

Μαρία Αδάμ
Ιωάννης Χατζάρας
Νικόλαος Ασημάκης

Μαθηματική Ανάλυση



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ανάπτυξη στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μαθηματική Ανάλυση

Συγγραφή

Μαρία Αδάμ, Νικόλαος Ασημάκης, Ιωάννης Χατζάρας

Κριτικός αναγνώστης

Νικόλαος Καραμπετάκης

Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ευφροσύνη-Άλκηστη Παρασκευοπούλου-Κόλλια, Μαρία Αδάμ

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Αντιγόνη Παναγιωτίδου

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Παναγιώτα Κοντού

Copyright © ΣΕΑΒ 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN: 978-960-603-392-6

Στον Ιωάννη-Άρη

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής	1
1.1. Συναρτήσεις	2
1.2. Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Σύνθετη και αντίστροφη συνάρτηση.....	12
1.3. Μονοτονία συνάρτησης. Ακρότατα συνάρτησης.....	20
1.4. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις	24
1.5. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	29
1.6. Υπερβολικές συναρτήσεις.....	41
1.7. Πραγματικές συναρτήσεις σε προγραμματιστικό περιβάλλον	54
1.7.1 Συμβολικές εντολές.....	55
1.7.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης μίας μεταβλητής.....	58
1.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	62
Βιβλιογραφία.....	63
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	65
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.....	67
2.1. Η έννοια της ακολουθίας	68
2.2. Φραγμένες ακολουθίες.....	71
2.3. Μονοτονία ακολουθίας.....	75
2.4. Η έννοια της υπακολουθίας	78
2.5. Σύγκλιση ακολουθίας στον \mathbb{R}	80
2.5.1. Η έννοια της περιοχής	80
2.5.2. Μηδενική ακολουθία.....	80
2.5.3. Σύγκλιση ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό	81
2.5.4. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών	83
2.6. Χαρακτηριστικά όρια.....	93
2.7. Αποκλίνουσες ακολουθίες	103
2.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	106
Βιβλιογραφία.....	107
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	108
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Σειρές πραγματικών αριθμών.....	111
3.1. Ορισμοί.....	112
3.2. Κριτήρια σύγκλισης.....	122
3.3. Εναλλάσσουσες σειρές	135
3.4. Παραδείγματα και Εφαρμογές	139
3.5. Σειρές πραγματικών αριθμών σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	147
3.5.1 Σειρές πραγματικών αριθμών με συμβολικές εντολές	147
3.5.2 Σειρές πραγματικών αριθμών με εντολές επανάληψης.....	150
3.6. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	155

Βιβλιογραφία.....	157
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	159
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης.....	161
4.1. Η έννοια του ορίου	162
4.2. Ιδιότητες των ορίων.....	168
4.3. Όριο συνάρτησης το άπειρο. Όριο συνάρτησης στο άπειρο	174
4.4. Πλευρικά όρια συνάρτησης σε σημείο	184
4.5. Συνέχεια συνάρτησης	188
4.6. Όριο πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον	199
4.7. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	201
Βιβλιογραφία.....	202
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	203
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης	207
5.1. Έννοια παραγώγου.....	208
5.2. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον	213
5.3. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	214
Βιβλιογραφία.....	215
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	216
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Θεμελιώδη θεωρήματα διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.....	217
6.1. Θεωρήματα	218
6.2. Συνέπειες θεωρημάτων	219
6.3. Προγραμματιστικό περιβάλλον.....	221
6.4. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	222
Βιβλιογραφία.....	223
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	224
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης	225
7.1. Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος.....	226
7.2. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.....	232
7.3. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.....	239
7.4. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων	243
7.5. Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων	252
7.6. Το ορισμένο ολοκλήρωμα.....	258
7.7. Ολοκλήρωμα σε προγραμματιστικό περιβάλλον	267
7.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	272
Βιβλιογραφία.....	274

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	275
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Εφαρμογές ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος	277
8.1. Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος	278
8.1.1. Εμβαδόν επίπεδης περιοχής	278
8.1.2. Όγκος στερεού από περιστροφή.....	284
8.1.3. Μήκος καμπύλης.....	288
8.2. Εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος σε Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης	291
8.2.1. Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και Ομογενής διαφορική εξίσωση	294
8.2.2. Γραμμική διαφορική εξίσωση και διαφορική εξίσωση του Bernoulli.....	297
8.3. Λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον	302
8.4 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	305
Βιβλιογραφία.....	306
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	308
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Σειρές συναρτήσεων.....	311
9.1 Δυναμοσειρές.....	312
9.2 Σειρά Taylor και Maclaurin	321
9.3 Σειρές Fourier	336
9.4. Σειρές συναρτήσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον	357
9.4.1. Σειρές Taylor.....	357
9.4.2. Σειρές Fourier.....	359
9.5 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης.....	361
Βιβλιογραφία.....	363
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	365
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές	367
10.1. Γενικευμένο ολοκλήρωμα.....	368
10.2 Ο μετασχηματισμός Laplace.....	381
10.3. Μετασχηματισμός Laplace σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	387
10.4. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης.....	389
Βιβλιογραφία.....	390
Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις.....	392
Παράρτημα.....	393

Πρόλογος

Το αντικείμενο του βιβλίου είναι ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής και περιλαμβάνει εκείνη την ύλη των μαθηματικών, που διδάσκεται ως Μαθηματική Ανάλυση ή Λογισμός συναρτήσεων μίας μεταβλητής, στα πρώτα εξάμηνα των Τμημάτων, των Θετικών και Φυσικών Επιστημών, των Πολυτεχνικών, Οικονομικών και Κοινωνικών Σχολών αλλά και των Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών των ΤΕΙ. Απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές και σπουδαστές ως κύριο σύγγραμμα και σε πτυχιούχους ως ένα χρήσιμο ηλεκτρονικό βιβλίο αναφοράς. Στο περιεχόμενό του ο αναγνώστης μπορεί να βρει υλικό που σχετίζεται με:

- το λογισμό και τη μελέτη συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής,
- το αόριστο, το ορισμένο, το γενικευμένο ολοκλήρωμα και τις εφαρμογές τους, τόσο στη γεωμετρία, όσο στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και στο μετασχηματισμό Laplace,
- τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών,
- τις σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων.

Είναι γεγονός ότι οι παραπάνω έννοιες είναι χρήσιμες στις επιστήμες του Μηχανικού και γενικότερα στις Θετικές Επιστήμες, και δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι αρκετές από αυτές οφείλουν την ύπαρξή τους σε αυτές τις Επιστήμες. Βασιζόμενοι σε αυτό το γεγονός ο αναγνώστης θα βρει σχόλια ή και αναλυτικές εισαγωγές στις αντίστοιχες ενότητες.

Στο βιβλίο επιχειρείται η παρουσίαση της θεωρητικής δομής και μεθοδολογίας της Μαθηματικής Ανάλυσης με συστηματικό και απλό τρόπο, με ακρίβεια και πληρότητα, εφ' όσον οι έννοιες ακολουθία, όριο, συνέχεια, παράγωγος και ολοκλήρωμα, είναι γνωστές από το λύκειο. Στόχος είναι η εύχρηστη αναφορά στην ύλη του λογισμού των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής και η κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού λογισμού, ως υπόβαθρο σε άλλα προπτυχιακά μαθήματα, όπως Σήματα Συστήματα, Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, κ.ά. Για το σκοπό αυτό, η ύλη είναι αυστηρά διατυπωμένη, με Ορισμούς, Θεωρήματα και Προτάσεις, χωρίς μακροσκελείς αποδείξεις και η παρουσίασή της στηρίζεται σε επιλεγμένα παραδείγματα και εφαρμογές. Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στο να υπάρχουν σε όλα τα κεφάλαια αναλυτικές επεξηγήσεις, επισημάνσεις και λεπτομερής «συζήτηση», πάνω σε ποικίλα παραδείγματα, ώστε να παρέχεται η δυνατότητα στον αναγνώστη να αντιληφθεί τις έννοιες και τις διαδικασίες που αναπτύσσονται. Τέλος, αξιοποιούνται οι γνώσεις και οι δυνατότητες, που δίνει η τεχνολογική ανάπτυξη των υπολογιστών, γράφοντας προγράμματα σε υπολογιστικό περιβάλλον Matlab/Octave.

Στο κείμενο περιέχονται σε έγχρωμα πλαίσια τα θεωρήματα, οι βασικές προτάσεις, οι ιδιότητες, χρήσιμα συμπεράσματα και εφαρμογές, περιγραφή μεθόδων, εντολών και διαδικασιών, ώστε να διακρίνονται εύκολα από τον αναγνώστη. Μία ενότητα κάθε κεφαλαίου συγκεντρώνει τις απαραίτητες πληροφορίες, που απαιτούνται από το προγραμματιστικό/υπολογιστικό περιβάλλον των λογισμικών Matlab/Octave, ώστε η χρήση τους να επιτρέπει στον αναγνώστη την εξάσκηση ή τον έλεγχο της ορθότητας των απαντήσεων, σε αρκετά από τα λυμένα ή άλυτα προβλήματα που διαπραγματεύεται κάθε κεφάλαιο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν ασκήσεις αυτοαξιολόγησης με υποδείξεις για τη λύση τους καθώς και οι απαντήσεις τους. Σκοπός αυτών των ασκήσεων είναι να μπορεί ο αναγνώστης να ελέγξει το επίπεδο κατανόησης των εννοιών που αναπτύχθηκαν, γι' αυτό οι ασκήσεις αυτές είναι παρόμοιες με τα παραδείγματα, τα οποία έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο ή αποτελούν σύνθεσή τους. Επιπλέον, μετά τη βιβλιογραφία κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν και ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις, οι οποίες δίνονται για να μπορεί ο αναγνώστης να εξασκηθεί στην επίλυση αριθμητικών εφαρμογών και προβλημάτων, που αφορούν τα επιμέρους τμήματα της ύλης κάθε κεφαλαίου.

Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες, οι οποίες αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικές αριθμούνται με τρεις αριθμούς: ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποενότητα. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι εφαρμογές, τα παραδείγματα, οι τύποι και οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης αριθμούνται με τρεις αριθμούς: ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος στη σειρά εμφάνισης. Οι ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου αριθμούνται με δύο αριθμούς, ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισης. Στο τέλος του συγγράμματος υπάρχει παράρτημα με πίνακες με τους σημαντικότερους τύπους όλων των κεφαλαίων.

Το περιεχόμενο του βιβλίου κατανέμεται σε δέκα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται όλοι οι ορισμοί, οι ιδιότητες και οι πράξεις που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων, όπως είναι οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι

τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές καθώς και οι αντίστροφες συναρτήσεις αυτών, και αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητές τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της ακολουθίας, διατυπώνονται οι ιδιότητες που συνδέουν τις έννοιες της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας, αποδεικνύονται τα σημαντικότερα κριτήρια και οι προτάσεις μίας συγκλίνουσας ακολουθίας και μελετώνται χαρακτηριστικά όρια ακολουθιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί και τα σημαντικότερα κριτήρια ελέγχου σύγκλισης των σειρών πραγματικών αριθμών. Μελετώνται επίσης ειδικές σειρές, όπως είναι οι γεωμετρικές, οι τηλεσκοπικές, οι p -αρμονικές και οι εναλλάσσουσες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης, η οποία είναι θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού, δίνονται ο ορισμός και οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σ' έναν πραγματικό αριθμό ή όταν αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα και διατυπώνονται ο ορισμός, οι ιδιότητες και οι σημαντικότερες προτάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις, από τις οποίες προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κανόνες παραγωγίσης των πραγματικών συναρτήσεων και αποδεικνύονται οι παράγωγοι των σημαντικότερων πραγματικών συναρτήσεων. Επίσης, δίνεται ο ορισμός του διαφορικού μίας πραγματικής συνάρτησης.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, θεώρημα Fermat, Rolle, Μέσης Τιμής, τα οποία βρίσκουν εφαρμογές στη μελέτη μίας συνάρτησης κατά τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Μερικές από αυτές αφορούν τη μονοτονία και την κυρτότητα, τον προσδιορισμό τοπικών ακροτάτων και σημείων καμψής της συνάρτησης, την ύπαρξη ασύμπτωτων ευθειών στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, καθώς και τον εντοπισμό των ριζών μίας εξίσωσης.

Στο έβδομο κεφάλαιο ξεκινά η μελέτη του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Παρουσιάζεται η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος, η οποία «λειτουργεί» ως αντίστροφη διαδικασία από εκείνη της παραγωγίσης. Μελετώνται οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και αναπτύσσονται οι τεχνικές υπολογισμού του. Εισάγεται η έννοια του αθροίσματος Riemann, με τη χρήση του οποίου, δίνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann), και διατυπώνεται το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος στη γεωμετρία, στη μηχανική, στη φυσική, όπως είναι το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, ο όγκος ενός στερεού από περιστροφή, το μήκος μίας καμπύλης. Επιπλέον, παρουσιάζονται εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος, στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, όπως είναι οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και η διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος προσέγγισης μίας συνάρτησης από μία πολυωνυμική συνάρτηση, δίνεται ο ορισμός της δυναμοσειράς, της σειράς Taylor και Maclaurin. Επιπλέον, παρουσιάζεται η προσέγγιση μίας συνάρτησης από τριγωνομετρικά πολυώνυμα και περιγράφεται η ανάλυση μίας συνάρτησης σε σειρά Fourier.

Στο τελευταίο κεφάλαιο του συγγράμματος επεκτείνεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε εκείνη του γενικευμένου ολοκληρώματος, δηλαδή, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το ολοκλήρωμα μελετάται για συνάρτηση ορισμένη σε μη φραγμένο διάστημα, καθώς επίσης για μη φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα ή ο συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων. Ως εφαρμογές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μελετώνται ο μετασχηματισμός Laplace και ο αντίστροφός του.

Στο τέλος της προσπάθειας αυτής θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσουμε όλους τους συντελεστές της συγγραφικής προσπάθειας.

Ευχαριστούμε τον κριτικό αναγνώστη κ. Νικόλαο Καραμπετάκη για τις εποικοδομητικές και αναλυτικές υποδείξεις του.

Ευχαριστούμε την υποψήφια διδάκτορα του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική κα Παναγιώτα Κοντού για την τεχνική υποστήριξη.

Ευχαριστούμε τη συναδέλφισσα και φίλη κα Ευφροσύνη-Άλκηστη Παρασκευοπούλου-Κόλλια για τη γλωσσική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε την κα Αντιγόνη Παναγιωτίδου για τη σύλληψη της ιδέας του εξώφυλλου και τη γραφιστική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε όλους τους φοιτητές των Τμημάτων όπου διδάξαμε, που τα τελευταία χρόνια, μέσα από τις συζητήσεις στις διαλέξεις και στα εργαστήρια, μέσα από τις ασκήσεις και τις εξετάσεις, μας βοήθησαν να γίνουμε πιο μεθοδικοί στην παρουσίαση της ύλης και μας ενέπνευσαν να γράψουμε το παρόν ηλεκτρονικό σύγγραμμα. Ελπίζουμε να είναι χρήσιμο βοήθημα στους επόμενους φοιτητές των Πανεπιστημίων και Τεχνολογικών Ιδρυμάτων και να αποτελέσει ένα από τα βασικά εργαλεία στην προσπάθειά τους για την απόκτηση της γνώσης στα αντικείμενα που θεραπεύονται μέσα στις «σελίδες» του.

Λαμία, Μάιος 2016

Οι συγγραφείς
Μαρία Αδάμ-Ιωάννης Χατζάρας-Νικόλαος Ασημάκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

...Δεν υπάρχει πρόβλημα που δεν μπορεί να επιλυθεί.

François Viète (1540 - 1603)

...Υπάρχει το πρόβλημα, αναζητήστε τη λύση του, η ορθότητα των προτάσεων είναι αδύνατον να μην μπορεί να ανακαλυφθεί, γιατί στα μαθηματικά δεν υπάρχει ignorabimus.

...Η κοινότητα των Μαθηματικών είναι σύμφυτη με τη φύση αυτής της επιστήμης, γιατί τα μαθηματικά είναι η βάση (το θεμέλιο) όλης της γνώσης των φυσικών φαινομένων. Δηλαδή, αυτό μπορεί να εκπληρώσει πλήρως αυτήν την υψηλή αποστολή, μπορεί ο νέος αιώνας να φέρει masters, πολύ ζήλο και ενθουσιασμό σε νέους μαθητές.

David Hilbert (1862 - 1943)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται όλοι οι ορισμοί, οι ιδιότητες και οι πράξεις που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες πραγματικών συναρτήσεων, όπως είναι οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές καθώς και οι αντίστροφες συναρτήσεις αυτών και αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητές τους.

1.1 Συναρτήσεις

Ο κόσμος ολόκληρος είναι γεμάτος από σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και η θεμελιώδης έννοια-εργαλείο για την κατανόηση αυτών των σχέσεων είναι εκείνη της *συνάρτησης*. Στη Μηχανική, λέμε ότι, η *ταχύτητα* $v(t)$, η *επιτάχυνση* $a(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου t , ή είναι συναρτήσεις της θέσης x και γράφουμε $v(x)$ και $a(x)$, αντίστοιχα. Στην επεξεργασία σήματος, το *πλάτος ενός πραγματικού σήματος* $x(t)$ είναι συνάρτηση του συνεχούς χρόνου t . Στα ηλεκτρικά κυκλώματα, λέμε ότι, η *τάση του ρεύματος* $V(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου, η *ένταση του ρεύματος* $I(R)$ είναι συνάρτηση της αντίστασης R . Στην Οικονομία, η *συνάρτηση της ζήτησης* $D(p)$ και της *προσφοράς* $S(p)$ είναι συναρτήσεις της τιμής p του προϊόντος, κλπ.

Ορισμός 1.1.1. Μία *συνάρτηση* (function) f από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B είναι ένας κανόνας f , που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο x του συνόλου A ακριβώς σε ένα και μόνο ένα στοιχείο y του συνόλου B , και συμβολίζεται $f : A \rightarrow B$.

Το στοιχείο x ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* (independent variable) ή *πρότυπο* και το στοιχείο y , που αντιστοιχεί στο x , ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή* ή *εικόνα του x* και συμβολίζεται ως $f(x)$.

Το σύνολο A όλων των x ονομάζεται *πεδίο ορισμού* (domain of definition) της f και το σύνολο B όλων των εικόνων $f(x)$ *πεδίο τιμών* (domain of range) της f .

Το *σύνολο τιμών* (set of range) της συνάρτησης $f : A \rightarrow B$ είναι το σύνολο

$$f(A) = \{y \in B : \text{υπάρχει } x \in A, \text{ ώστε } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}. \quad (1.1.1)$$

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B διαβάζεται «συνάρτηση από το A στο B ». Στη συνέχεια, τα σύνολα A , B είναι υποσύνολα του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών και γι' αυτό θα αναφερόμαστε στην *πραγματική συνάρτηση f της πραγματικής μεταβλητής x* .

Επιπλέον, αν δεν ενδιαφέρει ο ακριβής υπολογισμός του συνόλου τιμών της f γράφουμε ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

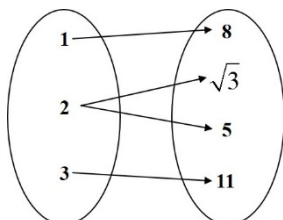
Μία συνάρτηση f είναι γνωστή, όταν ο τύπος (κανόνας) που δίνει την εικόνα $f(x)$ είναι γνωστός. Πολλές φορές για λόγους απλότητας ταυτίζουμε, στο προφορικό αλλά και στο γραπτό λόγο, την έννοια της συνάρτησης f με τον τύπο της $f(x)$, λέγοντας ότι «δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ » ενώ το ορθό είναι «δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)$ ».

Επίσης στη βιβλιογραφία, ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιείται και ως «απεικόνιση», στη συνέχεια χρησιμοποιείται μόνο ο όρος «συνάρτηση».

Παραδείγματα 1.1.2.

i) Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{\sqrt{3}, 5, 8, 11\}$. Η αντιστοιχία $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \sqrt{3}, 3 \rightarrow 11$ μπορεί να αποτελεί μία συνάρτηση f από το A στο B , όπου $f(1) = 5, f(2) = \sqrt{3}$ και $f(3) = 11$ με πεδίο τιμών το σύνολο B και σύνολο τιμών το $f(A) = \{\sqrt{3}, 5, 11\}$.

Ενώ, η αντιστοιχία



δεν αποτελεί συνάρτηση, αφού στην πραγματική τιμή 2 αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές $\sqrt{3}$ και 5, δηλαδή, $f(2) = \sqrt{3}$ και $f(2) = 5$.

ii) Αν $A = \{-3, 0, 2, 4\}$ και $B = \{-5, 2, 3, 6, 8\}$, η αντιστοιχία $f(-3) = 3, f(0) = 2, f(2) = 3$ και $f(4) = 6$, όπως και η αντιστοιχία $g(-3) = g(0) = g(2) = 6$ και $g(4) = 8$ αποτελούν συναρτήσεις από το σύνολο A στο σύνολο B . Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \{2, 3, 6\}$ και της g είναι το $g(A) = \{6, 8\}$, ενώ το πεδίο τιμών τους είναι το B .

iii) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερή συνάρτηση** (constant function) με σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{c\}$. Στην περίπτωση που $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η σταθερή συνάρτηση ονομάζεται **μηδενική**.

iv) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f: A \rightarrow A$ με $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$, ονομάζεται **ταυτοτική συνάρτηση** (identity function) στο σύνολο A και συμβολίζεται με I_A . Έτσι, $I_A(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

v) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ έχει σύνολο τιμών τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή το $[0, +\infty)$.

Γενικότερα, μία συνάρτηση f , η οποία ορίζεται με τη βοήθεια ενός πολωνύμου, δηλαδή, ο τύπος είναι $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$, ονομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση n βαθμού** έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

Ειδικότερα, η πρώτου ($n = 1$) βαθμού συνάρτηση $f(x) = a_1 x + a_0$, όπου $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμική**.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, g(x) = x^3 - 3x + 2, h(x) = 3x - 5$, και

$z(x) = -\frac{2}{3}x^0 = -\frac{2}{3}$ είναι πολωνυμικές συναρτήσεις δευτέρου ($n = 2$), τρίτου ($n = 3$), πρώτου ($n = 1$) και μηδενικού ($n = 0$) βαθμού, αντίστοιχα.

vi) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 0$. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{a}{x}$ έχει πεδίο ορισμού όλους τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς, ώστε η εικόνα $f(x)$ να ορίζεται, δηλαδή, να είναι πραγματικός αριθμός (βλέπε, [Παράδειγμα 1.1.14. \(iv\)](#)).

Γενικότερα, μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας ο τύπος δίνεται ως πηλίκο πολωνύμων,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, με $a_i, b_j \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$, ονομάζεται **ρητή συνάρτηση** κι έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός των ριζών του $Q(x)$, δηλαδή

$$A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}. \quad (1.1.2)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μία ρητή συνάρτηση, οπότε από (1.1.2) είναι φανερό ότι έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Επίσης, η ρητή συνάρτηση $g(x) = \frac{x+4}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{2,3\}$, επειδή οι ρίζες του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι 2 και 3. Εδώ να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού μπορεί να γραφεί κι ως ένωση διαστημάτων: $\mathbb{R} - \{2,3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

vii) Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty),$$

επειδή η τετραγωνική ρίζα (και κάθε άρτιας τάξης ρίζα) έχει νόημα μόνο για μη αρνητικές ποσότητες.

Η συνάρτηση $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x , δηλαδή, $A = \mathbb{R}$.

viii) Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ ορίζεται για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς για

τους οποίους δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής και έχει νόημα το ριζικό, δηλαδή,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x-3) > 0\} = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Η συνάρτηση $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{x^3-4}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, δηλαδή, $A = \mathbb{R}$,

επειδή ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό (παρατηρήστε ότι το $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$ και η υπόρριζη ποσότητα $x^2 - x + 1$ είναι πάντοτε θετική, επειδή είναι ομόσημη του συντελεστή του x^2).

ix) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet**, όπου \mathbb{Q} είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. ◇◇

Ορισμός 1.1.3. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** ή **αμφιμονότιμη** (injective), όταν σε διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής $x \in A$ αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Παρατήρηση 1.1.4. i) Από τον προτασιακό λογισμό γνωρίζουμε ότι για δύο λογικές προτάσεις p, q , η πρόταση « $p \Rightarrow q$ » είναι ισοδύναμη με την πρόταση «όχι $q \Rightarrow$ όχι p ».

Θεωρώντας ως πρόταση p : έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και πρόταση q : $f(x_1) \neq f(x_2)$, η σχέση στον Ορισμό 1.1.3 είναι ισοδύναμη με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{1.1.3}$$

Επομένως, μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη όταν για τυχαία $x_1, x_2 \in A$ επαληθεύεται η συνεπαγωγή στην (1.1.3).

ii) Γεωμετρικά καταλαβαίνουμε ότι μία συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, όταν οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον $x'Ox$ τέμνει την καμπύλη της συνάρτησης σε ένα μόνο σημείο.

Παραδείγματα 1.1.5.

i) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 3$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$, τότε από τον ορισμό

της συνάρτησης έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

- ii) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ **δεν** είναι αμφιμονοσήμαντη, επειδή υπάρχουν, τουλάχιστον δύο διαφορετικά $x_1 = 5$ και $x_2 = -5$ με $f(5) = 25 = f(-5)$ κι επομένως δεν ισχύει ο **Ορισμός 1.1.3**.
- iii) Η συνάρτηση

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν $x_1, x_2 \geq 2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε $x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

Αν $x_1, x_2 < 2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε $2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

Τέλος, αν $x_1 \geq 2$ και $x_2 < 2$, (άρα, $x_1 \neq x_2$) είναι φανερό ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$, το οποίο επαληθεύει τη σχέση στον Ορισμό 1.1.3.

Επομένως, σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, αποδεικνύεται ότι σε διαφορετικά x αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες $f(x)$. ◇◇

Ορισμός 1.1.6. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται **επί** (surjective) **του B**, όταν το σύνολο τιμών της ταυτίζεται με το σύνολο B , δηλαδή, όταν ισχύει $f(A) = B$.

Ισοδύναμα, μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι **επί του B**, όταν κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου από το σύνολο A , δηλαδή, όταν για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Παραδείγματα 1.1.7.

- i) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$ είναι **επί του** συνόλου $B = [0, +\infty)$, αφού κάθε θετικός αριθμός a είναι εικόνα μέσω της f του \sqrt{a} , δηλαδή, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Ενώ, αν ο ίδιος τύπος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ δίνονταν ως $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τότε αυτή **δεν** είναι **επί του** \mathbb{R} . Πράγματι, ένας οποιοσδήποτε αρνητικός αριθμός, για παράδειγμα ο $y = -2$ δεν αποτελεί εικόνα κανενός πραγματικού αριθμού μέσω της $f(x) = x^2$, επομένως στη περίπτωση αυτή $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ και η f **δεν** είναι **επί**.

- ii) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$ είναι επί του \mathbb{R} .

Πράγματι, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = y$. Έτσι, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση είναι επί του \mathbb{R} . ◇◇

Ορισμός 1.1.8. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του B ονομάζεται **ένα προς ένα**.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ένα προς ένα γράφουμε ότι η f είναι **1-1** (one-to-one).

Παράδειγμα 1.1.9.

i) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 3$ είναι 1-1 (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.5 (i) και Παράδειγμα 1.1.7 (ii)).

Γενικότερα, κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$ είναι 1-1.

ii) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, όπου \mathbb{Z} το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**, \mathbb{N} το σύνολο των **φυσικών αριθμών**, και για $m \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση ορίζεται

$$f(m) = \begin{cases} 0, & \text{αν } m = 0 \\ 2m, & \text{αν } m > 0 \\ -2m + 1, & \text{αν } m < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι **επί** του συνόλου \mathbb{N} , δηλαδή, $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε:

- αν $x = 2n$, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f(n) = 2n = x$,
- αν $x = 2n + 1$, υπάρχει $-n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f(-n) = 2n + 1 = x$.

Επειδή η f είναι γραμμική, σύμφωνα με το (i) η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, επομένως είναι μία 1-1 συνάρτηση.

iii) Αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η συνάρτηση

$$f: A \rightarrow f(A)$$

είναι μία 1-1 συνάρτηση.

Στο Παράδειγμα 1.1.2. (i) η αντιστοιχία $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \sqrt{3}, 3 \rightarrow 11$, ορίζει μία συνάρτηση f , που είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με $f(A) = \{5, \sqrt{3}, 11\}$. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\sqrt{3}, 5, 11\}$$

είναι 1-1. ◇◇

Οι συναρτήσεις μεταξύ δύο συνόλων A και B , όταν είναι είτε αμφιμονοσήμαντες είτε επί μας δίνουν τη δυνατότητα να «μετρήσουμε» ποιο από τα δύο σύνολα έχει περισσότερα στοιχεία. Το πλήθος στοιχείων ενός συνόλου A λέγεται **πληθικός αριθμός** του A και συμβολίζεται με $|A|$. Όταν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι 1-1, τότε τα σύνολα A και B ονομάζονται **ισοπληθή** και σημειώνεται $|A| = |B|$.

Στο Παράδειγμα 1.1.9 (ii) τα σύνολα των ακεραίων και φυσικών αριθμών είναι ισοπληθή, δηλαδή $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, εφόσον υπάρχει μία 1-1 συνάρτηση μεταξύ τους. Κάθε σύνολο A το οποίο είναι ισοπληθές με το σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών λέγεται **αριθμήσιμο**.

Από το Παράδειγμα 1.1.9 (iii), όταν $f: A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε $|A| = |f(A)|$, επομένως, $|A| = |f(A)| \leq |B|$. Ενώ, όταν η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι επί του B , τότε $|A| \geq |B|$, εφόσον κάθε στοιχείο του B είναι η εικόνα τουλάχιστον ενός στοιχείου από το σύνολο A .

Ορισμός 1.1.10. Για δύο στοιχεία a, b (για παράδειγμα $a, b \in \mathbb{R}$) ορίζουμε το σύνολο $\{a, \{a, b\}\}$ ως το **διατεταγμένο ζεύγος** (a, b) , δηλαδή,

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}.$$

Δηλαδή, το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι ένα ζεύγος στοιχείων a, b , όπου έχουμε καθορίσει (διατάξει) ποιο στοιχείο θα γραφεί πρώτο και ποιο θα γραφεί δεύτερο. Προφανώς, το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι διαφορετικό από το (b, a) , επειδή τα σύνολα $\{a, \{a, b\}\}$ και $\{b, \{a, b\}\}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, (εκτός αν $a = b$).

Ορισμός 1.1.11. Έστω A και B είναι δύο μη κενά σύνολα. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με $a \in A$ και $b \in B$ ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο** των συνόλων A και B και συμβολίζεται με $A \times B$. Δηλαδή,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}.$$

Παράδειγμα 1.1.12. Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Ενώ, το καρτεσιανό γινόμενο $B \times A$ είναι

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Εδώ παρατηρήστε ότι, $B \times A \neq A \times B$, δηλαδή, **δεν** ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα** στο καρτεσιανό γινόμενο κι επομένως, στο καρτεσιανό γινόμενο παίζει καθοριστικό ρόλο ποιο σύνολο γράφεται πρώτο και ποιο δεύτερο.

Επίσης, μπορούμε να δημιουργήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$ για κάθε μη κενό σύνολο A . Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα ορίζονται τα ακόλουθα καρτεσιανά γινόμενα

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\},$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Επιπλέον, αν $|A| = m$ και $|B| = n$, τότε $|A \times B| = mn$, (βλέπε, [Παράδειγμα 1.1.12](#)), εφόσον τόσοι είναι και οι τρόποι να συνδυαστούν τα m -στοιχεία του A με τα n -στοιχεία του B . ◇◇

Ορισμός 1.1.13. Έστω A και B δύο υποσύνολα του \mathbb{R} και η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$. Το σύνολο

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$$

ονομάζεται **γράφημα** ή **γραφική παράσταση** της f .

Η γραφική παράσταση G_f της f είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y) = (x, f(x))$ πάνω στο επίπεδο xOy , το οποίο ορίζεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, το γράφημα G_f της f είναι το σύνολο σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου xOy που ικανοποιούν την εξίσωση $y = f(x)$ και συναποτελούν μία καμπύλη γραμμής επί του επιπέδου.

Παραδείγματα 1.1.14.

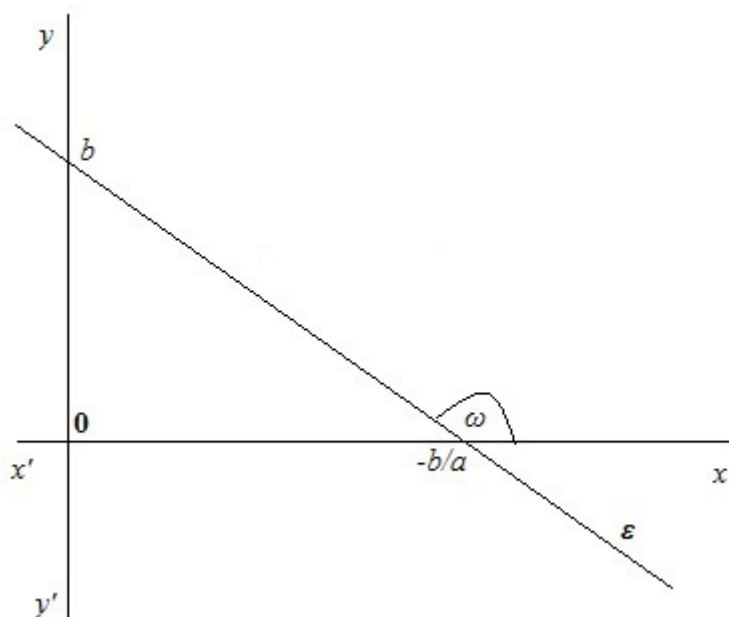
i) Η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που ικανοποιούν την εξίσωση $y = ax + b$, τα οποία συναποτελούν μία ευθεία γραμμή ε , (βλέπε, [Σχήμα 1.1](#)). Η ευθεία ε

- τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στο σημείο $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$
- τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $B(0, b)$
- Αν $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ δύο τυχαία σημεία επί της ε , τότε ισχύει

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Ο αριθμός a λέγεται **κλίση** (slope) ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας ε και ταυτίζεται με τον τριγωνομετρικό αριθμό της εφαπτομένης $\tan(\omega)$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'Ox$ κατά τη θετική φορά γραφής (δηλαδή, την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού).

Αν $a = 0$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = b$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'Ox$, με εξίσωση $y = b$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $(0, b)$.



Σχήμα 1.1: Η ευθεία ε είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = ax + b$.

ii) Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι μία **παραβολή**, (βλέπε, Σχήμα 1.2 - 1.3).

➤ Η παραβολή τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0, c)$.

Αν υπάρχουν κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα $x'Ox$ εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Αν $\Delta > 0$, τότε η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $X_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ και

$$X_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε η παραβολή εφάπτεται στον άξονα $x'Ox$ στο σημείο $X\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.

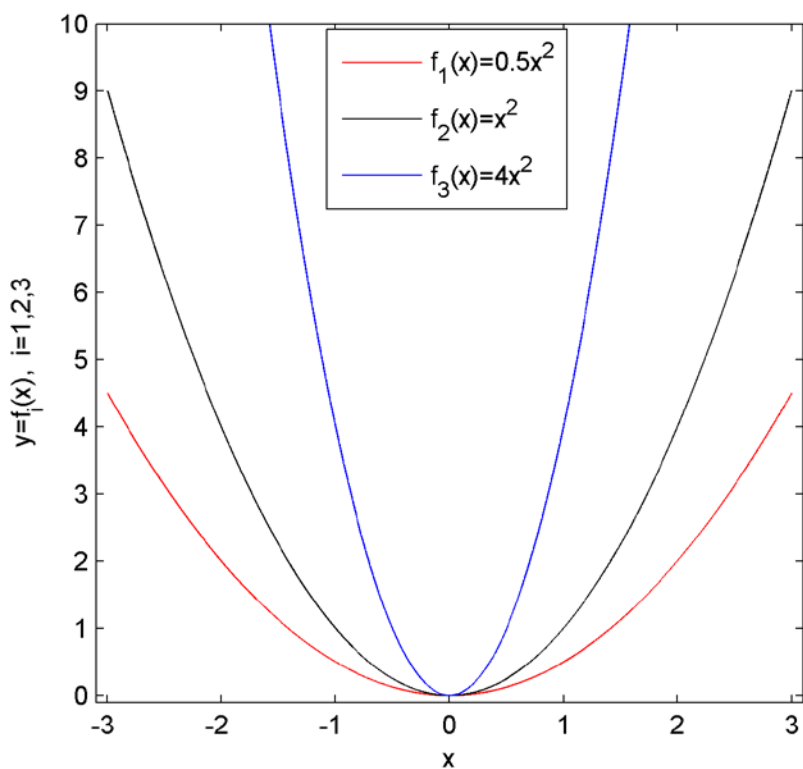
- Αν $\Delta < 0$, η παραβολή δεν τέμνει τον άξονα $x'Ox$.

➤ Η κορυφή της καμπύλης βρίσκεται στο σημείο $C\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

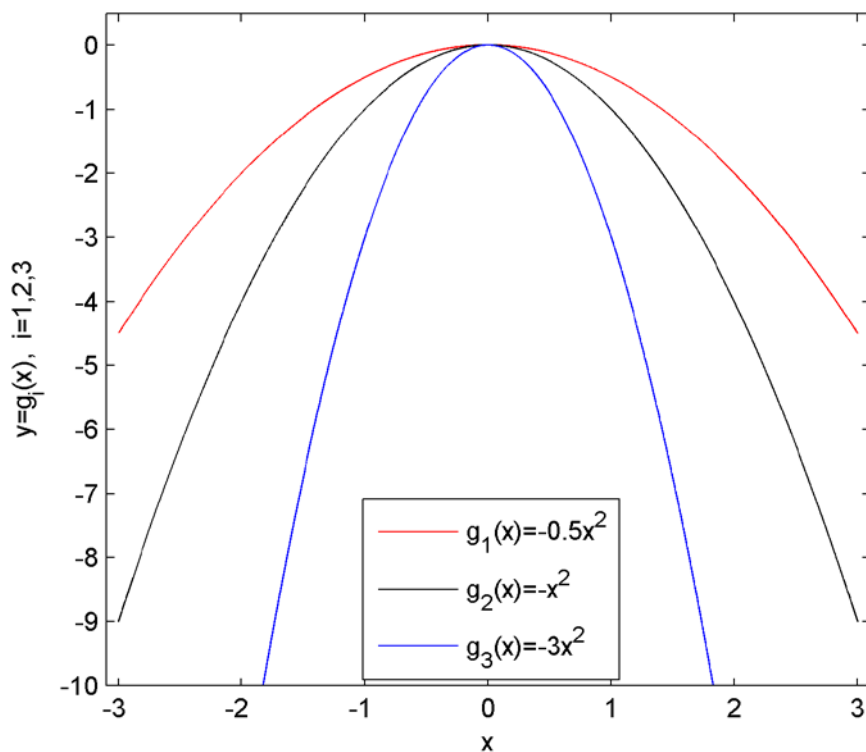
➤ Η κυρτότητα της παραβολής εξαρτάται από το πρόσημο του a . Όταν $a > 0$, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή), (βλέπε, Σχήμα 1.2), ενώ όταν $a < 0$, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη), (βλέπε, Σχήμα 1.3).

➤ Η καμπυλότητα της παραβολής εξαρτάται από το πρόσημο και το μέτρο του a . Για $a > 0$ και με το μέτρο του a να αυξάνει, οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2(x) = x^2$ και $f_3(x) = 4x^2$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.2, (για το σχεδιασμό βλέπε [function parabola](#)). Για

$a < 0$ και με το μέτρο του a να αυξάνει, οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών $g_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = -x^2$ και $g_3(x) = -3x^2$ παρουσιάζονται στο [Σχήμα 1.3](#).

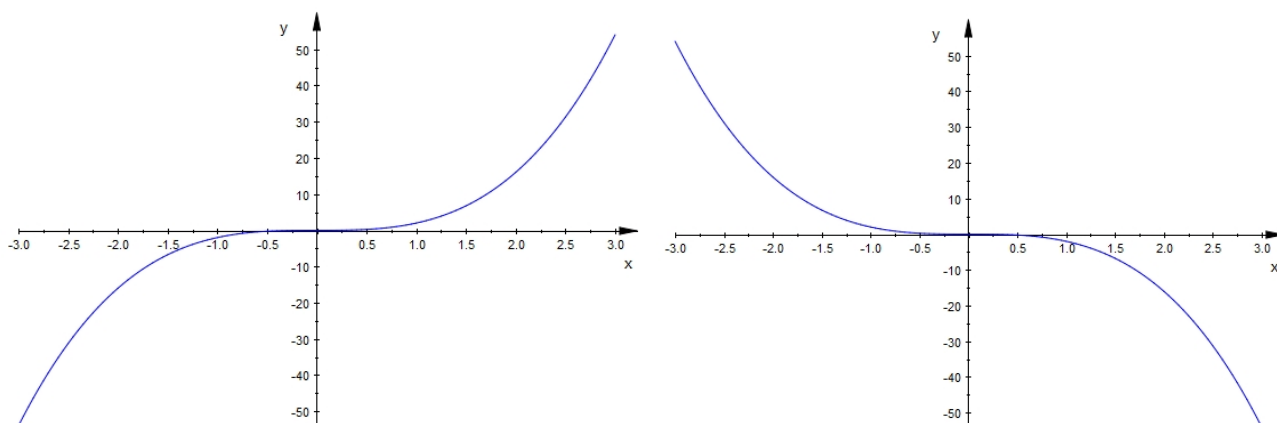


Σχήμα 1.2: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2(x) = x^2$ και $f_3(x) = 4x^2$



Σχήμα 1.3: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = -x^2$ και $g_3(x) = -3x^2$.

iii) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 0$. Στο [Σχήμα 1.4](#) αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3$, για θετικές και αρνητικές τιμές του $a \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Στο [Σχήμα 1.4\(α\)](#) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3$, ($a > 0$), όταν $x \in [-3, 3]$, και στο [Σχήμα 1.4\(β\)](#) η γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^3$, ($a < 0$).



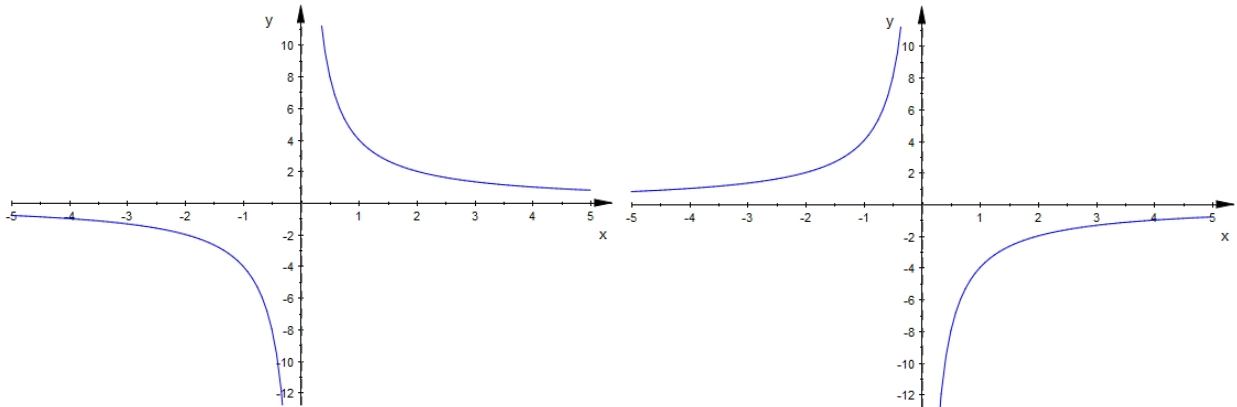
(α) : για $a > 0$

(β) για $a < 0$

Σχήμα 1.4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3$.

iv) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 0$. Στο **Σχήμα 1.5** αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$, για θετικές και αρνητικές τιμές του $a \neq 0$ και $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, (βλέπε, **Παράδειγμα 1.1.2 (vi)**).

Η γραφική παράσταση αποτελείται από τους δύο κλάδους **ισοσκελούς υπερβολής** και εξαρτάται από το a . Στο **Σχήμα 1.5(α)** παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{4}{x}$, ($a > 0$), όταν $x \in [-5, 5]$, ενώ στο **Σχήμα 1.5(β)** η γραφική παράσταση της $f(x) = -\frac{4}{x}$, ($a < 0$).



(α) : για $a > 0$

(β) για $a < 0$

Σχήμα 1.5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$.

◇◇

1.2. Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Σύνθετη και αντίστροφη συνάρτηση

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις πράξεις *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο*, *πηλίκο* και *σύνθεση* μεταξύ συναρτήσεων, με τη βοήθεια των οποίων είτε παράγουμε νέες συναρτήσεις, είτε «αναλύουμε» πολύπλοκες συναρτήσεις σε επιμέρους απλούστερες συναρτήσεις.

Αρχικά διατυπώνουμε τον ορισμό ισότητας ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις.

Ορισμός 1.2.1. Δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **ίσες** αν

i) $A = B$, και

ii) $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.

Συμβολίζουμε την ισότητα με $f = g$.

Ορισμός 1.2.2. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow C$ και $g : B \rightarrow C$ με $B \subset A$. Η συνάρτηση f ονομάζεται **επέκταση** (extension) της g στο A , ή η συνάρτηση g ονομάζεται **περιορισμός** (restriction) της f στο B , αν ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in B$ και συμβολίζεται $f|_B = g$.

Ορισμός 1.2.3. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \cap B \neq \emptyset$.

i) Η συνάρτηση $h : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in A \cap B$ ονομάζεται **άθροισμα των συναρτήσεων** f και g και συμβολίζεται με $f + g$.

ii) Η συνάρτηση $h : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, για κάθε $x \in A \cap B$ ονομάζεται **γινόμενο των συναρτήσεων** f και g και συμβολίζεται με $f \cdot g$.

iii) Αν $c \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = c f(x)$, για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **γινόμενο του αριθμού c επί τη συνάρτηση f** και συμβολίζεται $c \cdot f$.

iv) Έστω $C = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$ και $D = A \cap B \cap C$. Η συνάρτηση $h : D \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, για

κάθε $x \in D$ ονομάζεται **πηλίκο των συναρτήσεων** f και g και συμβολίζεται με $\frac{f}{g}$.

Παραδείγματα 1.2.4.

i) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε

$$(f + g)(x) = x^2 - 3 + \sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} - 3, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

ii) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$(f \cdot g)(x) = (x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \in [1, +\infty)$, και $g(x) = x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 5}, \text{ για κάθε } x \in [1, 5) \cup (5, +\infty).$$

iv) Έστω $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$(2f)(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 8, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

◇◇

Παρατηρήσεις 1.2.5.

i) Οι πράξεις μεταξύ δύο συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν νόημα μόνο όταν $A \cap B \neq \emptyset$, ώστε να μπορούν να ορίζονται και οι δύο σε ένα κοινό σύνολο, το $A \cap B$ (ή σε ένα υποσύνολο της τομής).

ii) Όπως ορίζεται το άθροισμα και το γινόμενο μεταξύ δύο συναρτήσεων, με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το άθροισμα και το γινόμενο ανάμεσα σε n -συναρτήσεις.

Έστω $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$, $A_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ως εξής: αν $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$, τότε

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \text{ για κάθε } x \in A,$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x), \text{ για κάθε } x \in A.$$

iii) Μία ρητή συνάρτηση είναι πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων (βλέπε, [Παραδείγματα 1.1.2 \(v\)](#) και [\(vi\)](#)). ◇◇

Ορισμός 1.2.6. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : C \rightarrow D$, όπου $f(A) \subseteq C$.

Η συνάρτηση $h : A \rightarrow D$, για την οποία ισχύει

$$h : A \xrightarrow{f} f(A) \xrightarrow{g} D,$$

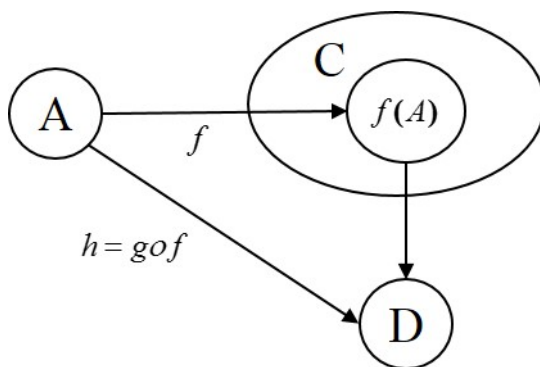
έτσι ώστε

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} z = g(y) = g(f(x)) = h(x),$$

ονομάζεται **σύνθετη συνάρτηση** ή **σύνθεση** (composition) **των συναρτήσεων** f και g και συμβολίζεται με $g \circ f$, (βλέπε, [Σχήμα 1.6](#)).

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων αποτελεί μία πράξη μεταξύ τους. Η συνθήκη $f(A) \subseteq C$ δείχνει αναγκαία προκειμένου να γίνει το «πέρασμα» από το σύνολο $f(A)$ στο σύνολο D μέσω της συνάρτησης g , (βλέπε, [Παραδείγματα 1.2.7 \(i\)](#) και [\(ii\)](#)).

Όπως διαπιστώνουμε από το [Παράδειγμα 1.2.7 \(iii\)](#), όταν ισχύει η γενικότερη συνθήκη $f(A) \cap C \neq \emptyset$, μπορεί να οριστεί η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων f και g , αρκεί από την απαίτηση $f(A) \subseteq C$ να καθοριστεί το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης, το οποίο είναι γενικά υποσύνολο του A (του πεδίου ορισμού της f).



Σχήμα 1.6: Η σύνθετη συνάρτηση $h = g \circ f$.

Τέλος, ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη σειρά γραφής της σύνθεσης των συναρτήσεων, μία και έχει σημασία ποια συνάρτηση γράφουμε πρώτη και ποια δεύτερη, επειδή η πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων **δεν επαληθεύει την αντιμεταθετική ιδιότητα**, όπως επαληθεύεται στο [Παράδειγμα 1.2.7 \(iv\)](#).

Παραδείγματα 1.2.7.

i) Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ και $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 26, 37, 40\}$ και οι συναρτήσεις

$$f : A \rightarrow B, \text{ με } f(x) = x - 1, x \in A, \text{ και } g : C \rightarrow D, \text{ με } g(x) = x^2 + 1, x \in C.$$

Επειδή

$$f(A) \cap C = \{0,1,2,3\} \cap \{0,1,2,3,5,6\} = \{0,1,2,3\} \subseteq C,$$

δημιουργούμε τη σύνθετη συνάρτηση $g \circ f : A \rightarrow D$ με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2, \quad x \in A.$$

- ii) Έστω οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 + 1$, και $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \sqrt{x}$. Επειδή $x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \geq 1$, είναι φανερό ότι $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$, από όπου προκύπτει $f(\mathbb{R}) \cap [0, +\infty) = [1, +\infty)$. Η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων f και g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως ακολούθως

$$x \xrightarrow{f} f(x) = x^2 + 1 \xrightarrow{g} g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Συνεπώς, η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

- iii) Έστω οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x - 1$, και $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \sqrt{x}$. Επειδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, είναι φανερό ότι η προϋπόθεση του εγκλεισμού του συνόλου τιμών της f στο πεδίο ορισμού της g , δεν επαληθεύεται. Επειδή $f(A) \cap [0, +\infty) \neq \emptyset$, για να οριστεί η σύνθεση $g \circ f$, πρέπει να υπολογιστεί κατάλληλο πεδίο ορισμού A της f , ώστε $f(A) \subseteq [0, +\infty)$. Από την τελευταία απαίτηση έχουμε $f(x) = x - 1 \geq 0$, ή ισοδύναμα $x \geq 1$.

Επομένως, η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται μόνο για $x \in [1, +\infty)$, και όχι στο πεδίο ορισμού \mathbb{R} της f , οπότε έχουμε

$$[1, +\infty) \xrightarrow{f} [0, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

Η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων f και g ορίζεται για κάθε $x \in [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$, ως ακολούθως

$$x \xrightarrow{f} f(x) = x - 1 \xrightarrow{g} g(f(x)) = g(x - 1) = \sqrt{x - 1}.$$

Συνεπώς, η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 1}.$$

Παρατηρήστε ότι, η απαίτηση ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $g \circ f$ καθόρισε το πεδίο ορισμού της να είναι το $[1, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

- iv) Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$, και $g(x) = x^2 + 3x - 1$. Θα ορίσουμε (αν αυτό είναι δυνατό) τις σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$, $f \circ g$ και $f \circ f$.

