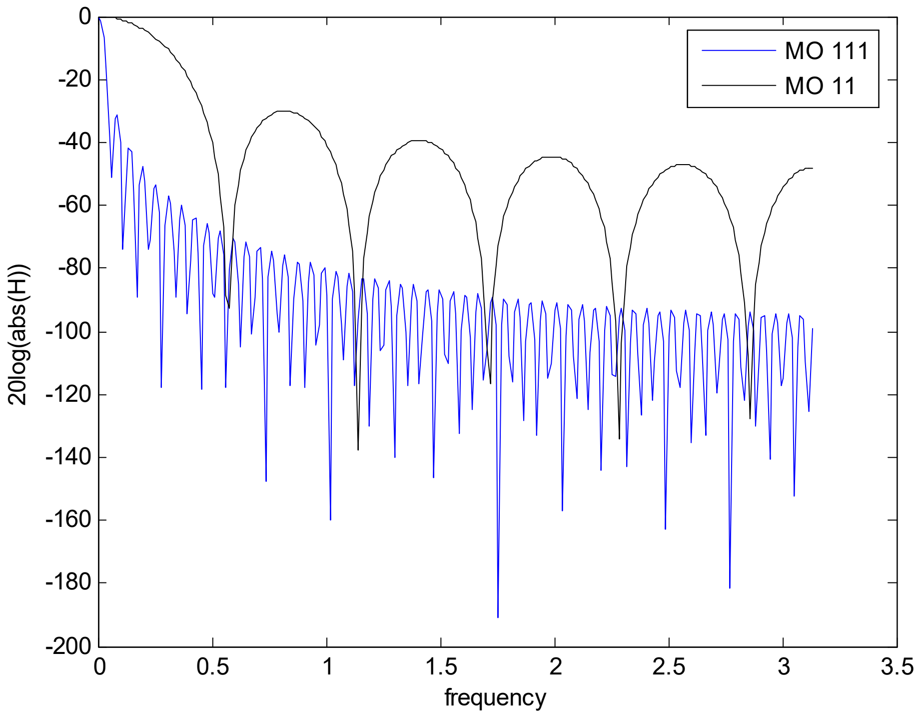
- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση ενός LTI που είναι αντίστροφο του

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

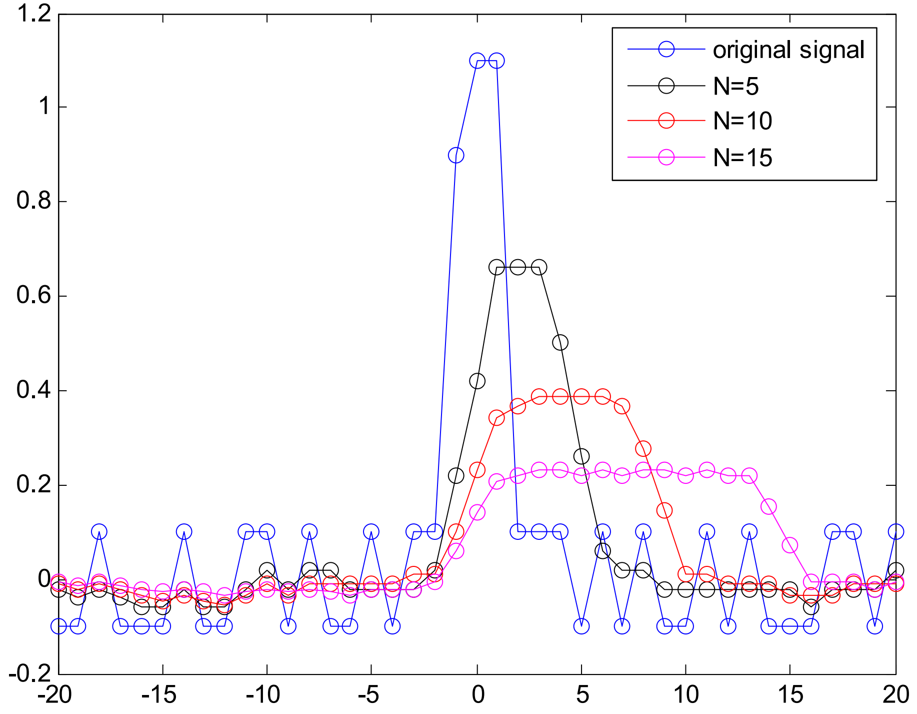
$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Rightarrow$$

$$g(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

- Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου κινητού ΜΟ, για δύο διαφορετικές τιμές τάξης του φίλτρου.