Επειδή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (ως πολυωνυμικές) για τη σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ έχουμε

$$x \xrightarrow{f} f(x) = 2x - 1 \xrightarrow{g} g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 3(2x - 1) - 1 = 4x^2 + 2x - 3.$$

Δηλαδή, $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 2x - 3$.

Για τη σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ έχουμε

$$x \xrightarrow{g} g(x) = x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{f} f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 1) = 2(x^2 + 3x - 1) - 1 = 2x^2 + 6x - 3.$$

Δηλαδή, $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 6x - 3$.

Από τους παραπάνω τύπους των σύνθετων συναρτήσεων $g \circ f$, $f \circ g$ είναι φανερό ότι ο **Ορισμός 1.2.1** δεν επαληθεύεται, συνεπώς $g \circ f \neq f \circ g$, από όπου συμπεραίνεται ότι **δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα** στη σύνθεση συναρτήσεων.

Για τη σύνθεση συνάρτηση $f \circ f$, όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έχουμε

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- v) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 2, & x > 3 \end{cases}$, επειδή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

μπορεί να οριστεί η σύνθεση $g \circ f$, για την οποία έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} f^2(x) - 1, & f(x) \leq 3 \\ 3f(x) - 2, & f(x) > 3 \end{cases} = \begin{cases} (2x+1)^2 - 1, & f(x) \leq 3 \\ 3(2x+1) - 2, & f(x) > 3 \end{cases}$$

Έτσι για τη σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ μπορούμε να γράψουμε:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x, & 2x+1 \leq 3 \\ 6x+1, & 2x+1 > 3 \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 + 4x, & x \leq 1 \\ 6x+1, & x > 1 \end{cases}.$$

∞∞

Ορισμός 1.2.8. Έστω $f : A \rightarrow B$ μία 1-1 συνάρτηση. Η συνάρτηση $g : B \rightarrow A$, για την οποία ισχύει

$$g(y) = x, \text{ για κάθε } y \in B \Leftrightarrow f(x) = y, \quad (1.2.1)$$

ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** (inverse function) της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

Παρατηρήσεις 1.2.9.

- i) Θεωρώντας τις συναρτήσεις f, g του **Ορισμού 1.2.8** έχουμε να σημειώσουμε ότι η $g : B \rightarrow A$ είναι πράγματι συνάρτηση, γιατί, αν $g(y) = x_1$ και $g(y) = x_2$, τότε λόγω του ορισμού της $f(x_1) = y = f(x_2)$ και εφόσον η f είναι αμφιμονοσήμαντη (ως 1-1) προκύπτει $x_1 = x_2$. Η συνθήκη της «επί» συνάρτησης για την f είναι αναγκαία, προκειμένου η «νέα» συνάρτηση g (η αντίστροφη της f) να ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο B κι όχι σε ένα υποσύνολο του. Είναι, λοιπόν, αναγκαία και ικανή η συνθήκη «η $f : A \rightarrow B$ είναι μία 1-1 συνάρτηση» για την αντιστροφή της f .
- ii) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow A$ του **Ορισμού 1.2.8**, ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f : A \rightarrow A$ και $f \circ g : B \rightarrow B$. Πράγματι,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = I_A(x), \text{ για κάθε } x \in A,$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_B(y), \text{ για κάθε } y \in B,$$

όπου I_A, I_B οι ταυτοτικές συναρτήσεις στα σύνολα A και B , αντίστοιχα. Έτσι,

$$g \circ f = I_A \text{ και } f \circ g = I_B,$$

απ' όπου η g αποκτά το όνομά της και το συμβολισμό της (η f^{-1} είναι το ανάλογο του αντίστροφου ενός μη μηδενικού πραγματικού αριθμού).

- iii) Έστω οι 1-1 συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$(f^{-1})^{-1} = f \quad \text{και} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Παραδείγματα 1.2.10.

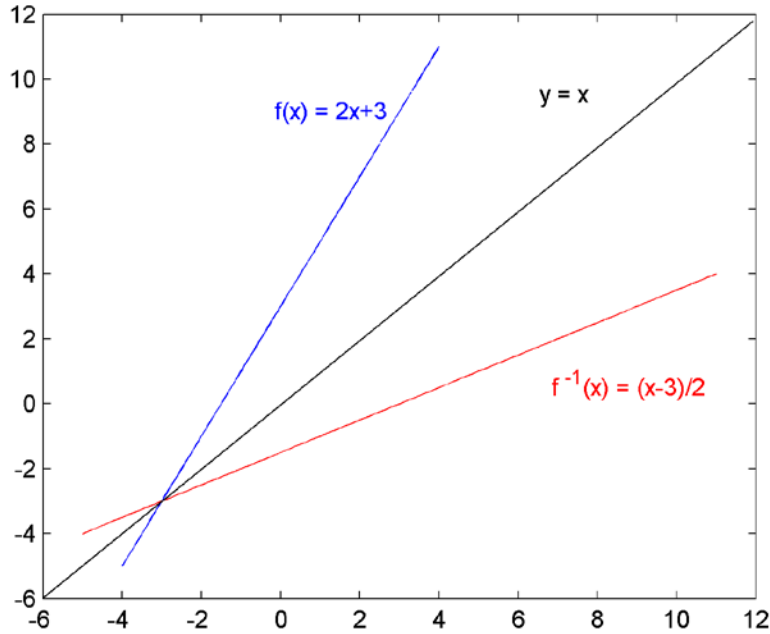
- i) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x + 3$ είναι 1-1, (βλέπε, **Παράδειγμα 1.1.9 (i)**). Επομένως, σύμφωνα με τον **Ορισμό 1.2.8**, υπάρχει η αντίστροφη της f . Ακολουθώντας τη μεθοδολογία υπολογισμού του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης (βλέπε, **Παρατήρηση 1.2.9. (v)**) έχουμε

$$y = f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}.$$

Αλλάζοντας στον παραπάνω τύπο τα x με y συμπεραίνουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

Στο **Σχήμα 1.7** αναπαριστώνται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f (μπλε χρώμα) της f^{-1} (κόκκινο) και η διχοτόμος-ευθεία $y = x$ (μαύρο).



Σχήμα 1.7: Γραφικές παραστάσεις γραμμικής συνάρτησης, αντιστρόφου της και της διχοτόμου της πρώτης γωνίας του επιπέδου.

ii) Έστω $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{\sqrt{3}, 5, 11\}$ και η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$, όπου

$$f(-1) = 5, f(2) = \sqrt{3} \text{ και } f(3) = 11.$$

Από τον ορισμό της η f είναι μία 1-1 συνάρτηση και η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1} : \{\sqrt{3}, 5, 11\} \rightarrow \{-1, 2, 3\},$$

όπου $f^{-1}(\sqrt{3}) = 2, f^{-1}(5) = -1$ και $f^{-1}(11) = 3$.

iii) Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$ είναι 1-1 συνάρτηση (γιατί;). Η αντίστροφή της ορίζεται με τύπο $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

iv) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, με $f(x) = x^2$ **δεν** είναι αντιστρέψιμη, επειδή δεν είναι 1-1. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι επί (βλέπε, [Παράδειγμα 1.1.7 \(i\)](#)) ωστόσο δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, επειδή για δύο διαφορετικά $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$ είναι $f(1) = 1 = f(-1)$, επομένως δεν ισχύει ο [Ορισμός 1.1.3](#). \diamond

Παρατήρηση 1.2.11.

i) Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της γραφικής παράστασης μίας 1-1 συνάρτησης f , τότε είναι φανερό ότι

$$(x, y) = (x, f(x)) = (f^{-1}(y), y),$$

δηλαδή, οι γραφικές παραστάσεις της f και f^{-1} ταυτίζονται, όταν για την f^{-1} θεωρούμε ανεξάρτητη μεταβλητή επί του άξονα $y'Oy$. Ενώ, αν ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} δίνεται θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή επί του άξονα $x'Ox$, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του επιπέδου xOy , (βλέπε, [Σχήμα 1.7](#)).

ii) Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθούμε κατά τον υπολογισμό της αντίστροφης f^{-1} συνάρτησης,

➤ όταν δίνεται μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη, (βλέπε, [Ορισμός 1.1.3.](#)).
- Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f , το οποίο πρέπει να είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .
- Υπολογίζουμε τον τύπο της f^{-1} , ο οποίος προκύπτει από την επίλυση ως προς x της $y = f(x)$ και αλλάζοντας στον τύπο που παράγεται τα x με y .

➤ όταν η συνάρτηση δίνεται με κλάδους

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{αν } x \in A_2 \end{cases}$$

- Εξετάζουμε αν οι συναρτήσεις $f_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντες, αν τουλάχιστον μία δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, συνεπώς η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται, επειδή μία από τις προϋποθέσεις του [Ορισμός 1.1.3.](#) δεν ισχύει.
- Βρίσκουμε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων των κλάδων, $f_1(A_1)$ και $f_2(A_2)$.
 - Αν για τα σύνολα $f_1(A_1), f_2(A_2)$ ισχύει $f_1(A_1) \cap f_2(A_2) \neq \emptyset$, τότε η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται, επειδή δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.
 - Αν $f_1(A_1) \cap f_2(A_2) = \emptyset$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει και ο τύπος της δίνεται

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} f_1^{-1}(x), & \text{αν } x \in f_1(A_1) \\ f_2^{-1}(x), & \text{αν } x \in f_2(A_2) \end{cases}$$

όπου οι τύποι των συναρτήσεων f_1^{-1}, f_2^{-1} υπολογίζονται, όπως αναφέρθηκε προηγουμένα, στην περίπτωση της μίας συνάρτησης.

Ορισμός 1.2.12. Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση ονομάζεται

i) **άνω φραγμένη** (upper bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leq M$. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** (upper bound) της f .

Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα της συνάρτησης ονομάζεται **άνω πέρασ** (supremum) και συμβολίζεται $\sup_{x \in A} f$.

ii) **κάτω φραγμένη** (lower bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $m \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geq m$. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της f .

Το μέγιστο από τα κάτω φράγματα της συνάρτησης ονομάζεται **κάτω πέρασ** (infimum) και συμβολίζεται $\inf_{x \in A} f$.

iii) **φραγμένη** (bounded), όταν η συνάρτηση f είναι άνω και κάτω φραγμένη.

iv) **απόλυτα φραγμένη** (absolute bounded), όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $|f(x)| \leq a$. Ο αριθμός a ονομάζεται **απόλυτο φράγμα** της f .

Παρατήρηση 1.2.13.

Εφαρμόζοντας τη γνωστή ιδιότητα της απόλυτης τιμής, από την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$,

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta,$$

μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία απόλυτα φραγμένη συνάρτηση είναι και φραγμένη, επειδή το απόλυτο φράγμα είναι ένα άνω φράγμα και ο αντίθετος πραγματικός αριθμός του απολύτου φράγματος αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τη συνάρτηση.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι απόλυτα φραγμένη από το 1, το οποίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η f έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το -1 , (βλέπε, [Παρατήρηση 1.5.2. \(iii\)](#)).

Συνεπώς, όταν χρειάζεται να «εντοπίσουμε» κάποιο φράγμα (άνω ή κάτω) μίας συνάρτησης, αρχικά μπορούμε να αναζητήσουμε την ύπαρξη ενός απόλυτου φράγματος αυτής.

Αν δεν υπάρχει απόλυτο φράγμα, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν είναι άνω και κάτω φραγμένη από τον ίδιο (κατά απόλυτη τιμή) πραγματικό αριθμό, το οποίο δεν είναι ισοδύναμο με το ότι η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ή να μην είναι φραγμένη.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι **κάτω φραγμένη** από το μηδέν ή οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό, (βλέπε, [Παράδειγμα 1.1.7. \(i\)](#)) ωστόσο **δεν** είναι άνω φραγμένη, επομένως δεν μπορεί να είναι απόλυτα φραγμένη.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ **δεν** είναι φραγμένη (ούτε απόλυτα, ούτε απλά), συνεπώς **δεν υπάρχει** κάποιο άνω ή κάτω φράγμα της (βλέπε, [Παράδειγμα 1.1.14. \(iii\)](#)).

Πρόταση 1.2.14.

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί k_1, k_2 και οι απόλυτα φραγμένες συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $k_1 f + k_2 g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απόλυτα φραγμένη.

Απόδειξη: Αρχικά, το άθροισμα των συναρτήσεων ορίζεται στο A , επειδή οι f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού, (βλέπε, [Ορισμός 1.2.3. \(i\)](#)).

Επειδή οι συναρτήσεις είναι απόλυτα φραγμένες, σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.2.12 \(iv\)](#), υπάρχουν $a_1, a_2 > 0$ τέτοιοι ώστε $|f(x)| \leq a_1$ και $|g(x)| \leq a_2$, για κάθε $x \in A$.

Επομένως, για κάθε $x \in A$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |(k_1 f + k_2 g)(x)| &= |k_1 f(x) + k_2 g(x)| \leq |k_1 f(x)| + |k_2 g(x)| \\ &= |k_1| |f(x)| + |k_2| |g(x)| \leq |k_1| a_1 + |k_2| a_2 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Προφανώς $|k_1| a_1 + |k_2| a_2$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, επομένως η (1.2.2) επαληθεύει τον [Ορισμό 1.2.12. \(iv\)](#). ◊◊

Ορισμός 1.2.15. Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση ονομάζεται

i) **άρτια** (even function), όταν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $-x \in A$, και ισχύει

$$f(-x) = f(x). \quad (1.2.3)$$

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'0y$.

ii) **περιττή** (odd function), όταν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $-x \in A$, και ισχύει

$$f(-x) = -f(x). \quad (1.2.4)$$

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων.

Παράδειγματα 1.2.16.

i) Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, όπου $g(x) = |x|$, είναι άρτιες, επειδή τα πεδία ορισμού τους είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και επιπλέον ισχύει η (1.2.3).

Επιπλέον, ο $y'0y$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεών τους, (βλέπε, τη G_f στο [Σχήμα 1.2](#)). Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι μία άρτια συνάρτηση **δεν** είναι αμφιμονοσήμαντη, (γιατί;).

ii) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$, οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = ax^3$ και $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, όπου $g(x) = \frac{a}{x}$, είναι περιττές, επειδή τα πεδία ορισμού τους είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και επιπλέον ισχύει η (1.2.4).
 Επιπλέον, η αρχή των αξόνων αποτελεί κέντρο συμμετρίας των γραφικών παραστάσεών τους, (βλέπε, Σχήμα 1.4 και Σχήμα 1.5, αντίστοιχα). $\diamond\diamond$

Ορισμός 1.2.17. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει ένας μη μηδενικός αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $x + T \in A$, και ισχύει

$$f(x + T) = f(x), \quad (1.2.5)$$

ονομάζεται **περιοδική συνάρτηση** (periodic function) και ο μικρότερος θετικός αριθμός T , για τον οποίο επαληθεύεται η ισότητα στην (1.2.5), λέγεται **περίοδος** της f .

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά T .

Παράδειγμα 1.2.18.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin(x)$, $\cos(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, και οι συναρτήσεις $\tan(x)$, $\cot(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \pi$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (ii), Παρατήρηση 1.5.6 (ii), Παρατήρηση 1.5.10 (ii), Παρατήρηση 1.5.12 (ii), αντίστοιχα). $\diamond\diamond$

1.3. Μονοτονία συνάρτησης. Ακρότατα συνάρτησης

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε την έννοια της μονοτονίας μίας συνάρτησης, έννοια που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές, επειδή οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτές είναι μονότονες σε όλο το πεδίο ορισμού τους ή «κατά τμήματα» μονότονες. Η δε έννοια της μονοτονίας μπορεί να δώσει πληροφορίες για τις «ακριανές τιμές» της συνάρτησης, για το σύνολο τιμών της, κ.α.

Ορισμός 1.3.1. Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Η συνάρτηση ονομάζεται

i) **αύξουσα** (increasing) στο B , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.

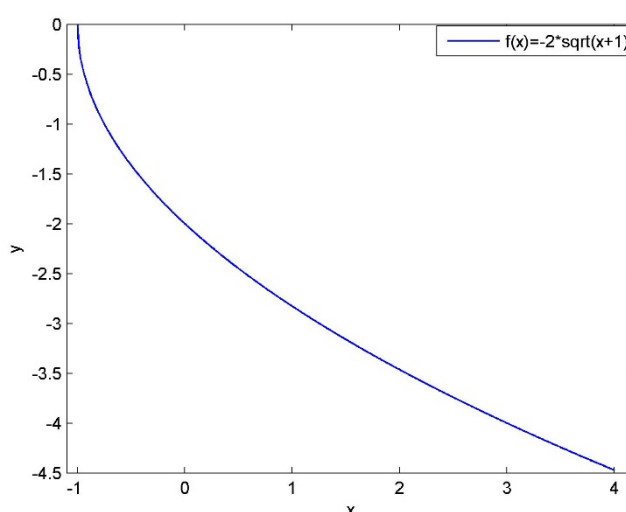
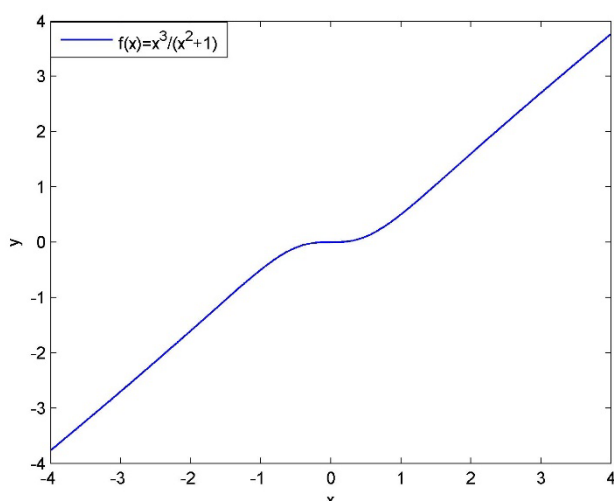
Συμβολικά : $f \uparrow$. Σχήμα 1.8 (α)

ii) **γνήσια αύξουσα** (strictly increasing) στο B , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

iii) **φθίνουσα** (decreasing) στο B , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. Συμβολικά : $f \downarrow$

iv) **γνήσια φθίνουσα** (strictly decreasing) στο B , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Σχήμα 1.8 (β)

v) **(γνήσια) μονότονη** στο B , όταν η συνάρτηση είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα στο B .



Σχήμα 1.8: Μονοτονία συναρτήσεων (α) : Η συνάρτηση είναι αύξουσα (β) Η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.

Παρατηρήσεις 1.3.2.

i) Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Αν η συνάρτηση είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα στο B , τότε αυτή είναι μία σταθερή συνάρτηση στο B .

ii) Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Πολλές φορές, προκειμένου να προσδιοριστεί το είδος της μονοτονίας της f αντί για την εφαρμογή του Ορισμού 1.3.1., χρησιμοποιείται ο **λόγος μεταβολής** της f στα $x_1, x_2 \in A$, ο οποίος ορίζεται να είναι

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \quad (1.3.1)$$

Επειδή στην (1.3.1.) θεωρήσαμε $x_1 \neq x_2$ και σε όλες τις περιπτώσεις του Ορισμού 1.3.1. υποθέτουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, η αντιστοιχία του λόγου μεταβολής με τον Ορισμό 1.3.1. είναι :

- Αν $\lambda \geq 0$, η f είναι αύξουσα

- Αν $\lambda > 0$, η f είναι γνήσια αύξουσα
- Αν $\lambda \leq 0$, η f είναι φθίνουσα
- Αν $\lambda < 0$, η f είναι γνήσια φθίνουσα
- Αν $\lambda = 0$, η f είναι σταθερή

iii) Χρησιμοποιώντας τον **Ορισμό 1.3.1.** είναι άμεσο να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ γνήσια μονότονη στο κλειστό διάστημα $A = [a, b]$ είναι φραγμένη.

iv) Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι γνήσια αύξουσα σε δύο υποσύνολα A_1, A_2 του πεδίου ορισμού A . Δεν είναι αναγκαίο η συνάρτηση f να είναι γνήσια αύξουσα στο $A_1 \cup A_2$. Ο ίδιος ισχυρισμός αληθεύει αντικαθιστώντας την έννοια γνήσια αύξουσα με γνήσια φθίνουσα, ή με αύξουσα, ή με φθίνουσα.

Παραδείγματα 1.3.3.

i) Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$. Αν $a > 0$ η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και αν $a < 0$ η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.

Πράγματι, θεωρώντας $a > 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ο Ορισμός 1.3.1. (ii) επαληθεύεται, επειδή $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$, συνεπώς η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

Θεωρώντας $a < 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ο Ορισμός 1.3.1. (iv) επαληθεύεται, επειδή $f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$, συνεπώς η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.

Επίσης, επειδή η κλίση της ευθείας (βλέπε, **Παραδείγματα 1.1.14. (i)**) ταυτίζεται με τον λόγο στην **Παρατήρηση 1.3.2 (ii)**, η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το πρόσημο του λόγου στην (1.3.1).

ii) Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

Θεωρώντας $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, αρχικά υπολογίζεται ο λόγος μεταβολής της f από την (1.3.1), που είναι ίσος με

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - 4x_2 + 4 - (x_1^2 - 4x_1 + 4)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2 - 4x_2 + 4x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4. \end{aligned}$$

- Αν $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, τότε $\lambda = x_1 + x_2 - 4 > 0$. Επομένως, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.3.2 (ii)**, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$, τότε $\lambda = x_1 + x_2 - 4 < 0$. Επομένως, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.3.2 (ii)**, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Κεφαλαίου 6. ◇◇

Πρόταση 1.3.4.

Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ γνήσια μονότονη στο $B \subseteq A$. Τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο B , οπότε σύμφωνα με τον **Ορισμό 1.3.1. (ii)** για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ (δηλαδή, $x_1 \neq x_2$) ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα, τα δύο τυχαία $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 \neq x_2$, επαληθεύουν τη συνεπαγωγή στον **Ορισμό 1.1.3.**, συνεπώς η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη.

Αν η συνάρτηση θεωρηθεί γνήσια φθίνουσα η απόδειξη είναι ανάλογη. ◇◇

Εφαρμογή 1.3.5.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^3$, και $a \neq 0$.

- i) Αν $a > 0$, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα.
 Αν $a < 0$, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα.
 ii) Η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη στο \mathbb{R} .

Απόδειξη:

i) Θεωρώντας $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, αρχικά υπολογίζεται ο λόγος μεταβολής της f από την (1.3.1), που είναι ίσος με

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^3 - ax_1^3}{x_2 - x_1} = a \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \\ &= a \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)}{x_2 - x_1} = a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Επειδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$ είναι αρνητική, $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0$, συνεπώς στην (1.3.2) το πρόσημο του λ είναι αυτό του a .

- Αν $a > 0$, τότε $\lambda > 0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} , (βλέπε, τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.4(a)).
- Αν $a < 0$, τότε $\lambda < 0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} , (βλέπε, τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.4(b)).

ii) Όπως προκύπτει από το (i), η συνάρτηση $f(x) = ax^3$ είναι γνήσια μονότονη στο \mathbb{R} , συνεπώς το συμπέρασμα είναι άμεσο αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.4. \diamond

Η αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη συνάρτηση, ιδιότητα που διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.6.

Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα). Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f είναι γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα).

Απόδειξη: Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, (βλέπε, Ορισμός 1.3.1). Αν η f^{-1} δεν είναι γνήσια αύξουσα, τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$, με $y_1 < y_2$, για τις εικόνες των οποίων ισχύει

$$f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2). \quad (1.3.3)$$

Επειδή $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A$ και η f είναι γνήσια αύξουσα, από την (1.3.3) έχουμε

$$f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 > y_2,$$

το οποίο είναι αδύνατο, επειδή υποθέσαμε $y_1 < y_2$. Άρα, η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα. Ανάλογα αποδεικνύεται και η περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνήσια φθίνουσα. \diamond

Ορισμός 1.3.7. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** (global maximum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **ολικού μεγίστου** και $f(x_0)$ **μέγιστη τιμή** της f .
- ii) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** (global minimum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **ολικού**

ελαχίστου και $f(x_0)$ ελάχιστη τιμή της f .

- iii) Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** (global extrema) της f .
- iv) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό μέγιστο** (local maximum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **τοπικού μεγίστου** και $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .
- v) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό ελάχιστο** (local minimum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **τοπικού ελαχίστου** και $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

Παράδειγμα 1.3.8.

Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$, έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$. Το ολικό ελάχιστο είναι $f(2) = 0$.

Πράγματι, όπως αποδείχθηκε στο [Παράδειγμα 1.3.3 \(ii\)](#), η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \in [2, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq f(2)$, (βλέπε, [Ορισμό 1.3.1 \(ii\)](#)). Επειδή $f(2) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$, οπότε για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ ισχύει $f(x) \geq f(2) = 0$, (βλέπε, [Ορισμό 1.3.1 \(iv\)](#)). Συνεπώς, $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 2]$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \geq 0$, το οποίο επαληθεύει τον [Ορισμό 1.3.7 \(ii\)](#).

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σημείο ολικού ελαχίστου της συνάρτησης f ταυτίζεται με την κορυφή της παραβολής, που αναφέρθηκε στο [Παράδειγμα 1.1.14 \(ii\)](#) ως το σημείο $C\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, 0)$. ◇◇

1.4. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.4.1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, με $f(x) = a^x$, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a , ονομάζεται **εκθετική** (exponential) συνάρτηση με **βάση** τον αριθμό a και συμβολίζεται a^x .

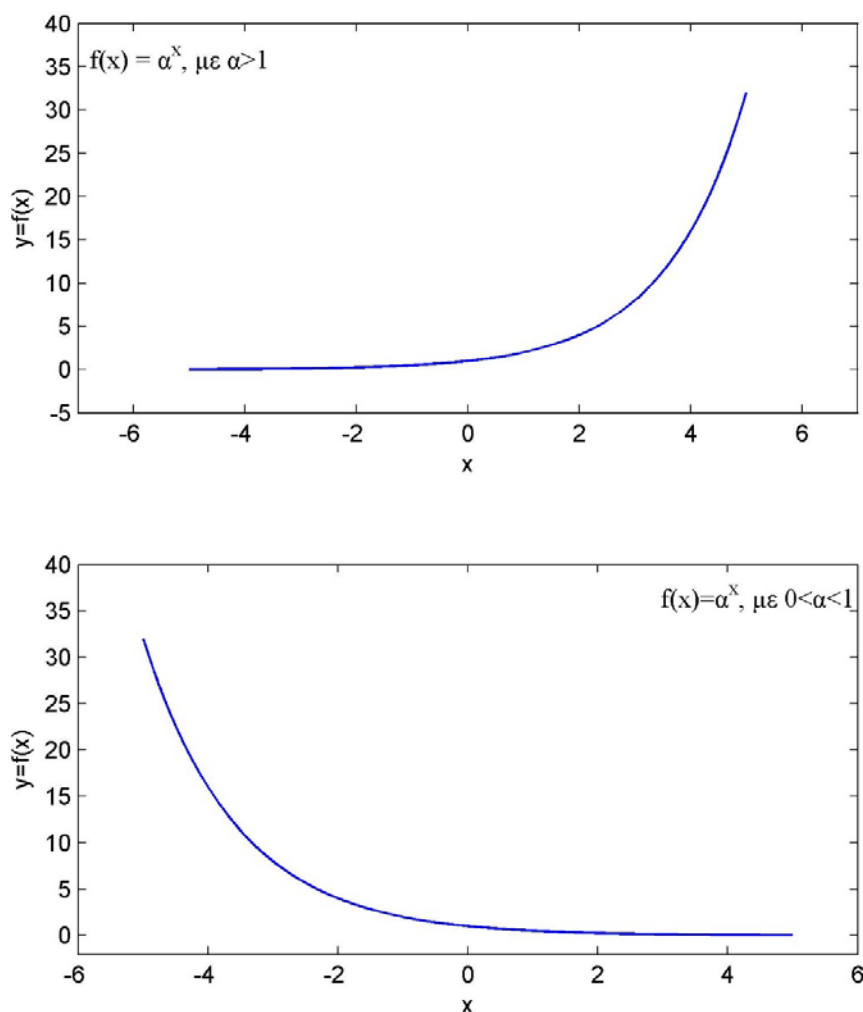
Όταν $a = 1$ η εκθετική συνάρτηση 1^x γίνεται σταθερή ίση με 1.

Μία σημαντική εκθετική συνάρτηση είναι η e^x (ή συμβολικά, $\exp(x)$) με βάση το νεπέρειο αριθμό

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2,718\dots \text{ (βλέπε, Ενότητα 2.6).}$$

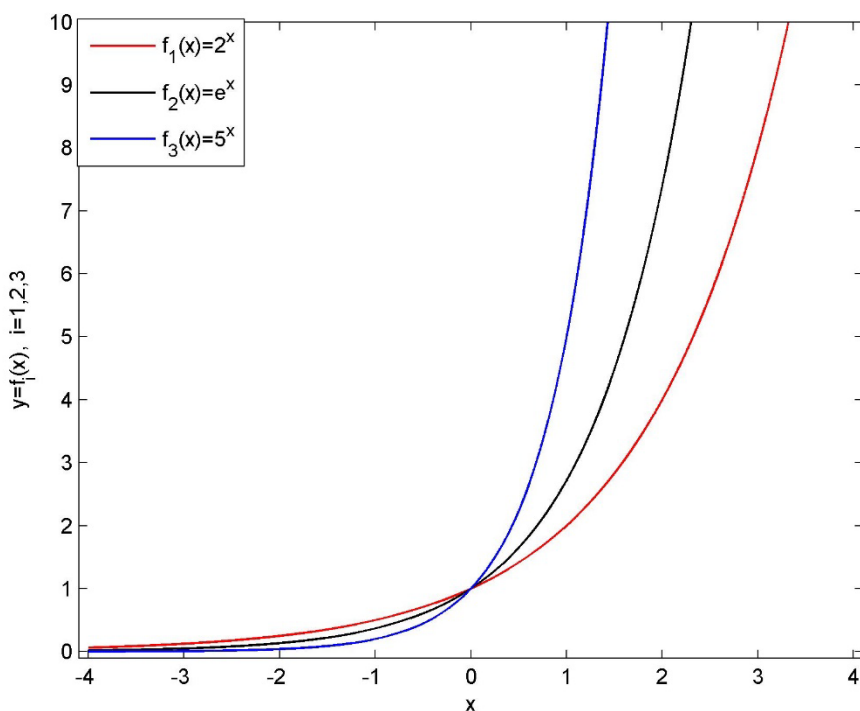
Παρατηρήσεις 1.4.2.

- Επειδή $a > 0$, είναι φανερό ότι, $a^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η εκθετική συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν (βλέπε, [Ορισμός 1.2.12.\(ii\)](#)), το δε σύνολο τιμών της a^x είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $(0, +\infty)$.
- Αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $a > 1$, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, [Ορισμός 1.3.1](#)), ενώ όταν $0 < a < 1$, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.9](#)).



Σχήμα 1.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$, με $a > 0$.

- iii) Για κάθε $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, συνδυάζοντας την [Πρόταση 1.3.4](#) με τη γνήσια μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης, (βλέπε, [Παρατήρηση 1.4.2 \(ii\)](#)), αποδεικνύεται ότι $f(x) = a^x$ είναι αμφιμονοσήμαντη.
- iv) Στο [Σχήμα 1.9](#) αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στην πάνω εικόνα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$, με $a > 1$, ενώ στην κάτω εικόνα η γραφική παράσταση με $0 < a < 1$.
- v) Στο [Σχήμα 1.10](#) παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων εκθετικών συναρτήσεων $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = e^x$, και $f_3(x) = 5^x$.



Σχήμα 1.10: Οι γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων $f(x) = a^x$, με $a > 1$.

Ορισμός 1.4.3. Έστω ο θετικός πραγματικός αριθμός a . Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x ορίζουμε τον αριθμό

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y. \quad (1.4.1)$$

Ο αριθμός $\log_a(x)$ ονομάζεται **λογάριθμος** (logarithm) του x με **βάση** τον αριθμό a .

Αν $a = 10$, ο λογάριθμος $\log_{10}(x)$ λέγεται **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται $\log(x)$, ενώ αν $a = e$ ο λογάριθμος $\log_e(x)$ λέγεται **νεπέρειος** ή **φυσικός λογάριθμος** και συμβολίζεται $\ln x$.

Η συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου } f(x) = \log_a(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty), \quad (1.4.2)$$

ονομάζεται **λογαριθμική** συνάρτηση με **βάση** τον a .

Παρατηρήσεις 1.4.4.

- i) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $a > 0$, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $(0, +\infty)$, (βλέπε, [Παρατήρηση 1.4.2 \(iii\)](#)), ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση

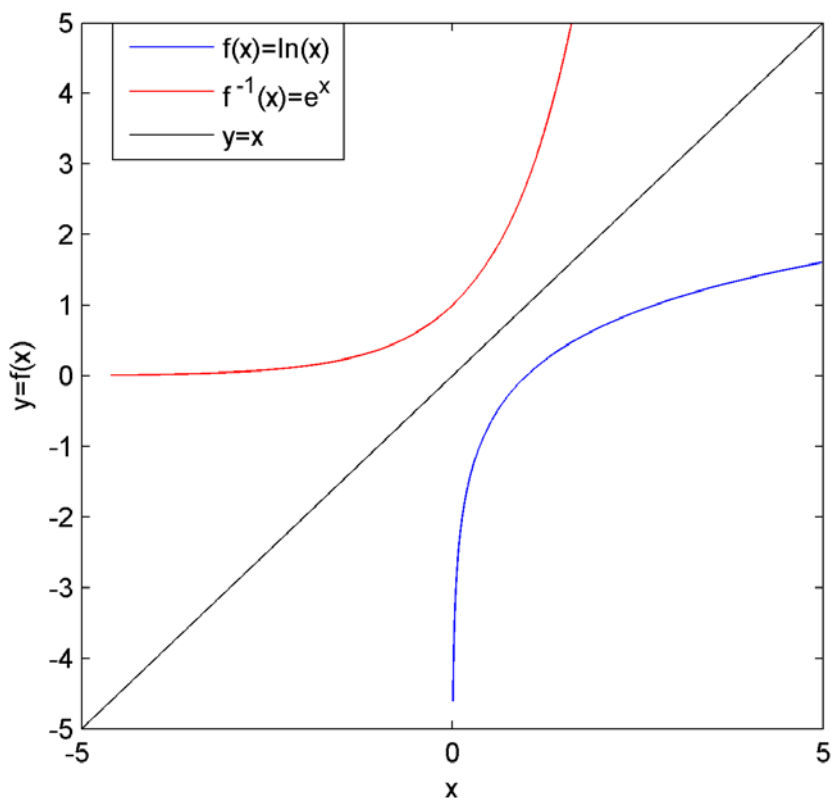
$f(x) = a^x$ να είναι 1-1 στο $(0, +\infty)$, (βλέπε, [Ορισμός 1.1.8.](#)). Τότε, σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.2.8.](#) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και από την [\(1.2.1\)](#) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = a^y = x$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την [\(1.4.1\)](#) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση είναι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον $a > 0$, δηλαδή, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης a^x είναι η λογαριθμική $\log_a(x)$. Άρα, η σχέση που συνδέει την εκθετική συνάρτηση με τη λογαριθμική συνάρτηση δίνεται από την [\(1.4.1\)](#), δηλαδή,

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y \tag{1.4.3}$$

Στο [Σχήμα 1.11](#) αναπαριστώνται οι γραφικές παραστάσεις της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ και της αντίστροφής της $f^{-1}(x) = e^x$. Παρατηρήστε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του επιπέδου xOy .

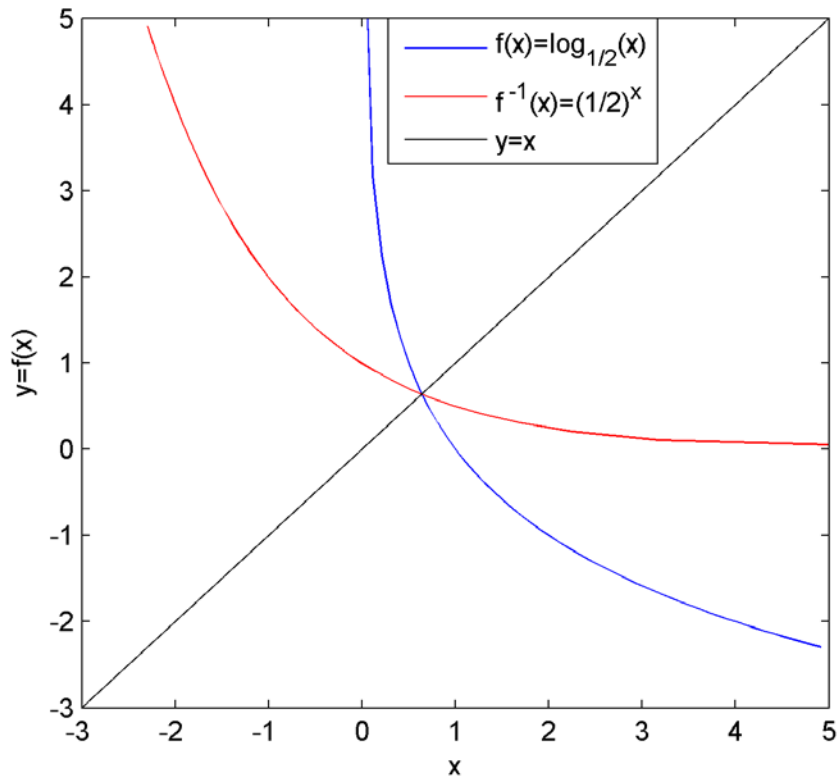


Σχήμα 1.11: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ και $f^{-1}(x) = e^x$.

ii) Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής, όπως αποδείχθηκε στο (i), έχει την ίδια μονοτονία με την εκθετική, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.6.](#)). Άρα, για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

- αν $a > 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.11](#)).
- αν $0 < a < 1$, η συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$, στο [Σχήμα 1.12](#) αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_{1/2}(x)$, και της αντίστοιχης αντίστροφής της εκθετικής συνάρτησης $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

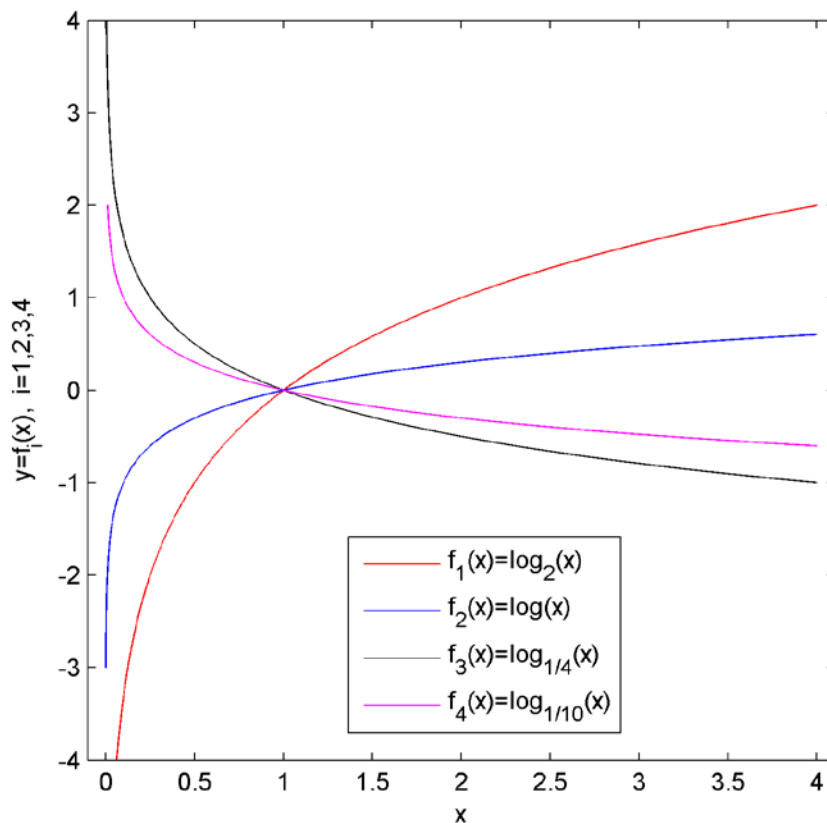


Σχήμα 1.12: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_{1/2}(x)$ και $f^{-1}(x) = (1/2)^x$.

iii) Συνδυάζοντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης από το (ii)-παραπάνω με την [Πρόταση 1.3.4.](#), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $a > 0$ και $x \in (0, +\infty)$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

iv) Στο [Σχήμα 1.13](#) παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων λογαριθμικών συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \log_2(x), \quad f_2(x) = \log(x), \quad f_3(x) = \log_{1/4}(x), \quad \text{και} \quad f_4(x) = \log_{1/10}(x)$$



Σχήμα 1.13: Οι γραφικές παραστάσεις λογαριθμικών συναρτήσεων $f(x) = \log_a(x)$ με $a > 0$.

v) Έστω $a > 0$. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των λογαρίθμων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.4.1.

Πίνακας 1.4.1: Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης με βάση $a > 0$

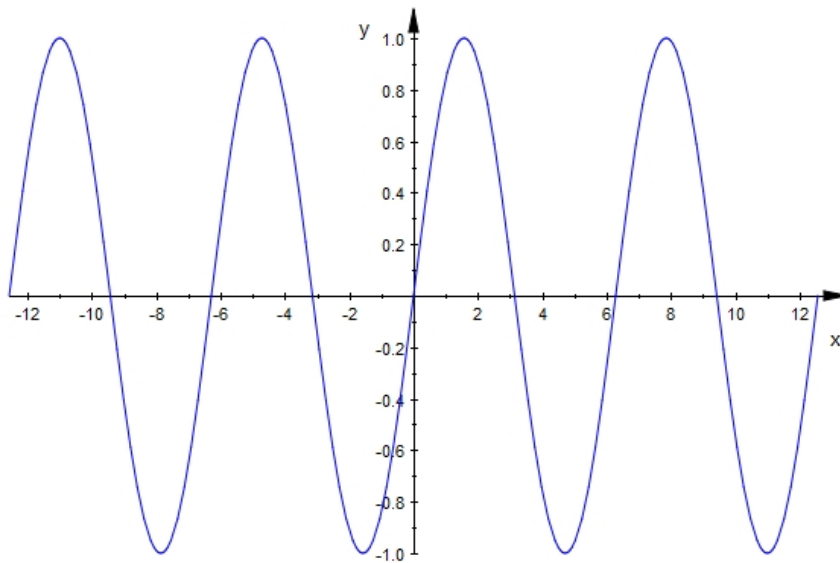
	Πεδίο ορισμού
$\log_a(a^x) = x$ και $a^{\log_a x} = x$,	$x > 0$
$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$	$x, y > 0$
$\log_a(x^k) = k \log_a(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	$x > 0$
$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$x, y > 0$
$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$	$x, b > 0$

1.5. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θεωρώντας γνωστούς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη μίας γωνίας x από τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, να εξετάσουμε την ύπαρξη των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού τους, ή σε κατάλληλο υποσύνολό του. Στη συνέχεια, x εκφράζει την τιμή μίας γωνίας σε ακτίνια.

Ορισμός 1.5.1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, με $f(x) = \sin(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **ημιτόνου** (sine) της γωνίας $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.14](#).



Σχήμα 1.14: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου, $f(x) = \sin(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.2.

- i) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.14](#) συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου $f(x) = \sin(x)$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**, δηλαδή, ισχύει $\sin(-x) = -\sin(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το οποίο αποδεικνύει την [ιδιότητα 13](#), (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).
- ii) Από το [Σχήμα 1.14](#) είναι φανερό ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο $f(x) = \sin(x)$ αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T = 2\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι **περιοδική**, με περίοδο $T = 2\pi$.
- iii) Σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.5.1](#), το σύνολο τιμών της συνάρτησης ημιτόνου είναι $[-1,1]$, δηλαδή, ένα κάτω φράγμα της είναι η τιμή -1 και ένα άνω φράγμα η τιμή 1 , συνεπώς η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι φραγμένη, και μάλιστα απόλυτα φραγμένη από την τιμή 1 , επειδή $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow |\sin(x)| \leq 1$, (βλέπε, [Ορισμός 1.2.12](#), (iii), (iv) και [Παρατήρηση 1.2.13](#)).
- iv) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα. Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.14](#), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in A_k$, με k άρτιο αριθμό, η συνάρτηση ημιτόνου $f(x) = \sin(x)$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, [Ορισμός 1.3.1](#)), ενώ όταν $x \in A_k$, με k περιττό αριθμό, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

v) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι γνήσια μονότονη στο εσωτερικό κάθε διαστήματος $A_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (iv)), συμπεραίνουμε ότι $f(x) = \sin(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4).

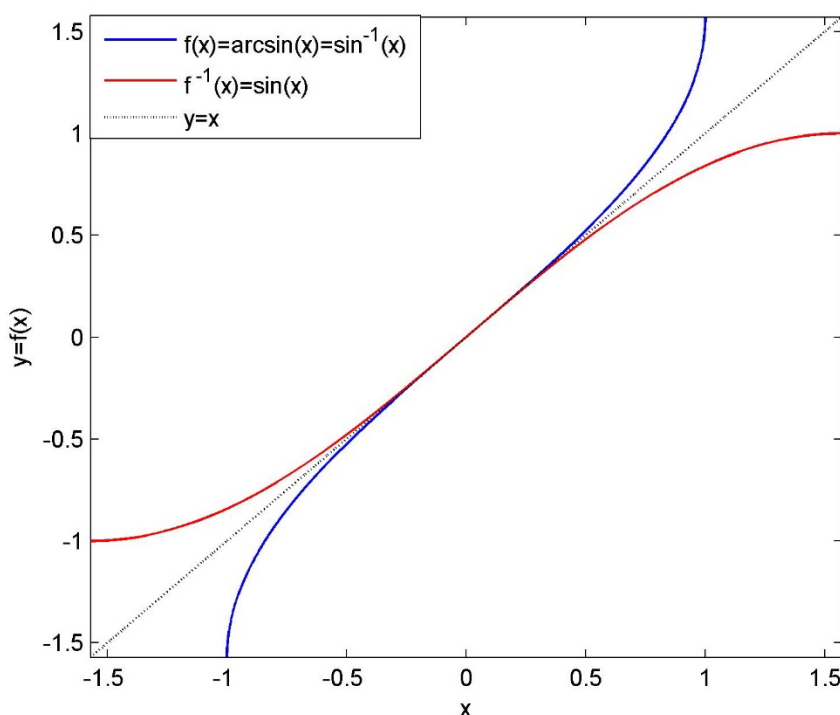
vi) Θεωρώντας $k=0$, η συνάρτηση ημιτόνου $f(x) = \sin(x)$, για κάθε $x \in A_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[-1, 1]$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (v) και Ορισμός 1.5.1), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ να είναι 1-1 στο A_0 . Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y) = x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \text{ για κάθε } y \in [-1, 1] \Leftrightarrow f(x) = \sin(x) = y \quad (1.5.1)$$

Ορισμός 1.5.3. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$, όπου $f(x) = \sin(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, η οποία ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με \arcsin ή \sin^{-1} . Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.1), δηλαδή,

$$\sin^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sin(x) = y.$$

Για παράδειγμα, $\arcsin(1) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.



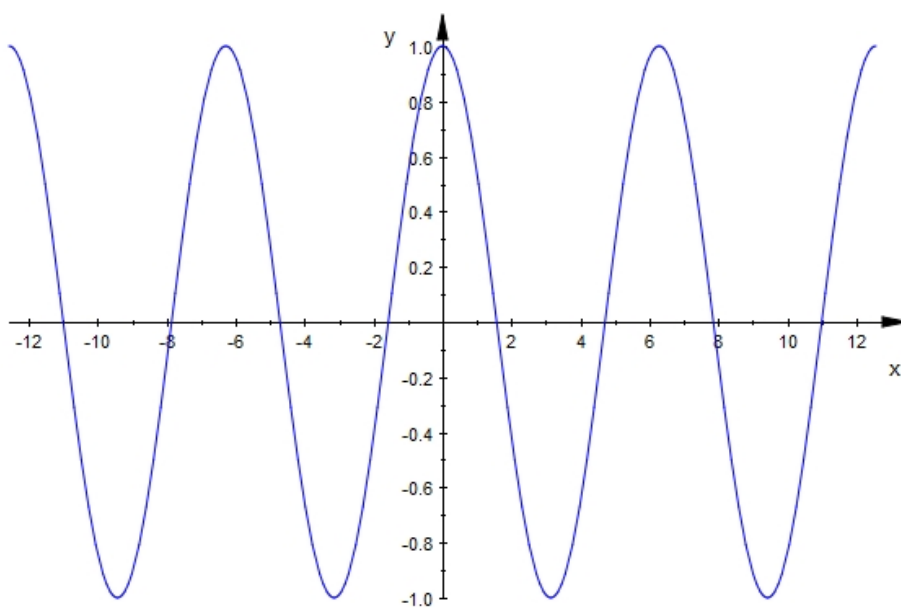
Σχήμα 1.15: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο ημιτόνου $f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ και ημιτόνου $f^{-1}(x) = \sin(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.4.

- i) Στο **Σχήμα 1.15** με μπλε χρώμα αναπαριστάται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο ημιτόνου $f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα η αντίστροφή της, $f^{-1}(x) = \sin(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.
- ii) Επειδή, για κάθε $x \in [-1, 1]$ η συνάρτηση τόξο ημιτόνου $f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου ορισμένο στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση του ημιτόνου, (βλέπε, **Πρόταση 1.3.6**). Άρα, για κάθε $x \in [-1, 1]$, η συνάρτηση $f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, **Σχήμα 1.15**).

Ορισμός 1.5.5. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, με $f(x) = \cos(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συνημιτόνου** (cosine) της γωνίας $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάται στο **Σχήμα 1.16**.



Σχήμα 1.16: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου, $f(x) = \cos(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.6.

- i) Παρατηρώντας στο **Σχήμα 1.16** συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'Oy$, συνεπώς, η συνάρτηση είναι **άρτια**, δηλαδή, ισχύει $\cos(-x) = \cos(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το οποίο αποδεικνύει την **ιδιότητα 13**, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).
- ii) Από το **Σχήμα 1.16** είναι φανερό ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$ αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T = 2\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι **περιοδική**, με περίοδο $T = 2\pi$.
- iii) Σύμφωνα με τον **Ορισμό 1.5.5**, το σύνολο τιμών της συνάρτησης συνημιτόνου είναι $[-1, 1]$, δηλαδή, ένα κάτω φράγμα της είναι η τιμή -1 και ένα άνω φράγμα η τιμή 1, συνεπώς η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι φραγμένη, (βλέπε, **Ορισμός 1.2.12. (iii)**).

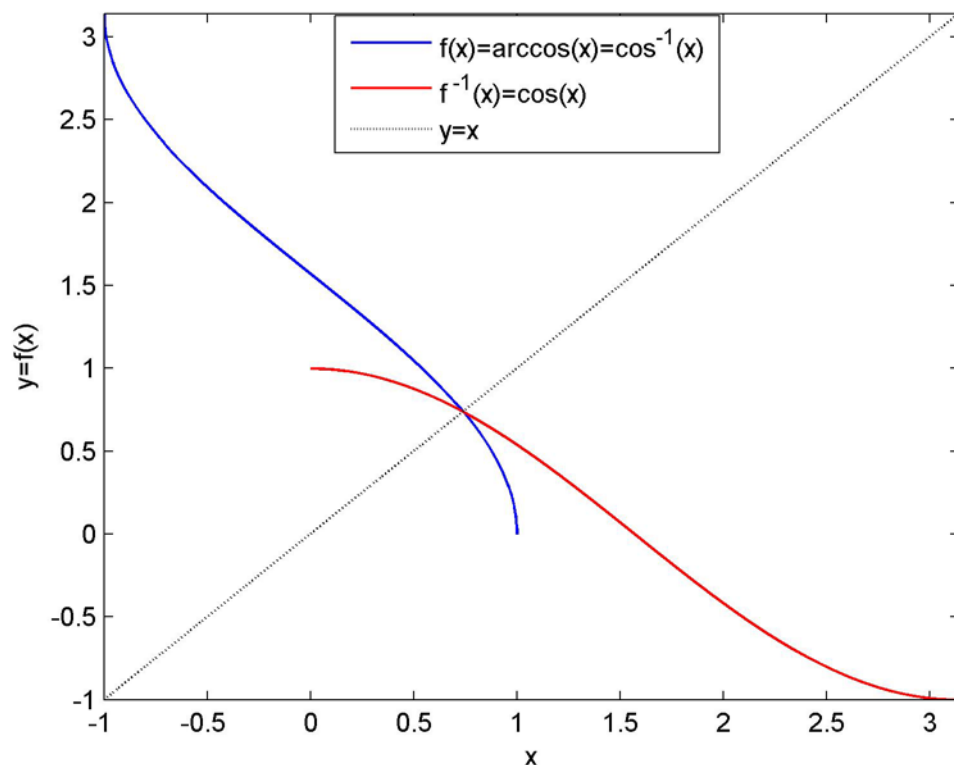
- iv) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.16](#) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in A_k = [k\pi, k\pi + \pi]$, k περιττός αριθμός, η συνάρτηση συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, [Ορισμός 1.3.1](#)), ενώ όταν $x \in A_k = [k\pi, k\pi + \pi]$, k άρτιος αριθμός, η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.
- v) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια μονότονη στο εσωτερικό κάθε διαστήματος $A_k = [k\pi, k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, [Παρατήρηση 1.5.2 \(iv\)](#)), συμπεραίνουμε ότι $f(x) = \cos(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.4](#)).
- vi) Θεωρώντας $k=0$, η συνάρτηση συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$, για κάθε $x \in A_0 = [0, \pi]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[-1, 1]$, (βλέπε, [Παρατήρηση 1.5.6 \(v\)](#) και [Ορισμός 1.5.5](#)), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ να είναι 1-1 στο A_0 . Τότε, σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.2.8](#), ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, και από την [\(1.2.1\)](#) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y) = x \in [0, \pi], \text{ για κάθε } y \in [-1, 1] \Leftrightarrow f(x) = \cos(x) = y \quad (1.5.2)$$

Ορισμός 1.5.7. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, όπου $f(x) = \cos(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, η οποία ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με \arccos ή \cos^{-1} . Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην [\(1.5.2\)](#), δηλαδή,

$$\cos^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y.$$

Για παράδειγμα, $\arccos(1) = \cos^{-1}(1) = 0$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$.



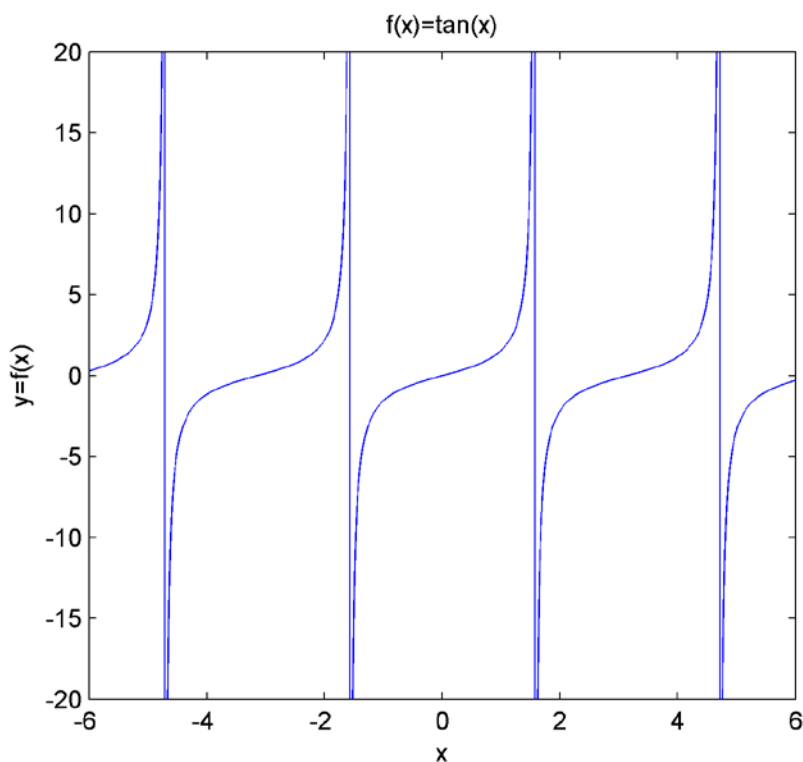
Σχήμα 1.17: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο συνημιτόνου $f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ και συνημιτόνου $f^{-1}(x) = \cos(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.8.

- i) Στο [Σχήμα 1.17](#) με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο συνημιτόνου $f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα η αντίστροφή της, $f^{-1}(x) = \cos(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.
- ii) Επειδή, για κάθε $x \in [-1, 1]$, η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου $f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση του συνημιτόνου ορισμένο στο $[0, \pi]$, έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση του συνημιτόνου, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.6](#)). Άρα, για κάθε $x \in [-1, 1]$, η συνάρτηση $f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.17](#)).

Ορισμός 1.5.9. Έστω $A = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **εφαπτομένης** (tangent) της γωνίας $x \in A$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάνεται στο [Σχήμα 1.18](#). Παρατηρήστε ότι στο σχήμα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» της γραφικής παράστασης της $f(x) = \tan(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x , ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.18: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης $f(x) = \tan(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.10.

i) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.18](#) συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης

$f(x) = \tan(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**, δηλαδή, ισχύει $\tan(-x) = -\tan(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, το οποίο αποδεικνύει την **ιδιότητα 13**, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).

ii) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα.

Από το [Σχήμα 1.18](#) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in A_k$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης $f(x) = \tan(x)$, αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T = \pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \tan(x)$ είναι **περιοδική**, με περίοδο $T = \pi$.

iii) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.18](#) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in A_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$, με $k \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση εφαπτομένης $f(x) = \tan(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Επειδή η $f(x) = \tan(x)$, για κάθε $x \in A_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι γνήσια αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση $f(x) = \tan(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη σε κάθε A_k , $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.4.](#)).

Θεωρώντας $k = 0$, η συνάρτηση εφαπτομένης $f(x) = \tan(x)$, για κάθε $x \in A_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του \mathbb{R} , (βλέπε, [Ορισμός 1.5.9](#)), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x) = \tan(x)$ να είναι 1-1 στο A_0 . Τότε, σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.2.8](#), ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, και από την [\(1.2.1\)](#) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y) = x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \tan(x) = y \quad (1.5.3)$$

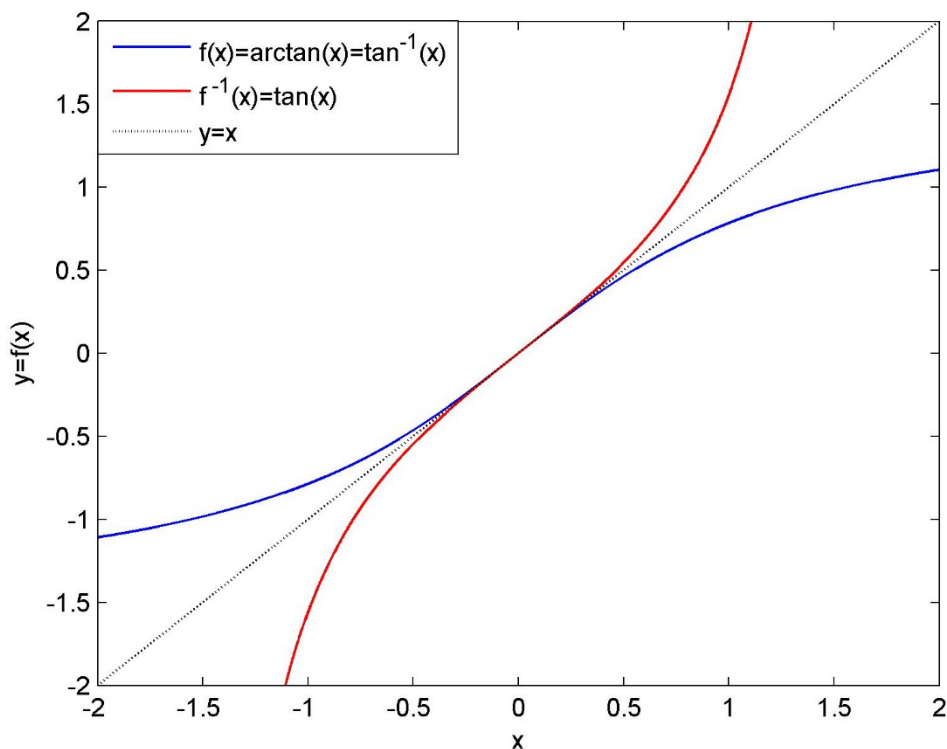
Ορισμός 1.5.11. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \tan(x)$. Η αντίστροφη της f

είναι $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, η οποία ονομάζεται **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζεται με \arctan ή \tan^{-1} .

Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην [\(1.5.3\)](#), δηλαδή,

$$\tan^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \tan(x) = y.$$

Για παράδειγμα, $\arctan(1) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan(-1) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.



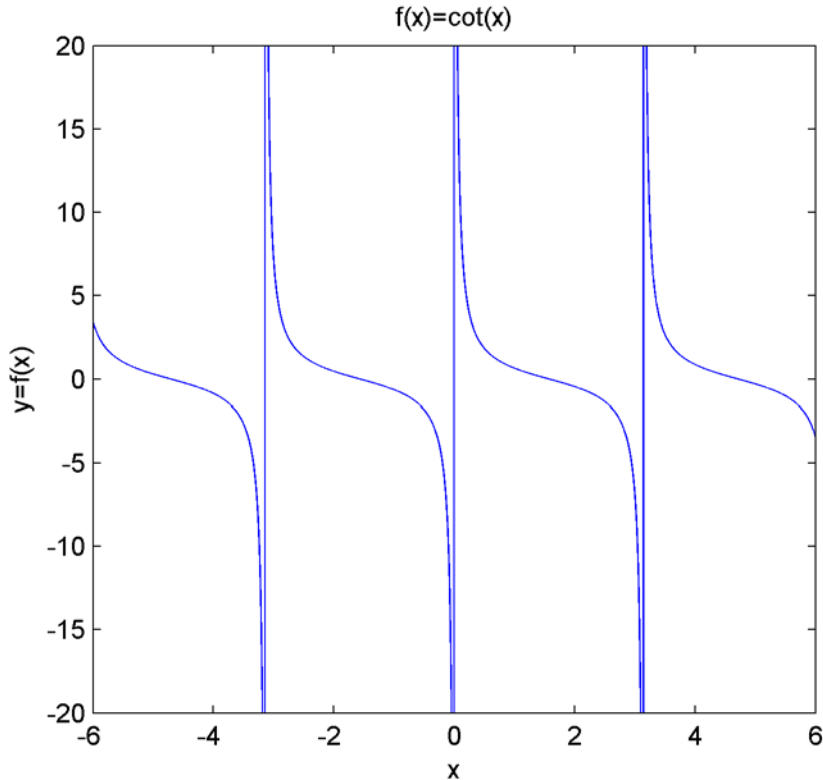
Σχήμα 1.19: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο εφαπτομένης $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ και εφαπτομένης $f^{-1}(x) = \tan(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.12.

- i) Στο [Σχήμα 1.19](#) με μπλε χρώμα αναπαριστάται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο εφαπτομένης $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα σχεδιάζεται η αντίστροφη της, $f^{-1}(x) = \tan(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.
- ii) Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.19](#)), επειδή $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης ορισμένης στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεπώς έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση της εφαπτομένης, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.6](#)).
- iii)

Ορισμός 1.5.13. Έστω $A = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συνεφαπτομένης** (contangent) της γωνίας $x \in A$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.20](#). Παρατηρήστε ότι στο σχήμα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» της γραφικής παράστασης της $f(x) = \cot(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x , ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.20: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x) = \cot(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.14.

- i) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.20](#) συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x) = \cot(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**, δηλαδή, ισχύει $\cot(-x) = -\cot(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, το οποίο αποδεικνύει την **ιδιότητα 13**, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).
- ii) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k = (k\pi, k\pi + \pi)$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα. Από το [Σχήμα 1.20](#) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in A_k$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x) = \cot(x)$, αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T = \pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \cot(x)$ είναι **περιοδική**, με περίοδο $T = \pi$.
- iii) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.20](#) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in A_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, με $k \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση συνεφαπτομένης $f(x) = \cot(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).
- iv) Επειδή η $f(x) = \cot(x)$, για κάθε $x \in A_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι γνήσια φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση $f(x) = \cot(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη σε κάθε A_k , $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.4](#)). Θεωρώντας $k = 0$, η συνάρτηση $f(x) = \cot(x)$, για κάθε $x \in A_0 = (0, \pi)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του \mathbb{R} , (βλέπε, [Ορισμός 1.5.13](#)), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x) = \cot(x)$ να είναι **1-1** στο A_0 . Συνεπώς, σύμφωνα με τον [Ορισμό 1.2.8](#), ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, και από την [\(1.2.1\)](#) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y) = x \in (0, \pi), \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \cot(x) = y \quad (1.5.4)$$

Ορισμός 1.5.15. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \cot(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, η οποία ονομάζεται **τόξο συνεφαπτομένης** και συμβολίζεται με arccot ή \cot^{-1} . Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.4), δηλαδή,

$$\cot^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cot(x) = y.$$

Στο Σχήμα 1.21 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της \cot^{-1} .

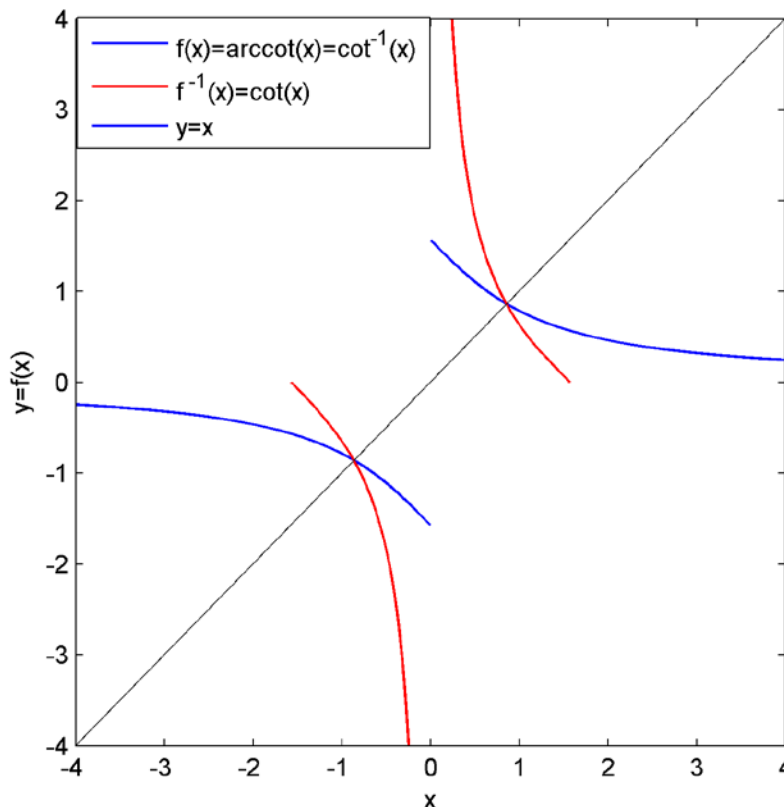
Για παράδειγμα, $\text{arccot}(1) = \cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\text{arccot}(0) = \cot^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Παρατηρήσεις 1.5.16.

i) Στο Σχήμα 1.21 αναπαριστάνεται με μπλε χρώμα η γραφική παράσταση τόξο συνεφαπτομένης $f(x) = \text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$, $x \in (-4, 4)$, και με κόκκινο χρώμα σχεδιάζεται η αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \cot(x)$. Σχεδιασμένη με μαύρο χρώμα είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ στην περιοχή γύρω από το μηδέν δεν είναι συνεχής, επειδή το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστροφη συνάρτησή της $f^{-1}(x) = \cot(x)$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.21), επειδή $f(x) = \text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της συνεφαπτομένης ορισμένης στο $(0, \pi)$, συνεπώς έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση της συνεφαπτομένης, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.).



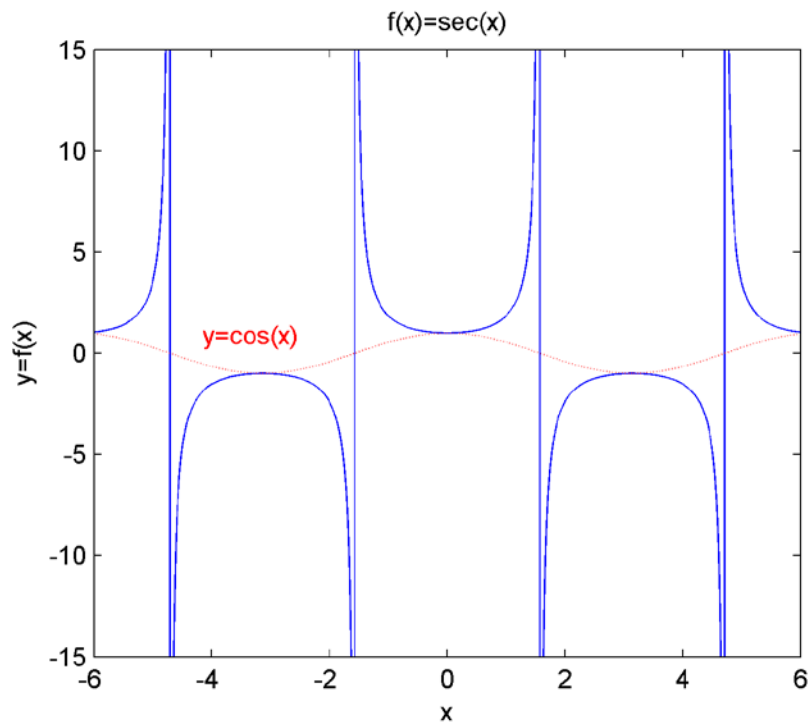
Σχήμα 1.21: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο συνεφαπτομένης $f(x) = \text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ και εφαπτομένης $f^{-1}(x) = \cot(x)$.

Ορισμός 1.5.17.

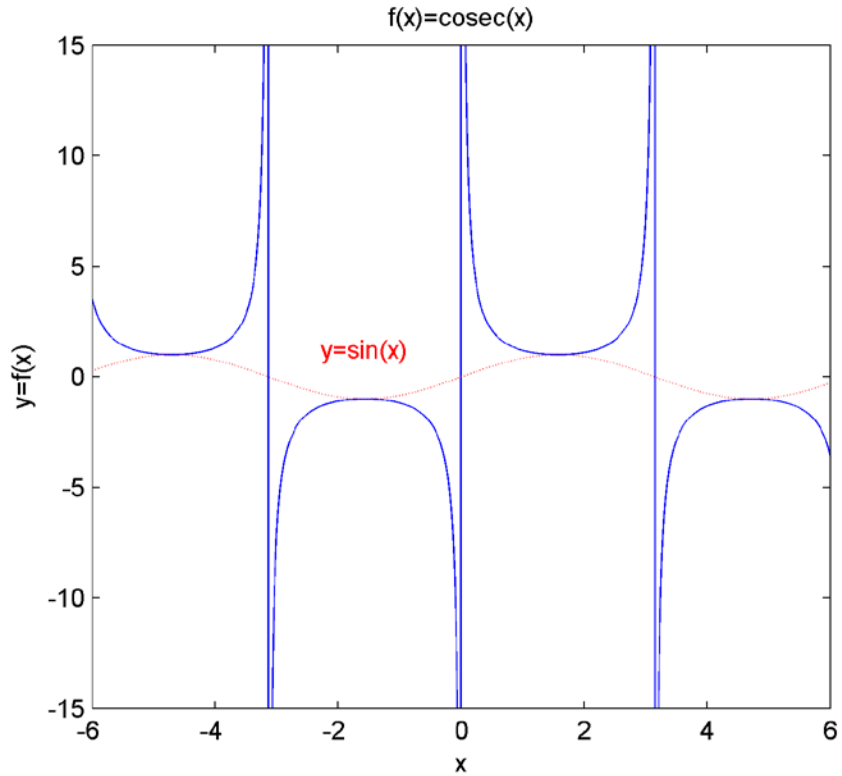
- i) Έστω $A = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **τέμνουσας** (secant) της γωνίας $x \in A$.
- ii) Έστω $A = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} = \operatorname{cosec}(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συντέμνουσας** (cosecant) της γωνίας $x \in A$.

Στο [Σχήμα 1.22](#) αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της τέμνουσας και στο [Σχήμα 1.23](#) της συντέμνουσας.

Παρατηρήστε ότι στα σχήματα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων των $f(x) = \sec(x)$, $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x , ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.22: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνουσας $f(x) = \sec(x)$.



Σχήμα 1.23: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συντέμνουσας $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$.

1.5.18. Τυπολόγιο τριγωνομετρικών αριθμών

Στον Πίνακα 1.5.1 αναφέρονται μερικές από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Πίνακας 1.5.1: Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1.	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	
2.	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	
3.	$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
4.	$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	
5.	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$	

6.	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$	
7.	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	
8.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin(x)$
9.	$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \sin(2k\pi + x) = \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z}$	
10.	$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x), \quad \cos(2k\pi + x) = \cos(x), \quad k \in \mathbb{Z}$	
11.	$\tan(\pi - x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x), \quad \tan(2k\pi + x) = \tan(x), \quad k \in \mathbb{Z}$	
12.	$\cot(\pi - x) = -\cot(x), \quad \cot(\pi + x) = \cot(x), \quad \cot(2k\pi + x) = \cot(x), \quad k \in \mathbb{Z}$	
13.	$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x), \quad \cot(-x) = -\cot(x)$	
14.	$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$	$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Στον Πίνακα 1.5.2, παρουσιάζεται η λύση κάθε τριγωνομετρικής εξίσωσης, όπου x είναι η άγνωστη γωνία και ω η γνωστή τιμή μίας γωνίας σε ακτίνια.

Πίνακας 1.5.2: Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Εξίσωση	Λύση
$\sin(x) = \sin(\omega)$	$x = 2k\pi + \omega \quad \text{ή} \quad x = (2k+1)\pi - \omega, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = \cos(\omega)$	$x = 2k\pi \pm \omega, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x) = \tan(\omega)$	$x = k\pi + \omega, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x) = \cot(\omega)$	$x = k\pi + \omega, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.6. Υπερβολικές συναρτήσεις

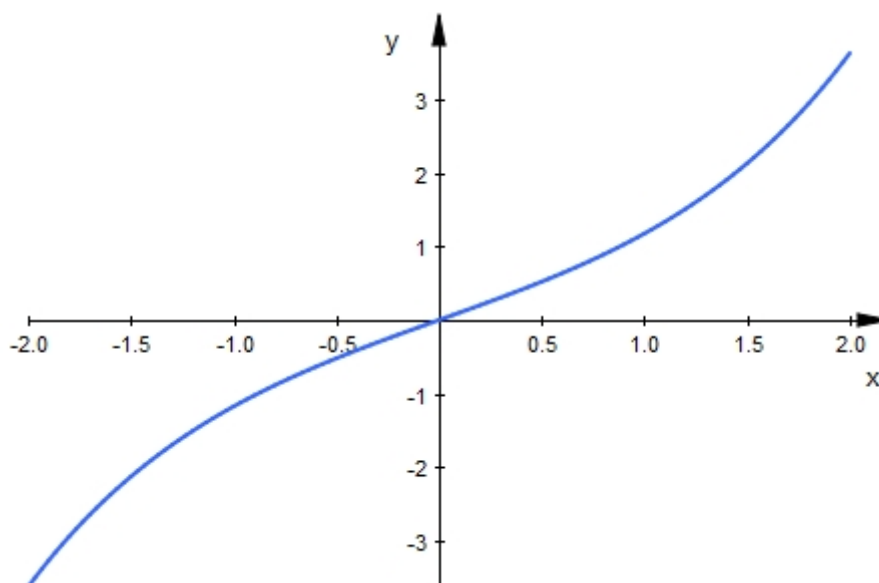
Στην ενότητα ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις, οι ορισμοί των οποίων εξαρτώνται από την εκθετική συνάρτηση e^x , μελετώνται χαρακτηριστικές ιδιότητές τους και εξετάζεται η ύπαρξη αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού των αρχικών συναρτήσεων ή σε κατάλληλο υποσύνολό του.

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ονομάστηκαν έτσι εξαιτίας της γεωμετρικής τους σχέσης με την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, (βλέπε, [Εφαρμογή 1.6.16, \(i\)](#)).

Ορισμός 1.6.1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικού ημιτόνου** (hyperbolic sine) και συμβολίζεται με \sinh , δηλαδή,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6.1)$$

Η γραφική παράσταση της \sinh αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.24](#).



Σχήμα 1.24: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολικό ημίτονο $f(x) = \sinh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.2.

i) Η συνάρτηση $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ μηδενίζεται στο $x=0$, η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.24](#) συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**, το οποίο αποδεικνύεται και αλγεβρικά, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x),$$

από όπου προκύπτει ότι η \sinh επαληθεύει την ισότητα (1.2.4) του Ορισμού 1.2.15.

- ii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.24 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση \sinh είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).
- iii) Επειδή \sinh είναι γνήσια αύξουσα συμπεραίνουμε ότι, $\sinh x$ είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4).
- iv) Η συνάρτηση \sinh είναι συνάρτηση επί του \mathbb{R} .
Πράγματι, για δοσμένο $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sinh(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow 2y - e^x + \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση επιλύεται ως προς e^x . Επειδή, $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$, έχουμε

$$e^x = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}. \quad (1.6.2)$$

Από την (1.6.2) προκύπτει

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right), \quad (1.6.3)$$

από όπου είναι φανερό ότι $x \in \mathbb{R}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών \mathbb{R} , (βλέπε, Ορισμός 1.4.3, Σχήμα 1.11).

Σημειώστε ότι, η άλλη ρίζα του τριωνύμου απορρίπτεται, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και η άλλη ρίζα

$$e^x = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}, \text{ χρησιμοποιώντας } e^x > 0, \text{ μπορούμε να γράψουμε}$$

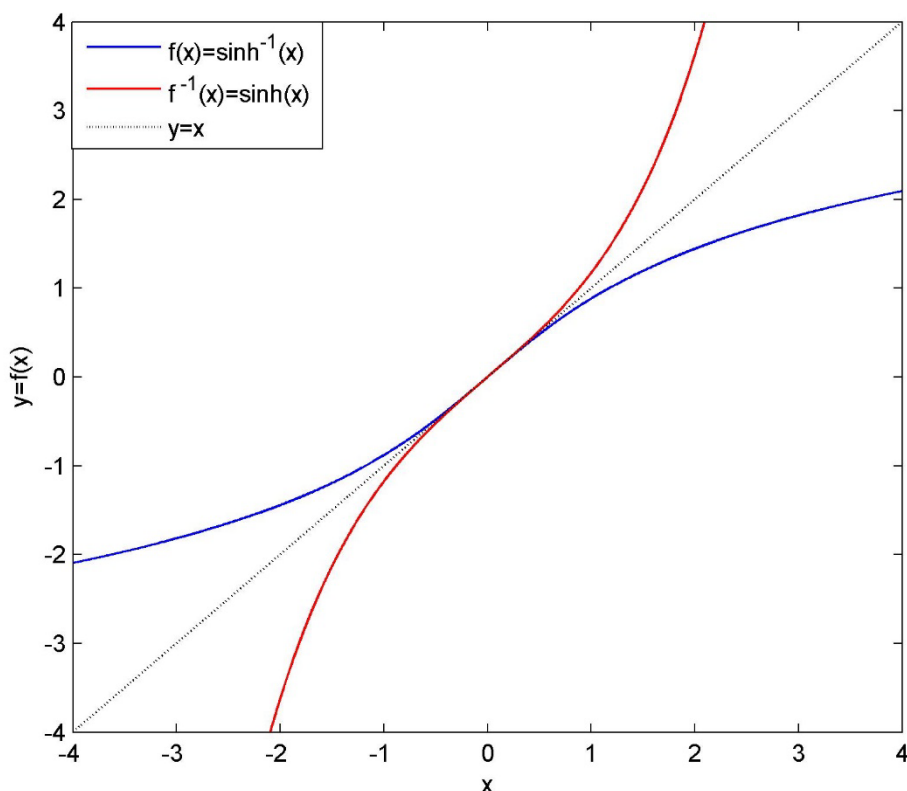
$$y - \sqrt{y^2 + 1} > 0 \Rightarrow y > \sqrt{y^2 + 1} > 0, \text{ που είναι άτοπο, (υπενθυμίζεται ότι } y \in \mathbb{R} \text{).}$$

- v) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iii)-(iv) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x)$ είναι 1-1, συνεπώς σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της \sinh , η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.3. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\sinh x$ στην (1.6.1). Η αντίστροφη συνάρτηση της \sinh συμβολίζεται \sinh^{-1} ή $\operatorname{arcsinh}$, και ορίζεται από την (1.6.3) να είναι η συνάρτηση $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6.4)$$

Στο Σχήμα 1.25, η γραφική παράσταση της \sinh^{-1} είναι με μπλε χρώμα.



Σχήμα 1.25: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x) = \sinh^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x) = \sinh(x)$

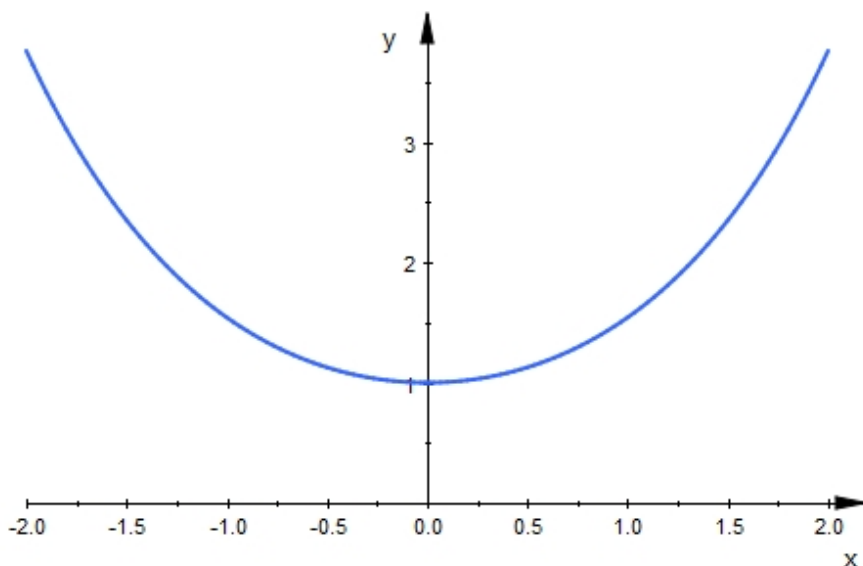
Παρατηρήσεις 1.6.4.

- i) Στο [Σχήμα 1.25](#) αναπαριστούνται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \sinh^{-1}(x)$ (με μπλε χρώμα), χρησιμοποιώντας την [\(1.6.4\)](#) με $x \in [-4, 4]$, και της αντίστροφής της, $f^{-1}(x) = \sinh(x)$, με κόκκινο χρώμα. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.
- ii) Η συνάρτηση $f(x) = \sinh^{-1}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.25](#)), επειδή \sinh^{-1} ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της \sinh , συνεπώς οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μονοτονία, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.6](#)).

Ορισμός 1.6.5. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, με $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικού συνημιτόνου** (hyperbolic cosine) και συμβολίζεται με \cosh , δηλαδή,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6.5)$$

Η γραφική παράσταση της \cosh αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.26](#).



Σχήμα 1.26: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολικό συνημίτονο $f(x) = \cosh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.6.

i) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.26](#) συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης \cosh με $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'Oy$, συνεπώς η συνάρτηση είναι **άρτια**, το οποίο αποδεικνύεται και αλγεβρικά, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

από όπου προκύπτει ότι η \cosh επαληθεύει την ισότητα (1.2.3) του Ορισμού 1.2.15.

ii) Επειδή $e^x > 0$ είναι φανερό ότι $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$. Συνεπώς το πεδίο τιμών της \cosh είναι $(0, +\infty)$, (βλέπε, [Σχήμα 1.26](#)).

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση \cosh είναι άρτια και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'Oy$ στο σημείο $A(0,1)$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της \cosh είναι $(0,1]$ ή $[1, +\infty)$. Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.26](#) συμπεραίνουμε ότι, το σύνολο τιμών της \cosh είναι $[1, +\infty)$, (βλέπε, στη συνέχεια [Παρατήρηση 1.6.6 \(vi\)](#) και Κεφάλαιο 5).

iii) Παρατηρώντας στο [Σχήμα 1.26](#) συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση \cosh είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, και γνήσια αύξουσα $[0, +\infty)$, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Η συνάρτηση \cosh **δεν** είναι μία αμφιμονοσήμαντη στο πεδίο ορισμού της, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(x) = \cosh(-x)$ ως άρτια συνάρτηση, επομένως, η \cosh **δεν** είναι αντιστρέψιμη στο \mathbb{R} .

v) Ο **περιορισμός** της \cosh , σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ ή $[0, +\infty)$, είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα, επειδή στο κάθε διάστημα η συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.4.](#), [Παρατήρηση 1.6.6. \(iii\)](#)).

vi) Η συνάρτηση \cosh είναι συνάρτηση επί του $[1, +\infty)$.

Πράγματι, για δοσμένο $y \in [1, +\infty)$ αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\cosh(x) = y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση επιλύεται ως προς e^x . Επειδή, $\Delta = 4y^2 - 4 \geq 0$, ($y \geq 1$), υπάρχουν δύο ρίζες του παραπάνω τριωνύμου,

$$e^{x_+} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad (1.6.6)$$

και

$$e^{x_-} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad (1.6.7)$$

Επομένως, για $y \geq 1$, από τον Ορισμό 1.4.3., την (1.4.3) και την (1.6.6) συνεπάγεται

$$x_+ = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right), \quad (1.6.8)$$

ενώ από την (1.4.3) και την (1.6.7)

$$x_- = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (1.6.9)$$

Επειδή $y \geq 1$ ισχύουν οι ακόλουθες ανισώσεις, $\sqrt{y^2 - 1} > 0 \Rightarrow y + \sqrt{y^2 - 1} > y \geq 1$, από όπου (1.6.6) γράφεται: $e^{x_+} = y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 = e^0$. Επιπλέον, η εκθετική συνάρτηση e^x είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.2. (ii)), συνεπώς $e^{x_+} \geq e^0 \Rightarrow x_+ \geq 0$, άρα $x_+ \in [0, +\infty)$.

Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$.

Πράγματι, αν $y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow y - 1 \geq \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow (y - 1)^2 \geq y^2 - 1 \Rightarrow y \leq 1$, που είναι αδύνατο από την υπόθεση $y \geq 1$. Συνδυάζοντας τον παραπάνω ισχυρισμό με την (1.6.7) έχουμε

$$e^{x_-} = y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 = e^0,$$

από όπου η μονοτονία της e^x επιτρέπει να γράψουμε $e^{x_-} \leq e^0 \Rightarrow x_- \leq 0 \Rightarrow x_- \in (-\infty, 0]$.

vii) Ο περιορισμός της \cosh στο $(-\infty, 0]$ ή στο $[0, +\infty)$ είναι συνάρτηση 1-1, επειδή \cosh είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[1, +\infty)$, (βλέπε, Παρατηρήσεις 1.6.6 (v), (vi)). Συνεπώς, στο συγκεκριμένο πεδίο ορισμού σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της \cosh , η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Στη συνέχεια ο περιορισμός της \cosh στο $[0, +\infty)$ συμβολίζεται με \cosh_+ , και ο περιορισμός στο $(-\infty, 0]$ με \cosh_- .

Ορισμός 1.6.7.

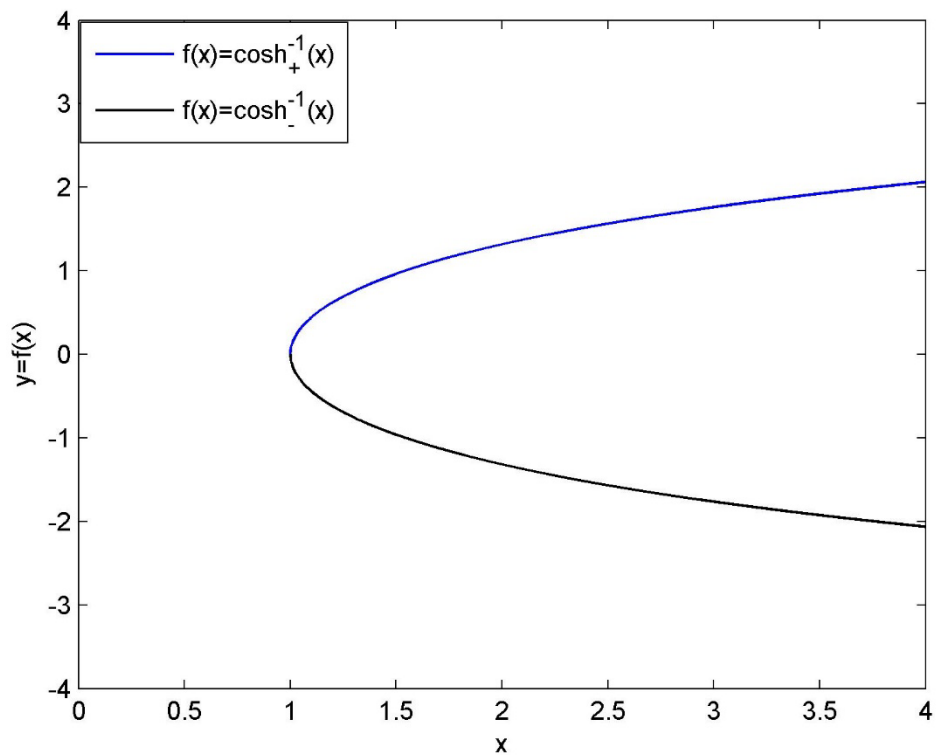
i) Έστω η 1-1 συνάρτηση $\cosh_+ : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της \cosh_+ συμβολίζεται \cosh_+^{-1} ή $\operatorname{arc} \cosh_+$ και ορίζεται από την (1.6.8) να είναι η συνάρτηση $\cosh_+^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, με

$$\cosh_+^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \in [1, +\infty). \quad (1.6.10)$$

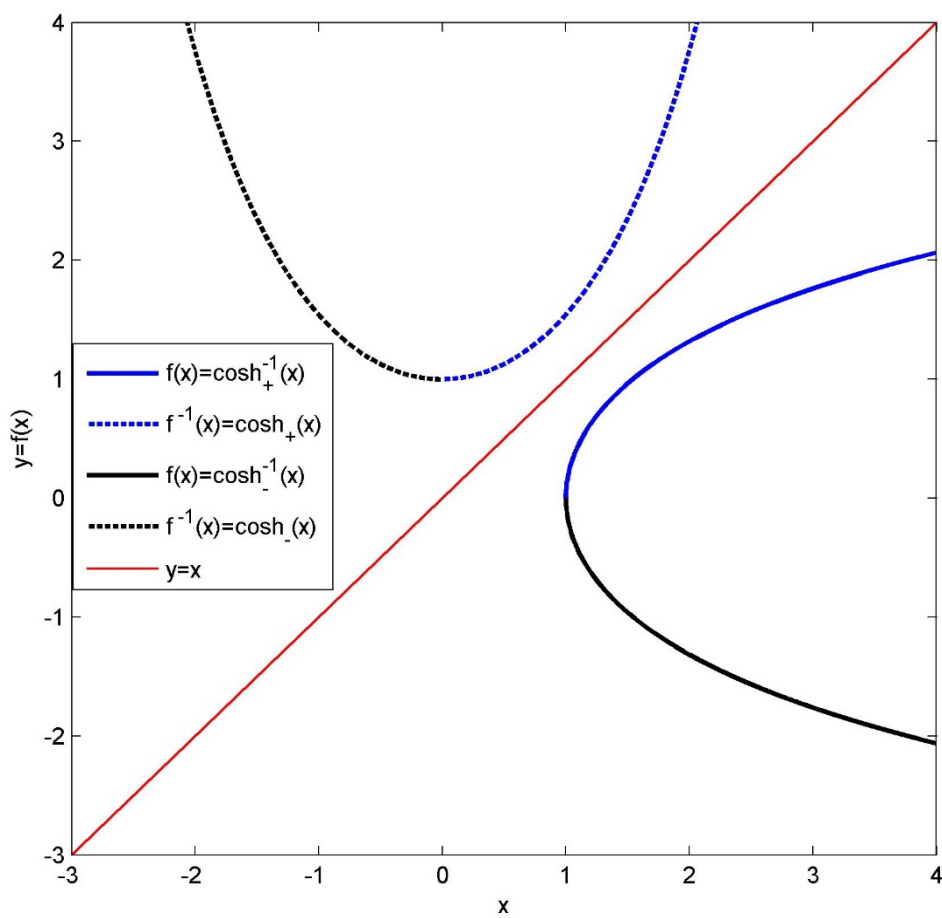
ii) Έστω η 1-1 συνάρτηση $\cosh_- : (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της \cosh_- συμβολίζεται \cosh_-^{-1} ή $\operatorname{arc} \cosh_-$ και ορίζεται από την (1.6.9) να είναι η συνάρτηση $\cosh_-^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, με

$$\cosh_-^{-1}(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \in [1, +\infty). \quad (1.6.11)$$

Στο Σχήμα 1.27, η γραφική παράσταση της $f(x) = \cosh_+^{-1}(x)$ είναι το τμήμα της καμπύλης με μπλε χρώμα και της συνάρτησης $f(x) = \cosh_-^{-1}(x)$ είναι το τμήμα της καμπύλης με μαύρο χρώμα.



Σχήμα 1.27: Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης υπερβολικό συνημίτονο $f(x) = \cosh^{-1}(x)$.



Σχήμα 1.28: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\cosh_{+}^{-1}(x)$, $\cosh_{-}^{-1}(x)$, $\cosh_{+}(x)$ και $\cosh_{-}(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.8.

i) Στο [Σχήμα 1.28](#) παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των υπερβολικών συναρτήσεων συνημιτόνου που αναφέρονται στον [Ορισμό 1.6.7](#). Η καμπύλη με τη συνεχή γραμμή αντιστοιχεί στην αντίστροφη συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου και η καμπύλη με τη διακεκομμένη γραμμή στη συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου.

Το μέρος της καμπύλης με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή αποτελεί τη γραφική παράσταση της \cosh_+^{-1} , ενώ με διακεκομμένη γραμμή (dash) τη γραφική παράσταση της \cosh_+ .

Το μέρος της καμπύλης με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή αποτελεί τη γραφική παράσταση της \cosh_-^{-1} , ενώ με διακεκομμένη γραμμή (dash) τη γραφική παράσταση της \cosh_- .

Σχεδιασμένη με κόκκινο χρώμα είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

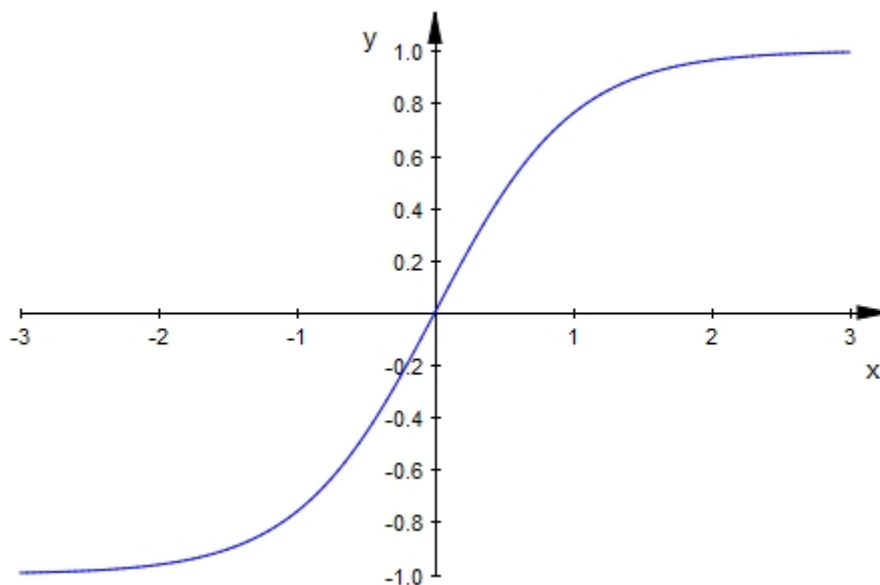
ii) Στο $[1, +\infty)$, η συνάρτηση \cosh_+^{-1} είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.28](#)), επειδή \cosh_+ στο $[0, +\infty)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Παρατήρηση 1.6.6 \(iii\)](#) και [Πρόταση 1.3.6.](#)).

Ανάλογα, η συνάρτηση \cosh_-^{-1} είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.28](#)), επειδή \cosh_- στο $(-\infty, 0]$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Ορισμός 1.6.9. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, με $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, ονομάζεται συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης (hyperbolic tangent) και συμβολίζεται με \tanh , δηλαδή,

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6.12)$$

Η γραφική παράσταση της \tanh αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.29](#).



Σχήμα 1.29: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολική εφαπτομένη $f(x) = \tanh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.10.

i) Από την (1.6.12) είναι φανερό ότι $\tanh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = 0$, συνεπώς, η γραφική παράσταση της \tanh διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, (βλέπε, Σχήμα 1.29, Εφαρμογή 1.6.16 (viii)), συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**.

ii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.29 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση \tanh είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iii) Επειδή \tanh είναι γνήσια αύξουσα συμπεραίνουμε ότι, \tanh είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

iv) Η συνάρτηση \tanh είναι συνάρτηση επί του $(-1,1)$. Πράγματι, από την (1.6.12) έχουμε

$$y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow y(e^{2x} + 1) - e^{2x} + 1 = 0,$$

από όπου προκύπτει

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}. \quad (1.6.13)$$

Επειδή $e^{2x} > 0$, στην (1.6.13) πρέπει να ισχύει $\frac{1+y}{1-y} > 0 \Rightarrow y \in (-1,1)$.

Άρα, το σύνολο τιμών της \tanh είναι $(-1,1)$.

Επιπλέον, συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.4.3., την (1.4.3) και την (1.6.13) μπορούμε να γράψουμε

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right), \quad (1.6.14)$$

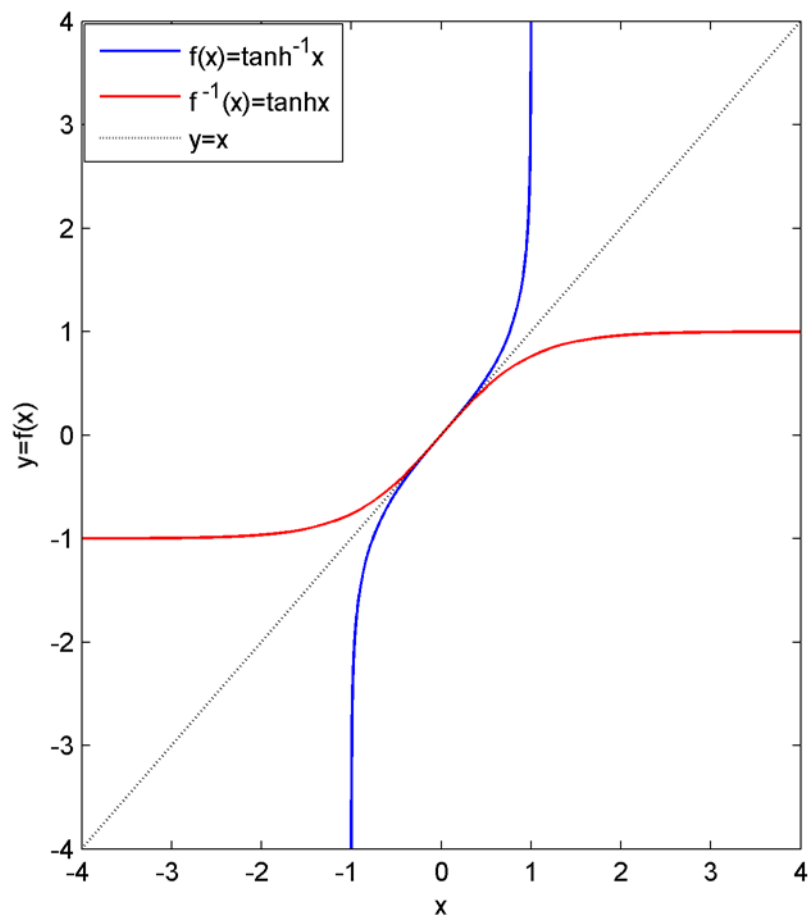
από όπου είναι φανερό ότι $x \in \mathbb{R}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} , (βλέπε, Ορισμός 1.4.3, Σχήμα 1.11).

v) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iii)-(iv) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, \tanh είναι **1-1**, συνεπώς σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της \tanh , η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.11. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$, με $\tanh(x)$ όπως στην (1.6.12). Η αντίστροφη της \tanh συμβολίζεται \tanh^{-1} ή $\operatorname{arc} \tanh$, και ορίζεται από την (1.6.14) να είναι η συνάρτηση $\tanh^{-1} : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \text{ για κάθε } x \in (-1,1). \quad (1.6.15)$$

Στο Σχήμα 1.30, η γραφική παράσταση της \tanh^{-1} είναι με μπλε χρώμα.



Σχήμα 1.30: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x) = \tanh^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x) = \tanh(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.12.

i) Οι γραφικές παραστάσεις των υπερβολικών συναρτήσεων εφαπτομένης, που αναφέρονται στον [Ορισμό 1.6.11](#) αναπαριστώνται στο [Σχήμα 1.30](#). Η καμπύλη με μπλε χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της \tanh^{-1} , χρησιμοποιώντας την [\(1.6.15\)](#), ενώ η καμπύλη με κόκκινο χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της \tanh .

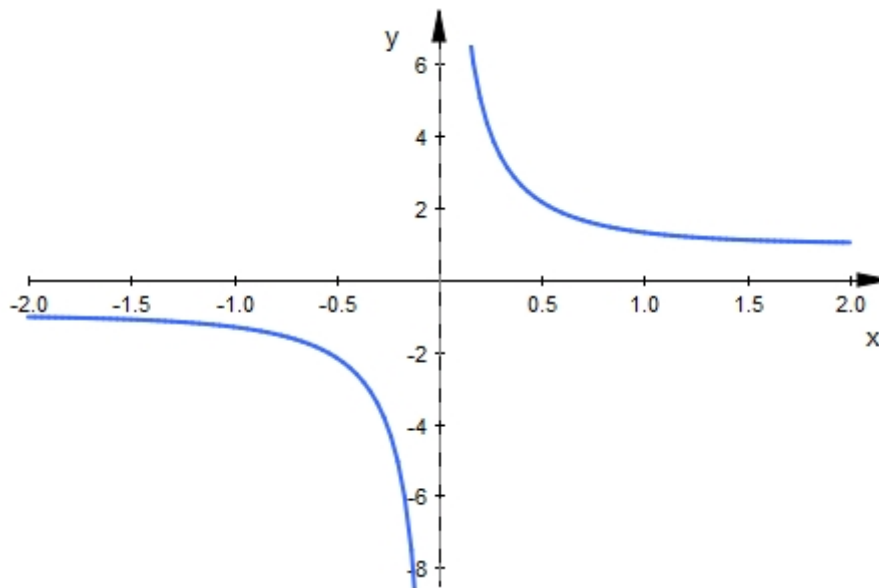
Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των δύο υπερβολικών συναρτήσεων εφαπτομένης.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \tanh^{-1}(x)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Σχήμα 1.30](#)), επειδή \tanh^{-1} ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της \tanh , συνεπώς οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μονοτονία, (βλέπε, [Πρόταση 1.3.6](#)).

Ορισμός 1.6.13. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, με $f(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικής συνεφαπτομένης** (hyperbolic cotangent) και συμβολίζεται με \coth , δηλαδή,

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (1.6.16)$$

Η γραφική παράσταση της \tanh αναπαριστάται στο [Σχήμα 1.31](#).



Σχήμα 1.31: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολική συνεφαπτομένη $f(x) = \coth(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.14.

i) Συνδυάζοντας τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης από τους (1.6.12) και (1.6.16) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει

$$\tanh(x) \cdot \coth(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1.$$

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, (βλέπε, Σχήμα 1.31, Εφαρμογή 1.6.16 (viii)), συνεπώς, η συνάρτηση είναι **περιττή**.

iii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.31 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, η συνάρτηση \coth είναι γνήσια φθίνουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Επειδή \coth είναι γνήσια φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι, \coth είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

v) Η συνάρτηση \coth είναι συνάρτηση επί του $\mathbb{R} - [-1, 1]$.

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, από $\tanh(x) \cdot \coth(x) = 1$ είναι φανερό ότι $\tanh(x) \neq 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}. \tag{1.6.17}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.9 και την Παρατήρηση 1.6.10 (iv) ισχύει $\tanh(x) \in (-1, 1)$, δηλαδή, $-1 < \tanh(x) < 0$, $0 < \tanh(x) < 1$, ($\tanh(x) \neq 0$).

Χρησιμοποιώντας (1.6.17) στις δύο ανισώσεις παίρνουμε:

- $-1 < \tanh(x) < 0 \Rightarrow -1 > \frac{1}{\tanh(x)} \Rightarrow \coth(x) < -1$, δηλαδή, $\coth(x) \in (-\infty, -1)$
- $0 < \tanh(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{\tanh(x)} > 1 \Rightarrow \coth(x) > 1$, δηλαδή, $\coth(x) \in (1, +\infty)$

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της \coth είναι $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - [-1, 1]$.