- Συμπεριφορά του κινητού ΜΟ παρουσία θορύβου



# Συσχέτιση σημάτων

- Η συσχέτιση (Cross-correlation), υπολογίζει την ομοιότητα μεταξύ 2 σημάτων
- Ετεροσυσχέτιση (Cross-correlation)

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(k-n) = x(n) * y(-n)$$

- Αυτοσυσχέτιση (Autocorrelation)

$$r_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,x(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,x(k-n) = x(n) * x(-n)$$

- Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho_x(n) = \frac{\sum_{\iota=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{\iota=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)}\sqrt{\sum_{\iota=1}^{N}\left(y_i-\overline{y}\right)}} = \frac{\sum_{\iota=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sigma_x\sigma_y} \in \left[-1,1\right]$$

# Matched filter

- Εστω ότι σε δεδομένο σήμα x(n) αναζητούμε ένα τη θέση που εμφανίζεται ένα πρότυπο σήμα (pattern) s(n).
- Υπολογίζουμε τη συσχέτιση του x(n) με το s(n) ως εξής:
  - Αντιστρέφουμε χρονικά το s(n): h(n)=s(N-n-1) και εκτελούμε την συνέλιξη τους
- Στις θέσεις που η συνέλιξη έχει υψηλή θετική τιμή, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα ύπαρξης του s(n).
- Στις θέσεις που η συνέλιξη έχει υψηλή αρνητική τιμή, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα ύπαρξης του αντίθετου -s(n).
- Στις θέσεις που η συνέλιξη έχει μικρή απόλυτη τιμή, δεν παρουσιάζεται ομοιότητα μεταξύ του x(n) και s(n).

- Αν θεωρήσουμε ότι το x(n) είναι άθροισμα ενός μετατοπισμένου στο χρόνο s(n) και μίας συνιστώσας θορύβου ν(n), τότε:

$$x(n) = s(n - n_0) + \nu(n),$$
$$h(n) = s(N - n - 1)$$
$$y(n_0) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\, x(n - n_0)$$
$$n_0 = \underbrace{\arg\max}_{n \in [1,N]} \big( y(n) \big)$$

# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ

- **ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ**
- **ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ**
- **ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ**
- **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

# ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ

Ο **δίπλευρος μετασχηματισμός z** (bilateral z-transform) ενός σήματος διακριτού χρόνου x(n) ορίζεται ως ακολούθως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

όπου η μιγαδική μεταβλητή z ονομάζεται μιγαδική συχνότητα και είναι ίση με $z=|z|e^{j\omega}$ όπου ω είναι η πραγματική συχνότητα. Κατά συνέπεια, ο Ζ είναι DTFT της ακολουθίας $x(n)|z|^{-n}$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( |z|^{-n} x(n) \right) e^{-jn\omega} = DTFT\left( |z|^{-n} x(n) \right)$$

# Περιοχή Σύγκλισης

Περιοχή Σύγκλισης (**ΠΣ**) (Region Of Convergence - **ROC**) είναι το σύνολο των τιμών της μεταβλητής z για το οποίο υπάρχει η X(z).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) |z|^{-n} \right| < \infty$$

Η σχέση $|z|=1$ (ή $z=e^{j\omega}$ ) ορίζει το **Μοναδιαίο Κύκλο** (**Unit Circle**) στο μιγαδικό επίπεδο.

Αν η Περιοχή Σύγκλισης περιέχει το Μοναδιαίο Κύκλο, τότε η X(z) υπολογίζεται πάνω στο Μοναδιαίο κύκλο και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού z X(z).