Από την (1.6.16) έχουμε

$$y = \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow y(e^{2x} - 1) - e^{2x} - 1 = 0,$$

από όπου προκύπτει

$$e^{2x} = \frac{1+y}{y-1}. \quad (1.6.18)$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τον [Ορισμό 1.4.3.](#), την [\(1.4.3\)](#) και την [\(1.6.18\)](#) μπορούμε να γράψουμε

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y+1}{y-1} \right), \quad (1.6.19)$$

από όπου είναι φανερό ότι $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} ,

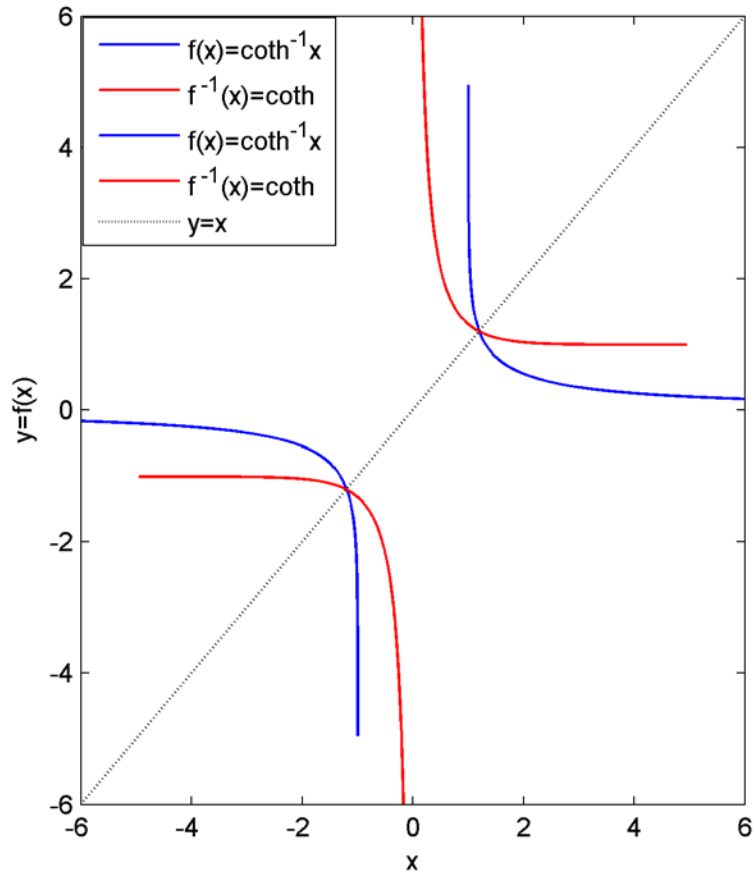
$$\text{και } \frac{y+1}{y-1} \neq 1.$$

- vi) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iv)-(v) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, \coth είναι 1-1, συνεπώς σύμφωνα με την [\(1.2.1\)](#) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της \coth , η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.15. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\coth: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, με $\coth(x)$ όπως στην [\(1.6.16\)](#). Η αντίστροφη της \coth συμβολίζεται \coth^{-1} ή $\operatorname{arc} \coth$, και ορίζεται από την [\(1.6.19\)](#) να είναι η συνάρτηση $\coth^{-1}: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, με

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \text{ για κάθε } |x| > 1. \quad (1.6.20)$$

Στο [Σχήμα 1.32](#), η γραφική παράσταση της \coth^{-1} σχεδιάζεται με μπλε χρώμα και αποτελείται από δύο τμήματα ανάλογα με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στο ίδιο σχήμα η γραφική παράσταση της \coth αναπαριστάται με κόκκινο χρώμα, καθώς και η ευθεία $y=x$, που είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφημάτων των παραπάνω συναρτήσεων.



Σχήμα 1.32: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x) = \coth^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x) = \coth(x)$

Εφαρμογή 1.6.16.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες :

i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

ii) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(2x)$

iii) $2\sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x)$

iv) $\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$, $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$

v) $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$, $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$

vi) $1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

vii) $\tanh(x) \cdot \coth(x) = 1$

viii) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, $\coth(-x) = -\coth(x)$

Απόδειξη: Όλες οι ταυτότητες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων. Αναλυτικότερα:

i) Από την (1.6.1) και (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

Εδώ, αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $X = \cosh(x)$, $Y = \sinh(x)$, τότε η παραπάνω ταυτότητα είναι η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής $X^2 - Y^2 = 1$, δηλαδή καθώς $x \in \mathbb{R}$, το σημείο (X, Y) του επιπέδου $x'Oy$ διατρέχει κάποιον κλάδο της υπερβολής $X^2 - Y^2 = 1$, (Ρασσιάς, 2014). Σε αυτήν την ιδιότητα οφείλεται ο χαρακτηρισμός των συναρτήσεων ως «υπερβολικές». Το άλλο συνδυαστικό της ονομασίας των συναρτήσεων συνδέεται με την ονομασία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, επειδή ισχύουν τύποι που «θυμίζουν τριγωνομετρικές ταυτότητες», (βλέπε και σύγκρινε, 1.5.18 Τυπολόγιο, Εφαρμογή 1.6.16 (ii), (iii), (vi), (vii), Ορισμός 1.6.9, Ορισμός 1.6.13).

ii) Από την (1.6.1) και (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)$$

iii) Αντικαθιστώντας $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ από τις (1.6.1) και (1.6.5), αντίστοιχα, έχουμε:

$$2\sinh(x) \cdot \cosh(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

iv) Η πρώτη ταυτότητα προκύπτει άμεσα προσθέτοντας τις ισότητες στις (i) και (ii), ενώ η δεύτερη προκύπτει μετά από την αφαίρεση (i) και (ii).

v) Προκύπτει μετά από αντικατάσταση $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ από τις (1.6.1) και (1.6.5), αντίστοιχα.

vi) Διαιρώντας την (i) με $\cosh^2(x)$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό της υπερβολικής εφαπτομένης, (βλέπε, Ορισμός 1.6.9) παράγεται άμεσα η ισότητα.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ ονομάζεται **υπερβολική τέμνουσα** (hyperbolic secant) και συμβολίζεται με sech .

vii) Η απόδειξη στηρίζεται στον ορισμό των αντίστοιχων υπερβολικών συναρτήσεων (Ορισμός 1.6.9, Ορισμός 1.6.13, αντίστοιχα) και δίνεται στην Παρατήρηση 1.6.14 (i).

viii) Επειδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την (1.6.1) έχουμε:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες και τον Ορισμό 1.6.9 έχουμε:

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες των $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ και τον Ορισμό 1.6.13, έχουμε:

$$\operatorname{coth}(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -\operatorname{coth}(x)$$

Από την ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις \sinh , \tanh και coth είναι περιττές, ενώ η \cosh είναι άρτια, (βλέπε, Παρατηρήσεις 1.6.2 (i), 1.6.10 (ii), 1.6.14 (ii) και 1.6.6 (i), αντίστοιχα). $\diamond\diamond$

1.7. Πραγματικές συναρτήσεις σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Προκειμένου να υπολογίσουμε μαθηματικά ή αριθμητικά μεγέθη, να αναπτύξουμε αλγορίθμους, να μοντελοποιήσουμε, να αναπαραστήσουμε, να αναλύσουμε και να οπτικοποιήσουμε δεδομένα, ή ακόμη να υλοποιήσουμε έτοιμους αλγορίθμους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά λογισμικά, (Καραμπετάκης; Καραμπετάκης, Σταματάκης, & Ψωμόπουλος, 2004; Maxima). Ο αναγνώστης, ως ένα εργαλείο υποβοήθησης στη μελέτη του, μπορεί να χρησιμοποιήσει το προγραμματιστικό περιβάλλον Octave. Το Octave είναι ένας ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του εμπορικού λογισμικού/προγράμματος Matlab και είναι διαθέσιμο από το δικτυακό τόπο (GNU Octave). Ένας οδηγός χρήσης για το περιβάλλον προγραμματισμού Matlab, μπορεί να βρεθεί (Moler, 2010; Γεωργίου & Ξενοφώντος, 2007; Παπαγεωργίου, Τσίτουρας, & Φαμέλης, 2004; Στεφανίδης, 2014; Μούσας, 2010; Οδηγός Χρήσης Matlab).

Η συνάρτηση f της πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x ορίζεται στην Matlab/Octave χρησιμοποιώντας τις εντολές `inline` και `vectorize`. Η σύνταξη των εντολών ορίζεται ως ακολούθως.

```
Σύνταξη εντολής: inline('τύπος συνάρτησης')  
ή inline(vectorize('τύπος συνάρτησης'))
```

Επιπλέον υπάρχει δυνατότητα να υπολογισθεί η τιμή της f για μία συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x καλώντας τη συνάρτηση (με το όνομά της) και στη θέση της μεταβλητής σημειώνεται η επιθυμητή τιμή για τη μεταβλητώ.

Για παράδειγμα, στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ και υπολογίζεται η τιμή $f(-1)$ με τη χρήση της εντολής `inline`.

```
f = inline('1/(x^3-1)')
```

Από την εκτέλεση της παραπάνω εντολής προκύπτει η απάντηση:

```
Inline function:  
f(x) = 1/(x^3-1)
```

Στη συνέχεια, από την εκτέλεση της εντολής

```
f(-1)
```

προκύπτει η απάντηση:

```
-0.5000
```

Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε :

```
f = inline(vectorize('1/(x^3-1)'))
```

Από την εκτέλεση της παραπάνω εντολής προκύπτει η απάντηση:

```
Inline function:  
f(x) = 1./(x.^3-1)
```

Στη συνέχεια, από την εκτέλεση της εντολής

```
f(-1)
```

προκύπτει η απάντηση:

```
-0.5000
```

◇◇

1.7.1 Συμβολικές εντολές

Η υλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων ή συναρτήσεων, δηλαδή, οι πράξεις μεταξύ μεταβλητών γίνεται με τη βοήθεια συμβολικών μεταβλητών, στις οποίες δεν χρειάζεται να έχουμε εκχωρήσει τιμή. Η δήλωση μίας ή περισσότερων μεταβλητών x, y, s, a, \dots γίνεται με τη συμβολική εντολή `syms` και τους χαρακτήρες των μεταβλητών ως ακολούθως.

```
syms x y s a
```

Η εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Οι επόμενες εντολές είναι πολύ χρήσιμες, καθώς υλοποιούν γνωστές μας έννοιες σε μία αλγεβρική παράσταση/συνάρτηση f , όπως είναι η αλγεβρική τιμή, το ανάπτυγμα, η απλοποίηση, η παραγοντοποίηση, η ρητή μορφή οι οποίες παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

<code>subs(x, a)</code>	αντικατάσταση της συμβολικής μεταβλητής x με την a , όπου a μπορεί να είναι μία νέα συμβολική μεταβλητή ή αριθμός
<code>subs(f, x, a)</code>	αντικατάσταση στην παράσταση f της συμβολικής μεταβλητής x με την a , όπου a μπορεί να είναι μία νέα συμβολική μεταβλητή που θα αντικαταστήσει τη x ή αν είναι αριθμητική τιμή, υπολογίζει την τιμή της αλγεβρικής παράστασης για $x = a$, δηλαδή, $f(a)$
<code>eval(a)</code>	αν a είναι αριθμητική τιμή αποθηκεύεται με αυτήν τη μορφή
<code>expand(f)</code>	ανάπτυγμα της f
<code>factor(f)</code>	παραγοντοποίηση της f
<code>simplify(f)</code>	απλοποίηση της f
<code>pretty(f)</code>	ρητή μορφή της f

Για παράδειγμα, στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$, υπολογίζονται οι τιμές $f(-1)$ και $f(0)$, παραγοντοποιείται η f , και δίνεται η ρητή μορφή της παραγοντοποίησης, γράφοντας:

```
syms x
f = 1/(x^3 - 1);
f1 = subs(f, x, -1)
f2 = subs(f, x, 0)
ff = factor(f)
pretty(ff)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτουν οι απαντήσεις:

```
f1 = -0.5000
f2 = -1
ff = 1/((x - 1)*(x^2 + x + 1))
```

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

➤ Η σύνθεση δύο συναρτήσεων f , g , υπολογίζεται με την εντολή `compose` και τη συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή x των συναρτήσεων. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για τον υπολογισμό της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f , g , η εντολή `compose` δέχεται ως εισόδους:

- τις συναρτήσεις f και g .
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Σύνταξη εντολής: `compose(f, g, x)`

Έχει σημασία η σειρά καταχώρησης των συναρτήσεων στην `compose`, πρώτα f και μετά g υπολογίζεται η $f \circ g$, με διαφορετική σειρά καταχώρησης υπολογίζεται η $g \circ f$.

Για παράδειγμα, θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = x^2 + 3x - 1$, που δόθηκαν στο Παράδειγμα 1.2.7 (iv), για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f \circ g$, που στη συνέχεια ονομάζεται $f \circ g$, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
g = x^2+3*x-1;
fog = compose(f, g)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
fog = 2*x^2+6*x-3
```

Αν χρειαζόταν να υπολογίσουμε την $g \circ f$, η οποία στη συνέχεια ονομάζεται $g \circ f$, θα γράφαμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
g = x^2+3*x-1;
gof = compose(g, f)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$gof = 6*x + (2*x - 1)^2 - 4$$

Εκτελώντας την εντολή

$$gof = \text{expand}(gof)$$

παίρνουμε την ανάπτυξη της σύνθετης συνάρτησης gof ως

$$gof = 4*x^2 + 2*x - 3$$

Τέλος, για τον υπολογισμό της $f \circ f$, η οποία στη συνέχεια ονομάζεται $f \circ f$, θα γράψαμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
fof = compose(f, f)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$fof = 4*x - 3$$

Τα αποτελέσματα των συνθέσεων $f \circ g$, $g \circ f$, και $f \circ f$, που προκύπτουν με τη χρήση Matlab/ Octave, προφανώς ταυτίζονται με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος 1.2.7 (iv). \diamond

➤ Η αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης υπολογίζεται με την εντολή `finverse` και τη συμβολική εντολή `syms`, με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Για τον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης f , η εντολή `finverse` δέχεται ως είσοδο:

- τη συνάρτηση f .
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Σύνταξη εντολής: `finverse(f, x)`

Η εντολή `finverse` είναι διαθέσιμη μόνο στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) δεν είναι διαθέσιμη σε Octave.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της 1-1 συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms x
f = x^3;
finv = finverse(f, x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$\text{finv} = x^{(1/3)} \qquad \text{finverse}(x^3) \text{ is not unique.}$$

Από το μήνυμα καταλαβαίνουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση δεν είναι μοναδική. \diamond

1.7.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης μίας μεταβλητής

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_1, x_2]$ ορίζεται χρησιμοποιώντας δυο διανύσματα, που είναι πίνακες-γραμμή, ως ακολούθως:

- ένα διάνυσμα-γραμμή για την ανεξάρτητη μεταβλητή x : το διάνυσμα ορίζεται να έχει ως αρχική τιμή, την αρχική τιμή του πεδίου ορισμού της f , δηλαδή την x_1 , και ως τελική τιμή να έχει την τελική τιμή του πεδίου ορισμού της f , δηλαδή την x_2 . Οι ενδιάμεσες τιμές του διανύσματος είναι οι τιμές που δημιουργούνται από τη διαμέριση του διαστήματος $[x_1, x_2]$ σε $\frac{x_2 - x_1}{k}$ υποδιαστήματα, που το καθένα υποδιάστημα έχει μήκος ίσο με το βήμα k είναι $[x_{n-1}, x_n]$, όπου $x_n = x_1 + n \frac{x_2 - x_1}{k}$, $n = 1, 2, \dots, k$, με $x_0 = x_1$, και
- ένα διάνυσμα-γραμμή για την εξαρτημένη μεταβλητή $f(x)$: το διάνυσμα έχει τιμές τις τιμές της συνάρτησης για $x = x_n$, όπου $x_n = x_1 + n \frac{x_2 - x_1}{k}$, $n = 0, 1, 2, \dots, k$.

Είναι προφανές ότι για να είναι σωστά ορισμένη μία συνάρτηση, πρέπει το μήκος του διανύσματος της ανεξάρτητης μεταβλητής να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος της εξαρτημένης μεταβλητής.

Εδώ χρειάζεται να σχολιάσουμε ότι :

- το πεδίο ορισμού διαιρείται σε $\frac{x_2 - x_1}{k}$ το πλήθος μικρά ισομήκη υποδιαστήματα με τη χρήση του βήματος k .
- Για να έχουν νόημα οι πράξεις πολλαπλασιασμού, δυνάμεων και διαίρεσης μεταξύ των τιμών του διανύσματος x χρησιμοποιείται η τελεία πριν το σύμβολο κάθε πράξης, δηλαδή, σημειώνεται $.*$, $.^$, $./$.

Για παράδειγμα, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή έχει πεδίο ορισμού $[-1, 1]$ και βήμα $k = 0.5$, γράφοντας

```
x = -1:0.5:1
```

εμφανίζεται ένα διάνυσμα με τιμές

```
x = -1.0000 -0.5000 0 0.5000 1.0000
```

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$, με $x \in [-1, 1]$ και $k = 0.5$ μπορεί να οριστεί:

```
f = x.^2-2*x+1
```

οι τιμές της συνάρτησης εμφανίζονται σε έναν πίνακα ως ακολούθως:

```
f = 4.0000 2.2500 1.0000 0.2500 0
```

Οι εντολές που παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα, είναι χρήσιμες κατά το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f μίας πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x . Τα διατεταγμένα σημεία κάθε γραφικής παράστασης είναι αποθηκευμένα σε ισομήκη διανύσματα x και f . Επιπλέον, στο ίδιο παράθυρο γραφικών μπορούν να παρουσιάζονται περισσότερες από μία γραφικές παραστάσεις (γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g , h) ή κάθε παράθυρο να χωρίζεται σε υποπαράθυρα και στο καθένα να παρουσιάζεται μία γραφική παράσταση.

<code>plot(x, f)</code>	η εντολή χρησιμοποιείται για την κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μίας πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x
<code>subplot(m, n, p)</code>	η εντολή επιτρέπει το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων mn συναρτήσεων, γι' αυτό χωρίζει το παράθυρο γραφικών σε $m \times n$ υποπαράθυρα και τοποθετεί την επόμενη γραφική παράσταση στο p -υποπαράθυρο.
<code>hold on</code>	χρησιμοποιείται για να «κρατήσει-παγώσει» το παράθυρο γραφικών με τις υπάρχουσες σχεδιασμένες γραφικές παραστάσεις και να δεκτεί επιπρόσθετα και νέα γραφική παράσταση μίας νέας συνάρτησης, g .
<code>axis equal</code>	ταυτίζει τα μήκη των αξόνων $x'Ox$ και $y'Oy$
<code>axis([xmin xmax ymin ymax])</code>	ορίζει μήκη στους άξονες $x'Ox$ και $y'Oy$
<code>xlabel('...')</code>	εισάγει τίτλο στον άξονα $x'Ox$
<code>ylabel('...')</code>	εισάγει τίτλο στον άξονα $y'Oy$
<code>legend('...')</code>	εισάγει υπόμνημα για τις γραφικές παραστάσεις του παραθύρου
<code>title('...')</code>	εισάγει τίτλο στο παράθυρο
<code>grid on</code>	εμφανίζει γραμμές πλέγματος στο παράθυρο

Συγκεκριμένα, για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , απαιτούνται :

- το πεδίο ορισμού $[x1, x2]$ της συνάρτησης f , ορισμένο ως διάνυσμα
- το βήμα k , με το οποίο θα γίνει η διαμέριση του $[x1, x2]$
- η συνάρτηση f .

Σύνταξη εντολής: `plot(x, f)`

Για παράδειγμα, στο [Σχήμα 1.8.\(α\)](#) για να αναπαρασταθεί η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, με $x \in [-4, 4]$, και βήμα $k = 0.01$, χρειάστηκαν οι ακόλουθες εντολές:

```
x=-4:0.01:4;
f=(x.^3)./(x.^2+1);
plot(x, f);
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('f(x)=x^3/(x^2+1)');
```

Σε ένα παράθυρο γραφικών για να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις δύο ή περισσότερων συναρτήσεων χρησιμοποιείται η εντολή `hold on`. Συγκεκριμένα, σχεδιάζεται η συνάρτηση f , δίνεται `hold on` κατόπιν δίνεται νέα συνάρτηση, έστω g , σχεδιάζεται και δίνεται `hold on`, δίνεται νέα συνάρτηση, έστω h , σχεδιάζεται και δίνεται `hold on`, κ.λ.π. Ισοδύναμο αποτέλεσμα προκύπτει χρησιμοποιώντας την εντολή `plot(x, f, x, g, x, h)`.

Οι γραφικές παραστάσεις του [Σχήματος 1.3](#) έχουν σχεδιασθεί χρησιμοποιώντας την εντολή `plot(x,f,x,g,x,h)` ως ακολούθως:

```
x=-3:0.001:3;
g1=-0.5*x.^2;
g2=-x.^2;
g3=-3*x.^2;
plot(x,g1,'r',x,g2,'k',x,g3,'b');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('g_{1}(x)=-0.5x^2','g_{2}(x)=-x^2','g_{3}(x)=-3x^2');
axis([-3.1 3.1 -10 0.5]);
```

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave μπορούμε να γράψουμε μία συνάρτηση, την ονομαζόμενη **function**, η οποία έχει εισόδους κάποιες παραμέτρους, που ανάλογα με το πρόβλημα αλλάζουμε.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), που χρησιμοποιήθηκε για τα Σχήματα 1.2 και 1.3, για τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, με πεδίο ορισμού $[x_1, x_2]$ και βήμα k , χρησιμοποιώντας τις εντολές `plot` και `hold on`.

```
function parabola(a1,b1,c1,a2,b2,c2,a3,b3,c3,x1,x2,k)
    x=x1:k:x2;
    y1=a1*x.^2+b1.*x+c1;
    y2=a2*x.^2+b2.*x+c2;
    y3=a3*x.^2+b3.*x+c3;
    plot(x,y1,'r');
    hold on;
    plot(x,y2,'k');
    hold on;
    plot(x,y3,'b');
    xlabel('x');
    ylabel('y');
end
```

Η συνάρτηση `parabola` έχοντας είσοδο $a_1 = 0.5, b_1 = c_1 = 0$, $a_2 = 1, b_2 = c_2 = 0$, $a_3 = 4, b_3 = c_3 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, και $k=0.01$ δίνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = 0.5x^2$, $f_2(x) = x^2$ και $f_3(x) = 4x^2$ στο [Σχήμα 1.2](#).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), που χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με πεδίο ορισμού το $[x_1, x_2]$ με βήμα 0.001.

```
function exp10(a1,a2,x1,x2)
    x=x1:0.001:x2;
    y1=a1.^x;
    subplot(2,1,1);
    plot(x,y1);
    xlabel('x');
    ylabel('y=f(x)');
    title('f(x)=a^x, με a>1');
    y2=a2.^x;
    subplot(2,1,2);
    plot(x,y2);
    xlabel('x');
```

```
ylabel('y=f(x)');  
title('f(x)=a^x, με 0<a<1');  
end
```

Η συνάρτηση `exp10` έχοντας είσοδο $a_1=2$, $a_2=1/2$ και $[-5,5]$ δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^x$, ($a_1=2$) στο [Σχήμα 1.9](#). στο πάνω παράθυρο και τη γραφική παράσταση της $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, ($a_2=1/2$) στο κάτω παράθυρο.

Η ίδια συνάρτηση (function) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο [Σχήμα 1.10](#) αλλάζοντας την τιμή της εισόδου και αφαιρώντας από τη function την εντολή `subplot`. ◇◇

1.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

1.8.1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$.

Στη συνέχεια, να υπολογισθούν οι συνθέσεις $f \circ g$, $g \circ f$, και $g \circ g$.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε τα Παραδείγματα 1.2.7 (ii)-(v).

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού A της f είναι $A = \mathbb{R} - \{0\}$ και της g είναι $(-\infty, 2]$.

Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται αν $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2]$ με τύπο είναι $(f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}-1}$.

Η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $x \in (-\infty, 1)$ με τύπο είναι $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{2}{1-x}}$.

Η συνάρτηση $g \circ g$ ορίζεται αν $x \in (-\infty, 2]$ με τύπο είναι $(g \circ g)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$.

1.8.2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Να εξετασθεί εάν η f είναι 1-1.

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού A της f είναι $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και το σύνολο τιμών είναι

$$B = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

1.8.3. Να υπολογισθεί η αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει, της συνάρτησης $f(x) = e^{-2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας Matlab να γίνει επαλήθευση των αποτελεσμάτων και να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που προτείνεται στην Παρατήρηση 1.2.11(ii) και Παρατήρηση 1.4.2. (iv).

Απάντηση: Αν $x \in (-2, +\infty)$, η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x+2)$.

1.8.4. Να μελετηθεί στο $[-1, +\infty)$ η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - 3x + 2$ και στη συνέχεια να υπολογισθούν τα ακρότατα της f , αν υπάρχουν. Είναι η συνάρτηση f φραγμένη;

Υπόδειξη: Για τη μονοτονία χρησιμοποιήστε το λόγο μεταβολής στην (1.3.1) και συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 1.3.5. Για τα ακρότατα, συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 1.3.8.

Απάντηση: Η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα, έχει ολικό μέγιστο στο $(-1, f(-1))$ και είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 6.

1.8.5. Να λυθεί η εξίσωση $12 \cosh^2(x) + 7 \sinh(x) = 24$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τον τύπο στην Εφαρμογή 1.6.16.(i), για να δημιουργηθεί μία δευτεροβάθμια εξίσωση του $\sinh(x)$.

Απάντηση: Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x = -\ln 3$ ή $x = \ln 2$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν. (2007). Από την Άλγεβρα των Υπολογισμών στα Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας, Συνέδριο, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, 05-09/03/2007, <http://ikee.lib.auth.gr/record/221208?ln=el>
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Μούσας, Β.Χ. (2010). Βασική χρήση και προγραμματισμός του Matlab 7, Αθήνα: Ίων.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srinak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>
- Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Maxima, a Computer Algebra System from <http://maxima.sourceforge.net/>
- Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>
- Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.
- Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.
- Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

1.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

iii) $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-x-2}}$

iv) $f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)}$

v) $f(x) = \ln(\cos(x))$

vi) $f(x) = \frac{x^2+1+\ln x}{x^2-1}$

vii) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$

viii) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-5}{4-x^2}}$

ix) $f(x) = 2^{\sqrt{x-2}}$

x) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} + \frac{1}{\cos(3x)}$

1.2. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας κάποια προσέγγιση ή κάποιο υπολογιστικό πακέτο (Matlab, Octave, Mathematica κ.α):

i) $f(x) = 4x$

ii) $f(x) = 4x + 1$

iii) $f(x) = 3x^2$

iv) $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$

v) $f(x) = |x-3| - 2$

vi) $f(x) = \ln(x+2)$

vii) $f(x) = 1 - x^2$

viii) $f(x) = e^{-x}$

ix) $f(x) = -\ln x$

x) $f(x) = \cosh(2x)$

Υπόδειξη: Να συμβουλευτείτε την Υποενότητα 1.7.2.

1.3. Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

1.4. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές ή δεν έχουν καμία συμμετρία:

i) $f_1(x) = x^3$

ii) $f_2(x) = e^{2x+1}$

iii) $f_3(x) = x^2 - x + 1$

iv) $f_4(x) = \tan(x)$

v) $f_5(x) = \sinh^{-1}(x)$

vi) $f_6(x) = \cosh^{-1}(x)$

vii) $f_7(x) = \sin^2(x) - 2x^4 + 4$

viii) $f_8(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

ix) $f_9(x) = \sin(x) + \cos(x)$

x) $f_{10}(x) = \frac{2^x+1}{2^{-x}-1}$

1.5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

ii) $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

1.6. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(-2,3]$, ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x-3)$, $f(-x)$ και $f(x^2)$;

1.7. Να υπολογισθεί το σύνολο τιμών των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = |x^2 - 5|$

ii) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

iii) $f(x) = \frac{1}{3 - \cos(2x)}$

iv) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1.8. Να υπολογισθεί η συνάρτηση $3f - 2g$, αν

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq -1 \\ 4 - 5x, & x > -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x < 3 \\ 4x + 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

1.9. Αν $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, να υπολογισθεί η $f(x)$.

1.10. Αν $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = x + 5$, να υπολογισθεί η σύνθετη $f \circ g$. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

1.11. Αν f και g είναι περιττές συναρτήσεις να αποδείξετε ότι και η σύνθετη $f \circ g$ είναι περιττή συνάρτηση.

Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και η g περιττή, τότε η σύνθετη $f \circ g$ είναι περιττή ή άρτια συνάρτηση ;

1.12. Να εξετάσετε, αν η ακόλουθη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 3 \\ 2x + 5, & x < 3 \end{cases}$$

είναι 1-1. Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να υπολογισθεί η αντίστροφη της.

1.13. Να υπολογισθεί η αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει, σε κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{5}{1 + 2^{-x}}$

ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

v) $f(x) = x^x$

vi) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

vii) $f(x) = 1 - 2\ln(1-x)$

viii) $f(x) = e^{-2x} - 1$

ix) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

x) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} = \operatorname{cosec}(x)$

Να επαληθεύσετε ότι ισχύει $f^{-1} \circ f = I$, όπου I είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

Τα παραπάνω αποτελέσματα να επιβεβαιωθούν με τη χρήση Matlab.

1.14. i) Αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow C$ είναι αμφιμονοσήμαντες και επί συναρτήσεις, να αποδείξετε ότι η σύνθετη $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση.

ii) Αν η $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

iii) Αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί συνάρτηση.

1.15. Να υπολογισθεί, η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$, όπου αυτή ορίζεται, όταν

i) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{x} = g(x)$

iii) $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \ln x$

iv) $f(x) = \cosh(x)$, $g(x) = x^2 + 1$

v) $f(x) = \tanh^{-1}(x)$, $g(x) = x^2$.

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

1.16. Χρησιμοποιώντας Matlab να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τους συντελεστές της συνάρτησης $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, τα άκρα του διαστήματος $[x_1, x_2]$, το βήμα k και έξοδο τη γραφική παράσταση της f με «μπλε χρώμα». Στη συνέχεια, στην ίδια εικόνα και με «κόκκινο χρώμα» να σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + d$. Τι παρατηρείτε; Οι συναρτήσεις αντιστρέφονται; Ποιες είναι οι αντίστροφες; Ποια είναι η σύνθεση $g \circ f$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

...Όταν διαδοχικές τιμές που παίρνει μία μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μία συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν λιγότερο από όσο επιθυμεί κανείς, η τελευταία αυτή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)

...Από αμνημόνευτους χρόνους, το άπειρο συγκινούσε τη ψυχή του ανθρώπου περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μία ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Αλλά και καμία άλλη έννοια δεν χρήζει οριστικής διασάφησης περισσότερο από αυτήν...

Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, 95(1), (1926), 161-190

David Hilbert (1862 - 1943)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι έννοιες της ακολουθίας και της υπακολουθίας των πραγματικών αριθμών, ορίζονται οι έννοιες της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας και διατυπώνονται οι ιδιότητες που συνδέουν αυτές τις έννοιες μεταξύ τους. Παρουσιάζονται τα σημαντικότερα κριτήρια και οι προτάσεις μίας συγκλίνουσας ακολουθίας και μελετώνται τα χαρακτηριστικά όρια ακολουθιών.

Προαπαιτούμενη γνώση

Συναρτήσεις

2.1. Η έννοια της ακολουθίας

Οι ακολουθίες αποτελούν ειδική περίπτωση συναρτήσεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε προβλήματα διακριτοποίησης, τα οποία βρίσκουν πολλές εφαρμογές στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, στα Σήματα και Συστήματα, στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, στις Τηλεπικοινωνίες, στην Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων, στη Θεωρία Ουρών κ.ά., (βλέπε, [Ασημάκης \(2008\)](#); [Ασημάκης & Αδάμ, \(2015\)](#); [Chapra, S. C., & Canale, R. P. \(2014\)](#), [Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. \(2012\)](#); [Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. \(2014\)](#); [Spivak, M. \(2010\)](#)).

Ορισμός 2.1.1. Ακολουθία (sequence) πραγματικών αριθμών ονομάζεται μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

Η ακολουθία ως συνάρτηση σημειώνεται $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την n , και εξαρτημένη μεταβλητή (εικόνα του στοιχείου $n \in \mathbb{N}$) την $a(n)$, που στη συνέχεια σημειώνεται a_n , δηλαδή, θέτουμε $a(n) = a_n$.

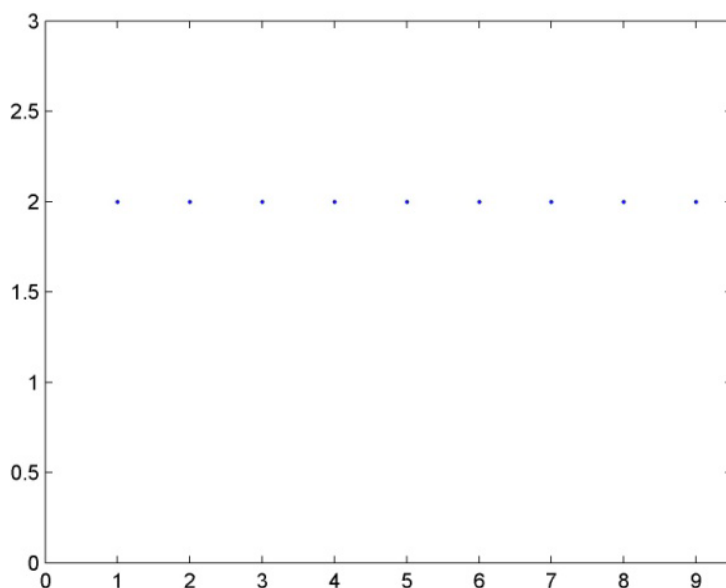
Ο πραγματικός αριθμός a_n , που είναι η εικόνα του στοιχείου $n \in \mathbb{N}$ της συνάρτησης $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται **n -οστός όρος** της ακολουθίας, ενώ όταν αναφέρεται στον τύπο της ακολουθίας a_n αυτός ονομάζεται **γενικός όρος** της.

Σε μερικές περιπτώσεις η ακολουθία μπορεί να έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, οπότε ορίζεται και ο μηδενικός όρος της ακολουθίας ως a_0 .

Στη συνέχεια, η ακολουθία συμβολίζεται με την αναγραφή ορισμένων πρώτων όρων και του γενικού όρου της ως συνάρτηση του n , δηλαδή $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $n \in \mathbb{N}$, ή σύντομα $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ή απλούστερα (a_n) .

Επίσης, μπορεί να ορίζονται k το πλήθος πρώτοι (αρχικοί) όροι της ακολουθίας a_1, a_2, \dots, a_k και για κάθε $n \geq k + 1$, ο όρος a_n να ορίζεται ως συνάρτηση των αρχικών όρων a_1, a_2, \dots, a_k , κάθε όρος της ακολουθίας με $n \geq k + 1$ υπολογίζεται από έναν τύπο, που ονομάζεται **αναδρομικός**.

Από τον Ορισμό 2.1.1 και τον παραπάνω συμβολισμό είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι το σύνολο, που έχει στοιχεία τους όρους της ακολουθίας, δηλαδή, $\{a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}\}$, το οποίο είναι πεπερασμένο ή μη πεπερασμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Επειδή πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι οι φυσικοί αριθμοί \mathbb{N} και σύνολο τιμών υποσύνολο του \mathbb{R} , η γραφική παράσταση της ακολουθίας είναι διακριτά σημεία στο δεξί ημιεπίπεδο, δείτε στα [Σχήμα 2.1](#) και [Σχήμα 2.2](#).



Σχήμα 2.1: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = 2, n \in \mathbb{N}$.

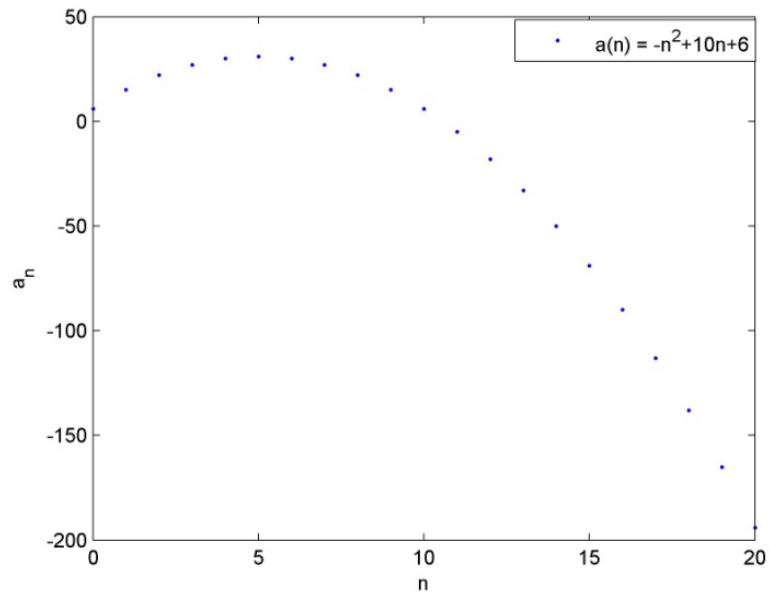
Παραδείγματα 2.1.2.

- i) Η ακολουθία των φυσικών αριθμών έχει γενικό όρο $a_n = n, n \in \mathbb{N}$, αποτελεί αριθμητική πρόοδο¹ με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$.
- ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ έχει όρους $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \dots$ συνεπώς, το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, έχει μόνο δύο στοιχεία, $-1, 1$.
- iii) Για κάθε αριθμό $c \in \mathbb{R}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = c, n \in \mathbb{N}$ έχει όλους τους όρους της ίσους με το σταθερό αριθμό c και ονομάζεται **σταθερή** ακολουθία. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{c\}$.

Στο Σχήμα 2.1 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = 2, n \in \mathbb{N}$.

- iv) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι οι άρτιοι αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.
- v) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι οι περιττοί αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.
- vi) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{4}n^2, n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, \dots, \frac{1}{4}n^2, \dots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι θετικοί ρητοί αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.
- vii) Οι δύο πρώτοι όροι μίας ακολουθίας είναι $a_1 = a_2 = 1$ και κάθε άλλος όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$, η ακολουθία είναι γνωστή και ως ακολουθία Fibonacci. \diamond

¹ Αριθμητική πρόοδος είναι μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + \omega$, για κάποιον σταθερό πραγματικό αριθμό ω , που ονομάζεται διαφορά της ακολουθίας, επειδή από τον αναδρομικό τύπο ισούται με τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της. Αποδεικνύεται ότι, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = a_1 + (n-1)\omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.



Σχήμα 2.2: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = -n^2 + 10n + 6$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.1.3. Δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζονται **ίσες** αν ισχύει $a_n = b_n$, για κάθε φυσικό αριθμό n .

Οι πράξεις *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο*, *γινόμενο επί αριθμό* και *πηλίκο* μεταξύ ακολουθιών, ορίζονται όπως ορίστηκαν και οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ δύο συναρτήσεων, βλέπε Ορισμό 1.2.3.

2.2. Φραγμένες ακολουθίες

Η έννοια της φραγμένης ή μη φραγμένης συνάρτησης, που διατυπώθηκε στον Ορισμό 1.2.12, μπορεί να επεκταθεί και να διατυπωθεί με ανάλογο τρόπο και για την ακολουθία, όπως στη συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται

- i) **άνω φραγμένη** (upper bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός M , τέτοιος ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** (upper bound) της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα της ακολουθίας ονομάζεται **άνω πέρασ** (supremum) και συμβολίζεται $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.
- ii) **κάτω φραγμένη** (lower bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός m , τέτοιος ώστε $a_n \geq m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Το μέγιστο από τα κάτω φράγματα της ακολουθίας ονομάζεται **κάτω πέρασ** (infimum) και συμβολίζεται $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.
- iii) **φραγμένη** (bounded), όταν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη.
- iv) **απόλυτα φραγμένη** (absolutely bounded), όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός a , τέτοιος ώστε να ισχύει $|a_n| \leq a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός a ονομάζεται **απόλυτο φράγμα** της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Από τον Ορισμό 2.2.1(i) είναι φανερό ότι αν ο M είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και οποιοσδήποτε άλλος αριθμός μεγαλύτερος του M είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Συνεπώς, το άνω φράγμα μίας άνω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικό. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη το άνω πέρασ υπάρχει και είναι μοναδικό, (βλέπε, Ενότητα 3.8, (Ρασσιάς, 2014)). Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε γράφουμε $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$.

Αντίστοιχα, από τον Ορισμό 2.2.1(ii) είναι φανερό ότι αν ο m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και οποιοσδήποτε άλλος αριθμός μικρότερος του m είναι κάτω φράγμα της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Άρα, το κάτω φράγμα μίας κάτω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικό. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη το κάτω πέρασ υπάρχει και είναι μοναδικό. Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε γράφουμε $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty$.

Παρόλο που τα φράγματα (άνω ή κάτω) μίας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικά, όταν χρειάζεται να «εντοπίσουμε» κάποιο φράγμα (άνω ή κάτω) της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, αρχικά αναζητούμε την ύπαρξη ενός απόλυτου φράγματος της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, επειδή οι έννοιες απόλυτα φραγμένη και φραγμένη ακολουθία είναι ισοδύναμες, όπως διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (iii) είναι άνω και κάτω φραγμένη, συνεπώς υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί m, M τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$m \leq a_n \leq M, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε $\mu = \max\{|m|, |M|\}$, οπότε η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφεί

$$-\mu \leq -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq \mu, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.1)$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$-\mu \leq a_n \leq \mu \Leftrightarrow |a_n| \leq \mu, \quad (2.2.2)$$

επομένως η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη, (βλέπε, [Ορισμό 2.2.1\(iv\)](#)).

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη από ένα θετικό πραγματικό αριθμό a , συνδυάζοντας τον [Ορισμό 2.2.1\(iv\)](#) με την ιδιότητα της απόλυτης τιμής στην [\(2.2.2\)](#), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| \leq a \Leftrightarrow -a \leq a_n \leq a$, το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό a και κάτω φραγμένη από τον αριθμό $-a$, συνεπώς η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, [Ορισμό 2.2.1 \(iii\)](#)). \diamond

Η ισοδυναμία που παρουσιάζεται στην Πρόταση 2.2.2 εξασφαλίζει άνω και κάτω φράγμα για την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από τον ίδιο αριθμό κατά απόλυτη τιμή. Αν δεν υπάρχει απόλυτο φράγμα, αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία δεν είναι άνω και κάτω φραγμένη από τον ίδιο (κατά απόλυτη τιμή) πραγματικό αριθμό, (βλέπε, στη σχέση [\(2.2.1\)](#)), το οποίο δεν είναι ισοδύναμο με το ότι η ακολουθία δεν είναι φραγμένη. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μπορεί να είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ή να μην είναι φραγμένη.

Παραδείγματα 2.2.3.

i) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί και επειδή οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, προφανώς, μπορούμε να γράψουμε

$$0 < a_n \leq 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (i) και (ii) ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία είναι ο αριθμός 0 και ένα άνω φράγμα είναι ο αριθμός 1.

Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το άνω φράγμα αποτελεί επίσης άνω φράγμα για την ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι το άνω πέρασ της ακολουθίας είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$, (βλέπε, [Ορισμός 2.2.1 \(i\)](#)).

Επιπλέον, οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος από το κάτω φράγμα αποτελεί επίσης ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι το κάτω πέρασ της ακολουθίας είναι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$, (βλέπε, [Ορισμός 2.2.1 \(ii\)](#)).

Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι, ένα κριτήριο για τον εντοπισμό των περάτων (άνω ή κάτω), αν αυτά δεν είναι όροι της ακολουθίας, αποτελεί η Πρόταση 2.5.13, (βλέπε, [Παρατήρηση 2.5.14](#)).

Επειδή, η ακολουθία είναι άνω και κάτω φραγμένη χαρακτηρίζεται φραγμένη (βλέπε, [Ορισμός 2.2.1 \(iii\)](#)), και από την ισοδυναμία της [Πρότασης 2.2.2](#), συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη.

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < 1$, άρα ένα απόλυτο φράγμα της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ο αριθμός 1, δηλαδή, το απόλυτο φράγμα ταυτίζεται με το άνω πέρασ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| = \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \left| -1 \right|^n \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < 1$. Άρα ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ο αριθμός

1, και από την ισοδυναμία της [Πρότασης 2.2.2](#) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Άλλωστε από $|a_n| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n < 1$ προκύπτουν δύο φράγματα (κάτω και άνω) για την ακολουθία, ένα κάτω φράγμα είναι $m = -1$, και ένα άνω φράγμα είναι $M = 1$.

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι όροι της ακολουθίας είναι $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, -\frac{1}{2k_1-1}, \frac{1}{2k_1}, \dots$, τους οποίους μπορούμε να αναδιατάξουμε και να τους γράψουμε σε ένα σύνολο ως ακολούθως

$$\left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2k_1-1}, \frac{1}{2k_1}, \dots, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Παρατηρήστε ότι, το παραπάνω σύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο το $m = -1$, και μέγιστο στοιχείο το $\frac{1}{2}$, που είναι μικρότερο από το άνω φράγμα που υποθέσαμε. Επειδή, ο μικρότερος όρος της ακολουθίας ταυτίζεται με το κάτω φράγμα, m , το ελάχιστο του παραπάνω συνόλου, και οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας, σύμφωνα με τον [Ορισμό 2.2.1 \(ii\)](#) το κάτω πέρασ της ακολουθίας είναι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -1$.

Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το μέγιστο του παραπάνω συνόλου αποτελεί ένα άνω φράγμα για την ακολουθία, σύμφωνα με τον [Ορισμό 2.2.1 \(ii\)](#) το άνω πέρασ της ακολουθίας είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \frac{1}{2}$.

iii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρχικά να θυμίσουμε τον ορισμό του παραγοντικού, ο οποίος είναι : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, για κάθε $n \geq 1$, και $0! = 1$.

Παρατηρήστε ότι οι πρώτοι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $1, \frac{1}{2^2}, \frac{2!}{3^3}, \frac{3!}{4^4}, \dots$, από όπου είναι φανερό ότι όλοι οι όροι είναι θετικοί αριθμοί. Επομένως, ένα κάτω φράγμα της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $m = 0$. Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας και όλοι οι όροι της ακολουθίας συνεχώς «πλησιάζουν» τον m , συμπεραίνουμε ότι το κάτω πέρασ της ακολουθίας είναι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$, (βλέπε, [Παρατήρηση 2.5.14](#), [Παραδείγματα 2.5.15 \(ii\)](#)).

Επιπλέον χρησιμοποιώντας τον ορισμό του παραγοντικού μπορούμε να γράψουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} < \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \leq 1$$

Επομένως, ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $M = 1$. Άρα, η ακολουθία είναι φραγμένη και σύμφωνα με την [Πρόταση 2.2.2](#) είναι και απόλυτα φραγμένη, αρκεί να θεωρήσουμε ως απόλυτο φράγμα τον αριθμό 1 ή οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερο από αυτόν.

Επιπλέον παρατηρήστε ότι, οι όροι της ακολουθίας $1, \frac{1}{2^2}, \frac{2!}{3^3}, \dots$ συνεχώς «φθίνουν», (βλέπε, [Παράδειγμα 2.3.3 \(ii\)](#)) και ότι όλοι οι όροι είναι μικρότεροι του απόλυτου φράγματος 1, εκτός από τον πρώτο όρο της. Σύμφωνα με τον [Ορισμό 2.2.1 \(i\)](#) το άνω πέρασ της ακολουθίας είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$.

iv) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, από τη γνωστή αλγεβρική ταυτότητα γνωρίζουμε ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα και τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής, έχουμε:

$$|a_n| = \left| \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right| = \frac{2}{3} \left| 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \frac{2}{3} \left(1 + \left| -\frac{1}{2} \right|^n\right) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{4}{3}$$

Επομένως, ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός $4/3$, και από την ισοδυναμία της [Πρότασης 2.2.2](#) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και από τη (2.2.2) προκύπτει ότι ένα άνω φράγμα είναι $M = 4/3$ και ένα κάτω φράγμα είναι $m = -4/3$.

v) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n + 5$ είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $m = 7$, επειδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $7 \leq 2n + 5$. Προφανώς η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να είναι απόλυτα φραγμένη.

vi) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = -3n - 1$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $M = -4$, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $-3n - 1 \leq -4$, και προφανώς η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, συνεπώς, για την $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός a για τον οποίο να ισχύει $|a_n| \leq a$. Άρα, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι απόλυτα φραγμένη.

vii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{n^3 - 1}{n}$ δεν είναι φραγμένη.

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, σύμφωνα με την [Πρόταση 2.2.2](#) είναι και απόλυτα φραγμένη από ένα θετικό αριθμό a , δηλαδή, ισχύει:

$$|a_n| < a \Rightarrow \left| \frac{n^3 - 1}{n} \right| < a \Rightarrow \frac{|n^3 - 1|}{n} < a \Rightarrow |n^3 - 1| < an \quad (2.2.3)$$

Επειδή για κάθε $n \geq 2$ ισχύουν: $n^2 - 1 = |n^2 - 1|$ και $n^3 - 1 = |n^3 - 1|$ και $n^2 - 1 < n^3 - 1$, συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με τη (2.2.3) έχουμε:

$$n^2 - 1 < n^3 - 1 < an \Rightarrow n^2 - an - 1 < 0$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει όταν $n \in [n_1, n_2]$, όπου $n_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$, $n_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ είναι οι δύο διαφορετικές ρίζες του τριωνύμου $n^2 - an - 1$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.

viii) Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $a_1 = 2$,

είναι φραγμένη.

Θα αποδείξουμε, με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $m = 1$, δηλαδή, ότι ισχύει $a_n > 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά έχουμε $a_1 = 2 > 1$, $a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$, άρα ο ισχυρισμός $a_n > 1$ επαληθεύεται για $n = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n = k$ ισχύει $a_k > 1$ (υπόθεση επαγωγής). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k + 1$.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής και τον αναδρομικό τύπο μπορούμε να γράψουμε:

$$a_k > 1 \Rightarrow \frac{1}{a_k} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{a_k} > -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{a_k} > 2 - 1 \Rightarrow a_{k+1} > 1$$

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $a_n > 1$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

από $a_n > 1 > 0$ μπορούμε να γράψουμε $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} < 2$, δηλαδή, η ακολουθία είναι άνω φραγμένη, με ένα

άνω φράγμα τον αριθμό $M = 2$.

Άρα, αποδείξαμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$1 < a_n < 2, \quad (2.2.4)$$

το οποίο επαληθεύει τον [Ορισμό 2.2.1 \(iii\)](#). Επομένως, η ακολουθία είναι φραγμένη. $\diamond\diamond$

2.3. Μονοτονία ακολουθίας

Η έννοια της μονοτονίας μίας συνάρτησης, που διατυπώθηκε στον Ορισμό 1.3.1, μπορεί να επεκταθεί και να διατυπωθεί με ανάλογο τρόπο και για την ακολουθία, όπως στη συνέχεια.

Ορισμός 2.3.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται

- i) **αύξουσα** (increasing), όταν ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά: $(a_n) \uparrow$
- ii) **γνήσια αύξουσα** (strictly increasing), όταν ισχύει $a_n < a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- iii) **φθίνουσα** (decreasing), όταν ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά: $(a_n) \downarrow$
- iv) **γνήσια φθίνουσα** (strictly decreasing), όταν ισχύει $a_n > a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- v) **(γνήσια) μονότονη ακολουθία** (strictly monotonic sequence), όταν η ακολουθία είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- vi) **σταθερή** ακολουθία (constant sequence), όταν είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα. Συμβολικά: $a_n = c$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις 2.3.2.

- i) Μία γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα) ακολουθία είναι αύξουσα (φθίνουσα), ενώ μία αύξουσα (φθίνουσα) δεν είναι πάντα γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα).
- ii) Μία φθίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της, ενώ μία αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της.
- iii) Πολλές φορές, προκειμένου να προσδιοριστεί το είδος της μονοτονίας μίας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που διατηρεί πρόσημο (οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί ή αρνητικοί για κάθε φυσικό αριθμό), συγκρίνεται το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας με τη μονάδα, ως εξής:
 - όταν ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι **γνήσια αύξουσα**,
 - όταν ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι **γνήσια φθίνουσα**.

Στην περίπτωση που οι παραπάνω ανισότητες γίνονται ισότητες για ένα τουλάχιστον n , τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα), αντίστοιχα.

Προφανώς, οι παραπάνω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες διατυπώσεις του Ορισμού 2.3.1 (γιατί).

- iv) Για να εξετάσουμε τη μονοτονία μίας δοσμένης ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, εργαζόμαστε με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

• **πρώτος τρόπος:** Σχηματίζουμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$. Αν $a_{n+1} - a_n > 0$ (< 0), για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα), (βλέπε, [Ορισμός 2.3.1 \(ii\)](#) και [\(iv\)](#), αντίστοιχα).

Αν για ένα τουλάχιστον n στις παραπάνω ανισότητες έχουμε ισότητα, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα), αντίστοιχα.

• **δεύτερος τρόπος:** Αν οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ διατηρούν πρόσημο, τότε συγκρίνοντας το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας με τη μονάδα βγάζουμε τα συμπεράσματα για τη μονοτονία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπως αυτά διατυπώθηκαν στο [\(iii\)](#).

• **τρίτος τρόπος:** Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δίνεται με μη-αναδρομικό τύπο και έχει σύνθετο τύπο, μετατρέπουμε την ακολουθία στην αντίστοιχη συνάρτηση και μελετούμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Η μονοτονία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αυτή της συνάρτησης.

- *τέταρτος τρόπος*: Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δίνεται με αναδρομικό τύπο, συνήθως η απόδειξη της μονοτονίας της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στηρίζεται στην επαγωγική μέθοδο.
- *πέμπτος τρόπος*: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας, τότε ξεκινάμε με την ανισότητα του [Ορισμού 2.3.1](#) ή της (iii) που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο είδος μονοτονίας και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε μία αλγεβρική σχέση εξαρτώμενη από το n που ισχύει.

Παραδείγματα 2.3.3.

i) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n - 1$ είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας τον [πρώτο τρόπο](#), που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$a_{n+1} - a_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = 2 > 0$$

Επομένως, $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, [Ορισμός 2.3.1 \(ii\)](#)).

ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ είναι γνήσια φθίνουσα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όπως αναφέρθηκε στο [Παράδειγμα 2.2.3 \(iii\)](#), όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το [δεύτερο τρόπο](#), που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1-1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n-1)!}{n^n}} = \frac{n^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1} \cdot (n-1)!} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1$$

Επομένως, συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την τελευταία ανίσωση προκύπτει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, [Ορισμός 2.3.1 \(iv\)](#)).

iii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{4^n}{n^2}$ είναι αύξουσα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το [δεύτερο τρόπο](#), που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n}{n^2}} = \frac{4^{n+1} \cdot n^2}{4^n \cdot (n+1)^2} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} \geq 1 \quad (2.3.1)$$

Συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την τελευταία ανίσωση μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{4n^2}{(n+1)^2} \geq 1 \Rightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Επειδή η ανίσωση $3n^2 - 2n - 1 \geq 0$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2.3.1), από την οποία προκύπτει $a_{n+1} \geq a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, (βλέπε, [Ορισμός 2.3.1 \(i\)](#)).

Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι γνήσια αύξουσα, επειδή για τους δύο πρώτους όρους ισχύει $a_2 = a_1 = 4$.

iv) Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $a_1 = 2$, είναι γνήσια φθίνουσα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **τέταρτο τρόπο**, που αναφέρεται στην **Παρατήρηση 2.3.2 (iv)**, τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρχικά έχουμε $a_1 = 2$, $a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < a_1$, άρα σύμφωνα με τον **Ορισμό 2.3.1 (iv)** ο ισχυρισμός επαληθεύεται για $n = 1$. Η υπόθεση της επαγωγής είναι ότι για κάποιο $n = k$ ισχύει :

$$a_{k+1} < a_k \quad (2.3.2)$$

Θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k+1$. Χρησιμοποιώντας τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας και τον αναδρομικό τύπο, μπορούμε να γράψουμε:

$$a_{k+1} - a_k = 1 - \frac{1}{a_k} - a_k = \frac{a_k - 1 - a_k^2}{a_k} = -\frac{a_k^2 - a_k + 1}{a_k} \quad (2.3.3)$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $a_k^2 - a_k + 1$ είναι αρνητική, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$a_k^2 - a_k + 1 > 0 \quad (2.3.4)$$

Στο Παράδειγμα 2.2.3. (vii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και συγκεκριμένα από τη (2.2.4) έχουμε ότι $1 < a_k < 2$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το οποίο σημαίνει ότι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας μπορεί να είναι το μηδέν, άρα ισχύει:

$$a_k > 0 \quad (2.3.5)$$

Από (2.3.4) και (2.3.5) συμπεραίνουμε ότι η (2.3.3) γράφεται

$$a_{k+1} - a_k < 0 \Rightarrow a_{k+1} < a_k,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k+1$.

Επομένως, η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το οποίο επαληθεύει τον **Ορισμό 2.3.1 (iv)**, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα. $\diamond\diamond$

2.4. Η έννοια της υπακολουθίας

Ορισμός 2.4.1. Υπακολουθία (subsequence) της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται κάθε ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Στη συνέχεια, μία υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συμβολίζεται με $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, για την αντίστοιχη $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Παραδείγματα 2.4.2.

i) Αν από μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ επιλέξουμε τους όρους που έχουν περιττούς δείκτες $1, 3, \dots, 2n-1, \dots$, δηλαδή τους όρους $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$, δημιουργείται η υπακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2n-1}$, (βλέπε, Ορισμός 2.4.1). Η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, επειδή $b_n = a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και η $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $k_n = 2n-1$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία, (βλέπε, Παράδειγμα 2.3.3. (i)).

Ανάλογα, θεωρώντας $k_n = 2n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας που έχουν άρτιους δείκτες, δηλαδή την υπακολουθία $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$.

Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δημιουργείται αν χρησιμοποιηθούν οι όροι των δύο υπακολουθιών $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **διαμερίζεται** στις υπακολουθίες $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) Θεωρώντας τη γνήσια αύξουσα ακολουθία με γενικό όρο $k_n = 3n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (βλέπε, πρώτο τρόπο, Παρατήρηση 2.3.2 (iv)) μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{3n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που έχουν δείκτες $3, 6, 9, \dots, 3n, \dots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3n}, \dots$.

Ανάλογα, θεωρώντας $k_n = 3n-1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία με γενικό όρο $b_n = a_{3n-1}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας με δείκτες $2, 5, 8, \dots, 3n-1, \dots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-1}, \dots$.

Επίσης, θεωρώντας $k_n = 3n-2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία με γενικό όρο $b_n = a_{3n-2}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας με δείκτες $1, 4, 7, \dots, 3n-2, \dots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{3n-2}, \dots$.

Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **διαμερίζεται** στις τρεις υπακολουθίες $(a_{3n-2})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{3n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, επειδή οι όροι όλων των υπακολουθιών σχηματίζουν όλους τους όρους της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

iii) Θεωρώντας τη γνήσια αύξουσα ακολουθία με γενικό όρο $k_n = 2^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (βλέπε, δεύτερο τρόπο, Παρατήρηση 2.3.2 (iv)) μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2^n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που έχουν δείκτες $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_2, a_4, a_8, \dots, a_{2^n}, \dots$ ◇◇

Στην πρόταση που ακολουθεί, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.1), διατυπώνονται οι σχέσεις που συνδέουν την ακολουθία με κάποια υπακολουθία αυτής ως προς τα είδη της μονοτονίας και των φραγμάτων.

Πρόταση 2.4.3.

- i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
- ii) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη.
- iii) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.
- iv) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη.
- v) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα), τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα).

2.5. Σύγκλιση ακολουθίας στον \mathbb{R}

Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης έννοια στη Μαθηματική Ανάλυση. Το όριο της ακολουθίας πραγματικών αριθμών είναι ειδική περίπτωση της οριακής τιμής μίας πραγματικής συνάρτησης, ωστόσο η μελέτη του ορίου της ακολουθίας παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα, επειδή η διατύπωση της έννοιας του ορίου της είναι απλούστερη, η κατανόηση των ιδιοτήτων σύγκλισης είναι ευκολότερη και επιπλέον τα συμπεράσματα που θα προκύψουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των οριακών τιμών της συνάρτησης, (βλέπε, Κεφάλαιο 4).

2.5.1. Η έννοια της περιοχής

Περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0 ονομάζεται κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) στο οποίο περιέχεται το x_0 , δηλαδή $x_0 \in (a, b)$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν περιοχές του πραγματικού αριθμού x της μορφής $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, όπου ε είναι θετικός πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **ακτίνα** της περιοχής $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ και x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **κέντρο** της περιοχής.

Αν $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, τότε από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής στη (2.2.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

Παρατήρηση 2.5.1. Αρκετές φορές στη συνέχεια της ενότητας, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση «τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του x_0 » και θα εννοούμε ότι «όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του x_0 εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της».

Συνεπώς, αν τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν στην περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιος δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ θα ισχύει:

$$x_0 - \varepsilon < a_n < x_0 + \varepsilon$$

2.5.2. Μηδενική ακολουθία

Ορισμός 2.5.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται **μηδενική** (null sequence), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $|a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Η μηδενική ακολουθία συμβολίζεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ή $a_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n| < \varepsilon \quad (2.5.1)$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας με την Παρατήρηση 2.5.1 μία άλλη διατύπωση του Ορισμού 2.5.2 είναι η ακόλουθη:

Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται **μηδενική**, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του μηδενός $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Εφαρμογή 2.5.3. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το **δεύτερο τρόπο**, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Επομένως, συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την παραπάνω ανίσωση προκύπτει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, **Ορισμός 2.3.1 (iv)**).

Στον **Πίνακα 2.1** παρουσιάζονται ορισμένοι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων. Παρατηρήστε ότι, οι πρώτοι τριάντα όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πλησιάζουν όλο και περισσότερο στον αριθμό μηδέν, οπότε υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον **Ορισμό 2.5.2** και την (2.5.1), για τυχαίο $\varepsilon > 0$ αναζητούμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$. Θεωρούμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, όπου $[a]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού a , δηλαδή, ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος του a . Είναι φανερό ότι, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1} < \varepsilon$, συνεπώς

ισχύει $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, το οποίο σημαίνει ότι επαληθεύεται η (2.5.1), άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Πίνακας 2.1: Όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$

$a_1 = 1$	$a_{11} = 0.090909$	$a_{21} = 0.047619$...	$a_{50} = 0.02$
$a_2 = 0.5$	$a_{12} = 0.083333$	$a_{22} = 0.045454$		\vdots
$a_3 = 0.333333$	$a_{13} = 0.076923$	$a_{23} = 0.043478$		$a_{100} = 0.01$
$a_4 = 0.25$	$a_{14} = 0.071428$	$a_{24} = 0.041666$		\vdots
$a_5 = 0.2$	$a_{15} = 0.066666$	$a_{25} = 0.04$		$a_{500} = 0.002$
$a_6 = 0.166666$	$a_{16} = 0.0625$	$a_{26} = 0.038461$		\vdots
$a_7 = 0.142857$	$a_{17} = 0.058823$	$a_{27} = 0.037037$		$a_{1000} = 0.001$
$a_8 = 0.125$	$a_{18} = 0.055555$	$a_{28} = 0.035714$		\vdots
$a_9 = 0.111111$	$a_{19} = 0.052631$	$a_{29} = 0.034482$		$a_{2000} = 0.0005$
$a_{10} = 0.1$	$a_{20} = 0.05$	$a_{30} = 0.033333$		\vdots

◇◇

2.5.3. Σύγκλιση ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό

Ορισμός 2.5.4. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στον **πραγματικό αριθμό** a (είναι **συγκλίνουσα** στον $a \in \mathbb{R}$ ή **τείνει** στον $a \in \mathbb{R}$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Ο αριθμός $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **όριο** (limit) της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ή **οριακή τιμή** της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

και συμβολίζεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ή $a_n \rightarrow a$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon \quad (2.5.2)$$

Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι **αποκλίνει** ή ότι είναι **αποκλίνουσα**, όταν **δεν** συγκλίνει, δηλαδή, όταν δεν ισχύει ο Ορισμός 2.5.4., το οποίο μπορεί να σημαίνει ότι:
 (α) δεν υπάρχει το όριο, και τότε λέμε ότι η ακολουθία **ταλαντεύεται**, ή
 (β) η ακολουθία **απειρίζεται** θετικά ή αρνητικά, (βλέπε, Ενότητα 2.7).

Παρατηρήσεις 2.5.5. i) Συνδυάζοντας τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας με την [Παρατήρηση 2.5.1](#) μία άλλη διατύπωση του Ορισμού 2.5.4 είναι η ακόλουθη:

Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι **συγκλίνει** στον $a \in \mathbb{R}$ ή ότι είναι **συγκλίνουσα** στον $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

ii) Συνδυάζοντας (2.5.2) με τη (2.5.1) είναι φανερό ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a) = 0. \quad (2.5.3)$$

Επομένως, όταν χρειάζεται να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται ισοδύναμα η (2.5.3), δηλαδή, ότι η ακολουθία $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

iii) Η σταθερή ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι συγκλίνουσα στον $a \in \mathbb{R}$, επειδή επαληθεύεται η ισοδυναμία στη (2.5.3).

Παραδείγματα 2.5.6.

Να αποδειχθεί ότι:

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} = 4 \quad \text{iii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} = 1$$

i) Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = 2 + \frac{1}{n}$. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό 2, επειδή η ακολουθία $(a_n - 2)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τη (2.5.3) στην Παρατήρηση 2.5.5(ii) και την [Εφαρμογή 2.5.3](#) έχουμε :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - 2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} - 2\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

ii) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} = 4$.

Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1}$. Επειδή

$$\left| \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} - 4 \right| = \left| \frac{4n^2 - 3n + 4 - 4n^2 - 4}{n^2 + 1} \right| = \left| \frac{-3n}{n^2 + 1} \right| = \frac{3n}{n^2 + 1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει

$$|a_n - 4| = \left| \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} - 4 \right| < \frac{3}{n} < \frac{3\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Επομένως, επαληθεύεται ο Ορισμός 2.5.4 και από την ισοδυναμία στην (2.5.2) έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} = 4$.

iii) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}}$. Επειδή

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} - 1 \right| &= \left| \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{\sqrt{n^2 + 4}} \right| = \left| \frac{(n - \sqrt{n^2 + 4})(n + \sqrt{n^2 + 4})}{\sqrt{n^2 + 4}(n + \sqrt{n^2 + 4})} \right| = \left| \frac{n^2 - (n^2 + 4)}{\sqrt{n^2 + 4}(n + \sqrt{n^2 + 4})} \right|, \\ &= \left| \frac{-4}{n\sqrt{n^2 + 4} + n^2 + 4} \right| = \frac{4}{n\sqrt{n^2 + 4} + n^2 + 4} < \frac{4}{n^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} - 1 \right| < \frac{4}{n^2} < \frac{4\varepsilon}{4} < \varepsilon. \text{ Επομένως, επαληθεύεται ο Ορισμός 2.5.4 και από την ισοδυναμία στην}$$

(2.5.2) έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} = 1$. ◇◇

2.5.4. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Η απόδειξη του ορίου μίας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.5.2 ή τον Ορισμό 2.5.4 ή την ισοδυναμία στις (2.5.1) ή (2.5.2) απαιτεί τη γνώση της οριακής τιμής και τον υπολογισμό ενός κατάλληλου όρου της ακολουθίας ώστε τελικά όλοι οι όροι της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να εγκλωβίζονται στην περιοχή σύγκλισης με κέντρο την οριακή τιμή και ακτίνα οποιονδήποτε μικρό αριθμό, (βλέπε, Παρατήρηση 2.5.1, Ορισμός 2.5.2 και Ορισμός 2.5.4). Η παραπάνω διαδικασία τις περισσότερες φορές είναι επίπονη και δύσχηρηστη, είναι όμως αναγκαία για την απόδειξη αρκετών από τις προτάσεις που ακολουθούν καθώς και των ιδιοτήτων των πράξεων των συγκλινουσών ακολουθιών, τα συμπεράσματα των οποίων είναι χρήσιμα εργαλεία στον υπολογισμό ορίων και στη μελέτη της συμπεριφοράς τόσο των όρων της ακολουθίας, όσο και των αντίστοιχων συναρτήσεων, όπως θα δούμε και σε επόμενα κεφάλαια. Στην υποενότητα αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητες των ακολουθιών, οι οποίες συνδέουν την έννοια μίας συγκλίνουσας ακολουθίας (ή της υπακολουθίας της) με τις έννοιες της μονότονης και φραγμένης ακολουθίας.

Πρόταση 2.5.7. Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$. Το όριο της ακολουθίας είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς, στον a και a' , με $a \neq a'$. Από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_1 \equiv n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_1(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a' \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_2 \equiv n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_2(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a'| < \varepsilon$$

Επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, οπότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon \quad (2.5.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a' \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a'| < \varepsilon$$

(2.5.5)

Συνδυάζοντας (2.5.4), (2.5.5) με την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|a' - a| = |a_n - a - a_n + a'| = |a_n - a - (a_n - a')| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

δηλαδή,

$$|a' - a| < 2\varepsilon \quad (2.5.6)$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{|a' - a|}{2}$, το οποίο είναι θετικός πραγματικός αριθμός, επειδή υποθέσαμε $a \neq a'$, και μετά από αντικατάσταση του ε στην (2.5.6) καταλήγουμε

$$|a' - a| < |a' - a|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό. $\diamond\diamond$

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται μία ικανή συνθήκη, που σχετίζεται με τη σύγκλιση της ακολουθίας, ώστε το σύνολο τιμών της ακολουθίας να είναι ένα φραγμένο σύνολο.

Πρόταση 2.5.8. i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

ii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στον \mathbb{R} .

Απόδειξη: i) Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$, οπότε από τη (2.5.2) και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad (2.5.7)$$

Επιλέγοντας τους πραγματικούς αριθμούς $M = \max\{a + \varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ και $m = \min\{a - \varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ είναι φανερό ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ανισότητα στη (2.5.7) γράφεται

$$m \leq a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \leq M, \quad (2.5.8)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, [Ορισμός 2.2.1 \(iii\)](#)).

Για το αντίστροφο, θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$, και αρχικούς όρους $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \dots$, (βλέπε, [Παράδειγμα 2.1.2\(ii\)](#)). Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| = |(-1)^n| = 1$. Από την ισοδυναμία της [Πρότασης 2.2.2](#) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επειδή για τους όρους της ακολουθίας έχουμε:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ 1, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

είναι φανερό ότι το όριο δεν είναι μοναδικός αριθμός, συνεπώς δεν υπάρχει, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στον \mathbb{R} .

ii) Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, οπότε σύμφωνα με την [Πρόταση 2.5.8\(i\)](#) και τη (2.5.8) η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι αδύνατο να συμβεί από την υπόθεση. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον προτασιακό λογισμό². $\diamond\diamond$

Στην πρόταση που ακολουθεί προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση της ακολουθίας γνωρίζοντας εκ των προτέρων τη σύγκλιση των υπακολουθιών της.

² Θεωρούμε δύο λογικές προτάσεις p, q . Η πρόταση « $p \Rightarrow q$ » είναι ισοδύναμη με την πρόταση «όχι $q \Rightarrow$ όχι p ». Θεωρώντας ως p την πρόταση «η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα» και ως q την πρόταση «η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη», η απόδειξη είναι προφανής.

Πρόταση 2.5.9. i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $a \in \mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία συγκλίνει στον a .

ii) Αν δύο υπακολουθίες της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουν διαφορετική οριακή τιμή, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

iii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ διαμερίζεται σε ένα πλήθος υπακολουθιών, που όλες συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$, τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a .

Απόδειξη: i) Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Ορισμού 2.4.1 και της σχέσης (2.5.2) της συγκλίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.2(i) (Παντελίδης, 2008)).

ii) Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$, και αρχικούς όρους $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \dots$, (βλέπε, Παράδειγμα 2.1.2.(ii)). Από την $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ επιλέγουμε τους όρους με περιττούς δείκτες και κατασκευάζουμε την υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, που είναι η σταθερή ακολουθία $a_{2n-1} = -1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και επιλέγουμε τους όρους της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με άρτιους δείκτες και κατασκευάζουμε την υπακολουθία $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, που είναι η σταθερή ακολουθία $a_{2n} = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n-1} = -1$, και $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 1$.

Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.9(i) πρέπει οι δύο υπακολουθίες που επιλέξαμε να έχουν την ίδια οριακή τιμή, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

iii) Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Ορισμού 2.4.1, της έννοιας του διαμερισμού της ακολουθίας σε υπακολουθίες (βλέπε, Παραδείγματα 2.4.2 (i) και (ii)) και της σχέσης (2.5.2) της συγκλίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.2(ii)). \diamond

Στις δύο επόμενες προτάσεις διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι ιδιότητες των πράξεων πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, οι οποίες είναι χρήσιμες στον υπολογισμό ορίων.

Πρόταση 2.5.10. Έστω οι συγκλίνουσες ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$. Η ιδιότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος όρων.

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. Η ιδιότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.

iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, αν $a \neq 0$ και $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Για τις δύο συγκλίνουσες ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon_1 > 0 \text{ υπάρχει } n_1 \equiv n_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_1(\varepsilon_1) \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon_1 \quad (2.5.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon_2 > 0 \text{ υπάρχει } n_2 \equiv n_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_2(\varepsilon_2) \text{ ισχύει } |b_n - b| < \varepsilon_2 \quad (2.5.10)$$

i) Θέτουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \frac{\varepsilon}{2}$ και επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, οπότε οι (2.5.9) και (2.5.10) γράφονται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$ (2.5.11)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \Leftrightarrow$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|b_n - b| < \varepsilon$ (2.5.12)

Συνδυάζοντας τις (2.5.11), (2.5.12) με την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ ισχύει:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επομένως, επαληθεύεται η (2.5.2), άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

ii) Επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα συμπεραίνεται ότι είναι φραγμένη, (βλέπε, Πρόταση 2.5.8(i)), και σύμφωνα με την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 είναι απόλυτα φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Θέτουμε $\varepsilon_1 \equiv \frac{\varepsilon}{2|b|}$, $\varepsilon_2 \equiv \frac{\varepsilon}{2M}$ και επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$, οπότε συνδυάζοντας τις

(2.5.9) και (2.5.10) με τη (2.5.13), για κάθε $n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ ισχύει:

$$|a_n b_n - ab| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M \varepsilon_2 + |b| \varepsilon_1 < M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

Επομένως, επαληθεύεται η (2.5.2), άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

iii) Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία όπως στην προηγούμενη απόδειξη στο (ii) προκύπτει η ζητούμενη σχέση, η οποία αφήνεται ως άσκηση. $\diamond\diamond$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ιδιότητες των πράξεων συγκλινουσών ακολουθιών εύκολα μπορούν να αποδειχθούν και οι επόμενες ιδιότητες, οι οποίες αφήνονται ως άσκηση.

Πόρισμα 2.5.11. Έστω k ένα πεπερασμένο πλήθος συγκλινουσών ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, \dots ,

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, \dots και $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = \lambda a$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + \dots + x_n) = a + b + \dots + x$

δηλαδή, η ιδιότητα (i) της Πρότασης 2.5.10 ισχύει για πεπερασμένο πλήθος όρων.

iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n \pm \dots \pm x_n) = a \pm b \pm \dots \pm x$

iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n \cdot \dots \cdot x_n) = a \cdot b \cdot \dots \cdot x$

δηλαδή, η ιδιότητα (ii) της Πρότασης 2.5.10 ισχύει για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.

v) Αν $a_n = b_n = \dots = x_n$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^k = a^k$.

vi) Αν $b \neq 0$ και $b_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Είναι φανερό ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές των ιδιοτήτων, που αναφέρονται στην Πρόταση 2.5.10 και στο Πόρισμα 2.5.11, δεν ισχύουν. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $a_n = (-1)^n a$, $b_n = (-1)^{n+1} a$ με $a \neq 0$.

Επειδή για τους όρους των ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουμε:

$$a_n = \begin{cases} -a, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ a, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} a, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ -a, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

είναι φανερό ότι το όριο κάθε ακολουθίας δεν είναι μοναδικός αριθμός, συνεπώς δεν υπάρχει, άρα οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνουν στον \mathbb{R} .

Επιπλέον, παρατηρήστε ότι οι ακολουθίες που δημιουργούνται με γενικούς όρους το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο των παραπάνω ακολουθιών ορίζονται και δίνουν ακολουθίες με σταθερούς όρους, ως ακολούθως:

$$a_n + b_n = (-1)^n a + (-1)^{n+1} a = 0, \quad a_n \cdot b_n = (-1)^n a \cdot (-1)^{n+1} a = -a^2, \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n a}{(-1)^{n+1} a} = -1$$

Προφανώς, οι παραπάνω συγκλίνουν ως σταθερές ακολουθίες, (βλέπε, [Παρατήρηση 2.5.5 \(iii\)](#)).

Ένα σημαντικό κριτήριο, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορίου γινομένου ακολουθιών αρκεί να είναι φραγμένες, όχι απαραίτητα συγκλίνουσες, αρκεί μία να είναι από αυτές να είναι μηδενική, αποδεικνύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.5.12. Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική και η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Τότε ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με την ισοδυναμία της [Πρότασης 2.2.2](#) η φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|b_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική για κάθε θετικό αριθμό $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$

τέτοιος ώστε να ισχύει: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της απόλυτης τιμής και τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να γράψουμε

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0,$$

το οποίο επαληθεύει τη [\(2.5.1\)](#). Άρα, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$. ◇◇

Σύμφωνα με την [Πρόταση 2.5.8\(i\)](#) οι έννοιες της σύγκλισης και των φραγμάτων (άνω, κάτω ή απόλυτα φράγματα) μίας ακολουθίας δεν είναι ισοδύναμες. Όπως αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία ([Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009](#); [Παντελίδης, 2008](#); [Ρασισιάς, 2014](#)) και διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση, η επιπρόσθετη συνθήκη, που απαιτείται να έχει μία φραγμένη ακολουθία για να συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό, εξαρτάται από τη μονοτονία της.

Πρόταση 2.5.13. Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον \mathbb{R} .

i) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο άνω πέρασ $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

ii) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο κάτω πέρασ $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Παρατήρηση 2.5.14. Εδώ να σημειώσουμε ότι, από το συμπέρασμα της Πρότασης 2.5.13 υποδεικνύεται ένας τρόπος υπολογισμού των περάτων (άνω ή κάτω) μίας ακολουθίας, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτά δεν αποτελούν όρους της ακολουθίας. Συνήθως, αναπτύσσεται η μεθοδολογία για τον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας, ανεξάρτητα από τη γνώση των περάτων της, και συνδυάζοντας την Πρόταση 2.5.13 με τη γνώση της οριακής τιμής υπολογίζεται η τιμή του αντίστοιχου πέρατος.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ αποδείχθηκε ότι είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, (βλέπε αντίστοιχα, Εφαρμογή 2.5.3. και Παράδειγμα 2.2.3 (i)), συνεπώς, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον \mathbb{R} , (βλέπε, Πρόταση 2.5.13). Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.3), συνδυάζοντας την ιδιότητα της μοναδικότητας της οριακής τιμής και του $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ συμπεραίνουμε ότι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$.

Παράδειγματα 2.5.15.

i) Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, με $a_1 = 2$, συγκλίνει με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

ii) Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ συγκλίνει στον \mathbb{R} .

i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία με τον παραπάνω αναδρομικό τύπο είναι ακολουθία θετικών όρων, γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, (βλέπε τις αποδείξεις στα αντίστοιχα παραδείγματα, Παράδειγμα 2.3.3 (iv) και Παράδειγμα 2.2.3 (viii)). Συνεπώς, η ακολουθία συγκλίνει στον \mathbb{R} , (βλέπε, Πρόταση 2.5.13), έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$. Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στον αναδρομικό τύπο (βλέπε, Πρόταση 2.5.10 (i), (iii)) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{a_n} \right) \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα, η ακολουθία συγκλίνει με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 2.5.13 το όριο της ακολουθίας είναι το κάτω πέρασ της, δηλαδή,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1.$$

ii) Στο Παράδειγμα 2.2.3 (iii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και στο Παράδειγμα 2.3.3 (ii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα. Συνεπώς, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ συγκλίνει στον \mathbb{R} , (βλέπε, Πρόταση 2.5.13).

Εδώ να σχολιάσουμε ότι η οριακή τιμή της ακολουθίας δεν υπολογίζεται με αλγεβρικό τρόπο όπως στο (i), ο υπολογισμός γίνεται χρησιμοποιώντας το όριο λόγου του D' Alembert (βλέπε, Πρόταση 2.6.2) και αφήνεται ως άσκηση. $\diamond\diamond$

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται η σχέση που συνδέει τη σύγκλιση της ακολουθίας με τη σύγκλιση της ακολουθίας των απολύτων τιμών της.

Πρόταση 2.5.16. Έστω η συγκλίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε,

i) η ακολουθία $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $|a|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_n|} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|} = \sqrt[k]{|a|}$, $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: i) Από την ιδιότητα των απολύτων τιμών $\||a| - |b|\| \leq |a - b|$ και τον ορισμό της σύγκλισης στον αριθμό $a \in \mathbb{R}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\||a_n| - |a|\| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $|a|$, (βλέπε, Ορισμός 2.5.4).

Για το αντίστροφο, θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$. Επειδή $|a_n| = |(-1)^n| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι φανερό ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$, άρα η $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στη μονάδα. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει, (βλέπε, απόδειξη στην Πρόταση 2.5.9 (ii)).

ii) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του (i) και της ταυτότητας

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

και αφήνεται ως άσκηση. ◇◇

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως «κριτήριο παρεμβολής» ή «κανόνας Sandwich», επειδή δίνει τη δυνατότητα του υπολογισμού του ορίου μίας ακολουθίας, όταν αυτή είναι «εγκλωβισμένη» από δύο άλλες ακολουθίες, οι οποίες έχουν την ίδια οριακή τιμή.

Πρόταση 2.5.17. (Κριτήριο παρεμβολής). Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν επιπλέον οι ακολουθίες $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Απόδειξη: Θεωρώντας ότι οι ακολουθίες $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$ από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \equiv n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_1(\varepsilon)$ ισχύει

$$|b_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

(2.5.14)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_2 \equiv n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_2(\varepsilon)$ ισχύει

$$|c_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

(2.5.15)

Επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, οπότε από τις (2.5.14) και (2.5.15) καθώς και από την υπόθεση μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει

$$a - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a + \varepsilon.$$

Η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, από την οποία προκύπτει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a , (βλέπε, Ορισμός 2.5.4). ◇◇

Εφαρμογή 2.5.18. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n^a}$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός ($a \in \mathbb{R}^+$), είναι μηδενική, δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^a = 0.$$

Απόδειξη: Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$0 < \left(\frac{1}{n}\right)^a \leq \frac{1}{n},$$

και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, (βλέπε, [Εφαρμογή 2.5.3](#)), σύμφωνα με το [κριτήριο παρεμβολής](#) έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^a = 0.$$

Σχόλια: Παρατηρήστε ότι, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα (v) του Πορίσματος 2.5.11, επειδή η ιδιότητα αναφέρεται σε k πεπερασμένο πλήθος παραγόντων και εδώ πρόκειται για μη πεπερασμένο, επειδή $a \in \mathbb{R}^+$. Επιπλέον, δείτε και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα της οριακής τιμής της αντίστοιχης συνάρτησης στο Παράδειγμα 4.3.5.(i). ◇◇

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας της απόλυτης τιμής και του συμπεράσματος της [Πρότασης 2.5.17](#) είναι η επόμενη πρόταση, γνωστή και ως κριτήριο σύγκρισης, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, [Βνδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.3](#)).

Πόρισμα 2.5.19. (*Κριτήριο σύγκρισης*) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει

$$|a_n| \leq |b_n|, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αν η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική, τότε και η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Παράδειγμα 2.5.20.

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \cos(\sqrt{n})}{n}$

Επειδή $|\cos(\sqrt{n})| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες απολύτων τιμών μπορούμε να γράψουμε:

$$\left| \frac{2 - \cos(\sqrt{n})}{n} \right| = \frac{|2 - \cos(\sqrt{n})|}{n} \leq \frac{2 + |\cos(\sqrt{n})|}{n} \leq \frac{2 + 1}{n} = \frac{3}{n} \quad (2.5.16)$$

Επειδή η ακολουθία $\left(\frac{3}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε, [Εφαρμογή 2.5.3](#), [Πόρισμα 2.5.11 \(i\)](#)), συνδυάζοντας τη (2.5.16) με το Πόρισμα 2.5.19, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \cos(\sqrt{n})}{n} = 0. \quad \diamond\diamond$$

Ορισμός 2.5.21. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται **ακολουθία Cauchy** ή **βασική ακολουθία**, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n, m > n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, μία ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n, p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon. \quad (2.5.17)$$

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 2.5.21 με την Παρατήρηση 2.5.1 καταλαβαίνουμε ότι μία ακολουθία είναι Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ τελικά όλοι οι όροι a_n της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή ενός άλλου όρου, δηλαδή ανήκουν $(a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon)$.

Η ιδιότητα που περιγράφεται στον παραπάνω ορισμό είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα της σύγκλισης στον \mathbb{R} , και αυτό διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 2.5.22. (Κριτήριο Cauchy) Κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στον \mathbb{R} είναι ακολουθία Cauchy, και αντίστροφα.

Παρατηρήστε ότι, στο Θεώρημα 2.5.22 διατυπώνεται ένα κριτήριο, δίνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μία ακολουθία να συγκλίνει. Το κριτήριο εφαρμόζεται όταν ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε τη σύγκλιση μίας ακολουθίας, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο της. Στην Ενότητα 3.2, όπου μεταξύ άλλων μελετώνται οι αρμονικές σειρές p -τάξης, το Θεώρημα 2.5.22 είναι απαραίτητο.

Εφαρμογή 2.5.23. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο

$$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι Cauchy ακολουθία.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ και $n, p \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και την ανάλυση σε απλά κλάσματα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Άρα,

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n}. \quad (2.5.18)$$

Για τυχαίο $\varepsilon > 0$, αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, εύκολα προκύπτει ότι, για κάθε

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1} < \varepsilon, \text{ επομένως η (2.5.18) γράφεται:}$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

δηλαδή, επαληθεύεται η (2.5.17). Επομένως, η δοθείσα ακολουθία είναι Cauchy. Άρα, από την ισοδυναμία του [Θεωρήματος 2.5.22](#) συμπεραίνουμε ότι η αρχική ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Σχόλια: Η παραπάνω ακολουθία ονομάζεται αρμονική δεύτερης τάξης ($p=2$), την οποία μελετάμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3. ◇◇

2.6. Χαρακτηριστικά όρια

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται τα όρια των σημαντικότερων ακολουθιών, τα οποία μαζί με τα κριτήρια σύγκλισης και τις ιδιότητες των πράξεων, αποτελούν απαραίτητα εργαλεία στον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας. Σε αρκετές από τις αποδείξεις των χαρακτηριστικών ορίων απαιτείται η ακόλουθη ανισότητα.

Ανισότητα Bernoulli

Αν $x \in \mathbb{R}$ με $x > -1$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Επιπλέον, αν $x > -1$ με $x \neq 0$, και

- $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, τότε $(1+x)^a > 1+ax$.
- $a \in (0, 1)$, τότε $(1+x)^a < 1+ax$.

Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που αναφέρεται στην επόμενη πρόταση, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως γεωμετρική³.

Πρόταση 2.6.1. (Όριο γεωμετρικής ακολουθίας)

Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = r^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $r \in \mathbb{R}$ και $|r| < 1$. Τότε, η γεωμετρική ακολουθία είναι μηδενική, δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0.$$

Απόδειξη:

Αν $r = 0$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

Αν $r \neq 0$ και $|r| < 1$ προκύπτει $\frac{1}{|r|} > 1$, επομένως υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, έστω x , ο οποίος επιτρέπει να γράψουμε

$$\frac{1}{|r|} = 1+x \Leftrightarrow |r| = \frac{1}{1+x}. \quad (2.6.1)$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|a_n| = |r^n| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+x}\right)^n = \frac{1}{(1+x)^n} \quad (2.6.2)$$

Επειδή $x > 0$, από την **ανισότητα Bernoulli** έχουμε :

$$(1+x)^n \geq 1+nx > nx \quad (2.6.3)$$

Συνδυάζοντας (2.6.2) με (2.6.3) μπορούμε να γράψουμε:

$$|a_n| = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{nx} \quad (2.6.4)$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n}$. Από την (2.6.1) είναι φανερό ότι ο x είναι σταθερός θετικός αριθμός, εξαρτάται από τον r , επομένως η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε

³ Γεωμετρική ακολουθία ή γεωμετρική πρόοδος είναι μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = r \cdot a_n$, για κάποιον σταθερό πραγματικό αριθμό r , που ονομάζεται λόγος της ακολουθίας, επειδή από τον αναδρομικό τύπο ισούται με το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της. Αποδεικνύεται ότι, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = a_1 r^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

αντίστοιχα, Εφαρμογή 2.5.3. και Πρόρισμα 2.5.11 (i)). Συνδυάζοντας τη (2.6.4) με το Πρόρισμα 2.5.19 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική, άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$. $\diamond\diamond$

Πρόταση 2.6.2. (Όριο λόγου του D' Alembert)

Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών όρων και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Αν $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda < 1$, τότε η ακολουθία είναι μηδενική, δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda > 1$, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει, συγκεκριμένα, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη: i) Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισώσεις:

$$0 < \frac{a_2}{a_1} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_3}{a_2} < \lambda, \quad \dots, \quad 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη προκύπτει $0 < \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda^n$, και μετά από απλοποιήσεις

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_1} < \lambda^n \Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_1 \lambda^n \tag{2.6.5}$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε $0 < \lambda < 1$, από την Πρόταση 2.6.1 συμπεραίνουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 \lambda^n) = 0$.

Συνδυάζοντας τη (2.6.5) με το κριτήριο παρεμβολής (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) το συμπέρασμα είναι άμεσο, δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισώσεις:

$$\frac{a_2}{a_1} > \lambda, \quad \frac{a_3}{a_2} > \lambda, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > \lambda, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda$$

Με ανάλογα βήματα, όπως στο (i), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$a_{n+1} > a_1 \lambda^n, \text{ με } \lambda > 1. \tag{2.6.6}$$

Παρατηρήστε ότι, η ακολουθία $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπώς, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = +\infty$, (βλέπε, Πρόταση 2.5.8 (ii)). Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι θετικοί, από τη (2.6.6) και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = +\infty$ είναι φανερό ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. $\diamond\diamond$

Παραδείγματα 2.6.3.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$ ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cdot n^2 + 3^n - 1}{4^n + 5^n}$ iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$

i) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$. Επειδή ο γενικός όρος περιέχει τη γεωμετρική ακολουθία με $r = 10$, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 10^{2n} , και έχουμε:

$$a_n = \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}} = \frac{4 \cdot 10^{-n} - 3}{3 \cdot 10^{-n-1} + 2 \cdot 10^{-1}} = \frac{4 \left(\frac{1}{10}\right)^n - 3}{\frac{3}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{2}{10}}$$

Επειδή $0 < \frac{1}{10} < 1$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.1 ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$. Συνδυάζοντας την παραπάνω

έκφραση του γενικού όρου της ακολουθίας με το προαναφερθέν όριο και τις ιδιότητες των πράξεων των ορίων (βλέπε, [Πόρισμα 2.5.11](#)) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \left(\frac{1}{10}\right)^n - 3}{\frac{3}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{2}{10}} = \frac{4 \cdot 0 - 3}{3 \cdot 0 + \frac{2}{10}} = -15.$$

ii) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{2^n \cdot n^2 + 3^n - 1}{4^n + 5^n}$. Επειδή ο γενικός όρος περιέχει γεωμετρικές ακολουθίες με ποικίλες τιμές των r επιλέγουμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη γεωμετρική που έχει τη μεγαλύτερη βάση, δηλαδή, την 5^n και έχουμε:

$$a_n = \frac{2^n \cdot n^2 + 3^n - 1}{4^n + 5^n} = \frac{\frac{2^n \cdot n^2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{1}{5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1}$$

Επειδή $0 < \frac{3}{5} < 1$, $0 < \frac{1}{5} < 1$ και $0 < \frac{4}{5} < 1$, σύμφωνα με την [Πρόταση 2.6.1](#) έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad (2.6.7)$$

Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.2 υπολογίζουμε το όριο του λόγου δύο διαδοχικών όρων της, οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n^2}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)^2}{5n^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}. \quad (2.6.8)$$

Επειδή στη (2.6.3) είναι $\lambda = \frac{2}{5} < 1$, σύμφωνα με την [Πρόταση 2.6.2 \(i\)](#) ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n} = 0. \quad (2.6.9)$$

Άρα, κάνοντας αντικατάσταση στο όριο με τις (2.6.7), (2.6.9) έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cdot n^2 + 3^n - 1}{4^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^n \cdot n^2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{1}{5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = \frac{0 + 0 - 0}{0 + 1} = 0.$$

iii) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{a^n}{n!}$, με $a \in \mathbb{R}^+$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων.

Επειδή συμπεριλαμβάνεται στην ακολουθία παραγοντικό, $n!$, χρησιμοποιώντας το λόγο δύο διαδοχικών όρων της αυτό απλοποιείται, υπολογίζουμε το όριο του λόγου των διαδοχικών όρων της, οπότε έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1} \cdot n!}{a^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot 1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n+1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0. \quad (2.6.10)$$

Επειδή στην (2.6.10) είναι $\lambda = 0 < 1$, σύμφωνα με την [Πρόταση 2.6.2 \(i\)](#) ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

◇◇

Πρόταση 2.6.4. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \sqrt[n]{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}^+$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις τιμές του a .

i) Αν $a = 1$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

ii) Αν $a > 1$, τότε $\sqrt[n]{a} > 1$, επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_n > 0$, τέτοιοι ώστε

$$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n, \quad (2.6.11)$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$a = (1 + x_n)^n. \quad (2.6.12)$$

Επειδή $x_n > 0$, χρησιμοποιώντας την **ανισότητα Bernoulli** στην (2.6.12) έχουμε:

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n > 0$$

Άρα, ισχύει

$$0 < nx_n < a$$

από όπου προκύπτει

$$0 < x_n < \frac{a}{n} \quad (2.6.13)$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0$, εφαρμόζοντας στην (2.6.13) το **κριτήριο παρεμβολής**, (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0. \quad (2.6.14)$$

Εφαρμόζοντας όρια στην (2.6.11), στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της Πρότασης 2.5.10, το όριο σταθερής συνάρτησης και τη (2.6.14), συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

iii) Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, συνεπώς εφαρμόζεται η παραπάνω περίπτωση (ii), από όπου συμπεραίνουμε

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Συνδυάζοντας το (ii) της Πρότασης 2.5.16 με την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 2.5.10 μπορούμε να γράψουμε:

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \diamond\diamond$$

Πρόταση 2.6.5. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \sqrt[n]{n}$, για κάθε $n \geq 2$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Απόδειξη: Επειδή $n \geq 2$, τότε $\sqrt[2n]{n} > 1$, επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_n > 0$, τέτοιοι ώστε

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + x_n, \quad (2.6.15)$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{n} = (1 + x_n)^n. \quad (2.6.16)$$

Επειδή $x_n > 0$, χρησιμοποιώντας την **ανισότητα Bernoulli** στην (2.6.16) έχουμε:

$$\sqrt[n]{n} = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n > 0$$

Άρα, ισχύει

$$0 < nx_n < \sqrt[n]{n} \Rightarrow 0 < x_n < \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$$

από όπου προκύπτει

$$0 < x_n < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad (2.6.17)$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$, εφαρμόζοντας στην (2.6.17) το **κριτήριο παρεμβολής**, (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0. \quad (2.6.18)$$

Επιπλέον η (2.6.15) μπορεί να γραφεί

$$\sqrt[n]{n} = (1 + x_n)^2 = 1 + 2x_n + x_n^2. \quad (2.6.19)$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας όρια στην (2.6.19), και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες πεπερασμένων ορίων (βλέπε, Πρόταση 2.5.11 (ii), (iv)), το όριο σταθερής συνάρτησης και τη (2.6.18), συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \diamond \diamond$$

Πρόταση 2.6.6. Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνήσια αύξουσα, φραγμένη και συγκλίνει⁴ στον πραγματικό αριθμό $e = 2,718281828459045\dots$, δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (2.6.20)$$

Ο αριθμός e αποτελεί τη βάση των νεπέρειων λογαρίθμων.

⁴ Το e αναφέρεται ως η σταθερά του Euler προς τιμήν του Ελβετού μαθηματικού και φυσικού Leonhard Euler (1707-1783). Ο e έχει θεμελιώδη σημασία στα μαθηματικά και στη φυσική και μαζί με τους αριθμούς 0, 1, π και το φανταστικό i , αποτελούν τους πιο σημαντικούς αριθμούς. Η σχέση που συδέει τους τέσσερις αριθμούς είναι ο τύπος του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Ο e και ο i είναι έργο της νέας εποχής των μαθηματικών που συμβαδίζει με τις νέες θεωρίες για τη μηχανική του κόσμου. Η ανακάλυψη της σταθεράς e ως το όριο που μελετήσαμε έγινε από τον Ελβετό μαθηματικό και φυσικό Jacob Bernoulli (1654-1705). Ο Bernoulli υπολόγισε αυτό το όριο, επειδή ήθελε να μελετήσει την αξία μίας χρηματικής κατάθεσης, η οποία τοκίζεται με συνεχή τρόπο και όρισε το αριθμό e ως την αξία μίας μονάδας χρήματος μετά την πάροδο ενός χρόνου, όταν αυτή ανατοκίζεται συνεχώς με ετήσιο τόκο 100%. Διότι αν ο ανατοκισμός υπολογίζονταν ημερησίως, τότε κάθε μέρα η αξία θα μεγάλωνε καθημερινά κατά $1 + 1/365$, και στο τέλος του χρόνου το αρχικό ποσό θα γινόταν $(1 + 1/365)^{365}$ φορές μεγαλύτερο. Στο όριο που ανατοκίζόταν συνεχώς η αξία μετά από ένα χρόνο θα ήταν e . Συνεπώς, αν ο ετήσιος τόκος ήταν 5% η κατάθεση ανατοκιζόμενη συνεχώς θα είχε αξία $e^{0.05} = 1.0527$. Η πρώτη γνωστή χρήση της σταθεράς, η οποία και συμβολίζονταν με το γράμμα b , βρίσκεται σε επιστολή του Gottfried Leibniz στον Christiaan Huygens κατά τα έτη 1690 και 1691. Ο Euler άρχισε να χρησιμοποιεί το γράμμα e για τη σταθερά το 1727 και 1728, σε μία αδημοσίευτη εργασία για τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την έκρηξη κανονιών. Η πρώτη φορά που ορίζεται και δημοσιεύεται ο συμβολισμός για το e είναι το 1736 από τον ίδιο τον Euler στην εργασία του "Mechanica, sive motus scientia analytice exposita : instar supplementi ad commentar", Acad. Scient. Petrop.

Ο Charles Hermite (1822-1901), το 1873 απέδειξε ότι ο αριθμός e είναι **υπερβατικός**, δηλαδή, δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, (Αρώνη Π., 2008).

Ο Euler απέδειξε ότι ο e είναι **άρρητος**, δηλαδή, η συνέχιση της επέκτασης του κλάσματος είναι άπειρη. Επίσης, αποδεικνύεται ότι είναι **ασύμμετρος**, δηλαδή, δεν μπορεί να γραφεί ως ρητός με αριθμητή και παρονομαστή πρώτους αριθμούς.

Απόδειξη: Προφανώς όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι θετικοί αριθμοί,

άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το **δεύτερο τρόπο**, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Επειδή $\frac{1}{(n+1)^2} < 1$ είναι φανερό ότι εφαρμόζεται η ανισότητα Bernoulli στην (2.6.21), που μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \left(\frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, από όπου προκύπτει $a_{n+1} > a_n$. Άρα, η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1).

Προφανώς, ο πρώτος όρος της ακολουθίας είναι $a_1 = 2$ και επειδή αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα, ισχύει $a_n \geq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, με ένα κάτω φράγμα το 2. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα⁵ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} < \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Θέτουμε

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad (2.6.23)$$

συνεπώς, η (2.6.22) γράφεται:

$$2 \leq a_n \leq b_n \quad (2.6.24)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που ορίστηκε στη (2.6.23) είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, **άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.8.1**) και από τη (2.6.24) προκύπτει ότι είναι κάτω φραγμένη.

⁵ Διωνυμικό ανάπτυγμα είναι η ακόλουθη ταυτότητα:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot x + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot x^k + \dots + x^n$$

Πίνακας 2.2: Όροι των ακολουθιών με γενικό όρο $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

n	$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$
1	2	2
2	2.25	2.5
3	2.37037037	2.6666666
4	2.44140625	2.70833333333333
5	2.48832	2.71666666666667
6	2.521626372	2.71805555555556
7	2.546499697	2.71825396825397
8	2.565784514	2.71827876984127
9	2.581174792	2.71828152557319
10	2.59374246	2.71828180114638
11	2.604199012	2.71828182619849
12	2.61303529	2.71828182828617
13	2.620600888	2.71828182844676
14	2.627151556	2.71828182845823
15	2.632878718	2.71828182845899
16	2.637928497	2.71828182845904
17	2.642414375	2.718281828459045
18	2.646425821	2.718281828459045
19	2.650034327	2.718281828459045
20	2.653297705	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
30	2.674318776	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
50	2.69158802907360	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
100	2.70481382942153	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
200	2.71151712292929	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
1000	2.71692393223552	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
2000	2.71760256932299	2.718281828459045

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας⁶ την $n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής ακολουθίας⁷, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

Συνεπώς, η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από το 3.

Συνδυάζοντας τη (2.6.24) με την (2.6.25) έχουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$2 \leq a_n \leq b_n < 3 \quad (2.6.26)$$

Επειδή οι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια μονότονες και επιπλέον φραγμένες, όπως αποδεικνύει η (2.6.26), οι ακολουθίες είναι συγκλίνουσες σε θετικό αριθμό, (βλέπε, [Πρόταση 2.5.13](#)). Για τον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ γνωρίζουμε ότι δεν μπορούμε να επιλύσουμε κάποια αλγεβρική εξίσωση, όπως εφαρμόσαμε στο [Παράδειγμα 2.5.15 \(i\)](#), επειδή ο αριθμός που αναζητούμε είναι **υπερβατικός**⁸.

Όσο για την οριακή τιμή της $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αποδεικνύεται στην Ενότητα 9.2 ότι είναι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e, \quad (2.6.27)$$

και επιπλέον στον [Πίνακα 2.2](#) παρουσιάζεται η προσέγγιση της τιμής 2.718281828459045, με ακρίβεια 14 δεκαδικών ψηφίων από τον 14^ο όρο της ακολουθίας $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Συνεπώς, συνδυάζοντας τη (2.6.27) με την παραπάνω τιμή προκύπτει ότι μία προσέγγιση του e δίνεται

$$e = 2,718281828459045\dots$$

Το ερώτημα που παραμένει είναι: ποια είναι η οριακή τιμή της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, επειδή γνωρίζουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει σε θετικό αριθμό. Σημειώστε ότι, δεν εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής, επειδή τα πλευρικά όρια της (2.6.26) είναι διαφορετικά.

Παρατηρώντας τις τιμές στον [Πίνακα 2.2](#) διαπιστώνουμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ προς την τιμή του e είναι «πολύ αργή» συγκρινόμενη με τη $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, για παράδειγμα, παρατηρήστε ότι $b_{2000} - a_{2000} > 0.0001$. Ωστόσο η ιδιότητα της μοναδικότητας της οριακής τιμής και (2.6.27) οδηγούν στην εικασία ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει την απόδειξη της ταύτισης των οριακών τιμών των δύο ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ([Ρασσιάς, 2014](#)).

Σχόλια: Υπενθυμίζεται ότι μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, προκειμένου να μελετήσουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ μπορούμε να αναζητήσουμε το

⁶ Η ανίσωση $n! \geq 2^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

⁷ Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής ακολουθίας με λόγο r δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{1 - r}$. Εδώ

έχουμε γεωμετρική ακολουθία με $r = 1/2$ και $a_1 = 1$ και πλήθος προσθετέων $n - 1$.