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

# Ιδιότητες της Περιοχής Σύγκλισης

- αν x(n) είναι **ακολουθία δεξιάς πλευράς**: $x(n)=0,\ n<n0$
  τότε η ΠΣ είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου $|z|>a$
- αν x(n) είναι **ακολουθία αριστερής πλευράς**: $x(n)=0,\ n>n0$
  τότε η ΠΣ είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου $|z|<b$
- αν x(n) είναι **αμφίπλευρη ακολουθία**
  τότε η ΠΣ είναι η δακτυλιοειδής επιφάνεια $a<|z|<b$
- αν x(n) είναι **ακολουθία πεπερασμένου μήκους**:
  $x(n)=0,\ n_2<n<n_1$
  τότε η ΠΣ είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο z
  εκτός ίσως από τα σημεία $z=0$ και $z=\infty$
  αν $n_2>0$ τότε το σημείο $z=0$ δεν ανήκει στην ΠΣ
  αν $n_1<0$ τότε το σημείο $z=\infty$ δεν ανήκει στην ΠΣ

# Ζευγάρια Μετασχηματισμού z

| σήμα διακριτού χρόνου x(n) | μετασχηματισμός z X(z) | περιοχή σύγκλισης |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 1 | $\forall$ z |
| $a^n u(n)$ | $1/(1-az^{-1})$ | $\|z\|>\|a\|$ |
| $-a^n u(-n-1)$ | $1/(1-az^{-1})$ | $\|z\|<\|a\|$ |
| $na^n u(n)$ | $az^{-1}/(1-az^{-1})^2$ | $\|z\|>\|a\|$ |
| $-na^n u(-n-1)$ | $az^{-1}/(1-az^{-1})^2$ | $\|z\|<\|a\|$ |
| $\cos(n\omega_0)\, u(n)$ | $(1-\cos(\omega_0)z^{-1})/(1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2})$ | $\|z\|>1$ |
| $\sin(\omega_0)\, u(n)$ | $\sin(\omega_0)z^{-1}/(1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2})$ | $\|z\|>1$ |

# Απόδειξη ζευγών Ζ
# ακολουθία για n>=0

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

- Περιοχή σύγκλισης: $|az^{-1}|<1 \rightarrow |z|>\alpha$
- Αρα η ΠΣ είναι η εξωτερική επιφάνεια του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο με ακτίνα ίση με α.
- Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται στην ΠΣ, υπάρχει ο DTFT της x(n).

- Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του ζέυγους Ζ με χρήση ιδιοτήτων:

$$x(n) = a^n u(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

- Υπολογισμός του μετασχηματισμού *Z* του $u(n)$, $U(z)$ και εφαρμογή της ιδιότητας μετατόπισης στη συχνότητα:

$$u(n) - u(n-1) = \delta(n) \Rightarrow U(z) - z^{-1}U(z) = 1 \Rightarrow U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

# Απόδειξη ζευγών Z, ακολουθία για n<=0

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^n = -\left(\frac{1}{1-a^{-1}z} - 1\right) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

- Περιοχή σύγκλισης: $|a^{-1}z|<1 \rightarrow |z|<\alpha$
- Αρα η ΠΣ είναι ο κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με ακτίνα ίση με α.
- Αν ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται στην ΠΣ, υπάρχει ο DTFT της x(n).

# Ιδιότητες Μετασχηματισμού z

| ιδιότητα μετασχηματισμού z | σήμα διακριτού χρόνου x(n) | μετασχηματισμός z X(z) | περιοχή σύγκλισης |
|---|---|---|---|
| γραμμικότητα | $c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$ | $c_1X_1(z)+c_2X_2(z)$ | $Rx_1 \cap Rx_2$ |
| μετατόπιση στο χρόνο | $x(n-n_0)$ | $z^{-n0}\ X(z)$ | $R_x$ |
| αντιστροφή στο χρόνο | $x(-n)$ | $X(z^{-1})$ | $1\ /\ R_x$ |
| μετατόπιση στη συχνότητα | $a^n\ x(n)$ | $X(a^{-1}z)$ | $\lvert a \rvert\ R_x$ |
| συνέλιξη στο χρόνο | $x_1(n) * x_2(n)$ | $X_1(z)\ X_2(z)$ | $R_{x1} \cap R_{x2}$ |
| μιγαδική συζυγία | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $R_x$ |