⁸ Υπερβατικός ονομάζεται ο αριθμός που δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στο Κεφάλαιο 6, στην Ενότητα απροσδιόριστες μορφές, έναν τρόπο υπολογισμού του ορίου της αντίστοιχης συνάρτησης χρησιμοποιώντας το όριο του αντίστοιχου νεπέριου λογάριθμου, όπου θα διαπιστώσει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Συνεπώς, η οριακή τιμή της αντίστοιχης ακολουθίας ταυτίζεται με αυτήν στην (2.6.20). $\diamond\diamond$

Εφαρμογή 2.6.7. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, όπου $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε περιπτώσεις για το μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a .

i) Αν $a > 0$, θέτουμε $\mu = \frac{n}{a}$. Κάνοντας αντικατάσταση στο όριο και χρησιμοποιώντας την (2.6.20) έχουμε :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{a\mu}\right)^{a\mu} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{a\mu} = \left(\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu\right)^a = e^a$$

ii) Αν $a < 0$, θέτουμε $\mu = -\frac{n}{a}$ και με ανάλογα βήματα, όπως στο (i), αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα. $\diamond\diamond$

Παραδείγματα 2.6.8

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n$ ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n$

Η ιδέα για τους υπολογισμούς, είναι να μετατρέψουμε τους γενικούς όρους των ακολουθιών των ορίων με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε μορφή, που να αντιστοιχεί στα όρια της [Πρότασης 2.6.6](#) ή/και της [Εφαρμογής 2.6.7](#).

i) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των ορίων (βλέπε, [Πρόταση 2.5.10 \(iii\)](#)), και χρησιμοποιώντας το όριο από την Εφαρμογή 2.6.7., έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3-1+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n-1)+4}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^n$

Θέτουμε $\mu = n-1$, κάνοντας αντικατάσταση στο παραπάνω όριο, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων (βλέπε, [Πρόταση 2.5.10 \(ii\)](#), [Πόρισμα 2.5.11 \(i\)](#)) και χρησιμοποιώντας το όριο από την Εφαρμογή 2.6.7., έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{\mu}\right)^{\mu+1} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{\mu}\right)^\mu \cdot \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{\mu}\right) = e^4 \left(1 + 4 \cdot \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu}\right) = e^4 (1 + 4 \cdot 0) = e^4 \end{aligned}$$

$\diamond\diamond$

Πίνακας 2.3: Τα σημαντικότερα όρια των ακολουθιών

1.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0$	$a \in \mathbb{R}^+$
2.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$	$ r < 1, r \in \mathbb{R}$
3.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{r^n} = 0$	$r > 1, r \in \mathbb{R}$
4.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$a \in \mathbb{R}^+$
5.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	
6.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	
7.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$	$a \in \mathbb{R} - \{0\}$
8.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$	
9.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$a \in \mathbb{R}$
10.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$	

2.7. Αποκλίνουσες ακολουθίες

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με ακολουθίες που έχουν όριο έναν πραγματικό αριθμό, σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η ακολουθία δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αλλά αποκλίνει στο «άπειρο». Υπενθυμίζουμε ότι οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς, οπότε στα Κεφάλαια 4 και 6 θα δοθεί η ευκαιρία μέσω των συναρτήσεων να μελετηθούν τα όρια των ακολουθιών στο «άπειρο», και εκεί να προταθεί μεθοδολογία για τον υπολογισμό τους, παρόλα αυτά για την πληρότητα του κεφαλαίου χρειάζεται να διατυπώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς και να ορίσουμε τις «πράξεις» με τα «άπειρα».

Ορισμός 2.7.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όριο το $+\infty$ ή συγκλίνει στο $+\infty$ (απειρίζεται θετικά ή τείνει στο $+\infty$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $a_n > \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$, και συμβολίζεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ ή $a_n \rightarrow +\infty$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } a_n > \varepsilon \quad (2.7.1)$$

Ανάλογα, ορίζεται:

Ορισμός 2.7.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όριο το $-\infty$ ή συγκλίνει στο $-\infty$ (απειρίζεται αρνητικά ή τείνει στο $-\infty$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $a_n < -\varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$, και συμβολίζεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ή $a_n \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } a_n < -\varepsilon \quad (2.7.2)$$

Είναι φανερό από τους παραπάνω ορισμούς ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\infty \quad (2.7.3)$$

Θεωρώντας ότι ο αναγνώστης γνωρίζει από το Λύκειο ότι τα σύμβολα $+\infty$ ή $-\infty$ δηλώνουν ποσότητες που αυξάνονται ή μειώνονται απεριόριστα, και δεν ορίζονται πράξεις με αυτά, εδώ αναφέρουμε τις κυριότερες ιδιότητες των ακολουθιών που απειρίζονται θετικά ή αρνητικά, και διατυπώνουμε τις «πράξεις» που μπορούν να οριστούν.

Πρόταση 2.7.3. i) Έστω μία αύξουσα ακολουθία και μη φραγμένη. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

ii) Έστω μία φθίνουσα ακολουθία και μη φραγμένη. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

iii) Μία ακολουθία, που δεν είναι άνω φραγμένη, περιέχει μία υπακολουθία που συγκλίνει στο $+\infty$.

iv) Μία ακολουθία, που δεν είναι κάτω φραγμένη, περιέχει μία υπακολουθία που συγκλίνει στο $-\infty$.

v) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

vi) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

vii) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

viii) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Στον Πίνακα 2.4 παρουσιάζονται οι «επιτρεπτές» και «μη επιτρεπτές» πράξεις των ορίων των ακολουθιών στο άπειρο.

Πίνακας 2.4: Ιδιότητες πράξεων ακολουθιών που έχουν όριο στο άπειρο $\pm\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot a_n)$ $c \in \mathbb{R}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty, c > 0$ $-\infty, c < 0$	απροσδιόριστη
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστη	$-\infty$	0	όμοια	απροσδιόριστη
$-\infty$	$+\infty$	απροσδιόριστη	$-\infty$	0	$-\infty, c > 0$ $+\infty, c < 0$	απροσδιόριστη
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	όμοια	απροσδιόριστη
$\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, αν $\ell > 0$ $-\infty$, αν $\ell < 0$	$\frac{1}{\ell}$	$c \cdot \ell$	0
$\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$, αν $\ell > 0$ $+\infty$, αν $\ell < 0$	$\frac{1}{\ell}$	$c \cdot \ell$	0

Παραδείγματα 2.7.1

Να πολυλογισθούν τα ακόλουθα όρια:

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot n^2 + n - 2}{2n^2 - n + 1} \quad ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}))$$

Η ιδέα για τους ζητούμενους υπολογισμούς είναι να μην υπάρχουν απροσδιόριστες πράξεις. Κάνοντας κατάλληλες απλοποιήσεις στους γενικούς όρους των ακολουθιών να μετατρέπονται σε μορφή τέτοια ώστε, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.4, να ορίζεται η πράξη και να δίνει αποτέλεσμα.

i) Στον παρονομαστή του ζητούμενου ορίου υπάρχει η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Κάνοντας παραγοντοποίηση στον αριθμητή και στον παρονομαστή με τους μεγατοβάθμιους όρους⁹, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων Πόρισμα 2.5.11 (vi), (ii), (i) και χρησιμοποιώντας $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.18), έχουμε:

⁹ Αν μετατραπεί ο γενικός όρος της ακολουθίας, που ζητείται το όριο, στην αντίστοιχη συνάρτηση, παρατηρούμε ότι, πρόκειται για ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα 2^{ov} , επειδή είναι: $f(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot x^2 + x - 2}{2x^2 - x + 1}$.

Συνεπώς, οι μεγατοβάθμιοι όροι είναι x^2 .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot n^2 + n - 2}{2n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2}}{2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2} + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε με τη συζυγή παράσταση της απροσδιόριστης μορφής, ώστε να απλοποιηθεί η απροσδιοριστία, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n+1} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n+1} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n+1} \frac{(\sqrt{n+3})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = 3 \frac{\sqrt{2+0}}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

◇◇

Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στα Κεφάλαια 4 και 6, πολλές περισσότερες περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών και να εξοικειωθεί με την ανάπτυξη της μεθοδολογίας που ακολουθούμε για την άρση της απροσδιοριστίας.

2.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

2.8.1. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ είναι γνήσια

αύξουσα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον [πρώτο τρόπο](#), που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv).

Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.3.3 \(i\)](#).

2.8.2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, και $a_1 = 2$ συγκλίνει με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης που υποδεικνύεται στην Πρόταση 2.5.13 (i)

αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη.

Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.5.15 \(i\)](#).

2.8.3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3}$, και $a_1 = 2$ συγκλίνει με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης που υποδεικνύεται στην [Πρόταση 2.5.13 \(ii\)](#)

αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.5.15 \(i\)](#).

2.8.4. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 4^n \cdot n^2 - 1}{2 \cdot 7^n + 5^n \cdot n} = 0$

Υπόδειξη: Διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με 7^n και εφαρμόστε το όριο της γεωμετρικής ακολουθίας και το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.6.3 \(ii\)](#).

2.8.5. Αν $|a| < 1$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 \cdot a^n) = 0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.6.3 \(iii\)](#).

2.8.6. Αν $a > 1$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.6.3 \(iii\)](#).

2.8.7. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} = 0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.6.3 \(iii\)](#).

2.8.8. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+5}{2n-1} \right)^{4n} = e^{12}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.6.8 \(ii\)](#).

2.8.9. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^4 + 2n^3 + n + 5}{8n^4 - n} = -\frac{1}{4}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.7.1 \(i\)](#).

2.8.10. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 3} \right) = \frac{1}{2}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 2.7.1 \(ii\)](#).

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Αρώνη Π., (2008), Η ιστορία του π , Διπλωματική εργασία, στο Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Αθήνα.
- Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.
- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ., τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Srivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.
- Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.
- Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

2.1. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

- i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
- ii) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη.
- iii) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.
- iv) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα), τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα).

2.2. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

- i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $a \in \mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία συγκλίνει στον a .
- ii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ διαμερίζεται σε ένα πλήθος υπακολουθιών, που όλες συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$, τότε και η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a .

2.3. Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει $|a_n| \leq |b_n|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

2.4. Να εξετασθεί η μονοτονία των ακολουθιών, που δίνονται από τους επόμενους γενικούς όρους:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| i) $a_n = -4n + 14$ | ii) $a_n = n^2 + (n+3)^2$ |
| iii) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ | iv) $a_n = \frac{6^n}{(n+1)!}$, για κάθε $n \geq 5$ |
| v) $a_n = \frac{n}{e^n}$ | vi) $a_n = \sqrt[n]{n}$ |
| vii) $a_n = \frac{n+3}{\ln(n+3)}$ | viii) $a_n = \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ |

2.5. Να εξετασθεί η σύγκλιση των ακολουθιών, που δίνονται από τους επόμενους αναδρομικούς τύπους:

- | | |
|--|--|
| i) $a_{n+1} = 2a_n + 8$, με $a_1 = 1$ | ii) $a_{n+1} = \frac{2a_n + 9}{3}$, με $a_1 = 0$ |
| iii) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$, με $a_1 = 1$ | iv) $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a_n$, με $a_1 = 1$ |
| v) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, με $a_1 = \sqrt{2}$ | vi) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8}$, με $a_1 = 1$ |
| vii) $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$, με $a_1 = 2$ | viii) $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + c}$, με $a_1 = a > 0$, και $c > 1$ |
| ix) $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 3}$, με $a_1 = 1$ | x) $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{a_n + 4}$, με $a_1 = \frac{1}{2}$ |
| xi) $a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + 5}{a_n + 2}$, με $a_1 = 1$ | xii) $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n}$, με $a_1 = 2$ |

Υπόδειξη: Να μελετηθούν οι προϋποθέσεις σύγκλισης των ακολουθιών που διατυπώνονται στην [Πρόταση 2.5.13](#).

2.6. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

- | | |
|---|---|
| i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + \sin(5n)}{3n + 2n^2}$ | ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n + (-1)^n \sin(n-4)}{8n + 4}$ |
| iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin(2n) + 4n}$ | iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \cos(4n)}{\sin(4n) + 2n}$ |
| v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1}$ | vi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \cdot \sqrt{n} + 2^n \cdot \sin(n)}{3^n + 4^n \cdot n}$ |
| vii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^n - 3 \cdot 4^n}{3^n + 5 \cdot 6^n}$ | viii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ |
| ix) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{-n+1}$ | x) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{2n}$ |

2.7. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

- | | |
|--|--|
| i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^4 + 1}}$ | ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^6 - n^2 + 1}}{n^3 + 1}$ |
| iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 2} - n^3}{2n^2 - 4n + 5}$ | iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 - \sqrt{n^4 - 2}}$ |
| v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^2 - n + 1} - n$ | vi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{3n^2 + 1}\right)$ |
| vii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$ | viii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n + 1} - \sqrt[3]{n^2}\right)$ |
| ix) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n - \ln(n+1))$ | x) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4 + n^2 + 2n)}{2 + \ln n}$ |
| xi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n + 4n}{5n^2 - 2n - 1}$ | xii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n^2 \ln(n) + \sin(3n)}{3n + 2n^2 \ln(n)}$ |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σειρές πραγματικών αριθμών

Προσέγγιση του π

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$	Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287 π.Χ - 212 π.Χ.)
$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$	François Viète (1540 - 1603)
$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$	John Wallis (1616 - 1703)
$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{\ddots}}}}}$	Viscount Brouncker (1620 - 1684)
$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$	James Gregory (1638 - 1675)
$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdot 2^{2n+1}} + \cdots$	Sir Isaac Newton (1643 - 1727)
$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n-1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$	Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)
$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	Leonhard Euler (1707 - 1783)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σειρές πραγματικών αριθμών

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται όλοι οι ορισμοί και τα σημαντικότερα κριτήρια ελέγχου σύγκλισης των σειρών πραγματικών αριθμών. Ειδικές σειρές μελετώνται, όπως είναι οι γεωμετρικές, οι τηλεσκοπικές, οι p -αρμονικές, οι εναλλάσσουσες.

Προαπαιτούμενη γνώση

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών, άθροισμα n -πρώτων όρων ακολουθίας.

3.1 Ορισμοί

Οι σειρές είναι ειδικές περιπτώσεις ακολουθιών, που χρησιμοποιούνται είτε για την προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα (ως δυναμοσειρές Taylor), είτε από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (ως σειρές Fourier), τα οποία βρίσκουν πολλές εφαρμογές στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, στα Σήματα και Συστήματα, στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, στις Τηλεπικοινωνίες, στην Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων, στη Θεωρία Ουρών κ.ά., (βλέπε, [Ασημάκης, Ν. \(2008\)](#), [Chapra, S. C., & Canale, R. P. \(2014\)](#), [Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. \(2014\)](#), [Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. \(2015\)](#)).

Ορισμός 3.1.1. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, από την οποία κατασκευάζεται μία νέα ακολουθία πραγματικών αριθμών, ως ακολούθως:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

\vdots

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Η $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία των **μερικών αθροισμάτων** των όρων της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Το όριο της ακολουθίας $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, καθώς το n τείνει στο άπειρο (σημειώνεται $n \rightarrow +\infty$),

ονομάζεται **σειρά πραγματικών αριθμών** (series of real numbers) και συμβολίζεται $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.1.1)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέγονται **όροι** της σειράς, ειδικότερα ο a_n ονομάζεται **γενικός όρος** της, και

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (3.1.2)$$

λέγεται **μερικό άθροισμα** των n πρώτων όρων της σειράς.

Σε μερικές περιπτώσεις η σειρά μπορεί να αρχίζει την άθροιση από τον i όρο με $i \neq 1$, και τότε σημειώνεται $\sum_{n=i}^{\infty} a_k = a_i + a_{i+1} + \dots + a_n + \dots$.

Αν όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί (αρνητικοί) αριθμοί, τότε αυτή ονομάζεται **θετική (αρνητική)** σειρά, ενώ αν οι όροι της εναλλάσσονται από θετικό σε αρνητικό αριθμό, η σειρά ονομάζεται **εναλλάσσουσα σειρά** (alternating series).

Παραδείγματα 3.1.2.

Στη συνέχεια, ορισμένα από τα χαρακτηριστικότερα μερικά αθροίσματα παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της σειράς στην (3.1.1) και την ορολογία του Ορισμού 3.1.1:

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \dots + n + \dots$

έχει όρους τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ο τύπος του μερικού αθροίσματος αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Εδώ να υπενθυμίσουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = n$ είναι αριθμητική πρόοδος¹ με $a_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$, γι' αυτό και η παραπάνω σειρά ονομάζεται *αριθμητική σειρά*. Το παραπάνω μερικό άθροισμα των n πρώτων της σειράς επαληθεύει το γενικό τύπο του αθροίσματος της αριθμητικής προόδου.

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + \dots$

έχει όρους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.1.3)$$

Ο τύπος του μερικού αθροίσματος αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

iii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

¹ Η αριθμητική πρόοδος είναι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a_1 + (n-1)\omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου ω είναι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2}$.

έχει όρους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Η ανάλυση του n -οστού μερικού αθροίσματος της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ως διαφορά κλασμάτων, που είναι διαδοχικοί όροι μίας ακολουθίας, βασίζεται στο είδος της σειράς, (βλέπε, [Ορισμό 3.1.10](#), και [Παράδειγμα 3.1.11.\(i\)](#)).

iv) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-4n-1) = (-5) + (-9) + \dots + (-4n-1) + \dots$

έχει όρους τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $-5, -9, -13, \dots, (-4n-1), \dots$, συνεπώς, είναι μία αρνητική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = -4n-1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-4k-1) = (-5) + (-9) + \dots + (-4n-1) = -n(2n+3)$$

v) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$

έχει όρους τους ακέραιους αριθμούς $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$, συνεπώς, είναι μία εναλλάσσουσα σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = (-1)^{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 2r-1, r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αν } n = 2r, r \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

το οποίο είναι σταθερός αριθμός, εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n (αν είναι περιττός ή άρτιος).

vi) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) = \sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n) + \dots$

έχει όρους τους πραγματικούς αριθμούς $\sin(1), \sin(2), \dots, \sin(n), \dots$, συνεπώς, η σειρά δεν ανήκει σε καμία κατηγορία, έχει γενικό όρο $a_n = \sin n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin(k) = \sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(k) \quad \diamond \diamond$$

Ορισμός 3.1.3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό s , και συμβολίζεται με

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός s , τέτοιος ώστε η ακολουθία των

μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει στον αριθμό s , δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s \quad (3.1.6)$$

Ο πραγματικός αριθμός s ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς (3.1.1).

Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$), τότε η σειρά (3.1.1) ονομάζεται **αποκλίνουσα στο $+\infty(-\infty)$** , αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει το όριο, τότε η σειρά λέγεται **ταλαντευόμενη ή αόριστα αποκλίνουσα**.

Παρατηρήστε ότι, ο παραπάνω ορισμός σχετικά με τη σύγκλιση ή την απόκλιση μίας σειράς συνεπάγεται από τους αντίστοιχους ορισμούς, που δόθηκαν στο Κεφάλαιο 2, για τις ακολουθίες, (βλέπε, Ορισμός 2.5.4, Ορισμός 2.7.1 και 2.7.2)

Ορισμός 3.1.4. Μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέγεται ότι **συγκλίνει απόλυτα** (ή είναι **απόλυτα συγκλίνουσα**),

αν η σειρά των απολύτων τιμών της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό,

δηλαδή, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s .

Παραδείγματα 3.1.5.

i) Η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ του Παραδείγματος 3.1.2 (iii) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό

$s = 1$, δικαιολογώντας το χαρακτηρισμό της σειράς ως συγκλίνουσας, (βλέπε, Ορισμό 3.1.3).

Πράγματι, συνδυάζοντας την (3.1.4) με την (3.1.6) υπολογίζεται το όριο του μερικού αθροίσματος των n πρώτων όρων, που είναι ίσο με το άθροισμα της σειράς

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \text{ Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με Matlab, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.4.)}$$

ii) Η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ του Παραδείγματος 3.1.2 (ii) είναι αποκλίνουσα στο $+\infty$, επειδή

συνδυάζοντας την (3.1.6) με το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων από την (3.1.3) υπολογίζεται ότι ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n(n+1)(2n+1)) = +\infty,$$

δικαιολογώντας το χαρακτηρισμό της σειράς ως αποκλίνουσας, (βλέπε, Ορισμό 3.1.3).

- iii) Η εναλλάσσοσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ του Παραδείγματος 3.1.2 (v) είναι ταλαντευόμενη, επειδή από την (3.1.5) και την (3.1.6) αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το όριο του μερικού αθροίσματος των n πρώτων όρων της. $\diamond\diamond$

Ορισμός 3.1.6. Έστω ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός a . Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots, \quad (3.1.7)$$

ονομάζεται **γεωμετρική σειρά** με πρώτο όρο τον a και λόγο r .

Ο γενικός όρος της γεωμετρικής σειράς στην (3.1.7) είναι γεωμετρική ακολουθία² που έχει γενικό όρο $a_n = ar^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$.

Εφαρμογή 3.1.7. Η γεωμετρική σειρά στην (3.1.7), $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι :

- i) Συγκλίνουσα, όταν $|r| < 1$, με άθροισμα

$$s = \frac{a}{1-r}. \quad (3.1.8)$$

- ii) Αποκλίνουσα στο $+\infty$, όταν $r \geq 1$ και $a > 0$, είναι αποκλίνουσα στο $-\infty$, όταν $r \geq 1$ και $a < 0$.

- iii) Ταλαντευόμενη, όταν $r \leq -1$.

Απόδειξη: Αν $r=1$, τότε προφανώς η γεωμετρική σειρά στην (3.1.7) έχει μερικό άθροισμα $S_n = a(n+1)$, συνεπώς, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, από όπου αποδεικνύεται ο ισχυρισμός στο (ii), όταν $r=1$.

Αν $r \neq 1$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 - r^{n+1} = (1-r)(1+r+\dots+r^n)$ μπορούμε να γράψουμε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων ως ακολούθως

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r} \right). \quad (3.1.9)$$

- i) Για $|r| < 1$, συνδυάζοντας την (3.1.9) με το χαρακτηριστικό όριο της γεωμετρικής ακολουθίας $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$, (βλέπε, Πρόταση 2.6.1, Πίνακας 2.3), προκύπτει

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = \frac{a}{1-r}.$$

² Η γεωμετρική ακολουθία ή γεωμετρική πρόοδος είναι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a_1 r^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου r είναι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής πρόοδου δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$.

ii) Για $r > 1$, συνδυάζοντας το χαρακτηριστικό όριο της γεωμετρικής ακολουθίας $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$ με την (3.1.9) προκύπτει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = a \cdot (+\infty).$$

Συνεπώς, η γεωμετρική σειρά αποκλίνει προς το $\pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του a , συμπληρώνοντας έτσι την απόδειξη για το (ii).

iii) • Για $r = -1$, από το μερικό άθροισμα στην (3.1.9) επιλέγονται οι υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων S_{2n} και S_{2n-1} με $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = 0$. Συνεπώς, υπάρχουν δύο υπακολουθίες με διαφορετική οριακή τιμή (βλέπε, Πρόταση 2.5.9 (ii)), άρα, η ακολουθία $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει, δηλαδή, το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ δεν υπάρχει. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3 η σειρά είναι ταλαντευόμενη.

• Αν $a > 0$ με $r < -1$ από την (3.1.9) έχουμε τις υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = +\infty$, και $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = -\infty$.

Συνεπώς, για $r \leq -1$ η σειρά ταλαντεύεται, όπως ταλαντεύεται και η αντίστοιχη ακολουθία $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του (iii). ◇◇

Ορισμός 3.1.8. Έστω p πραγματικός αριθμός. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3.1.10}$$

ονομάζεται **αρμονική σειρά p -τάξης** ή **p -αρμονική**. Είναι γνωστή και ως σειρά *Dirichlet*.

Εφαρμογή 3.1.9. Έστω η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ δεύτερης τάξης ($p = 2$).

Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των 10 πρώτων όρων της. Η σειρά συγκλίνει;

Απόδειξη: Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n^2}$ είναι :

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}.$$

Το άθροισμα των παραπάνω όρων είναι $S_{10} = 1.54976$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.5.23, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς δεύτερης τάξης ($p = 2$), $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, είναι ακολουθία Cauchy, συνεπώς, είναι συγκλίνουσα ακολουθία (βλέπε, Θεώρημα 2.5.22). Επειδή όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί αριθμοί, προφανώς ένα κάτω φράγμα του αθροίσματος είναι το μηδέν. Στο Παράδειγμα 3.5.6 υπάρχει μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς με άνω φράγμα τον αριθμό 1.644, δηλαδή,

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1.644.$$

Στο Παράδειγμα 10.1.17 (ii) αποδεικνύεται ότι το κάτω φράγμα του αθροίσματος της αρμονικής σειράς με $p = 2$ είναι ο αριθμός 1. \diamond

Ορισμός 3.1.10. Τηλεσκοπική ονομάζεται η σειρά που έχει τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) + \cdots, \quad (3.1.11)$$

δηλαδή, ο γενικός όρος a_n της σειράς γράφεται ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών.

Το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της (3.1.11) είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον [Ορισμό 3.1.3](#), η τηλεσκοπική σειρά συγκλίνει, όταν το άθροισμα της σειράς στην (3.1.11) είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή, όταν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} \quad (3.1.12)$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, η τηλεσκοπική σειρά συγκλίνει, όταν $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Παραδείγματα 3.1.11.

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι, ο γενικός όρος $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ της σειράς έχει παρονομαστή γινόμενο διαδοχικών παραγόντων. Από αυτήν τη μορφή υποψιαζόμαστε ότι κάνοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα ο γενικός όρος a_n ίσως μπορούσε να γραφεί ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (βλέπε, [Ορισμός 3.1.10](#)). Γράφουμε διαδοχικά

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)},$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$a+b=0$$

$$a=1$$

Η λύση του συστήματος είναι $a=1$ και $b=-1$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a, b , ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1},$$

όπου θέτουμε $b_n = \frac{1}{n}$, και $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Άρα, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επιπλέον, από την (3.1.12) υπολογίζεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \frac{1}{1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1,$$

που είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως, η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = 1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.2 και Παράδειγμα 3.5.4.)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

Όπως παραπάνω στο (i) προσπαθούμε τον γενικό όρο $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ της σειράς να τον εκφράσουμε ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα. Γράφουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{b_1}{n+1} + \frac{b_2}{(n+1)^2} = \frac{a_1 n(n+1)^2 + a_2(n+1)^2 + b_1 n^2(n+1) + b_2 n^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{(a_1 + b_1)n^3 + (2a_1 + a_2 + b_1 + b_2)n^2 + (a_1 + 2a_2)n + a_2}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 + b_1 + b_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 2 \\ a_2 &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$ και $b_2 = -1$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a_1, a_2, b_1, b_2 , ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = b_n - b_{n+1},$$

όπου θέτουμε $b_n = \frac{1}{n^2}$, και $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επιπλέον, από την (3.1.12) υπολογίζεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \frac{1}{1^2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - 0 = 1,$$

που είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = 1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

iii) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ είναι αποκλίνουσα στο $+\infty$.

Η σειρά έχει γενικό όρο $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, αν θέσουμε $b_n = \sqrt{n}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$b_n - b_{n+1} = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = -(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -a_n.$$

Συνεπώς, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}),$$

δηλαδή, η σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), άρα $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, από την (3.1.12) υπολογίζεται το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = -(b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}) = -(1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1}) = +\infty$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει στο άπειρο, (βλέπε, Ορισμός 3.1.3). \diamond

Ορισμός 3.1.12. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ονομάζεται **φραγμένη** αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 3.1.13.

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.2(i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n$ έχει γενικό όρο $a_n = n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.1.13)$$

Συνδυάζοντας την ισοδυναμία του Ορισμού 3.1.12 με την (3.1.13) συμπεραίνουμε ότι η σειρά δεν είναι φραγμένη, επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη. $\diamond\diamond$

3.2 Κριτήρια σύγκλισης

Στην Ενότητα 2.5 διατυπώνονται τα σημαντικότερα κριτήρια, που χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί η σύγκλιση μίας σειράς σε πραγματικό αριθμό ή η απόκλισή της, την απόδειξη τους ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα στη βιβλιογραφία.

Όπως διατυπώθηκε στο Θεώρημα Cauchy (βλέπε, Θεώρημα 2.5.22) ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση μίας ακολουθίας στον \mathbb{R} είναι η ακολουθία να είναι Cauchy. Το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων είναι ακολουθία, συνεπώς, μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. (Κριτήριο Cauchy). Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $n_0(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon, \text{ για κάθε } m, n, \text{ με } m \geq n > n_0(\varepsilon). \quad (3.2.1)$$

Ισοδύναμες εκφράσεις της (3.2.1), είναι:

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0(\varepsilon) > 0: |S_m - S_n| < \varepsilon, \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N}, \text{ με } m \geq n > n_0(\varepsilon) \quad (3.2.2)$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \rho \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |S_{n+\rho} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+\rho} - S_n) = 0 \quad (3.2.3)$$

Παρατηρήστε ότι, το παραπάνω κριτήριο δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία σειρά να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Εφαρμογή 3.2.2. Η αρμονική σειρά (harmonic series) πρώτης τάξης ($p = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει.

Απόδειξη: Αν η σειρά συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy, πρέπει να ισχύει η (3.2.2). Οπότε για $m = 2n$ πρέπει να υπάρχει $n_0(\varepsilon)$, (εξαρτάται από ε), τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n > n_0(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon \quad (3.2.4)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το γενικό όρο της αρμονικής σειράς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$|S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2},$$

άρα, δεν επαληθεύεται η (3.2.4). Συνεπώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

◇◇

Η ακόλουθη πρόταση στηρίζεται στην ισοδυναμία της Πρότασης 3.2.1.

Πρόταση 3.2.3. Έστω ότι η σειρά των πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει στον \mathbb{R} .

Απόδειξη: i) Επειδή από την υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\rho=1$ στην (3.2.3), οπότε μπορούμε να γράψουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, από όπου το συμπέρασμα είναι προφανές.

ii) Θεωρούμε³ στο (i) ως πρόταση p: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και ως πρόταση q: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Το ζητούμενο είναι άμεσο συμπέρασμα από την ισοδυναμία που προκύπτει από την άρνηση της συνεπαγωγής στο (i). ◇◇

Παραδείγματα-Αντιπαραδείγματα 3.2.4.

i) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+7}$ **δεν** συγκλίνει, επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5} \neq 0$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.3 (ii)).

ii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.2.2, η αρμονική σειρά πρώτης τάξης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι το **αντίστροφο** της Πρότασης 3.2.3 (i) **δεν** ισχύει.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι αποκλίνουσα σειρά.

Πράγματι, για το αντίστοιχο μερικό άθροισμα ισχύει

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Εφαρμόζοντας την (3.1.1) στην προηγούμενη ανισότητα προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Συνεπώς, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

³ Υπενθυμίζουμε ότι στον προτασιακό λογισμό όταν για δύο λογικές προτάσεις p,q η πρόταση «p \Rightarrow q» είναι ισοδύναμη με την πρόταση «όχι q \Rightarrow όχι p».

Επίσης, για το γενικό όρο $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι το **αντίστροφο** της Πρότασης 3.2.3 (i) **δεν** ισχύει. \diamond

Πρόταση 3.2.5. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, ($a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **δεν** είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 3.2.6. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που διατυπώνεται στο (i) της Πρότασης 3.2.5. αναφέρεται μόνο σε σειρά με μη αρνητικό γενικό όρο. Αν θεωρήσουμε σειρά με γενικό όρο οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, συνδυάζοντας τον [Ορισμό 3.1.3](#) με τον [Ορισμό 3.1.12](#) συμπεραίνουμε ότι αν η σειρά είναι συγκλίνουσα, τότε είναι φραγμένη, όμως το αντίστροφο **δεν** ισχύει. Άρα, στη γενικότερη περίπτωση των πραγματικών αριθμών το αντίστροφο της Πρότασης 3.2.5 (i) **δεν** ισχύει.

Πράγματι, η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ είναι φραγμένη, επειδή για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 2r - 1, r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αν } n = 2r, r \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ισχύει $|S_n| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.1.2 \(v\)](#)). Ωστόσο, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει στους πραγματικούς αριθμούς, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.1.5 \(iii\)](#)).

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται ένα κριτήριο με το οποίο συγκρίνοντας τους όρους δύο ακολουθιών, που αντιστοιχούν στους γενικούς όρους δύο σειρών, και γνωρίζοντας τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση (σύγκλιση/απόκλιση) της μίας σειράς από αυτές προκύπτουν συμπεράσματα και για τη σύγκλιση/απόκλιση της άλλης.

Πρόταση 3.2.7. (Κριτήριο σύγκρισης). Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι σειρές μη αρνητικών όρων και $0 \leq a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε,

- i) αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- ii) αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παραδείγματα 3.2.8.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n \geq 2$, ισχύει

$$n^n \geq 2^n,$$

η απόδειξη της ανισότητας μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Θεωρώντας τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n = \frac{1}{n^n}$ και $b_n = \frac{1}{2^n}$, από $n^n \geq 2^n$ συμπεραίνουμε

$$0 < a_n \leq b_n.$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x = \frac{1}{2} < 1$, οπότε συγκλίνει σε

πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (i)). Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7

(i)).

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ αποκλίνει.

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n \geq 1$, ισχύει

$$0 < \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n = \frac{1}{n+1}$ και $b_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

ισχύει

$$0 < a_n \leq b_n.$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), οπότε σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.2.2,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

αποκλίνει. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ αποκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (ii)).

iii) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ συγκλίνει. Υπάρχει εκτίμηση για άνω και κάτω φράγμα της σειράς;

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n \geq 1$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli⁴ μπορούμε να γράψουμε $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \Rightarrow n \leq 2^n - 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανίσωση ο γενικός όρος της σειράς γράφεται, ισχύει

$$0 < \frac{2^n + n}{5^n + n^2} < \frac{2^n + 2^n - 1}{5^n + n^2} < \frac{2 \cdot 2^n}{5^n} = 2 \left(\frac{2}{5} \right)^n,$$

⁴ Για κάθε $x > -1$ ισχύει: $(1+x)^n \geq 1+nx$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (βλέπε, Ενότητα 2.6).

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n = \frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ και $b_n = 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ισχύει $0 < a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ με τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ να έχει λόγο $r = \frac{2}{5} < 1$.

Σύμφωνα με την [Εφαρμογή 3.1.7 \(i\)](#) η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, που υπολογίζεται από την (3.1.8),

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2 \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{10}{3}.$$

Άρα, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ συγκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.7 \(i\)](#)). Σύμφωνα με την [Πρόταση 3.2.5 \(i\)](#)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ είναι φραγμένη, οπότε ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + n^2} < 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{10}{3}$, άρα ένα άνω φράγμα της δοθείσας σειράς είναι το $10/3$, και κάτω φράγμα της είναι το μηδέν, επειδή όλοι οι όροι του γενικού όρου της σειράς είναι θετικοί αριθμοί. \diamond

Οι επόμενες προτάσεις αποτελούν γενίκευση της Πρότασης 2.5.10 των ακολουθιών, όπου διατυπώνονται οι ιδιότητες των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σειρών και δίνουν πληροφορίες για τη σύγκλιση/απόκλιση του αθροίσματος των αντίστοιχων σειρών.

Πρόταση 3.2.9. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί a, b, k, λ , και οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$,

και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + \lambda b_n) = ka + \lambda b.$$

Πρόταση 3.2.10. Έστω $a \in \mathbb{R}$, η συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, και η αποκλίνουσα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

αποκλίνει.

Παραδείγματα 3.2.11.

i) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n + 7^n}$ συγκλίνει.

Πράγματι, η αρχική σειρά γράφεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n + 7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + 7^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 7^n}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 1$, ισχύει

$$0 < \frac{2^n}{4^n + 7^n} < \frac{2^n}{7^n} = \left(\frac{2}{7}\right)^n,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n = \frac{2^n}{4^n + 7^n}$ και $b_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n$ ισχύει $0 < a_n \leq b_n$.

Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r = \frac{2}{7} < 1$, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για συγκλίνουσα σειρά, (βλέπε, [Εφαρμογή 3.1.7 \(i\)](#)). Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + 7^n}$$

συγκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.7 \(i\)](#)).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 7^n}$$

είναι συγκλίνουσα σειρά.

Θέτοντας $k=1$, $\lambda=-1$ στην [Πρόταση 3.2.9](#), συμπεραίνουμε ότι η διαφορά συγκλινουσών σειρών είναι συγκλίνουσα, συνεπώς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n + 7^n}$$

συγκλίνει.

ii) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3n+2}{5n+7}\right)$ αποκλίνει.

Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r = \frac{1}{2} < 1$, σύμφωνα με την [Εφαρμογή 3.1.7 \(i\)](#) η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Επιπλέον,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+7}$$

είναι αποκλίνουσα σειρά, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.2.4 \(i\)](#)). Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο στην [Πρόταση 3.2.10](#) καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \diamond

Πρόταση 3.2.12. (Κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy). Έστω ότι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία φθίνουσα μη αρνητικών αριθμών, (δηλαδή, $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (αποκλίνει στο $+\infty$).
- ii) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (αποκλίνει στο $+\infty$).

Εφαρμογή 3.2.13. Έστω p πραγματικός αριθμός. Η αρμονική σειρά p -τάξης,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- i) συγκλίνει, όταν $p > 1$, και
 ii) αποκλίνει στο $+\infty$, όταν $p \leq 1$.

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν θεωρήσουμε $p \leq 0 \Rightarrow -p = k \geq 0$, τότε ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \neq 0$, και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι σειρά θετικών όρων. Επομένως, η σειρά δεν συγκλίνει στους πραγματικούς αριθμούς, αποκλίνει στο $+\infty$, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.3 \(ii\)](#)).

• Αν θεωρήσουμε $p > 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $a_n = \frac{1}{n^p}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.12](#)), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad (3.2.5)$$

όπου $r \equiv 2^{1-p}$. Προφανώς στην (3.2.5) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ είναι γεωμετρική σειρά. Σύμφωνα με την [Εφαρμογή 3.1.7](#) η παραπάνω γεωμετρική σειρά συγκλίνει, όταν $2^{1-p} < 1 = 2^0 \Rightarrow p > 1$, ενώ η γεωμετρική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, όταν $2^{1-p} \geq 1 = 2^0 \Rightarrow p \leq 1$, (βλέπε, [Εφαρμογή 3.1.7 \(ii\)](#)). \diamond

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται ένα κριτήριο, το οποίο αναφέρεται στην οριακή τιμή του λόγου των γενικών όρων δύο θετικών σειρών και γνωρίζοντας τη σύγκλιση/απόκλιση μίας σειράς από αυτές προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση/απόκλιση της άλλης. Το κριτήριο στη βιβλιογραφία είναι γνωστό και ως δεύτερο κριτήριο σύγκρισης, το πρώτο διατυπώθηκε στην [Πρόταση 3.2.7](#).

Πρόταση 3.2.14. (Κριτήριο οριακής σύγκλισης ή γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης). Έστω ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ είναι σειρές μη αρνητικών όρων και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k.$$

- i) Αν $0 < k < +\infty$, και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (αποκλίνει) $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (αποκλίνει).
- ii) Αν $k = 0$, και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- iii) Αν $k = +\infty$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.2.15.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^4+5}$ συγκλίνει.

Ο γενικός όρος της σειράς είναι $b_n = \frac{2n+1}{3n^4+5} \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο οποίος παράγει όλους τους

όρους της θετικούς. Η ισοδυναμία που υπάρχει στο (i) του κριτηρίου οριακής σύγκλισης (ή γενικευμένου κριτηρίου σύγκρισης) οδηγεί στην αναζήτηση μίας «βοηθητικής» ακολουθίας, της οποίας γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της αντίστοιχης σειράς (σύγκλιση/απόκλιση)⁵ και επιπλέον η οριακή τιμή του πηλίκου των δύο ακολουθιών να είναι μη μηδενική πεπερασμένη τιμή, (βλέπε, Παρατήρηση 3.2.16 (ii)).

Εδώ παρατηρήστε ότι, η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία που αντιστοιχεί σε ρητή συνάρτηση με αριθμητή ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού και παρονομαστή 4^{ου} βαθμού. Για να προκύψει οριακή τιμή πραγματικός αριθμός (διάφορος του μηδενός), αρκεί να επιλέξουμε μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο τέτοιο ώστε ο παρονομαστής της να είναι πολυώνυμο βαθμού ίσου με τη διαφορά των βαθμών των προηγούμενων πολυωνύμων, δηλαδή, επιλέγουμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n^3} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.7.1 (i), προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2} = k.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ είναι p -αρμονική με $p=3 > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά (βλέπε,

Εφαρμογή 3.2.13 (i)). Επιπλέον, $k = \frac{3}{2}$, συνεπώς εφαρμόζοντας το κριτήριο οριακής σύγκλισης, (βλέπε, Πρόταση 3.2.14 (i)), καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \diamond

⁵ Ακολουθίες, που γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των «σειρών» είναι οι αντίστοιχες σε γεωμετρικές ή p -αρμονικές, κ.α., (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 και Εφαρμογή 3.2.13).

Παρατηρήσεις 3.2.16.

- i) Τα δύο κριτήρια σύγκρισης (βλέπε, Πρόταση 3.2.7., Πρόταση 3.2.14.), αναφέρονται σε σειρές των οποίων οι γενικοί όροι είναι μη αρνητικοί αριθμοί.
- ii) Η Πρόταση 3.2.7. εφαρμόζεται συνήθως, όταν πρόκειται να μελετηθούν σειρές με φαινομενικά «σύνθετους-πολύπλοκους» γενικούς όρους από σειρές με «απλούστερους» γενικούς όρους, με την προϋπόθεση ότι η σύγκλιση/απόκλιση της «απλούστερης» σειράς είναι γνωστή, τέτοιες σειρές επιλέγονται να είναι μία από τις γεωμετρική, p -αρμονική, τηλεσκοπική σειρά, κ.α., (βλέπε, Παράδειγμα 3.2.15).
- iii) Η Πρόταση 3.2.14. εφαρμόζεται συνήθως, όταν ο γενικός όρος της σειράς έχει ρητή μορφή ή όταν προκύπτει $\lambda = 1$ κατά την εφαρμογή των κριτηρίων λόγου ή ρίζας, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17, Πρόταση 3.2.19), χρησιμοποιώντας ως «γνωστή σειρά» μία από τις γεωμετρική, p -αρμονική, τηλεσκοπική σειρά, κ.α., (βλέπε, Παραδείγματα 3.2.11).

Πρόταση 3.2.17. (Κριτήριο λόγου του D' Alembert). Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να είναι σειρά μη μηδενικών

όρων και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, με λ μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ή $\lambda = +\infty$.

- i) Αν $\lambda < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.
- ii) Αν $\lambda > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει στο $+\infty$, και $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$.
- iii) Αν $\lambda = 1$, δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Παραδείγματα 3.2.18.

- i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει.

Πράγματι, θέτοντας $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n!}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \text{ και χρησιμοποιώντας } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \text{ (βλέπε, Πίνακα 2.3 ή Πρόταση 2.6.6),}$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} = \lambda < 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου του D' Alembert, συμπεραίνουμε ότι η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17 (i)).

ii) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ είναι συγκλίνουσα.

Θέτοντας $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda < 1.$$

Επειδή η παραπάνω οριακή τιμή είναι ανεξάρτητη του x , εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17 (i)).

◇◇

Πρόταση 3.2.19. (Κριτήριο ρίζας του Cauchy). Έστω η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ πραγματικών αριθμών και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda, \text{ με } \lambda \text{ μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ή } \lambda = +\infty.$$

i) Αν $0 \leq \lambda < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

ii) Αν $\lambda > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει στο $+\infty$.

iii) Αν $\lambda = 1$, δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Παραδείγματα 3.2.20.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n}$ συγκλίνει.

Θέτοντας $a_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n}$,

και χρησιμοποιώντας $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, (βλέπε, Πίνακα 2.3 ή Πρόταση 2.6.5), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 + 2n - 1}{3^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n}} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \right)^3}{3} = \frac{1}{3} = \lambda < 1$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n} \right|$ συγκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.19 \(i\)](#)). Επιπλέον, η αρχική σειρά είναι θετική, άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{3^n}$ συγκλίνει.

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Θέτοντας $a_n = \frac{e^{3n}}{(n+1)^2} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{3n}}{(n+1)^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$, και χρησιμοποιώντας $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{e^{3n}}{(n+1)^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e^{3n}}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2n + 1}} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e^n} \right)^3}{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} \right)} = \frac{e^3}{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \right)^2} = e^3 = \lambda > 1$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, συμπεραίνουμε ότι η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$ αποκλίνει στο $+\infty$, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.19 \(ii\)](#)). \diamond

Το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης σειρών βασίζεται στη γνωστή ιδιότητα των απολύτων τιμών

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta,$$

όπου $\theta \geq 0$. Αν θεωρήσουμε ότι στην παραπάνω ισοδυναμία στη θέση του x υπάρχει μία σειρά μίας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, και στη θέση του θ υπάρχει το άθροισμα των απολύτων τιμών των όρων της ακολουθίας, τότε, θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Συνδυάζοντας το κριτήριο παρεμβολής των ακολουθιών, (βλέπε, [Πρόταση 2.5.17](#)), την ιδιότητα των απολύτων τιμών του αθροίσματος⁶ με την παραπάνω ισοδυναμία οδηγούμαστε στην ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση μίας [απόλυτα συγκλίνουσας σειράς](#) και της αρχικής της.

Πρόταση 3.2.21. (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης). Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι σειρά πραγματικών αριθμών.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και μάλιστα ισχύει

⁶ Υπενθυμίζεται ότι για δύο πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (3.2.6)$$

Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε, βλέπε, Παρατήρηση-Αντιπαράδειγμα 3.3.4.

Παρατήρηση 3.2.22. Το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε εκείνες τις περιπτώσεις σειρών πραγματικών αριθμών, όπου οι σειρές έχουν τυχαίους όρους. Επειδή, τα περισσότερα κριτήρια όπως στις Προτάσεις 3.2.5, 3.2.7, 3.2.12, 3.2.14, 3.2.17, 3.2.19, που έχουν αναφερθεί έως εδώ, αναφέρονται σε σειρές με μη αρνητικούς όρους και το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης οδηγεί σε συμπέρασμα μόνο στην περίπτωση σύγκλισης της σειράς (όχι απόκλιση), στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης των σειρών τυχαίων όρων, πρώτα εφαρμόζονται τα κριτήρια για την απόλυτη σύγκλιση και μόνο όταν εξασφαλίζεται η απόλυτη σύγκλιση εφαρμόζεται η [Πρόταση 3.2.21](#) για να προκύψουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα για την αρχική σειρά.

Παράδειγμα 3.2.23.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ συγκλίνει, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε $a_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ το γενικό όρο της σειράς, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$.

Επειδή, $|\sin(n\theta)| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε :

$$|a_n| = \left| \frac{\sin(n\theta)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

Επιπλέον, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει, επειδή έχει λόγο $r = \frac{1}{2} < 1$, οπότε

εφαρμόζοντας το πρώτο κριτήριο σύγκρισης, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\theta)}{2^n} \right|$ συγκλίνει, (βλέπε,

[Πρόταση 3.2.7 \(i\)](#)). Συνεπώς, σύμφωνα με την [Πρόταση 3.2.21](#) η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ συγκλίνει. \diamond

Στο Κεφάλαιο 10 των γενικευμένων ολοκληρωμάτων θα συναντήσουμε το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης των (αριθμητικών) σειρών (βλέπε, Θεώρημα 10.1.16), το οποίο δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση (σύγκλιση/απόκλιση) ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης και της σειράς με γενικό όρο εξαρτώμενο από τη συνάρτηση. Επιπλέον, σε περίπτωση σύγκλισης μπορούμε να έχουμε εκτίμηση για το διάστημα, όπου το άθροισμα βρίσκεται, συνεπώς μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του αθροίσματος από ένα άνω και κάτω φράγμα.

Πρόταση 3.2.24. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = s$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα, δηλαδή, έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση.

Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει

$$I < s < I + f(1), \quad (3.2.7)$$

$$\text{όπου } I = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r f(x) dx.$$

Παράδειγμα 3.2.25. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ συγκλίνει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4x^2}$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, θετική, και φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5) και επιπλέον ισχύει

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^r = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{4} \left(-\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} + 1 \right) = \frac{1}{4}. \quad (3.2.8)$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, σύμφωνα με την [Πρόταση 3.2.24](#) και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

είναι συγκλίνουσα σειρά. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την [\(3.2.8\)](#) και $f(1) = \frac{1}{4}$ στην [\(3.2.7\)](#) συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα έχει τιμή, που ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0.25, 0.5)$, επειδή ισχύει

$$\frac{1}{4} < s < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Παρατήρηση: Η [Πρόταση 3.2.24](#) όπως το Θεώρημα 10.1.16 είναι ιδιαίτερα σημαντικά, αποτελέσματα, επειδή συνδέουν τις πληροφορίες της σύγκλισης της σειράς με το γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επομένως, όταν ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε πληροφορίες για τη σύγκλιση της σειράς και μάλιστα σε ποιο διάστημα εντοπίζεται το άθροισμά της, τότε χρειάζεται η γνώση του αντίστοιχου γενικευμένου ολοκληρώματος. Όμοια, όταν ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε πληροφορίες για τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος (βλέπε, Εφαρμογή 10.1.3), τότε χρειάζεται η γνώση της αντίστοιχης σειράς (βλέπε, [Εφαρμογή 3.2.13](#)). \diamond

3.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Στην παρούσα ενότητα, θα ασχοληθούμε με τη σύγκλιση των εναλλασσουσών σειρών, (βλέπε, [Ορισμός 3.1.1](#)) και την εκτίμηση του αθροίσματός τους, (βλέπε, [Πρόταση 3.3.5](#)).

Πρόταση 3.3.1. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι εναλλάσσουσα αν και μόνο αν ισχύει

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.1)$$

Η [Πρόταση 3.3.1](#) δίνει ένα ισοδύναμο κριτήριο του [Ορισμού 3.1.1](#), προκειμένου να αποδεικνύεται ότι μία σειρά είναι εναλλάσσουσα, χρησιμοποιώντας μόνο το γενικό όρο της σειράς.

Πρόταση 3.3.2. (*Κριτήριο Leibniz*). Αν οι απόλυτες τιμές των όρων μίας εναλλάσσουσας σειράς αποτελούν φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, τότε η σειρά συγκλίνει.

Ισοδύναμα, αν για $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,

τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει.

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι αν για την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ισχύουν οι προϋποθέσεις σύγκλισης του κριτηρίου Leibniz, συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, η οποία έχει πρώτο όρο $-a_1 < 0$. Αυτό είναι συνέπεια της [Πρότασης 3.2.9](#) και της σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Εφαρμογή 3.3.3. Έστω p ένας θετικός αριθμός, ($p > 0$). Η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά p -τάξης,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}, \quad (3.3.2)$$

συγκλίνει.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία των θετικών όρων $a_n = \frac{1}{n^p}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή, $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n^p}{1/(n+1)^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, (βλέπε, Ενότητα 2.3, Παρατήρηση 2.3.2). Επιπλέον, σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.5.18 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις της [Πρότασης 3.3.2](#) επαληθεύονται, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει.

◇◇

Παρατήρηση-Αντιπαράδειγμα 3.3.4. Η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

συγκλίνει, και **δεν** συγκλίνει απόλυτα.

Πρώτα αποδεικνύεται, ότι η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει, εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz.

Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

είναι ακολουθία θετικών όρων. Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n,$$

και μηδενική, προφανώς ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, (βλέπε, [Πρότασης 3.3.2](#)), άρα η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι, η σειρά **δεν** συγκλίνει απόλυτα, (βλέπε, [Ορισμός 3.1.4](#)), επειδή η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ως p -αρμονική με $p = 1$, (βλέπε, [Εφαρμογή 3.2.2](#)).

Έτσι μελετήθηκε ένα παράδειγμα, που ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ συγκλίνει, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|$ αποκλίνει, άρα το

αντίστροφο της [Πρότασης 3.2.21](#) **δεν** ισχύει.

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave υπολογίζεται ότι το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ είναι $s = \ln(2) = 0.69314$.

◇◇

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, οι συγκλίνουσες εναλλάσσουσες σειρές έχουν άθροισμα, που μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.5. (Εκτίμησης αθροίσματος εναλλάσσουσας σειράς). Αν η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 3.3.2, τότε το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

προσεγγίζει το άθροισμα s της σειράς με σφάλμα, του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μικρότερη από τον $(n+1)$ -όρο της ακολουθίας, δηλαδή,

$$|s - S_n| = \left| s - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \right| \leq a_{n+1}. \quad (3.3.3)$$

Επίσης, το υπόλοιπο $s - S_n$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον όρο a_{n+1} .

Παράδειγμα 3.3.6. Να υπολογιστεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$.

Πρόκειται για μία εναλλάσσουσα σειρά για την οποία πρώτα εξετάζεται η σύγκλιση της ελέγχοντας, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{2n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η οποία προφανώς είναι ακολουθία θετικών όρων.

Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = a_n,$$

και μηδενική, προφανώς ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2), άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ συγκλίνει.