# Απόδειξη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού z

Γραμμικότητα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_1x_1(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_2x_2(n)z^{-n}=$$

$$a_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)z^{-n}+a_2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n)z^{-n}=a_1X_1(n)+a_2X_2(n)$$

Χρονική καθυστέρηση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)z^{-n}=z^{-n_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)z^{-(n-n_0)}=z^{-n_0}X(Z)$$

Χρονική αντιστροφή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)\left(z^{-1}\right)^{-(-n)}=X\left(z^{-1}\right)$$

$$ROC: a\le|z|\le b\rightarrow\frac{1}{b}\le|z|\le\frac{1}{a}$$

Μιγαδική συζυγία

$$X^*\left(z^*\right)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(z^{-n}\right)^*\right)^*=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)|z|^{-n}\left(e^{-j\omega n}\right)^*\right)^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)^*|z|^{-n}\left(e^{-j\omega n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)z^{-n}=X\left(z^*\right)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(a^{-1}z\right)^n=X\left(a^{-1}z\right),ROC:\left|a^{-1}z\right|<1\rightarrow a<|z|$$

Συνέλιξη

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\Rightarrow$$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right)z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)z^{-(n-k)}=H(z)X(z)$$

$$ROC\,Y(z)=R_x\cap R_h$$

# Παράδειγμα συνέλιξης στο πεδίο Z

Δίνονται οι συναρτήσεις και ζητείται ο Z της συνέλιξης τους

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$h(n) = \delta(n) + a\delta(n-1)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ROC_x : a < |z|$$

$$H(z) = 1 - az^{-1} \quad ROC_h : 0 < |z|$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\left(1-az^{-1}\right) = 1$$

Η ΠΣ της Y(n) είναι όλο το επίπεδο Z.

Γενικά, όταν εξουδετερώνεται ένας πόλος με ένα μηδενικό της Y(n), δηλ. όταν απλοποιείται ένας παράγοντας του αριθμητή με ένα παράγοντα του παρονομαστή, τότε η ΠΣ που προκύπτει είναι υπερσύνολο των ΠΣ των πολλαπλασιαστέων.

# Παράδειγμα συνέλιξης στο πεδίο Z

Δίνονται οι συναρτήσεις και ζητείται ο Z της συνέλιξης τους. Επιβεβαιώστε την ορθότητα της σχετικής ιδιότητας του μετασχηματισμού *Z*.

$$x_1(n) = 3\delta(n) - 2\delta(n)$$

$$x_2(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1)$$

$$X_1(z) = 3 + 2z^{-1}$$

$$X_2(z) = 2 - z^{-1}$$

$$X_1(z)X_2(z) = \left(3 + 2z^{-1}\right)\left(2 - z^{-1}\right) = 6 + z^{-1} - 2z^{-2} \leftrightarrow 6\delta(n) + \delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

Υπολογισμός της συνέλιξης βάσει του ορισμού της:

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(3\delta(k) - 2\delta(k)\right)\left(2\delta(n-k) - \delta(n-k-1)\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(6\delta(k)\delta(n-k) - 3\delta(k)\delta(n-k-1) + 4\delta(k-1)\delta(n-k) - 2\delta(k-1)\delta(n-1-k)\right) =$$

$$6\delta(n) + \delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

# Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί ο Z της ακολουθίας $x(n) = n0.5^n u(n-2)$

1ος τρόπος (βάσει ορισμού):

$$x(n) = n(0.5)^n u(n-2) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(0.5)^n u(n-2) z^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(0.5)^n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(0.5)^n z^{-n} - 0 - 0.5z^{-1} = \frac{0.5z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2} - 0.5z^{-1} = 0.5z^{-2} \frac{1-0.25z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2}$$

2ος τρόπος (ιδιότητα παραγώγισης)

Παραγώγιση:

$$ny(n) \leftrightarrow \text{-z}\frac{d}{dz}Y(z) \Rightarrow \; n\left(4(0.5)^{n-2} u(n-2)\right) \leftrightarrow -\text{z}\frac{d}{dz}\left(\frac{4z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}\right) = 0.5z^{-2} \frac{1-0.25z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = g(x) f'(x) + (-1) g^{-2} f(x) g'(x)$$

# Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί ο Z της ακολουθίας $x(n) = na^n u(-n)$

$$x(n) = na^n u(-n)$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > a \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{a}$$

Αντιστροφή στο χρόνο:

$$a^n u(-n) = a^n u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{1-a^{-1}z^{+1}}, |z| > a$$

Παραγώγιση:

$$nx(n) \leftrightarrow \text{-z}\frac{d}{dz}\mathrm{X}(z) \Rightarrow \; na^n u(-n) \leftrightarrow -\mathrm{z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-a^{-1}z^{+1}}\right) = -z\frac{-\left(-a^{-1}\right)}{\left(1-a^{-1}z\right)^{-2}} = -\frac{za^{-1}}{1-a^{-1}z}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = g(x)f'(x) + (-1)g^{-2}f(x)g'(x)$$

# Παράδειγμα υπολογισμού της X(z) από δεδομένη ακολουθία x(n)

Έστω ότι δίνεται αριθμητικά η x(n). Τότε η Z(n) υπολογίζεται άμεσα. Παράδειγμα

| **n** | **<-1** | **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **>5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 |

$$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4) \Rightarrow$$
$$X(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

# Πόλοι και Μηδενικά

Έστω X(z) είναι ρητή συνάρτηση του z:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0 z^{-M}\left(z^M+\frac{b_1}{b_0}z^{M-1}+\ldots+\frac{b_M}{b_0}\right)}{z^{-N}\left(z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots+a_N\right)}=b_0 z^{N-M}\frac{\prod_{l=1}^{M}(z-z_l)}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)}$$

Οι ρίζες του αριθμητή καλούνται **μηδενικά** (**zeros**) της H(z)

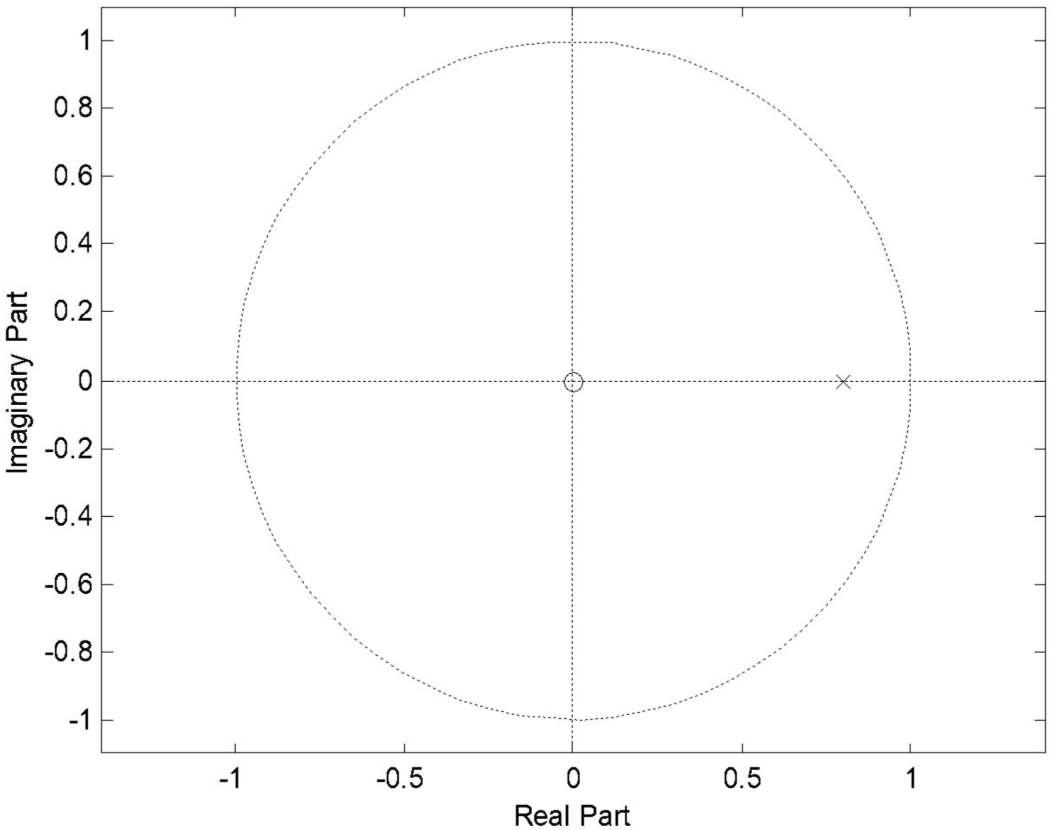
Οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται **πόλοι** (**poles**) της H(z)
Στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο
τα μηδενικά συμβολίζονται με το σύμβολο ‘o’ και
οι πόλοι με το σύμβολο ‘x’