Επειδή ζητείται μία εκτίμηση του αθροίσματος της σειράς με σφάλμα μικρότερο του 0.01, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.5, θα πρέπει

$$a_{n+1} < 0.01 = 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 48.5.$$

Επομένως, πρέπει να γνωρίζουμε το άθροισμα των πρώτων 49 όρων προκειμένου το σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.01.

Υπολογίζοντας τον $a_{50} = 0.0099009$, το μερικό άθροισμα των 49 πρώτων όρων της σειράς $S_{49} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{1}{99} = 0.2196013$, και συνδυάζοντας την ιδιότητα της απόλυτης τιμής με την (3.3.3) μπορούμε να γράψουμε:

$$|s - S_{49}| \leq a_{50} \Leftrightarrow -a_{50} + S_{49} \leq s \leq a_{50} + S_{49} \Leftrightarrow 0.2097004 \leq s \leq 0.2295022$$

Άρα, το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων είναι ένας πραγματικός αριθμός s με $s \in [0.209, 0.229]$.

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς υπολογίζεται ότι είναι $s = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.214$, το οποίο πράγματι ανήκει στο παραπάνω διάστημα $[0.209, 0.229]$, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.5.3](#)). ◇◇

3.4 Παραδείγματα και Εφαρμογές

Παράδειγμα 3.4.1. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{12}.$$

Πράγματι, η σειρά έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, αν κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα, όπως στο [Παράδειγμα 3.1.11 \(i\)](#), τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{a_1}{4n-1} + \frac{a_2}{4n+3} = \frac{(4a_1+4a_2)n+3a_1-a_2}{(4n-1)(4n+3)}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$4a_1 + 4a_2 = 0$$

$$3a_1 - a_2 = 1$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $a_1 = \frac{1}{4}$, και $a_2 = -\frac{1}{4}$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a_1, a_2 , ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1/4}{4n-1} - \frac{1/4}{4n+3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} (b_n - b_{n+1}),$$

όπου θέτουμε $b_n = \frac{1}{4n-1}$, και $b_{n+1} = \frac{1}{4n+3}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, από την παραπάνω ανάλυση, η σχέση που συνδέει την αρχική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι:

$$a_n = \frac{1}{4} (b_n - b_{n+1}) \quad (3.4.1)$$

Επομένως, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην [\(3.1.11\)](#), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ είναι τηλεσκοπική σειρά, (βλέπε, [Ορισμός 3.1.10](#)).

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n+3} = 0$, συνδυάζοντας την [\(3.4.1\)](#) με την [\(3.1.12\)](#) υπολογίζεται το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \frac{1}{4} (b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{12}$$

Επομένως, το άθροισμα της τηλεσκοπικής σειράς είναι πραγματικός αριθμός, η σειρά συγκλίνει σε αυτόν, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{12}. \quad \diamond$$

Παράδειγμα 3.4.2. Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

συγκλίνει και να υπολογιστεί ένα άνω και κάτω φράγμα για το αντίστοιχο άθροισμά της.

Η δοθείσα σειρά έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1}{2^n + 1}$, για κάθε $n = 2, 3, \dots$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n} = b_n,$$

και ότι οι ακολουθίες, που δημιουργούνται από τους παραπάνω γενικούς όρους a_n και b_n , είναι θετικών όρων.

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r = \frac{1}{2} < 1$, οπότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (i)). Το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς υπολογίζεται από την ισότητα στην (3.1.8) και είναι ίσο με

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3.4.2)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο σύγκρισης για τις θετικές σειρές $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συμπεραίνουμε ότι

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)). Από τη σύγκλιση της

σειράς συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, Πρόταση 3.2.5 (i)). Συνεπώς, από (3.4.2) γράφουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Άρα, ένα άνω φράγμα της $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ είναι $\frac{1}{2}$, και ένα κάτω φράγμα της είναι το μηδέν, επειδή όλοι οι όροι του γενικού όρου της σειράς είναι θετικοί αριθμοί. ◇◇

Παράδειγμα 3.4.3. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες σειρές είναι αποκλίνουσες:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(2n)} \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \quad \text{iii) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{n(\log n)^2},$$

ο δεκαδικός λογάριθμος σημειώνεται με $\log n$.

i) Θεωρούμε ότι οι όροι της σειράς δίνονται από την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n = \frac{1}{n \log(2n)}$, για

κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή, για $n \geq 1 \Rightarrow \log(2n) > 0$, οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \log x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, είναι αύξουσα, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.4 (ii)), οπότε το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη ακολουθία, συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\log(2n) < \log(2(n+1)) \Rightarrow n \log(2n) < n \log(2(n+1)) < (n+1) \log(2(n+1)),$$

από όπου προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{n \log(2n)} > \frac{1}{(n+1) \log(2(n+1))} = a_{n+1}.$$

Άρα, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.12), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(2n)}$ ανάγεται

στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2 \cdot 2^n)}$, για την οποία έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2 \cdot 2^n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2 \cdot 2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2 + \log(2^n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2 + n \log 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot \log 2 + n \log 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ αποκλίνει (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2). Συνδυάζοντας την ισότητα στην (3.4.3) με την απόκλιση της αρμονικής σειράς συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2 \cdot 2^n)}$ αποκλίνει. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(2n)}$ αποκλίνει.

ii) Η δοθείσα σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n \log n}$, για κάθε $n = 2, 3, \dots$.

Επειδή, για $n \geq 2 \Rightarrow \log(n) > \log 2 > 0$, είναι φανερό ότι $a_n > 0$.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω στο (i), χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης για την αντίστοιχη ακολουθία με $n \geq 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$\log n < \log(n+1) \Rightarrow n \log n < n \log(n+1) < (n+1) \log(n+1),$$

από όπου προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{n \log n} > \frac{1}{(n+1) \log(n+1)} = a_{n+1}.$$

Άρα, $(a_n)_{n \geq 2}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.12), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ανάγεται στη

μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2^n)}$, για την οποία έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Επιπλέον, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), συνεπώς αποκλίνει (βλέπε, [Εφαρμογή 3.2.2](#)). Επομένως, από την παραπάνω ισότητα και την απόκλιση της αρμονικής σειράς συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \log(2^n)}$ αποκλίνει. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο συσσώρευσης του

Cauchy η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ αποκλίνει.

iii) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{n(\log n)^2}$ έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1 + \log n}{n(\log n)^2}$, για κάθε $n = 2, 3, \dots$

Όπως παραπάνω στο (ii) αποδεικνύεται ότι $a_n > 0$, για κάθε $n \geq 2$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο οριακής σύγκλισης για τις ακολουθίες $a_n = \frac{1 + \log n}{n(\log n)^2} > 0$, και την

ακολουθία του (ii), που εδώ ο γενικός της όρος σημειώνεται $b_n = \frac{1}{n \log n} > 0$, για κάθε $n \geq 2$,

μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 + \log n}{n(\log n)^2}}{\frac{1}{n \log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \log n}{\log n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} = 1 = k > 0.$$

Επειδή, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ αποκλίνει, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.4.3 \(ii\)](#)), σύμφωνα με το κριτήριο οριακής σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{n(\log n)^2}$$

αποκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.14 \(i\)](#)). ◇◇

Παράδειγμα 3.4.4. Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$ συγκλίνει.

Θεωρώντας ότι ο γενικός όρος της δοθείσης σειράς είναι $a_n = \frac{n^{2n}}{2^{n^2}} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι φανερό

ότι πρόκειται για θετική σειρά. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.19 \(i\)](#)), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^{2n}}{2^{n^2}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n \cdot n^n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^{n \cdot n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (3.4.4)$$

Για τον υπολογισμό $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n}$, θεωρούμε την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = \frac{n^2}{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1,$$

η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε, όριο λόγου D' Alembert, Πρόταση 2.6.2). Επομένως, η ισότητα στην (3.4.4) γράφεται

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^{2n}}{2^{n^2}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 = \lambda < 1.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας του Cauchy έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{2n}}{2^{n^2}} \right|$ συγκλίνει, από όπου εφαρμόζοντας το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.21). $\diamond\diamond$

Παράδειγμα 3.4.5. Να αποδείξετε ότι:

- i) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n + \log n}$ συγκλίνει.
 ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2n + 1}$ αποκλίνει.

i) Η σειρά είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \geq 2}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n + \log n}$, για

κάθε $n = 2, 3, \dots$. Προφανώς, η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 2}$ είναι θετικών όρων, (βλέπε, Παράδειγμα 3.4.3 (i)).

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης για την αντίστοιχη ακολουθία με $n \geq 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$\log n < \log(n+1) \Rightarrow n + \log n < n + \log(n+1) < n+1 + \log(n+1),$$

από όπου προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{n + \log n} > \frac{1}{n+1 + \log(n+1)} = a_{n+1}.$$

Άρα, $(a_n)_{n \geq 2}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων.

Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 2}$ είναι μηδενική, επειδή ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \log n} = 0.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n + \log n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2).

ii) Η σειρά είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2n + 1} > 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

συμπεραίνουμε ότι **δεν** εφαρμόζεται το κριτήριο Leibniz, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2n + 1}$ αποκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.3.2 \(ii\)](#)). ◇◇

Παράδειγμα 3.4.6. Να δοθεί μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$.

Η δοθείσα σειρά είναι εναλλάσσοσα γεωμετρική, επειδή μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Είναι φανερό ότι έχει λόγο $r = -\frac{1}{2}$, σύμφωνα με την [Εφαρμογή 3.1.7 \(i\)](#) η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα ίσο με

$$s = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

Επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \left(\frac{1}{256} - \dots\right)$$

Συγκλίνει, μπορεί να γίνει εκτίμηση του αθροίσματός της, (βλέπε, [Πρόταση 3.3.5](#)). Αν κρατήσουμε τους πρώτους 8 όρους για να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, τότε το σφάλμα είναι μικρότερο από τον ένατο όρο, δηλαδή, μικρότερο από $\left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} \approx 0.003906$. Υπολογίζοντας το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων έχουμε

$$S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = 0.664062$$

Επομένως, από την [\(3.3.3\)](#) η διαφορά

$$|s - S_8| = \left| \frac{2}{3} - 0.664062 \right| = 0.002604$$

είναι θετική και μικρότερη από $\frac{1}{256} \approx 0.003906$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα (άθροισμα γεωμετρικής σειράς και S_8) μπορούμε να τα επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, (βλέπε, [Ενότητα 3.5](#)). $\diamond\diamond$

Εφαρμογή 3.4.7. Να υπολογιστούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$$

συγκλίνει. Η σύγκλιση να μελετηθεί και στα άκρα του διαστήματος.

Απόδειξη:

• Θεωρούμε $a_n = \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$. Για να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.17](#)), πρέπει να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^n}{3^{n+1} \cdot ((n+1)^2 + n + 1)}}{\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^n \cdot 3^n \cdot (n^2 + n)}{(x-2)^{n-1} \cdot 3^{n+1} \cdot (n^2 + 3n + 2)} \right| \\ &= \frac{|x-2|}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + 2} = \frac{|x-2|}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{|x-2|}{3} \cdot 1 = \frac{|x-2|}{3} = \lambda \end{aligned}$$

(3.4.5)

Σύμφωνα με το κριτήριο λόγου $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$ συγκλίνει, όταν $\lambda < 1$, άρα από την (3.4.5) πρέπει να ισχύει

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x \in (-1, 5)$.

Επίσης χρειάζεται να εξεταστεί η σύγκλιση στα άκρα του παραπάνω διαστήματος, επειδή το κριτήριο λόγου δεν μπορεί να «αποφανθεί» για τη σύγκλιση/απόκλιση της σειράς, (βλέπε, [Πρόταση 3.2.17 \(iii\)](#)).

• Αντικαθιστώντας $x = -1$, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n(n+1)},$$

η οποία είναι εναλλάσσοσα σειρά. Η σύγκλιση της εξετάζεται ελέγχοντας, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz, για την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = \frac{1}{3n(n+1)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών όρων. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το λόγο

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\frac{3(n+1)(n+2)}{3n(n+1)}} = \frac{n}{n+2} < 1,$$

συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Τέλος,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n(n+1)} = 0.$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n(n+1)}$ συγκλίνει, (βλέπε, [Πρόταση 3.3.2](#)).

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$ είναι συγκλίνουσα σειρά, για $x = -1$.

• Αντικαθιστώντας $x = 5$, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα τηλεσκοπική σειρά, (βλέπε, [Παράδειγμα 3.1.11 \(i\)](#)). Άρα,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$ είναι συγκλίνουσα σειρά, για $x = 5$.

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2 + n)}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 5]$.

Παρατήρηση: Η παραπάνω σειρά ονομάζεται δυναμοσειρά, η μελέτη των οποίων παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 9.1. ◇◇

3.5. Σειρές πραγματικών αριθμών σε προγραμματιστικό περιβάλλον

3.5.1 Σειρές πραγματικών αριθμών με συμβολικές εντολές

Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται, είτε για τον υπολογισμό του αθροίσματος των n_k πεπερασμένων όρων μίας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, είτε για το άθροισμα μίας σειράς με γενικό όρο τον a_n . Για το ορθό αποτέλεσμα, χρειάζεται προσοχή στην σύνταξη της εντολής `symsum`, η διαφορά είναι στο πόσοι όροι χρησιμοποιούνται στην κάθε περίπτωση. Αν το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, τότε πρέπει να δίνεται η αρχή και το τέλος στην άθροιση των προσθετέων, ενώ αν το άθροισμα δεν έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, τότε πρόκειται για σειρά, οπότε το ένα ή και τα δύο άκρα είναι «άπειρα». Στις δύο περιπτώσεις ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται n , η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές `syms` και `symsum` είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Συγκεκριμένα:

➤ Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μερικού αθροίσματος μίας ακολουθίας με γενικό όρο την ακολουθία a_n και ανεξάρτητη μεταβλητή n .

Για τον υπολογισμό του **μερικού αθροίσματος των n_k πρώτων όρων** της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ χρησιμοποιείται η εντολή `symsum`, η οποία δέχεται ως εισόδους:

- το γενικό όρο του μερικού αθροίσματος, α_n
- την ανεξάρτητη μεταβλητή, n
- την αρχική τιμή n_0 , την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n , χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πρώτου όρου του μερικού αθροίσματος (και είναι ο κάτω δείκτης), και
- την τελική τιμή n_k , την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n , χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου του μερικού αθροίσματος (είναι ο άνω δείκτης).

Σύνταξη εντολής: `symsum(α_n, n, n_0, n_k)`

Παράδειγμα 3.5.1. Για τον υπολογισμό του μερικού αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών, οι οποίοι δίνονται από το γενικό όρο $a_n = n$, αποτελούν αριθμητική πρόοδο, γράφουμε:

```
syms n
an = n;
S100 = symsum(an, n, 1, 100);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
S100 = 5050
```

Το παραπάνω μερικό άθροισμα επαληθεύει για $n = 100$ τον τύπο στην (3.1.13) του αθροίσματος της αριθμητικής προόδου (βλέπε, [Παράδειγμα 3.1.2 \(i\)](#)). \diamond

➤ Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αθροίσματος μίας σειράς με γενικό όρο την ακολουθία a_n και ανεξάρτητη μεταβλητή n , η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Εδώ η αρχική ή/και η τελική τιμή για το n μπορεί να είναι άπειρο ($\pm \text{Inf}$).

Για τον υπολογισμό του **αθροίσματος της σειράς** με γενικό όρο a_n , χρησιμοποιείται η εντολή `symsum`, η οποία δέχεται ως εισόδους:

- το γενικό όρο της σειράς, a_n
- την ανεξάρτητη μεταβλητή, n
 - την αρχική τιμή n_1 , την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n , χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πρώτου όρου της σειράς (είναι ο κάτω δείκτης στο άθροισμα). Εδώ μπορεί $n_1 = -\text{Inf}$, και
 - την τελική τιμή n_2 , την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n , χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου της σειράς (είναι ο άνω δείκτης στο άθροισμα). Εδώ συνήθως $n_2 = \text{Inf}$

Σύνταξη εντολής: `symsum(a_n, n, n_1, n_2)`

Παράδειγμα 3.5.2. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, γράφουμε:

```
syms n
an = 1/(n*(n+1));
S = symsum(an,n,1,Inf);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
S = 1
```

Το παραπάνω άθροισμα επαληθεύει τα θεωρητικά αποτελέσματα στο [Παράδειγμα 3.1.11\(i\)](#). ∞

Παράδειγμα 3.5.3. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της εναλλάσσουσας σειράς

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ του [Παράδειγματος 3.3.6](#), μπορούμε να γράψουμε:

```
syms n
an = 1/(2*n+1);
bn = ((-1)^(n+1))*an;
s = symsum(bn,n,1,Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$s = 1 - \pi/4$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(s)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$s = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.214602$$

Επιπλέον, στην ίδια εναλλάσσουσα σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$, αν χρειαζόταν να υπολογίσουμε το μερικό άθροισμα των $n_k = 49$ πρώτων όρων της, καθώς και τον a_{50} , μπορούμε να γράψουμε:

```
syms n
an = 1/(2*n+1);
bn = ((-1)^(n+1))*an;
S49 = symsum(bn,n,1,49)
a50=subs(an,n,50)
pretty(S49)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το μερικό άθροισμα σε ρητή μορφή και ο όρος a_{50} ως ακολούθως:

$$S49 = \frac{239229493848205844207122395443967154993}{1089380862964257455695840764614254743075} \approx 0.2196013$$
$$a50 = 0.0099009$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει η προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ για την αντικατάσταση των τιμών στην (3.3.3) του Παραδείγματος 3.3.6. ◊◊

3.5.2 Σειρές πραγματικών αριθμών με εντολές επανάληψης

Στις περιπτώσεις που χρειάζεται να επαναληφθούν κάποιες ενέργειες περισσότερες από μία φορές χρησιμοποιούμε την πιο απλή μορφή επανάληψης που ξεκινά με την εντολή `for` και τελειώνει με την `end`.

Για την εντολή επανάληψης `for ... end` απαιτούνται :

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή, n
- η αρχική τιμή n_0 , από την οποία ξεκινά η επαναληπτική διαδικασία
- η τελική τιμή n_1 , στην οποία σταματά η επαναληπτική διαδικασία
- το βήμα k , με το οποίο διαμερίζεται το διάστημα $[n_0 \ n_1]$. Αν δεν δηλωθεί το βήμα θεωρείται ότι είναι ίσο με 1.
- εντολές-ενέργειες, που επαναλαμβάνονται

Σύνταξη εντολών: `for n = n0: k: n1`

εντολές-ενέργειες επανάληψης

`end`

Παράδειγμα 3.5.4. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία συνάρτηση (function), που υπολογίζει και δίνει στην έξοδο της συνάρτησης το μερικό άθροισμα s των πρώτων όρων της σειράς με γενικό

όρο $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Παρατηρήστε ότι, n_0 και n_1

είναι παράμετροι στην είσοδο της συνάρτησης, που σημαίνει ότι ανάλογα με τις τιμές που εισάγονται υπολογίζονται και τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα, $\sum_{n=n_0}^{n_1} a_n = \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{1}{n(n+1)}$, με πρώτον

όρο τον a_{n_0} . Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα k , επειδή για τις ακολουθίες θεωρείται $k=1$.

```
function [s]=sumconv(n0,n1)
    s=0;
    for n=n0:n1
        an=1/(n*(n+1));
        s=s+an;
    end
end
```

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση και με $n_0 = 1$, $n_1 = 100$ βρίσκουμε ότι το άθροισμα είναι :

$s = 0.990099009900990$

Εκτελώντας τη συνάρτηση `sumcon(n0, n1)` για $n_0=1$, $n_1=500$, $n_1=1000$, $n_1=5000$, $n_1=10000$ και $n_1=100000$ προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές των αθροισμάτων:

```

n0=1      n1=500      S = 0.998003992015968
n0=1      n1=1000     S = 0.999000999001000
n0=1      n1=5000     S = 0.999800039992002
n0=1      n1=10000    S = 0.999900009999001
n0=1      n1=100000   S = 0.999990000100012

```

Τα παραπάνω μερικά αθροίσματα επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα του [Παραδείγματος 3.1.5 \(i\)](#), καθώς και το άθροισμα της σειράς που υπολογίστηκε με τις συμβολικές εντολές της Matlab/Octave στο [Παράδειγμα 3.5.2](#), δηλαδή, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ◇◇

Παράδειγμα 3.5.5. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), `sumdirichlet(p, n1)`, που υπολογίζει το μερικό άθροισμα των $n1$ πρώτων όρων μίας αρμονικής σειράς p -τάξης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Παρατηρήστε ότι, p και $n1$ είναι παράμετροι στην είσοδο της συνάρτησης, που σημαίνει ότι ανάλογα με τις τιμές που εισάγονται υπολογίζονται και τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα. Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα k , θεωρείται $k=1$. Στην έξοδο της συνάρτησης δίνεται το μερικό άθροισμα, s .

```

function [s]= sumdirichlet(p,n1)
    s=0;
    for n=1:n1
        an=1/(n^p);
        s=s+an;
    end
end

```

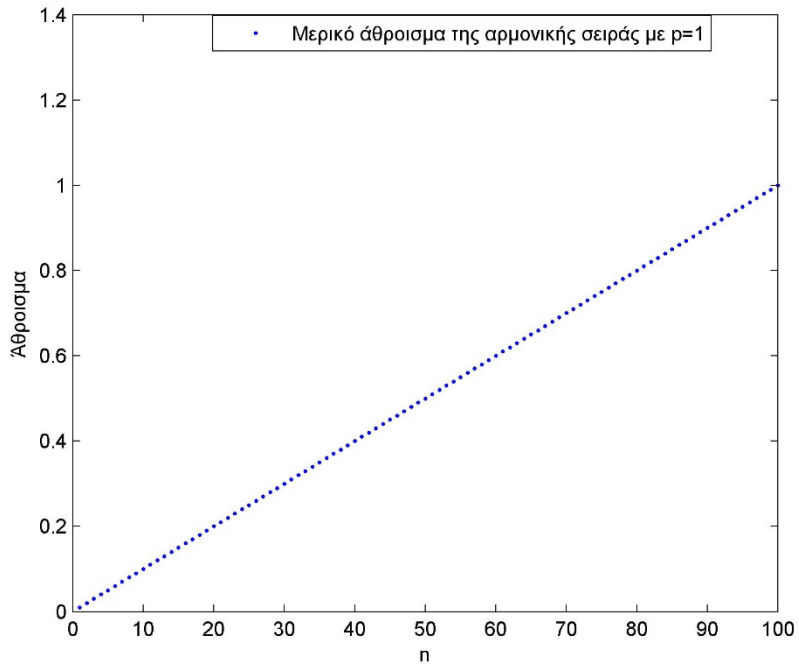
Εκτελώντας τη συνάρτηση `sumdirichlet(p,n1)` για $p=1$, $n_1=100$ και $n_1=1000$ προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές των αθροισμάτων:

```

n1=100      S = 1.0000000000000001
n1=1000     S = 1.0000000000000001

```

Όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα η αρμονική σειρά με $p=1$ τείνει στο άπειρο πολύ «αργά», (βλέπε, [Εφαρμογή 3.2.2](#)). Στο [Σχήμα 3.1](#) παρουσιάζεται η αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος των 100 πρώτων όρων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.



Σχήμα 3.1: Η γραφική αναπαράσταση του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$.

◇◇

Παράδειγμα 3.5.6. Η συνάρτηση (function), `dirichletp(p,n1,n2)`, έχει στην είσοδο τις παραμέτρους p , $n1$ και $n2$ για να υπολογίζει το μερικό άθροισμα των $n1$ και $n2$ πρώτων όρων μίας p -αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ και να σχεδιάζει τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα k , θεωρείται $k=1$. Στην έξοδο της συνάρτησης δίνονται τα αποτελέσματα των αντίστοιχων μερικών αθροισμάτων, $s1, s2$.

```
function [s1,s2] = dirichletp(p,n1,n2)

    s1=0;
    subplot(1,2,1)
    for n=1:n1
        an=1/(n^p);
        s1=s1+an;
        plot(n,s1, '.')
        hold on
    end
    xlabel('n')
    ylabel('Άθροισμα όρων')
```

```

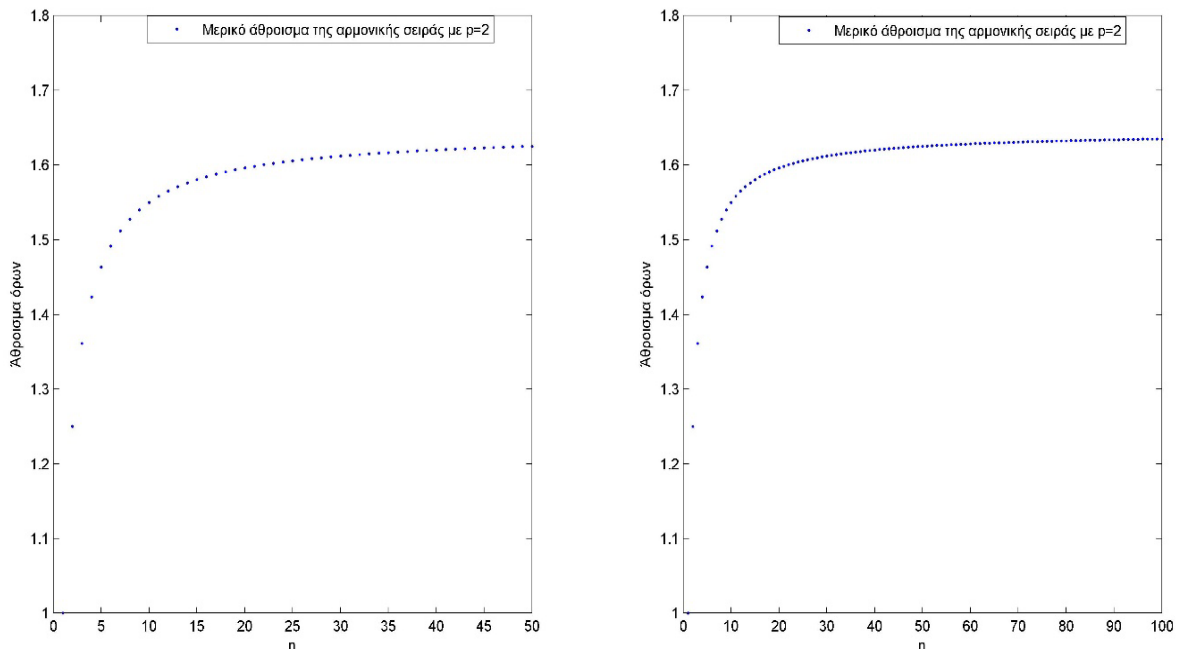
legend('Μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς με p=2')
subplot(1,2,2)
s2=0;
for n=1:n2
    an=1/(n^p);
    s2=s2+an;
    plot(n,s2, '.')
    hold on
end
xlabel('n')
ylabel('Άθροισμα όρων')
legend('Μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς με p=2')
end

```

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `dirichletp(p,n1,n2)` για $p=2$, $n_1=50$ και $n_2=100$ βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα είναι:

$n_1=50$	$S_1 = 1.625132733621529$
$n_2=100$	$S_2 = 1.634983900184892$

Στο **Σχήμα 3.2** παρουσιάζεται η αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος των 50 και 100 πρώτων όρων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Η γραφική αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος για $n_1=50$ είναι στην αριστερή εικόνα και για $n_2=100$ στη δεξιά.



Σχήμα 3.2: Η γραφική αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Εκτελώντας άλλη μία φορά τη συνάρτηση `dirichletp(p,n1,n2)` για $p=2$, $n_1=2000$ και $n_2=5000$ βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα είναι:

$n_1=2000$	$S_2 = 1.644434191827396$
$n_2=5000$	$S_2 = 1.644734086846901$

Η αρμονική σειρά με $p=2$ συγκλίνει, (βλέπε, [Εφαρμογή 3.1.9](#) και [Εφαρμογή 3.2.13 \(i\)](#)). Από τα παραπάνω μερικά αθροίσματα συμπεραίνουμε ότι με ακρίβεια τριών δεκαδικών ένα άνω φράγμα του αθροίσματος της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι το 1.644.

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave και τη συμβολική εντολή `symsum` βρίσκουμε:⁷

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934066848226$$

◇◇

⁷ Η προσέγγιση αποδείχθηκε από τον Leonhard Euler (1707 - 1783).

3.6. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

3.6.1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης εναλλασσουσών σειρών (Leibniz).

Απάντηση: Συγκλίνει

ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5^n \cdot (n+2)!}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert.

Απάντηση: Συγκλίνει

iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 8n^2 + 8}{2n^4 + 10n + 12}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο οριακής σύγκλισης.

Απάντηση: Αποκλίνει

iv)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \sin(n\theta)}{2n^2 + 4n + 3}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απόλυτη σύγκλιση και στη συνέχεια εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

Απάντηση: Συγκλίνει

v)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n+2)(3n+5)}$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι η σειρά είναι τηλεσκοπική, συμβουλευτείτε τα

[Παραδείγματα 3.1.11.](#)

Απάντηση: Συγκλίνει

vi)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+3)}{(n+2)(n+1)}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης εναλλασσουσών σειρών (Leibniz).

Απάντηση: Συγκλίνει

vii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 6n}{2(n+1)!}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert.

Απάντηση: Συγκλίνει

viii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4 \cdot 5^n + 1}{6^n + 16 \cdot 4^n}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy και αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{6} < 1$.

Απάντηση: Συγκλίνει

ix)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n) + \sin(3n)}{5^n + 7^n}$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι συγκλίνει απόλυτα, το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης.

Απάντηση: Συγκλίνει

$$\text{x) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+4} \cdot n^2}{(n+3)^2}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy.

Απάντηση: Αποκλίνει

3.6.2. Να υπολογιστούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν. Η σύγκλιση να εξετασθεί και στα άκρα των αντίστοιχων διαστημάτων.

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{5^n \cdot n^2}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Εξετάστε με αντικατάσταση των τιμών των άκρων του διαστήματος στην αρχική σειρά τη σύγκλιση της αριθμητικής σειράς που προκύπτει. Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 3.4.7](#).

Απάντηση: $3 \leq x \leq 7$

$$\text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(x-1)^n}{3n+7}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3n+7} = 1$. Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 3.4.7](#).

Απάντηση: $0 \leq x < 2$

$$\text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1} \cdot n!}{4^{n-1} \cdot (n+2)!}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά.

Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 3.4.7](#).

Απάντηση: $-2 \leq x \leq 6$

$$\text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-2)^n}{3n-2}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά.

Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 3.4.7](#).

Απάντηση: $1 < x < 3$

$$\text{v) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{2^n \cdot (n+1)^3}$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert ή το κριτήριο ρίζας του Cauchy, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 3.4.7](#).

Απάντηση: $-\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.
- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ. Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ., τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from
<http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

3.1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές και να υπολογισθεί ένα άνω φράγμα για το αντίστοιχο άθροισμα, (όπου αυτό υπάρχει).

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3 + 8}$$

ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - n}{7^n + 4n}$$

iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{2^n + 16}$$

iv)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)e^{n+1}}$$

v)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 8n + 10}{2n^5 + 4n + 2}$$

vi)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 5}{3^n + 4}$$

vii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n-2}}$$

viii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

ix)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^2 + 6n + 1}$$

x)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n+1}$$

xi)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2}$$

xii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{(n+2)^3}$$

xiii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 3}$$

xiv)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n + 7^n + 6 \cdot 4^n}$$

xv)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 3}}$$

xvi)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 8n}{4n^5}$$

xvii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$$

xviii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$$

xix)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2015} \cdot e^{-n^2}$$

xx)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

xxi)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n^3}$$

xxii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{2^n} + \frac{3n}{(n+1)!} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

xxiii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

xxiv)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{-n^2}$$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

3.2. Να εκτιμήσετε την τιμή του σφάλματος, αν χρησιμοποιηθούν οι πέντε πρώτοι όροι για να γίνει προσέγγιση των ακόλουθων σειρών.

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$$

iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης

...Αγνοώ το πώς με βλέπει ο κόσμος' αλλά στον εαυτό μου, φαίνομαι σαν να μην ήμουν τίποτα άλλο από ένα αγοράκι που παίζει στην ακρογιαλιά και κατά καιρούς ανακαλύπτει μια γυαλιστερή πέτρα ή ένα όστρακο πιο όμορφο από τα συνηθισμένα' ενώ ο μεγάλος ωκεανός της αλήθειας απλώνεται μπροστά μου χωρίς να τον γνωρίζω.

...Ο Θεός δημιούργησε τα πάντα με αριθμούς, βάρος και μέτρο.

...Δεν θα ορίσω το χρόνο, το χώρο, τον τόπο και την κίνηση, όπως αυτά είναι γνωστά σε όλους.

Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης, η οποία είναι θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού. Δίνονται ο ορισμός και οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται κοντά σ' έναν πραγματικό αριθμό ή όταν αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα. Μελετώνται τα όρια χαρακτηριστικών συναρτήσεων, όπως πολυωνυμικών, ρητών, τριγωνομετρικών, κ.α.. Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται «εύκολα», όταν η μεταβολή των τιμών της συνάρτησης γίνεται με «συνεχή» τρόπο, η συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται συνεχής συνάρτηση. Διατυπώνονται οι ιδιότητες και οι σημαντικότερες προτάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις, από τις οποίες προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

Προαπαιτούμενη γνώση

Πεδίο ορισμού συνάρτησης, τιμή συνάρτησης, φραγμένη συνάρτηση, οριακή τιμή ακολουθίας

4.1 Η έννοια του ορίου

Πολλά φυσικά φαινόμενα σχετίζονται με τη μεταβολή κάποιων ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα, η επιτάχυνση ενός κινητού, η οποία είναι αποτέλεσμα της μεταβολής της ταχύτητάς του, που με τη σειρά της είναι αποτέλεσμα της μεταβολής του διαστήματος στη μονάδα του χρόνου. Η μαθηματική θεωρία, η οποία αναπτύχθηκε στα τέλη του 16ου αιώνα, για να μελετήσει τον τρόπο μεταβολής διαφόρων μεγεθών λέγεται *λογισμός* και οφείλεται στους μαθηματικούς Isaac Newton και Gottfried Wilhelm von Leibniz.

Ο λογισμός χωρίζεται σε δύο μεγάλους σημαντικούς κλάδους:

α) το *διαφορικό λογισμό*, (όρια, παράγωγοι και εφαρμογές τους, όπως μονοτονία και ακρότατες τιμές συνάρτησης) και

β) τον *ολοκληρωτικό λογισμό*, (ολοκληρώματα και εφαρμογές τους, όπως εμβαδό επίπεδης περιοχής, όγκος στερεού, μήκος καμπύλης, κ.α.).

Θεμελιώδης έννοια-εργαλείο του λογισμού είναι η έννοια του *ορίου* συνάρτησης. Η λέξη «όριο» χρησιμοποιείται για μία τιμή μίας συνάρτησης f , έστω l , την οποία πλησιάζουν οι τιμές $f(x)$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό ή αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα.

Η ακριβής διατύπωση του ορισμού του ορίου χρειάζεται τις ακόλουθες έννοιες.

Ορισμός 4.1.1. Το σημείο $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A , αν για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό ε , (συνήθως αρκετά μικρό), ισχύει

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset, \quad (4.1.1)$$

δηλαδή, όταν το σύνολο A εκτός του σημείου x_0 έχει πάντοτε κοινά σημεία με οποιαδήποτε ανοικτό διάστημα, που περιέχει το x_0 . Το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ονομάζεται **περιοχή** κέντρου x_0 , συμβολίζεται με $\pi(x_0, \varepsilon)$, ή **γειτονιά του σημείου** x_0 και **ακτίνας** ε .

Στη περίπτωση που υπάρχει $\varepsilon > 0$, για το οποίο ισχύει $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} = \emptyset$, τότε το x_0 ονομάζεται **απομονωμένο σημείο** του συνόλου A .

Παραδείγματα 4.1.2.

i) Έστω $A = [-2, 5)$, τότε κάθε σημείο του A είναι σημείο συσσώρευσης.

Πράγματι, αν $-2 < x_0 < 5$ και d_1, d_2 είναι οι αποστάσεις του x_0 από τα σημεία -2 και 5 αντίστοιχα, θεωρούμε $d_0 = \min\{d_1, d_2\}$. Έτσι, αν $0 < \varepsilon < d_0$, το $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} \subset A$, ενώ αν $\varepsilon > d_0$, τότε

$$(x_0 - d_0, x_0 + d_0) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\}.$$

Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση επαληθεύεται η (4.1.1), δηλαδή, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Αν $x_0 = -2$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $(-2 - \varepsilon, -2 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} = (-2, -2 + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Γενικότερα, αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο, ότι σημείο συσσώρευσης είναι κάθε σημείο των διαστημάτων της μορφής $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και

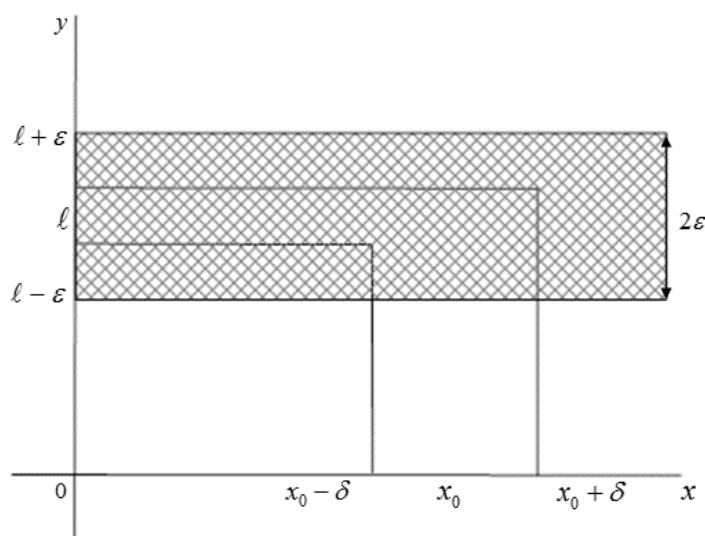
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

ii) Το σύνολο $A = (-3, 2] \cup \{4\}$, το $x = 4$ αποτελεί ένα απομονωμένο σημείο, επειδή για $\varepsilon = 1$, το διάστημα $(4 - 1, 4 + 1) = (3, 5)$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το A . $\diamond\diamond$

Ορισμός 4.1.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A . Αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός δ (εξαρτώμενος από τον ε) τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, τότε ο πραγματικός αριθμός ℓ ονομάζεται **όριο (οριακή τιμή)** της συνάρτησης f στο x_0 . Η οριακή τιμή της f , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο x_0 (σημειώνεται $x \rightarrow x_0$), συμβολίζεται με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0, \text{ τέτοιο ώστε, για κάθε } x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta, \text{ να ισχύει } |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (4.1.2)$$



Σχήμα 4.1: Η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης f .

Στο **Σχήμα 4.1** αναπαριστάνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Παρατηρούμε, στο Σχήμα

4.1, ότι, η έννοια του ορίου της συνάρτησης f στο σημείο x_0 ισοδυναμεί με το εξής:

επί του άξονα $y'Oy$ όσο μικρό διάστημα $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ επιλεγεί γύρω από το ℓ , δηλαδή, όσο μικρή ακτίνα $\varepsilon > 0$ χρησιμοποιηθεί, υπάρχει πάντα μία ακτίνα $\delta > 0$ τέτοια ώστε, **όλα** τα $x \in A$ με $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, (ισοδύναμα, $|x - x_0| < \delta$), έχουν εικόνες $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, (ισοδύναμα, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

Εδώ να σημειώσουμε ότι, το ανοικτό διάστημα στον άξονα $y'Oy$ της μορφής $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ είναι ένα συμμετρικό διάστημα με κέντρο το ℓ μήκους 2ε , και αντίστοιχα στον άξονα $x'Ox$ το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι επίσης ένα συμμετρικό διάστημα με κέντρο το x_0 μήκους 2δ .

Παρατηρήσεις 4.1.4

- i) Στον **Ορισμό 4.1.3** απαιτείται το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε $x_0 \in A$, θεωρούμε (παντού) ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- ii) Στην (4.1.2) του Ορισμού 4.1.3, αν θεωρήσουμε ως συνάρτηση $F(x) = f(x) - \ell$ μπορούμε να γράφουμε ισοδύναμα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.
- iii) Από τον **Ορισμό 4.1.3** προκύπτει ότι: αν υπάρχει **κάποιο** $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε **για κάθε** $\delta > 0$, να ισχύει $|f(x) - \ell| > \varepsilon$, όταν $x \in A$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τότε η συνάρτηση f **δεν έχει πραγματικό όριο** και ονομάζεται **αποκλίνουσα**, (βλέπε, Ορισμό 2.5.4 και Ορισμό 2.7.1.).

Πρόταση 4.1.5. Το x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου A , αν και μόνο αν υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία σημείων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $A - \{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου A . Μπορούμε να επιλέξουμε ως $\varepsilon > 0$, το $\varepsilon = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset,$$

το οποίο σημαίνει ότι, υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A - \{x_0\}$, τέτοια ώστε

$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Συνδυάζοντας τον **Ορισμό 4.1.3** με το γεγονός ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ είναι μηδενική, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0.$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει μία ακολουθία

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A - \{x_0\}, \tag{4.1.3}$$

τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Από τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας, (βλέπε, Κεφάλαιο 2), για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \tag{4.1.4}$$

Συνδυάζοντας (4.1.3) με (4.1.4) συμπεραίνουμε ότι το x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου A , (βλέπε, **Ορισμό 4.1.1**), το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \diamond

Παραδείγματα 4.1.6.

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

- i) η συνάρτηση $f : [2,5) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 4x + 2$, έχει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14$.
ii) η σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, έχει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
iii) η ταυτοτική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, έχει $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
i) Εφαρμόζοντας τον **Ορισμό 4.1.3** και την (4.1.2), για τυχαίο $\varepsilon > 0$ αναζητούμε $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [2,5)$ με $|x - 3| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - 14| < \varepsilon$. Επειδή

$$|f(x) - 14| < \varepsilon \Rightarrow |4x + 2 - 14| < \varepsilon \Rightarrow |4(x - 3)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4},$$

θεωρούμε $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Επομένως, για κάθε $x \in [2,5)$ με $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$ ισχύει

$$|f(x) - 14| = |4(x - 3)| = 4|x - 3| < 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

το οποίο επαληθεύει την (4.1.2), εφόσον για το τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, τέτοιο ώστε $|f(x) - 14| < \varepsilon$, για κάθε $x \in [2,5)$ με $|x - 3| < \delta$.

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ax_0 + b$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, (βλέπε, **Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.1**).

- ii) Για τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να γράψουμε $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $0 < \delta < \varepsilon$, τότε προφανώς επαληθεύεται η (4.1.2), επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Επομένως, το όριο μίας σταθερής συνάρτησης **δεν εξαρτάται** από την τιμή x_0 στην οποία τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή και ισούται πάντα με την ίδια τη σταθερά.

- iii) Για την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$, είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να γράψουμε $|f(x) - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$. Επομένως, για να επαληθεύεται η (4.1.2), αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon$. \diamond

Εφαρμογή 4.1.7. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύουν

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$,

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$.

Απόδειξη:

- i) Αρχικά αποδεικνύεται ότι, για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0|. \quad (4.1.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1),

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x - x_0}{2} + \frac{x + x_0}{2}\right) = \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right),$$

και

$$\begin{aligned}\sin(x_0) &= \sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{-x+x_0}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{-x+x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{-x+x_0}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(-\frac{x-x_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(-\frac{x-x_0}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ανισώσεις

$$|\sin(x)| \leq |x|, \quad \text{και} \quad |\cos(x)| \leq 1,$$

αποδεικνύεται η (4.1.5), επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}|\sin(x) - \sin(x_0)| &= 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, από την (4.1.5) έχουμε $|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$. Επομένως, για να επαληθεύεται η (4.1.2), αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon$.

ii) Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως στο (i), χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (7) για το συνημίτονο από τον Πίνακα 1.5.1, και αφήνεται ως άσκηση. \diamond

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει τη σχέση μεταξύ ορίου συνάρτησης και ορίου ακολουθίας, η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, [Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.2](#)). Επίσης, ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη της ([Παντελίδης, 2008](#); [Ρασσιάς, 2014](#)).

Πρόταση 4.1.8. Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η f έχει όριο τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$, όταν x τείνει στο x_0 , δηλαδή, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του $A - \{x_0\}$, που συγκλίνει στο x_0 , η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον ℓ .

Ερμηνεύοντας την [Πρόταση 4.1.8](#), παρατηρούμε ότι, αν μία συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό ℓ στο σημείο x_0 , τότε, αν επιλεγεί οποιοσδήποτε τρόπος για να «πλησιάσει» το x στο x_0 , δηλαδή, οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του $A - \{x_0\}$ και αν επιλεγεί τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x_0$, τότε οι εικόνες $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό, που ταυτίζεται με το όριο ℓ της συνάρτησης f .

Παρατηρήσεις 4.1.9.

i) Αν μία συνάρτηση f έχει **οριακή τιμή** $\ell \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 , τότε αυτή είναι **μοναδική**.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές οριακές τιμές, έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell'$, με

$\ell \neq \ell'$. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι μία ακολουθία σημείων (διαφορετικών του x_0), που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f , η οποία συγκλίνει στο x_0 . Επειδή το όριο μίας ακολουθίας, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό (βλέπε, Κεφάλαιο 2), τότε σύμφωνα με την [Πρόταση 4.1.8](#), για την ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει η

μοναδικότητα του ορίου της, συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell = \ell'$, δηλαδή, η αρχική υπόθεση $\ell \neq \ell'$ δεν ισχύει. Άρα, το όριο της συνάρτησης f , όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.

- ii) Από την ισοδυναμία, που διατυπώνεται στην [Πρόταση 4.1.8](#), είναι φανερό ότι, αν δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων (διαφορετικών του x_0), που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f , η οποία συγκλίνει στο x_0 , ενώ η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ αποκλίνει.
- iii) Συνδυάζοντας τη μοναδικότητα της οριακής τιμής μίας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0 με την [Πρόταση 4.1.8](#), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, όταν υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του πεδίου ορισμού της f , που συγκλίνουν στο x_0 (δηλαδή, $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow x_0$), και οι αντίστοιχες ακολουθίες των εικόνων τους $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ έχουν διαφορετικά όρια, τότε **δεν υπάρχει** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Η παρούσα παρατήρηση αποτελεί έναν τρόπο απόδειξης, όταν το όριο μίας συνάρτησης δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.1.10.

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, στο σημείο $x_0 = 0$.

Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι

οποίες συγκλίνουν στο μηδέν (γιατί;). Οι ακολουθίες των εικόνων τους $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι σταθερές, επειδή οι γενικοί όροι τους είναι

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1, \quad \text{και} \quad f(y_n) = \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Συνεπώς, ως σταθερές ακολουθίες συγκλίνουν στο 1 και 0, αντίστοιχα. Επομένως, το όριο της συνάρτησης $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει, (βλέπε, [Παρατήρηση 4.1.9 \(iii\)](#)). ◇◇

4.2 Ιδιότητες των ορίων

Ο υπολογισμός του ορίου συνάρτησης σε σημείο, αποδεικνύοντας την (4.1.2), είναι τις περισσότερες φορές επίπονος και δύσχρηστος, είναι όμως αναγκαίος για την απόδειξη των ιδιοτήτων του ορίου, οι οποίες διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1. Έστω οι συναρτήσεις $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g:B \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \cap B \neq \emptyset$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του $A \cap B$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$.

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$.

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, αν $b \neq 0$.

iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^n(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

v) Για κάθε $x \in A$, αν $f(x) \geq 0$, και $a > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη των τριών πρώτων ιδιοτήτων στην (i)-(iii) είναι άμεση εφαρμογή του ορισμού των πράξεων των συναρτήσεων, (βλέπε, Κεφάλαιο 1), και αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, [Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.3](#)).

iv) Η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $n = 2$, αν θέσουμε $f = g$ στην παραπάνω ιδιότητα (ii) του γινομένου έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot f(x)) = a \cdot a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^2, \text{ άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει.}$$

Θεωρούμε ότι ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό k , δηλαδή, ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^k(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f^{k-1}(x) \cdot f(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^k, \text{ (υπόθεση επαγωγής).}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ιδιότητα στην (iv) ισχύει και για $k + 1$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) και την υπόθεση της επαγωγής μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^{k+1}(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f^k(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f^k(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{k+1},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για $k + 1$. Συνεπώς η ιδιότητα στην (iv) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

v) Από την (4.1.2), (βλέπε, [Ορισμό 4.1.3](#)), και την υπόθεση, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$, έχουμε ότι :

για κάθε $\varepsilon > 0$, και $\varepsilon\sqrt{a} > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, τότε ισχύει

$$|f(x) - a| < \varepsilon\sqrt{a}. \quad (4.2.1)$$

Αν επιλέξουμε ως ε τον πραγματικό θετικό αριθμό $\varepsilon\sqrt{a}$, και Επειδή από την υπόθεση είναι $\sqrt{f(x)} + \sqrt{a} > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{a} \right| = \left| \frac{(\sqrt{f(x)} - \sqrt{a})(\sqrt{f(x)} + \sqrt{a})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{f(x) - a}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}},$$

την οποία συνδυάζοντάς τη με την (4.2.1) προκύπτει ότι

$$\left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}} \leq \frac{|f(x) - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, με $|x - x_0| < \delta$, το οποίο επαληθεύει την (4.1.2) στον Ορισμό 4.1.3, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \diamond

Παραδείγματα 4.2.2.

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot g(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0$, για κάθε $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2} = -\frac{2}{3}$.

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{1}{3}$.

v) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, για κάθε $a > 0$.

i) Πράγματι, συνδυάζοντας την ιδιότητα (ii) της Πρότασης 4.2.1, θέτοντας $f(x) = c$, με το συμπέρασμα του Παραδείγματος 4.1.6 (ii) προκύπτει το ζητούμενο.

ii) Έστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ μία πολυωνυμική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1 με το προηγούμενο Παράδειγμα 4.2.2 (i) και την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 4.2.1, (θέτοντας $g(x) = x^k$, $k = 1, 2, \dots, n$), μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} (x^n) + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1}) + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} (x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} (x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \end{aligned}$$

Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, (βλέπε, Παράδειγμα 4.1.6 (iii)), συνεπώς από την παραπάνω σχέση προκύπτει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \quad (4.2.2)$$

iii) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$, και $g(x) = x^2 + 2$, υπολογίζονται οι οριακές τιμές των συναρτήσεων από την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1, οι οποίες είναι :

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2, \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2) = 3$$

Από τις παραπάνω οριακές τιμές και την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 4.2.1 έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2} = -\frac{2}{3}.$$

iv) Αρχικά, για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 10}$, παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x + 10)$, επομένως, η ιδιότητα (iii) του ηλίκου στην Πρόταση 4.2.1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, (είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).

Επειδή, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στον αριθμητή και στον παρονομαστή έχουν κοινή ρίζα το 2, μπορούμε να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση και να υπολογίσουμε το όριο ως ακολούθως:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 5} = -\frac{1}{3}.$$

ν) Αρχικά, για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x} - \sqrt{a}) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)$, επομένως, η ιδιότητα (iii) του πηλίκου στην Πρόταση 4.2.1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, (είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x} + \sqrt{a}$ του αριθμητή προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

Από την ιδιότητα (v) της Πρότασης 4.2.1 συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \quad \diamond$$

Εφαρμογή 4.2.3. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, με $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{a}.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και την (4.1.2) για τον θετικό αριθμό $\varepsilon \cdot a^{\frac{n-1}{n}}$, όπου $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - a| < \varepsilon \cdot a^{\frac{n-1}{n}}. \quad (4.2.3)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας με κατάλληλες αντικαταστάσεις την ταυτότητα

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \dots + y^{k-1}),$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(f^{\frac{1}{n}}(x) - a^{\frac{1}{n}} \right) \left(f^{\frac{n-1}{n}}(x) + f^{\frac{n-2}{n}}(x)a^{\frac{1}{n}} + f^{\frac{n-3}{n}}(x)a^{\frac{2}{n}} + \dots + a^{\frac{n-1}{n}} \right) = f(x) - a \quad (4.2.4)$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, χρησιμοποιώντας τις (4.2.3) και (4.2.4), μπορούμε να γράψουμε

$$\left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{a} \right| = \left| f^{\frac{1}{n}}(x) - a^{\frac{1}{n}} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\left| f^{\frac{n-1}{n}}(x) + f^{\frac{n-2}{n}}(x)a^{\frac{1}{n}} + f^{\frac{n-3}{n}}(x)a^{\frac{2}{n}} + \dots + a^{\frac{n-1}{n}} \right|} \leq \frac{|f(x) - a|}{\left| a^{\frac{n-1}{n}} \right|} \leq \frac{\varepsilon a^{\frac{n-1}{n}}}{a^{\frac{n-1}{n}}} = \varepsilon$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη, επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{a} \right| < \varepsilon$, επαληθεύοντας την (4.1.2).