Η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους

# Υπολογισμός Πόλων και Μηδενικών

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{8}{10} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{8}{10}}$$

**zplane(b,a)**



# Παραδείγματα ζευγών Z

- Επιβεβαιώστε τα παρακάτω ζεύγη Z

$$x(n) = 3\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2) \leftrightarrow X(z) = 3 + z^{-2} + z^{2}$$

$$x(n) = u(n) - u(n-10) = \sum_{k=0}^{9} \delta(n-k) \leftrightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{9} z^{-k} = \frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}, ROC\ |z| > 1$$

$$\text{Ρ}\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\left(1-z^{-10}\right): z_k = e^{j\frac{2k\pi}{10}}, k = 0,1,\ldots,9 \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{\prod_{k=0}^{9}\left(1-e^{j\frac{2k\pi}{10}}z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)} = \prod_{k=1}^{9}\left(1-e^{j\frac{2k\pi}{10}}z^{-1}\right)$$

# Παραδείγματα ζευγών Ζ

$$x(n) = 2^n u(n) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-2} + \frac{3z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$ROC: |z| > 2 \cap |z| > 0$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+2) + 3^n u(-n-1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u(n+2) + 3^n u(-n-1)$$

$$X(z) = \frac{4z^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$ROC: |z| < \frac{1}{2} \cap |z| > 3$$

# Σήματα με ίδιο Μετασχηματισμό $Z$

Διαφορετικά σήματα μπορούν να έχουν
την ίδια συναρτησιακή μορφή μετασχηματισμού z
με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης ΠΣ. Αρα, για να βρούμε
τον αντίστροφο Z πρέπει να δίνεται και η ΠΣ.

$$-0.5^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, |z| < 0.5$$

$$-2^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| < 2$$

$$x1(n) = 0.5^n u(n) - 2^n u(-n-1) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow X1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$\mu\varepsilon\, \Pi\varepsilon\rho\iota o\chi\acute{\eta}\, \Sigma\acute{\upsilon}\gamma\kappa\lambda\iota\sigma\eta\varsigma$

$$|z| > 0.5 \cap |z| < 2 = 0.5 < |z| < 2$$

$$0.5^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, |z| > 0.5$$

$$2^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

$$x2(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(n) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow X2(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$\mu\varepsilon\, \Pi\varepsilon\rho\iota o\chi\acute{\eta}\, \Sigma\acute{\upsilon}\gamma\kappa\lambda\iota\sigma\eta\varsigma$

$$|z| > 0.5 \cap |z| > 2 = |z| > 2$$

# Θεώρημα Αρχικής Τιμής

$$\text{Αν } x(n) = 0, n < 0, \text{τότε } X(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} x(0)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0 z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} =$$

$$= x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \ldots \xrightarrow[z\to\infty]{} x(0)$$

$$\text{Αν } x(n) = 0, n > 0, \text{τότε } X(z) \xrightarrow[z\to 0]{} x(0)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} x(n) z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 z^{-n} =$$

$$= \ldots + x(-2) z^{2} + x(-1) z^{1} + x(0) + \ldots \xrightarrow[z\to 0]{} x(0)$$

# ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Αν η X(z) είναι ρητή συνάρτηση του z
με πόλους (ρίζες του παρονομαστή) $p_k$, k=1,2,…,N
τότε για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού z
χρησιμοποιείται η μέθοδος
ανάπτυξης της X(z) σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k) z^{-k}}{\sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k}}$$

# Απλοί Πόλοι N>M

Αν η X(z) είναι ρητή συνάρτηση του z με βαθμό παρονομαστή > βαθμό αριθμητή και με απλούς πόλους (ρίζες του παρονομαστή) $p_k$, k=1,2,…,N

τότε για την ανάπτυξη της X(z) σε άθροισμα μερικών κλασμάτων ισχύει:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

$$R_k = [(1 - p_k z^{-1}) X(z)]\Big|_{z=p_k}$$

# Απλοί Πόλοι N≤ M

Αν η X(z) είναι ρητή συνάρτηση του z με βαθμό παρονομαστή <= βαθμό αριθμητή και με απλούς πόλους (ρίζες του παρονομαστή) $p_k$, k=1,2,…,N

τότε για την ανάπτυξη της X(z) σε άθροισμα μερικών κλασμάτων ισχύει:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$R_k = [(1 - p_k z^{-1}) X(z)]\Big|_{z=p_k}$$

οι συντελεστές $C_k$ υπολογίζονται βάσει του πηλίκου της (πολυωνυμικής) διαίρεσης B(z)/A(z)

# Παράδειγμα Αντίστροφου Μετασχηματισμού z

$$X(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}},|z|>2$$

Μετατρέπουμε τον παρονομαστή σε ρητή συνάρτηση z και υπολογίζουμε τις ρίζες του (πόλοι):

$$z^2+3z+2=0 \Rightarrow p_{1,2}=-1,-2$$

$$X(z)=\frac{1}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})}$$

$$A1=\left[(1+2z^{-1})\frac{1}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})}\right]_{z=-2}=2$$

$$A2=\left[(1+z^{-1})\frac{1}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})}\right]_{z=-1}=-1$$

$$X(z)=2\frac{1}{1+2z^{-1}}+(-1)\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{2}{1-(-2)z^{-1}}-\frac{1}{1-(-1)z^{-1}}$$

$$x(n)=2(-2)^n u(n)-(-1)^n u(n)$$

# Παράδειγμα Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα N>M

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} =$$

$$\frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\Pi\acute{o}\lambda o\iota\; p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = X(z)\left(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = 4$$

$$A_2 = X(z)\left(1 - \tfrac{1}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -4$$

$$4\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + (-4)\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

**[R,p,C]=residuez(b,a)**

```
b=[0,1]
a=[1,-0.75,0.125]
[R,p,C]=residuez(b,a)
R =
    4
   -4
p =
   0.5000
   0.2500
C =
    [ ]
```

# Παράδειγμα Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα N ≤ M

$$X(z)=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

- Παραγοντοποίηση παρονομαστή

$$1-\tfrac{3}{4}z^{-1}+\tfrac{1}{8}z^{-2}=z^{-2}\left(z^{2}-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}\right)\Rightarrow p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{4}$$

$$X(z)=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

- Επειδή M=N (βαθμός αριθμητή = βαθμό παρονομαστή), διαιρούμε το πολυώνυμο του αριθμητή με αυτό του παρονομαστή για να υπολογίσουμε τη σταθερά C:

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{1-p_k z^{-1}}+C$$

$$
\begin{array}{l|l}
+\tfrac{1}{4}z^{-2}-\tfrac{7}{4}z^{-1}+4 & +\tfrac{1}{8}z^{-2}-\tfrac{3}{4}z^{-1}+1 \\ \hline
-\dfrac{1}{4}z^{-2}+\dfrac{6}{4}z^{-1}-2 & \qquad 2 \\
0-\dfrac{1}{4}z^{-1}+2 &
\end{array}
$$

- Διαίρεση πολυωνύμων

$$X(z)=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=2+\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=2+\frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Υπολογισμός μερικών κλασμάτων

$$A_1=X\left(z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{4-\frac{7}{4}2+\frac{1}{4}4}{1-\frac{1}{4}2}=3$$

$$A_1=X\left(z\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{4-\frac{7}{4}4+\frac{1}{4}16}{1-\frac{1}{2}4}=-1$$

$$\Rightarrow X\left(z\right)=2+\frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\Rightarrow$$

- Υπολογισμός αντίστροφου $Z$

$$x\left(n\right)=2\delta\left(n\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u\left(n\right)-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u\left(n\right)$$