Προφανώς η ιδιότητα (v) της Πρότασης 4.2.1 είναι η περίπτωση $n = 2$ της παρούσας εφαρμογής. \diamond

Πρόταση 4.2.4. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A , και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών των πραγματικών αριθμών και του Ορισμού 4.1.3, (βλέπε, [Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.4](#)). \diamond

Παράδειγμα 4.2.5.

i) Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Αν θέσουμε $\ell = 0$ στην [Πρόταση 4.2.4](#), το ευθύ είναι προφανές.

Για το αντίστροφο, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f(x)| = ||f(x)||$, και στη συνέχεια να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 4.1.3.

ii) Το αντίστροφο της [Πρότασης 4.2.4](#) δεν ισχύει.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|f(x)| = 1$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$.

Επιπλέον, το όριο της f στο σημείο μηδέν δεν υπάρχει, επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, (βλέπε, [Πρόταση 4.4.4](#)). \diamond

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως «κριτήριο παρεμβολής» ή «κανόνας Sandwich», επειδή δίνει τη δυνατότητα του υπολογισμού ορίου συνάρτησης, όταν αυτή είναι «εγκλωβισμένη» από δύο άλλες συναρτήσεις, οι οποίες έχουν την ίδια οριακή τιμή.

Πρόταση 4.2.6. (Κριτήριο παρεμβολής). Έστω A το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g και h , και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Αν για κάθε $x \in A$ ισχύουν

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, [Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.5](#)). \diamond

Παραδείγματα 4.2.7.

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{x^6 + x^2} = 0$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} ((x-2)^2 \cos(3x+5) + 3) = 3$

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = \frac{x^2}{x^6 + x^2}$, η οποία προφανώς είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι το ημίτονο είναι φραγμένη συνάρτηση, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανίσωση επί $k(x) \geq 0$ προκύπτει

$$0 \leq \left| \frac{x^2 \sin(x)}{x^6 + x^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^6 + x^2}. \tag{4.2.5}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^6 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(x^4 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$, εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής στην (4.2.5) προκύπτει το ζητούμενο, (βλέπε, [Πρόταση 4.2.6](#)).

ii) Επειδή, η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι απόλυτα φραγμένη, για κάθε $\omega \equiv (3x+5) \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\cos(\omega)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos(\omega) \leq 1$, από όπου μπορούμε να γράψουμε $-(x-2)^2 \leq (x-2)^2 \cos(\omega) \leq (x-2)^2$, και

$$-(x-2)^2 + 3 \leq (x-2)^2 \cos(3x+5) + 3 \leq (x-2)^2 + 3. \quad (4.2.6)$$

Αν θεωρήσουμε $f(x) = (x-2)^2 + 3$, σύμφωνα με την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} ((x-2)^2 + 3) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2} (-(x-2)^2 + 3)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής στην (4.2.6) προκύπτει το ζητούμενο, (βλέπε, [Πρόταση 4.2.6](#)). \diamond

Εφαρμογή 4.2.8. Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Απόδειξη: Είναι γνωστό από την τριγωνομετρία ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει $|\sin(x)| < |x|$, και για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $|x| < |\tan(x)|$.

Θεωρώντας $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι φανερό ότι $\cos(x) > 0$, και $\frac{\sin(x)}{x} > 0$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω τριγωνομετρικές ανισώσεις μπορούμε να γράψουμε

$$|\cos(x)| \cdot |x| < |\sin(x)| < |x| \Rightarrow |\cos(x)| < \frac{|\sin(x)|}{|x|} < 1. \quad (4.2.7)$$

Από τα πρόσημα των $\cos(x)$, $\frac{\sin(x)}{x}$, η (4.2.7) γράφεται $0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$, από όπου προκύπτει:

$$\cos(x) - 1 < \frac{\sin(x)}{x} - 1 < 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, (βλέπε, [Εφαρμογή 4.1.7 \(ii\)](#)), τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) - 1) = 0$, (βλέπε, [Παράδειγμα 4.1.4 \(ii\)](#)).

Επομένως, εφαρμόζοντας στην παραπάνω ανίσωση το κριτήριο παρεμβολής, (βλέπε, [Πρόταση 4.2.6](#)), έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad \diamond$$

Η ακόλουθη πρόταση σχετίζεται με το όριο μίας σύνθετης συνάρτησης.

Πρόταση 4.2.9. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A , y_0 σημείο συσσώρευσης του B , και $f(A - \{x_0\}) \subseteq B - \{y_0\}$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ και $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Απόδειξη: Από την (4.1.2), επειδή $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta_1 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $y \in B$ με $|y - y_0| < \delta_1$, να ισχύει $|g(y) - \ell| < \varepsilon$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, για κάθε $\varepsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - y_0| < \delta_1$, (βλέπε, [Ορισμό 4.1.3](#)).

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$. Συνεπώς, επαληθεύεται η [\(4.1.2\)](#), άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$. $\diamond\diamond$

Παράδειγμα 4.2.10.

Να υπολογισθεί

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{x+3}{5x^2-1}\right).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+3}{5x^2-1}$, και $g(y) = \cos(y)$.

Αν $x_0 = 1$, και από την ιδιότητα [\(iv\)](#) στην Πρόταση 4.2.1 παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{5x^2-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

Αν $y_0 = 1$, τότε $\lim_{y \rightarrow 1} \cos(y) = \cos(1)$, (βλέπε, [Εφαρμογή 4.1.7 \(ii\)](#)). Επομένως, σύμφωνα με την [Πρόταση 4.2.9](#) προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{x+3}{5x^2-1}\right) = \cos(1). \quad \diamond\diamond$$

4.3 Όριο συνάρτησης το άπειρο. Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Ορισμός 4.3.1. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A . Η f έχει όριο το $+\infty$ στο σημείο x_0 , και συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0, \text{ τέτοιο ώστε αν } x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta, \text{ να ισχύει } f(x) > \varepsilon \quad (4.3.1)$$

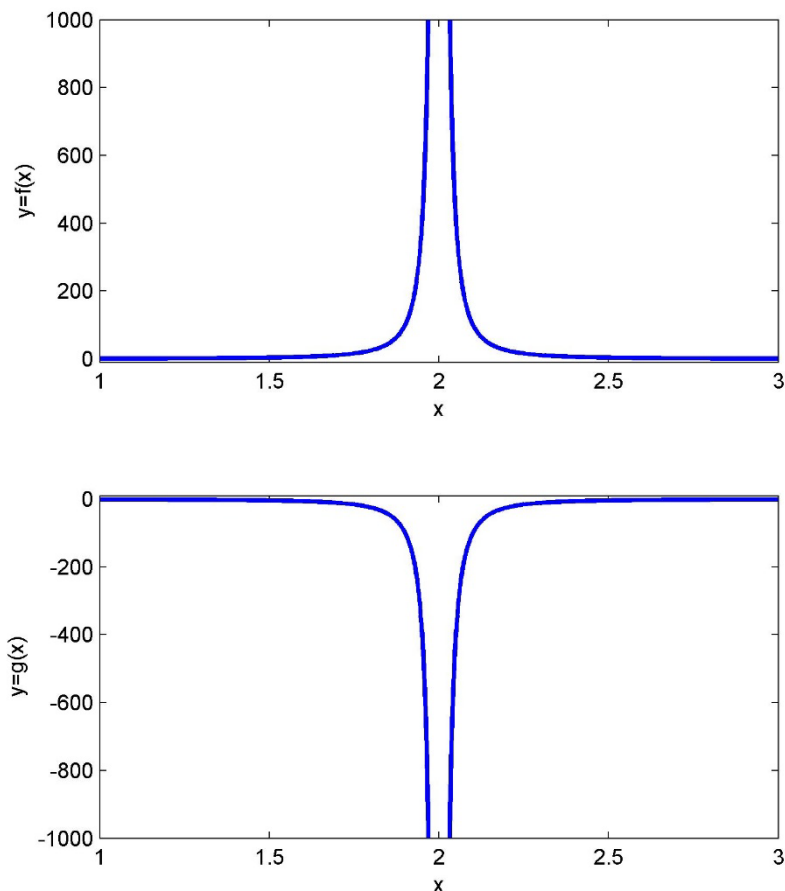
Ανάλογα, η f έχει όριο το $-\infty$ στο σημείο x_0 , και συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0, \text{ τέτοιο ώστε αν } x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta, \text{ να ισχύει } f(x) < -\varepsilon \quad (4.3.2)$$

Στο Σχήμα 4.2 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ (πάνω σχήμα) και

της $g(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ (κάτω σχήμα).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f, g δεν ορίζονται στο $x=2$ και ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ (πάνω) και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$ (κάτω).



Σχήμα 4.2: Γραφικές παραστάσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ (πάνω) και $g(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ (κάτω)

Παραδείγματα 4.3.2.

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) αν $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x-2}$, τότε, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) = -\infty$.

iii) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

iv) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

v) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

vi) αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A , με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$, (ή σε ένα διάστημα $I \subseteq A$, όπου $x_0 \in I$), τότε, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

i) Παρατηρήστε ότι, $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon > 0$, για τον οποίο ισχύει $f(x) > \varepsilon$. Τότε

$$\frac{1}{x-2} > \varepsilon \Rightarrow x-2 < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιον ώστε $0 < \delta < \frac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ με $|x-2| < \delta$

προκύπτει $f(x) = \frac{1}{x-2} > \varepsilon$. Επομένως, επαληθεύεται η (4.3.1) του Ορισμού 4.3.1 και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

ii) Θεωρούμε $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$. Έστω $\varepsilon > 0$ για τον οποίο ισχύει $f(x) < -\varepsilon$. Τότε

$$-\frac{1}{(x-2)^2} < -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > (x-2)^2 \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Αν επιλέξουμε έναν οποιονδήποτε $\delta > 0$ τέτοιον ώστε $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, τότε για $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ με $|x-2| < \delta$ προκύπτει

$$f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < -\varepsilon.$$

Συνεπώς, η (4.3.2) επαληθεύεται, άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

iii) Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. Θεωρώντας οποιονδήποτε $\varepsilon > 0$ (μικρό) υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x \in A$ και $|x-x_0| < \delta$ να ισχύει

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

Από την παραπάνω μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{1}{f(x)} < \varepsilon,$$

συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ (μικρό) υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $\frac{1}{f(x)} < \varepsilon$, το οποίο επαληθεύει την (4.1.2), (βλέπε, Ορισμό 4.1.3). Άρα, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη για $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

iv) Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 και την (4.3.2) έχουμε ότι

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$, από όπου αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Όμοια είναι η απόδειξη, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

v) Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $f(x) > \varepsilon > 0$, οπότε $\sqrt{f(x)} > \sqrt{\varepsilon}$. Έτσι, όταν θεωρήσουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$, επαληθεύεται ο Ορισμός 4.3.1 για τη συνάρτηση $\sqrt{f(x)}$.

vi) Η απάντηση είναι φανερή από το γεγονός ότι κάθε φορά που $g(x) > f(x) > \varepsilon$, για κάποιο $\varepsilon > 0$ τότε, υπάρχει $\delta > 0$ με $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τέτοιο ώστε $g(x) > \varepsilon$. $\diamond\diamond$

Θα μελετήσουμε, στη συνέχεια, το όριο συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει είτε στο $+\infty$ (συμβολικά $x \rightarrow +\infty$) είτε στο $-\infty$ (συμβολικά $x \rightarrow -\infty$), με τη προϋπόθεση ότι, το πεδίο ορισμού A «επιτρέπει» τη μεταβλητή x να παίρνει τέτοιες τιμές.

Ορισμός 4.3.3. i) Έστω ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A = (x, +\infty)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $+\infty$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $(\varepsilon, +\infty) \cap A \neq \emptyset$.
ii) Έστω ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A = (-\infty, x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $-\infty$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $(-\infty, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Έτσι, για παράδειγμα, το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $(2, +\infty)$ και το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $(-\infty, 1]$.

Παρατήρηση

Αν το $+\infty$ (αντίστοιχα, το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A , τότε το A περιέχει ένα υποσύνολο της μορφής $(a, +\infty)$ (ή $(-\infty, a)$ αντίστοιχα).

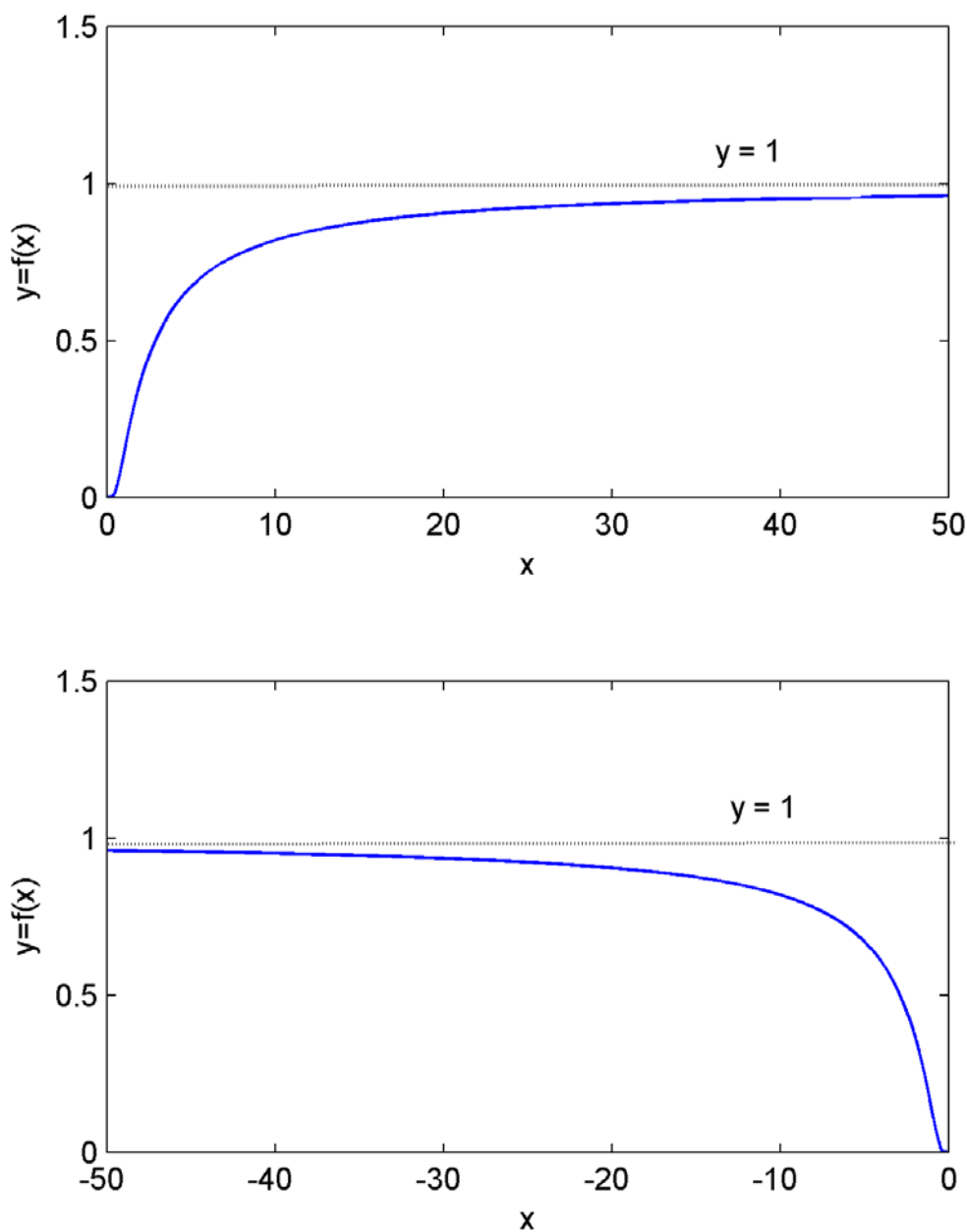
Επιπλέον, αν το $+\infty$ (αντίστοιχα, το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A , τότε (βλέπε, Παράδειγμα 4.1.2 (ii)) υπάρχει μία ακολουθία (γιατί;) σημείων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του A , τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (ή $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, αντίστοιχα).

Ορισμός 4.3.4. i) Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Ο αριθμός ℓ ονομάζεται **όριο** της f στο $+\infty$, και συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x > \delta$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Ο αριθμός ℓ

ονομάζεται **όριο** της f στο $-\infty$, και συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x < -\delta$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Στο Σχήμα 4.3 αναπαριστάνεται η γεωμετρική ερμηνεία του $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell = 1$ (πάνω) και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell = 1$ (κάτω).



Σχήμα 4.3: Γεωμετρική ερμηνεία του $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (πάνω) και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ (κάτω)

Παραδείγματα 4.3.5.

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

ii) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όριο το ℓ , δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin(x) \right) = 0$.

i) Εξετάζοντας την περίπτωση $x \rightarrow +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 0$ και $\varepsilon > 0$. Προφανώς, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{x^k} < \varepsilon$. Τότε $x > \sqrt[k]{\varepsilon}$, οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon} > 0$, τέτοιο ώστε $x > \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x^k} \right| < \varepsilon$.

Όμοια είναι η απόδειξη όταν $x \rightarrow -\infty$.

ii) Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ και μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν $x > \delta$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Επιπλέον, από $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Αν $m = \max\{[\delta] + 1, n_0\}$, όπου $[\delta]$ το ακέραιο μέρος του $\delta \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq m$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$.

Αντίστροφα, έστω ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \ell$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x > \delta$ για τα οποία $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x_n \in A$, τέτοια ώστε $x_n > \delta \Rightarrow |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, δηλαδή, υπάρχει μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ για την οποία, ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \ell$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση για το $-\infty$.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin(x)$. Έστω μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του

\mathbb{R} με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Τότε, η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία μηδενική ακολουθία, (βλέπε, Παράδειγμα 4.3.5

(i) και (ii)) και η ακολουθία των εικόνων $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \sin(x_n)$ είναι γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης ακολουθίας, υπενθυμίζεται ότι $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, επειδή $|\sin(x_n)| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} \sin(x_n) \right) = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8 ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης χωρίς τη χρήση ακολουθιών προτείνεται στην άσκηση 4.6 (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις). ◇◇

Ορισμός 4.3.6. i) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Η συνάρτηση f έχει **όριο** $+\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x > \delta$, τότε $f(x) > \varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Η συνάρτηση f έχει **όριο** $+\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x < -\delta$, τότε $f(x) > \varepsilon$.

Ορισμός 4.3.7. i) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Η συνάρτηση f έχει **όριο** $-\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x > \delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του A . Η συνάρτηση f έχει **όριο** $-\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε αν $x < -\delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$.

Παράδειγμα 4.3.8.

i) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x - 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Θα επαληθεύσουμε την ισχύ του Ορισμού 4.3.7, εφόσον το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του \mathbb{R} . Έστω $f(x) < -\varepsilon$ για ένα $\varepsilon > 0$. Τότε

$$3x - 2 < -\varepsilon \Rightarrow x < \frac{-\varepsilon + 2}{3}.$$

Αρκεί λοιπόν, για κάθε $\varepsilon > 0$ να επιλέξουμε $\delta < \frac{-\varepsilon + 2}{3}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x < \frac{-\varepsilon + 2}{3}$ να προκύπτει $f(x) < -\varepsilon$.

ii) Οι Ορισμοί 4.3.6 και 4.3.7 είναι ισοδύναμοι με : «για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ να προκύπτει $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pm\infty$ ».

Οι αποδείξεις είναι ανάλογες με εκείνη του Παραδείγματος 4.3.5 (ii). ◊◊

Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν το όριο είναι $\pm\infty$, και η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στον πραγματικό αριθμό x_0 .

Πρόταση 4.3.9. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A , με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$).

Τότε,

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$, (αντ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$)

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty, \quad (\text{αντ. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty)$$

$$\text{iii) } \text{Αν } c \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } c > 0, \quad (\text{αντ. } -\infty) \\ -\infty, & \text{αν } c < 0, \quad (\text{αντ. } +\infty) \end{cases}.$$

Απόδειξη: i) Η απόδειξη είναι εφαρμογή του **Ορισμού 4.3.1**. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \text{για κάθε } \frac{\varepsilon}{2} > 0, \text{ υπάρχει } \delta_1 > 0, \text{ τέτοιο ώστε } |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Leftrightarrow \text{για κάθε } \frac{\varepsilon}{2} > 0, \text{ υπάρχει } \delta_2 > 0, \text{ τέτοιο ώστε } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow g(x) < -\frac{\varepsilon}{2}$$

Αν θεωρήσουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, έχουμε $f(x) + g(x) < -\varepsilon$, από όπου αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Οι (ii) και (iii) αποδεικνύονται ανάλογα και αφήνονται ως άσκηση.

Παρατήρηση: Η απόδειξη της Πρότασης 4.3.9 μπορεί να γίνει και με τη χρήση ακολουθιών, (βλέπε, **Πρόταση 4.1.8**). ◇◇

Παρατήρηση

Η Πρόταση 4.3.9 μπορεί να επαναδιατυπωθεί, θεωρώντας $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, με $\ell \in \mathbb{R}$ με τη μόνη διαφορά στο γινόμενο να έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty \text{ (αντ. } -\infty), & \text{αν } \ell > 0 \\ -\infty \text{ (αντ. } +\infty), & \text{αν } \ell < 0 \end{cases}.$$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι αντίστοιχες της Πρότασης 4.3.9, στην κάθε πρόταση διατυπώνονται οι ιδιότητες που αφορούν στις οριακές τιμές στο άπειρο.

Πρόταση 4.3.10. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$.

Τότε,

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

$$\text{iii) } \text{Αν } c \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (c \cdot f(x)) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } c > 0 \\ -\infty, & \text{αν } c < 0 \end{cases}.$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^n = +\infty, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πρόταση 4.3.11. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$. Τότε

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

iii) Αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (c \cdot f(x)) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } c > 0 \\ +\infty, & \text{αν } c < 0 \end{cases}$.

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n = 2k \\ -\infty, & \text{αν } n = 2k + 1 \end{cases}$.

Πρόταση 4.3.12. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$. Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty.$$

Παράδειγμα 4.3.13.

Ισχύουν τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n = 2k \\ -\infty, & \text{αν } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε την ισχύ τους από την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 4.3.11.

◇◇

Εφαρμογή 4.3.14. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{με } a_i \in \mathbb{R} \text{ και } a_n \neq 0.$$

Τότε,

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_n < 0 \end{cases}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a_n > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a_n < 0 \end{cases}$

Απόδειξη: i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_{n-1} \frac{1}{x} \right) + \dots + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_1 \frac{1}{x^{n-1}} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_0 \frac{1}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) \end{aligned}$$

εφόσον $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^k} \right) = 0, k \in \mathbb{N}$ (βλέπε, [Παράδειγμα 4.3.5 \(i\)](#)). Το αποτέλεσμα είναι πλέον φανερό από την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 4.3.10 και από το [Παράδειγμα 4.3.13](#).

Αν, για παράδειγμα, $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty.$$

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με το (i) και αφήνεται ως άσκηση. ◇◇

Εφαρμογή 4.3.15. Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, και $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, με $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ και $a_n, b_m \neq 0$.

Τότε,

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Απόδειξη: i) Όπως και στην [Εφαρμογή 4.3.14 \(i\)](#) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \frac{1}{x^m} \right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \right]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^m \left(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \frac{1}{x^m} \right) \right]} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (b_m x^m)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \end{aligned}$$

Η απάντηση είναι άμεση συνέπεια του [Παραδείγματος 4.3.13](#) και του [Παραδείγματος 4.3.5 \(i\)](#).

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με το (i) και αφήνεται ως άσκηση. ◇◇

Στους ακόλουθους πίνακες συνοψίζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω προτάσεων και παραδειγμάτων για το όριο συνάρτησης στο άπειρο.

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες ορίων όταν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ (αντ. όταν $x \rightarrow x_0$)

$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} f(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} g(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} (f(x) + g(x))$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} (f(x) \cdot g(x))$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} \frac{1}{f(x)}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ (x \rightarrow x_0)}} (c \cdot f(x))$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty, c > 0$ $-\infty, c < 0$
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστο	$-\infty$	0	όμοια
$-\infty$	$+\infty$	απροσδιόριστο	$-\infty$	0	$-\infty, c > 0$ $+\infty, c < 0$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	όμοια
$\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty, \ell > 0$ $-\infty, \ell < 0$	$\frac{1}{\ell}$	$c \cdot \ell$
$\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty, \ell > 0$ $+\infty, \ell < 0$	$\frac{1}{\ell}$	$c \cdot \ell$

Πίνακας 4.2: Ιδιότητες ορίων όταν $x \rightarrow \pm\infty$ και $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$	
$a_n > 0$	$+\infty$	$+\infty$ αv $n = 2k$	$-\infty$ αv $n = 2k + 1$
$a_n < 0$	$-\infty$	$-\infty$ αv $n = 2k$	$+\infty$ αv $n = 2k + 1$

4.4 Πλευρικά όρια συνάρτησης σε σημείο

Όταν λέμε ότι το όριο μίας συνάρτησης $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$, όταν $x \rightarrow x_0$, όπου x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A , εννοούμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή x προσεγγίζει το x_0 με οποιονδήποτε τρόπο. Δηλαδή, το $x \rightarrow x_0$, είτε με τιμές μεγαλύτερες του x_0 , είτε με τιμές μικρότερες του x_0 .

Αν $A=(a, b]$ ή $A=(a, +\infty)$ και $x_0 = a$, τότε το a εξακολουθεί να είναι σημείο συσσώρευσης του A (γιατί;) και x τείνει στο x_0 ($x \rightarrow x_0$) μόνο πλησιάζοντας στο x_0 με τιμές μεγαλύτερες του x_0 , δηλαδή, πλησιάζοντάς το από δεξιά, επειδή το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει πραγματικούς αριθμούς μικρότερους ή ίσους του a .

Αν $A=[a, b)$ ή $A=(-\infty, b)$ και $x_0 = b$, τότε το b είναι σημείο συσσώρευσης του A , και $x \rightarrow x_0$ μόνο πλησιάζοντας στο x_0 με τιμές μικρότερες του x_0 , δηλαδή, πλησιάζοντάς το από αριστερά.

Ορισμός 4.4.1. Έστω η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Το **δεξιό όριο** της f στο x_0 είναι ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$, όταν το x τείνει στο x_0 **από δεξιά του**, και σημειώνεται $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$, ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (4.4.1)

Το **αριστερό όριο** της f στο x_0 είναι ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$, όταν το x τείνει στο x_0 **από αριστερά του**, και σημειώνεται $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$, ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (4.4.2)

Παρατήρηση 4.4.2.

- Το δεξιό όριο της f στο x_0 και το αριστερό όριο της f στο x_0 είναι γνωστά ως **πλευρικά όρια** της f στο x_0 .
- Για τον υπολογισμό των πλευρικών ορίων της f στο x_0 εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων, που διατυπώθηκαν στην **Πρόταση 4.2.1**, στην **Εφαρμογή 4.2.3**, στα Παραδείγματα 4.2.2 (i) - (ii).
- Όταν το $+\infty$ (αντίστοιχα το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του A , (βλέπε, **Ορισμός 4.3.3**), τότε ο **Ορισμός 4.4.1** ταυτίζεται με τον **Ορισμό 4.3.4**.

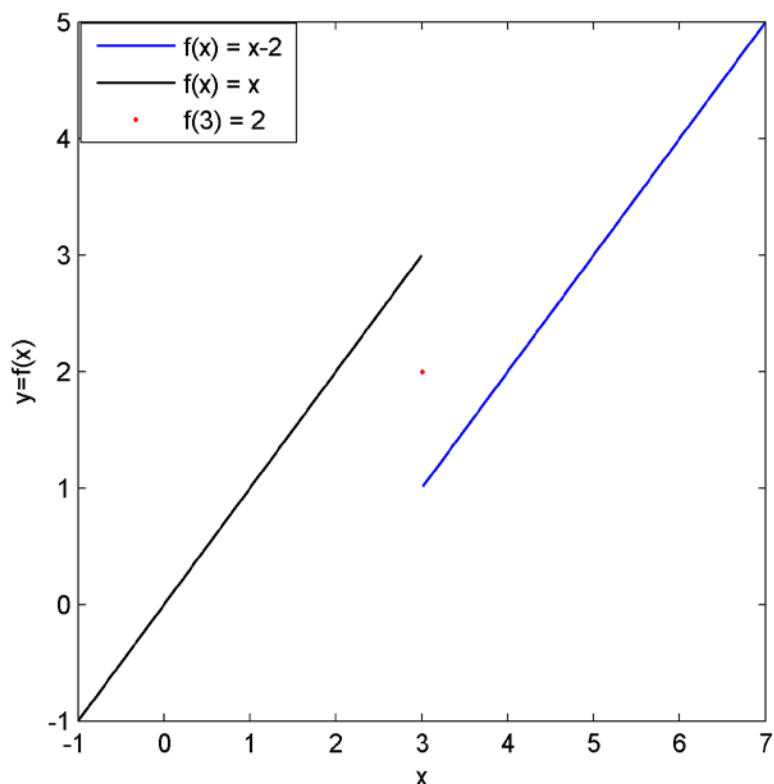
Παράδειγμα 4.4.3.

- Να υπολογισθούν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 3 \\ 2, & \text{αν } x = 3 \\ x - 2, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

Προφανώς, το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρο το \mathbb{R} . Όταν $x \rightarrow 3^-$, δηλαδή, το x τείνει στο 3 με τιμές μικρότερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των x δίνονται από τον τύπο $f(x) = x$. Σύμφωνα με το **Παράδειγμα 4.1.6 (iii)** ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x = 3.$$



Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.4.3 (i)

Όταν $x \rightarrow 3^+$, δηλαδή το x τείνει στο 3 παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των x δίνονται από τον τύπο $f(x) = x - 2$. Σύμφωνα με το [Παράδειγμα 4.2.2 \(ii\)](#) και από την [\(4.2.2\)](#) προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1.$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 3$ είναι διαφορετικά, το οποίο αναπαριστάνεται στο [Σχήμα 4.4](#).

ii) Να υπολογισθούν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, για τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

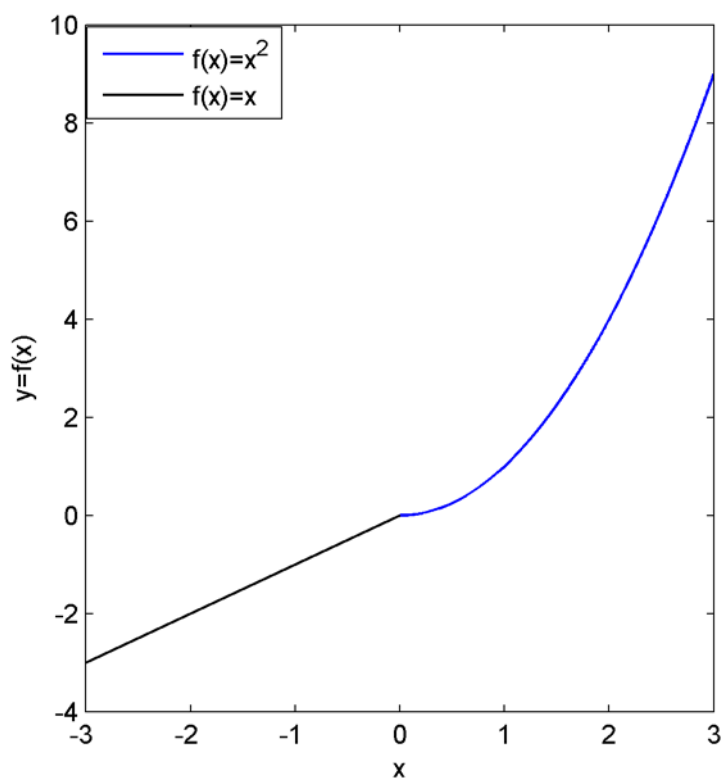
Προφανώς, το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Όταν $x \rightarrow 0^-$, δηλαδή, το x τείνει στο 0 με τιμές μικρότερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των x δίνονται από τον τύπο $f(x) = x$. Σύμφωνα με το [Παράδειγμα 4.1.6 \(iii\)](#) ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0.$$

Όταν $x \rightarrow 0^+$, δηλαδή, το x τείνει στο 0 παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των x δίνονται από τον τύπο $f(x) = x^2$. Σύμφωνα με το [Παράδειγμα 4.2.2 \(ii\)](#) και από την [\(4.2.2\)](#) προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0.$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 0$ είναι ίσα, (βλέπε, [Σχήμα 4.5](#)).



Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.4.3(ii)

iii) Να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 και την (4.3.1) από $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι

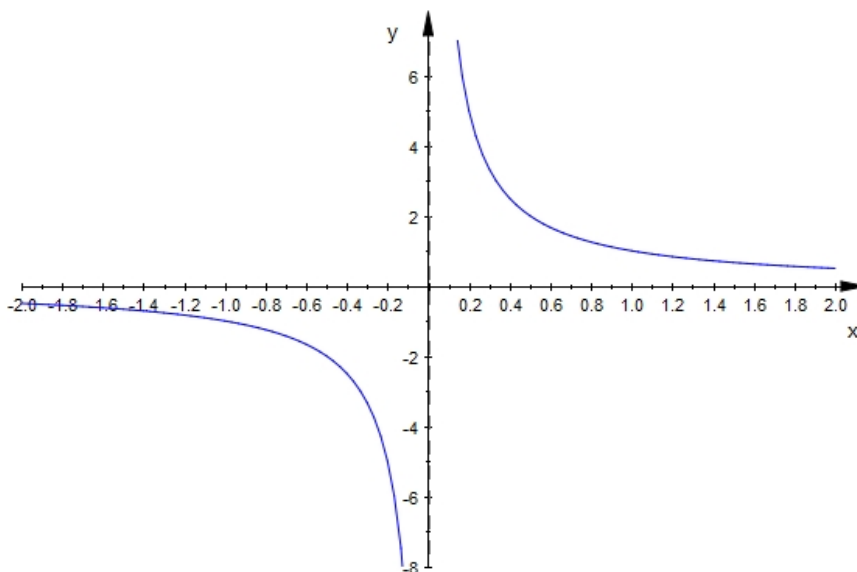
για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < x < \delta$, να ισχύει $\frac{1}{x} > \varepsilon$.

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, τότε για κάθε $x \in A$ με $0 < x < \frac{1}{\varepsilon}$ προκύπτει $\frac{1}{x} > \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας την (4.3.2) του Ορισμού 4.3.1 αποδεικνύεται $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, το οποίο αφήνεται ως

άσκηση. Στο Σχήμα 4.6 αναπαριστάται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$, από όπου μπορούμε να

διαπιστώσουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.



Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.

◇◇

Συνδυάζοντας (4.1.2) με τις (4.4.1) και (4.4.2) αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση, στην οποία διατυπώνεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη (πραγματικής) οριακής τιμής μίας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι η ύπαρξη των πλευρικών ορίων της συνάρτησης στο σημείο αυτό με την ίδια οριακή τιμή.

Πρόταση 4.4.4. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x). \quad (4.4.3)$$

Παραδείγματα 4.4.5

i) Στο Παράδειγμα 4.4.3 (ii) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$, και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \text{ Επομένως, από την ισοδυναμία στην (4.4.3) συμπεραίνουμε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

ii) Στο Παράδειγμα 4.4.3 (i) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο $x_0 = 3$ με $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$, και

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1. \text{ Επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, δεν υπάρχει το όριο της } f \text{ στο σημείο } 3, \text{ (βλέπε, Πρόταση 4.4.4).}$$

iii) Να εξετάσετε, αν υπάρχει στο $x_0 = 0$, το όριο της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \\ 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Αρχικά υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο $x_0 = 0$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 1) = 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.4, το όριο της f υπάρχει, επειδή τα πλευρικά όρια της f υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Επιπλέον, από την ισοδυναμία στην (4.4.3) συμπεραίνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

◇◇

4.5 Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός 4.5.1. Έστω η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Η f ονομάζεται **συνεχής** στο σημείο x_0 , αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (4.5.1)$$

Ισοδύναμα, f είναι **συνεχής** στο σημείο x_0 , αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (4.5.2)$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $B \subseteq A$ ονομάζεται **συνεχής** στο σύνολο B .

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής** στο $x_0 \in A$ και το σημείο x_0 λέγεται **σημείο ασυνέχειας** της f .

Η γεωμετρική ερμηνεία μίας συνεχούς συνάρτησης παρουσιάζεται στην [Παρατήρηση 4.5.3 \(ii\)](#).

Παραδείγματα 4.5.2.

i) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ με $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Πράγματι, επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$, (βλέπε, [Εφαρμογή 4.1.7 \(i\)](#)), σύμφωνα με τον [Ορισμό 4.5.1](#) και την [\(4.5.1\)](#) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .

Επειδή $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τυχαίο σημείο, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ii) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ με $f(x) = \cos(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο, όπως στο [Παράδειγμα 4.5.2 \(i\)](#), χρησιμοποιώντας την [Εφαρμογή 4.1.7 \(ii\)](#).

iii) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Πράγματι, από το [Παράδειγμα 4.1.6 \(ii\)](#) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. Από την [\(4.5.1\)](#) συμπεραίνουμε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} .

iv) Η ταυτοτική συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Πράγματι, από το [Παράδειγμα 4.1.6 \(iii\)](#) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Από την [\(4.5.1\)](#) συμπεραίνουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} .

v) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + 5}{x - 3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 1 & , \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

Πράγματι, αν $x \neq 3$ ένα οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού \mathbb{R} της f , τότε από τις ιδιότητες ορίων έχουμε

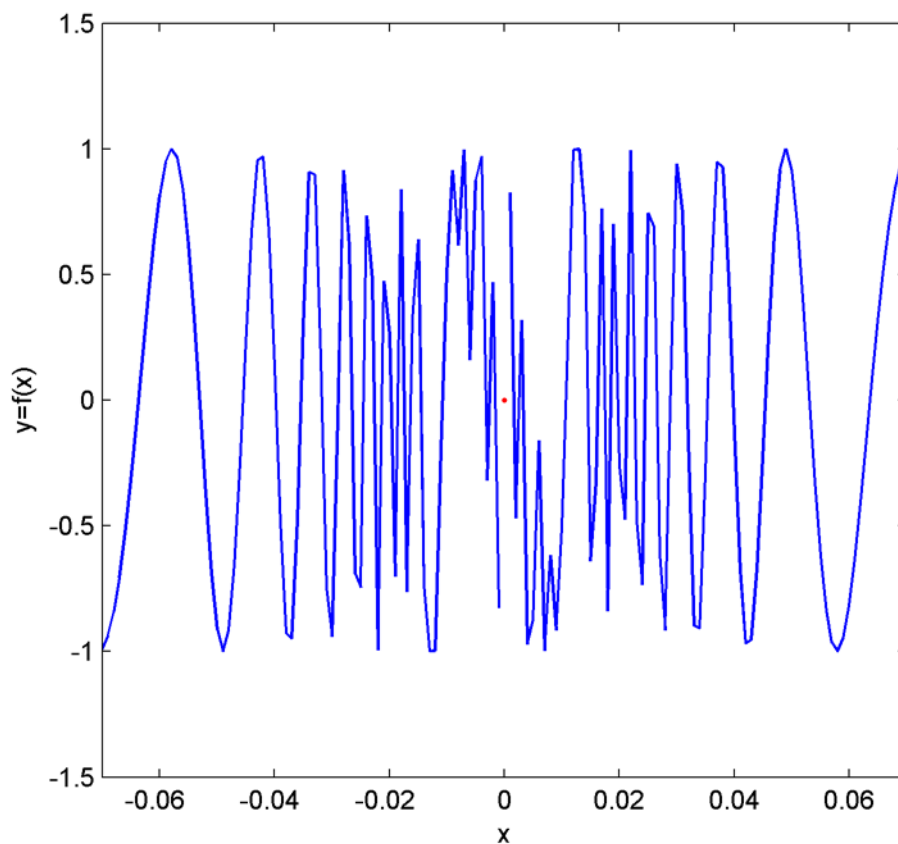
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+4) = 7 \neq 1 = f(3).$$

Επομένως, η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 3$, (βλέπε, [Ορισμό 4.5.1](#)).

vi) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Στο [Σχήμα 4.7](#), το μέρος της καμπύλης με μπλε χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και μία κόκκινη κουκίδα αντιστοιχεί στο σημείο $(0,0)$ της συνάρτησης. Προφανώς, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι συνεχή στο $x_0 = 0$.



Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.5.2 (vi)

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ και είναι αριθμός. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικούς όρους

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{και} \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

για τις οποίες ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, (γιατί;). Οι αντίστοιχες ακολουθίες των εικόνων $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ και $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ έχουν διαφορετικά όρια, επειδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

άρα, το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει, (βλέπε, [Πρόταση 4.1.8](#) και [Παρατήρηση 4.1.9 \(iii\)](#)). Επειδή το όριο δεν υπάρχει, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, (βλέπε, [Ορισμό 4.5.1](#)). \diamond

Παρατηρήσεις 4.5.3.

i) Η συνέχεια μίας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αναφέρεται σε σημεία x_0 του πεδίου ορισμού A . Αν το A είναι ένα διάστημα του \mathbb{R} και $x_0 \in A$, τότε το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A , (βλέπε, [Ορισμό 4.1.1](#)). Αν το x_0 είναι απομονωμένο σημείο του A , τότε δεν είναι σημείο συσσώρευσης, (βλέπε, [Ορισμό 4.1.1](#)), επειδή υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A = \{x_0\}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta < \delta_1$, τέτοιο ώστε για $x \in A$ να ισχύει

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο απομονωμένο σημείο x_0 .

Για παράδειγμα, αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $A = (-2, 3] \cup \{5, 7\}$, τα σημεία 5 και 7 είναι απομονωμένα σημεία του A , συνεπώς, η f είναι συνεχής σε καθένα από αυτά.

Επομένως, από εδώ και στο εξής, δε θα μας ενδιαφέρουν τα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού, εφόσον είναι δεδομένη η συνέχεια σε αυτά, παρά μόνο η μελέτη στα σημεία συσσώρευσης, που ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

ii) Η γεωμετρική ερμηνεία μίας **συνεχούς** συνάρτησης f είναι ότι, η γραφική παράστασή της είναι μία συνεχής γραμμή. Και αυτό επειδή, οι εικόνες $f(x)$ μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο όσο μεταβάλλεται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x στο πεδίο ορισμού της. Έτσι, το γράφημα της f δεν παρουσιάζει καμία «διακοπή» όσο το x κινείται μέσα στο πεδίο ορισμού της f . Ακόμη, αν το πεδίο ορισμού μίας συνεχούς συνάρτησης περιέχει και απομονωμένα σημεία, τότε η γεωμετρική ερμηνεία εξακολουθεί να είναι μία συνεχής γραμμή, μαζί με όλα τα διακεκριμένα σημεία $(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 ένα απομονωμένο σημείο, (βλέπε, [Παράδειγμα 4.5.2 \(vi\)](#), [Σχήμα 4.7](#)).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι **ασυνεχής** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η γραφική της παράσταση παρουσιάζει διακοπή στο σημείο αυτό (ή άλμα). Στο [Παράδειγμα 4.4.3 \(i\)](#), η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 3$ και το γράφημα της παρουσιάζει άλμα στο $x_0 = 3$, (βλέπε, [Σχήμα 4.4](#)).

Στις δύο επόμενες προτάσεις μελετώνται οι σημαντικότερες ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.5.4. Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A \cap B \neq \emptyset$. Τότε

i) $f + g$ και $f \cdot g$ και $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο x_0

ii) Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Οι συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$ και $c \cdot f$ είναι συνεχείς στο $A \cap B$ και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $(A \cap B) - \{x \in B : g(x) = 0\}$.

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι η απόδειξη είναι συνέπεια της [Πρότασης 4.2.1](#) και του [Ορισμού 4.5.1](#) και αφήνεται ως άσκηση. ◇◇

Παραδείγματα 4.5.5.

i) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Πράγματι, συνδυάζοντας την [\(4.2.2\)](#) του Παραδείγματος 4.2.2 (ii) με την [\(4.5.1\)](#) του Ορισμού 4.5.1 συμπεραίνουμε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ii) Έστω $P(x)$ και $Q(x)$ πολύνομα του x . Τότε η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής σε κάθε

σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, το οποίο δεν αποτελεί ρίζα του $Q(x)$. Δηλαδή, η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο Παράδειγμα (i) και την Πρόταση 4.5.4 (ii).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 - 5}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

iii) Οι συναρτήσεις $\tan(x)$ και $\cot(x)$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $\tan(x)$ και $\cot(x)$ είναι πηλίκα των συνεχών συναρτήσεων $\sin(x)$, $\cos(x)$, (βλέπε, Παραδείγματα 4.5.2 (i) και (ii), αντίστοιχα), επομένως, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους, (βλέπε, Πρόταση 4.5.4 (ii)).

iv) Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$ είναι συνεχείς στο \mathbb{R} και η $\coth(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη [Πρόταση 4.5.4](#) και από τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων (βλέπε, Ορισμούς 1.6.1, 1.6.5, 1.6.9 και 1.6.13), επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. ◇◇

Πρόταση 4.5.6. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$. Τότε :

i) Η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0 .

ii) Η συνάρτηση $\sqrt[n]{f}$ είναι συνεχής στο x_0 , όταν $f(x_0) \geq 0$.

Απόδειξη:

i) Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την [Πρόταση 4.2.4](#) και την [\(4.5.1\)](#) του Ορισμού 4.5.1.

ii) Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την [Εφαρμογή 4.2.3](#) και την [\(4.5.1\)](#) του Ορισμού 4.5.1. ◇◇

Παράδειγμα 4.5.7. Οι συναρτήσεις $|x^2 - 5|$, \sqrt{x} και $\sqrt[3]{x^2 - 5x}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x$ και $h(x) = x^2 - 5x$, σύμφωνα με το [Παράδειγμα 4.5.5 \(i\)](#) οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο \mathbb{R} ως πολυωνυμικές, οπότε και οι περιορισμοί τους σε υποσύνολα του \mathbb{R} είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επομένως, η συνάρτηση $|x^2 - 5|$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , επειδή $f(x) = x^2 - 5$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο \mathbb{R} , (βλέπε, [Πρόταση 4.5.6 \(i\)](#)).

Η συνάρτηση \sqrt{x} είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, επειδή $g(x) = x$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και ο περιορισμός της στο $[0, +\infty)$ είναι συνεχής, (βλέπε, [Πρόταση 4.5.6 \(ii\)](#)).

Η συνάρτηση $\sqrt[3]{x^2 - 5x}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$, επειδή $h(x) = x^2 - 5x$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και ο περιορισμός της στο $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$ είναι συνεχής, (βλέπε, [Πρόταση 4.5.6 \(ii\)](#)). ◇◇

Ορισμός 4.5.8. Έστω $A \subset \mathbb{R}$, μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

i) Αν το σημείο $x_0 \in A$ είναι δεξιό άκρο του διαστήματος A και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, τότε λέμε ότι η f είναι **συνεχής από αριστερά** στο x_0 .

ii) Αν το σημείο $x_0 \in A$ είναι αριστερό άκρο του διαστήματος A και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, τότε λέμε ότι η f είναι **συνεχής από δεξιά** στο x_0 .

Ο Ορισμός 4.5.8 συνδέει την έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο με την «πλευρική συνέχεια» της συνάρτησης γύρω από αυτό. Από την [\(4.5.1\)](#) η έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο εξαρτάται αρχικά από την ύπαρξη της οριακής τιμής της συνάρτησης σε αυτό, η οποία συνδέεται με την ύπαρξη και την τιμή των «πλευρικών ορίων» της συνάρτησης γύρω από το σημείο, (βλέπε, τη σχέση [\(4.4.3\)](#) στην Πρόταση 4.4.4). Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, που εξασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και συνδέεται με την πλευρική συνέχεια, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 4.5.8. Η απόδειξη της πρότασης, που ακολουθεί, είναι ανάλογη της [Πρότασης 4.4.4](#), απαιτεί την χρήση ακολουθιών και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 4.5.9. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν είναι συνεχής από αριστερά και συνεχής από δεξιά στο x_0 .

Παράδειγμα 4.5.10.

i) Η συνάρτηση (step function)

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}, \text{ για κάθε } c \in \mathbb{R},$$

είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0 = 0$, ενώ **δεν** είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0 = 0$.

Προφανώς ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} c = c = f(0),$$

συνεπώς, η f είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0 = 0$, (βλέπε, [Ορισμός 4.5.8 \(ii\)](#)).

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \neq c = f(0),$$

δεν επαληθεύεται ο [Ορισμός 4.5.8 \(i\)](#). Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0 = 0$.

ii) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 3 \\ -1, & \text{αν } x = -2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-1, 3] \cup \{-2\}$. Για κάθε $x \in (-1, 3)$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^2$ και ως πολυωνυμική είναι συνεχής. Στο σημείο $x = -1$ η f είναι συνεχής από δεξιά (μόνο), επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 = f(-1).$$

Η f είναι συνεχής στο απομονωμένο σημείο $x = -2$, (βλέπε, [Παρατήρηση 4.5.3 \(i\)](#)).

iii) Να εντοπισθούν τα διαστήματα του \mathbb{R} , όπου η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 2 \\ 1, & \text{αν } x = 2 \\ x - 2, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. Η γραμμική συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής, για κάθε $x < 2$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \neq 1 = f(2),$$

σύμφωνα με τον [Ορισμός 4.5.8 \(i\)](#), η f δεν είναι συνεχής από αριστερά στο $x = 2$. Το $x = 2$ αποτελεί σημείο συνέχειας μόνο από δεξιά.

Η γραμμική συνάρτηση $f(x) = x - 2$ είναι συνεχής, για κάθε $x > 3$. Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 2 = 1 = f(3),$$

η f είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 3$, (βλέπε, [Ορισμός 4.5.8 \(i\)](#)).

iv) Να εξετασθεί η συνέχεια της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} .

Για κάθε $x < 0$, η συνάρτηση $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για

κάθε $x > 0$, η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων,

(σημειώνεται ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$). Στο σημείο $x_0 = 0$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης, έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

Επομένως, η f είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0 = 0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1 \neq f(0),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η f **δεν** είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0 = 0$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

v) Να υπολογισθούν οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων a, b , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5, & \text{αν } x < 3 \\ 8a, & \text{αν } x = 3 \\ x^2 + (bx/3), & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο \mathbb{R} .

Για κάθε $x < 3$, η συνάρτηση $f(x) = ax + 5$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x > 3$, η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{b}{3}x$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή το σημείο $x = 3$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής σε αυτό, το οποίο είναι ισοδύναμο με τη συνέχεια της συνάρτησης από αριστερά και τη συνέχεια από δεξιά στο $x = 3$, (βλέπε, [Πρόταση 4.5.9](#)).

Σύμφωνα με τον [Ορισμός 4.5.8 \(i\)](#) πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 5) = 8a \Leftrightarrow 3a + 5 = 8a \Leftrightarrow a = 1$$

και σύμφωνα με τον [Ορισμός 4.5.8 \(ii\)](#) πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(x^2 + \frac{b}{3}x\right) = 8a = 8 \Leftrightarrow 9 + \frac{b}{3} \cdot 3 = 8 \Leftrightarrow b = -1$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, \mathbb{R} , όταν $a = 1$ και $b = -1$.

◇◇

Στα επόμενα, αναφέρουμε κάποια σημαντικά θεωρήματα, τα οποία αποτελούν εφαρμογές της συνέχειας μίας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα, ξεκινώντας με το θεώρημα Bolzano, την απόδειξη του ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει σε οποιοδήποτε σύγγραμμα της βιβλιογραφίας, ([Παντελίδης, 2008](#); [Ρασιτιάς, 2014](#)).

Θεώρημα 4.5.11 (Bolzano). Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις 4.5.12.

i) Σύμφωνα με το [Θεώρημα 4.5.11](#), μία συνεχής συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, με την προϋπόθεση ότι f έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα a και b , έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_0 μεταξύ των a

και b , (η ρίζα δεν είναι κάποιο από τα άκρα a , b). Το Θεώρημα 4.5.11 δεν δίνει πληροφορίες για το ποια είναι η ρίζα αυτή, διαπιστώνει μόνο την ύπαρξή της και εντοπίζει το διάστημα (a, b) μέσα στο οποίο αυτή ανήκει.

- ii) Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 4.5.11 είναι ότι : μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, στο οποίο οι τιμές $f(a)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημες, έχει γραφική παράσταση, η οποία τέμνει τον άξονα $x'Ox$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, το x_0 , το οποίο βρίσκεται μεταξύ των a και b , (βλέπε, [Σχήμα 4.8](#)).

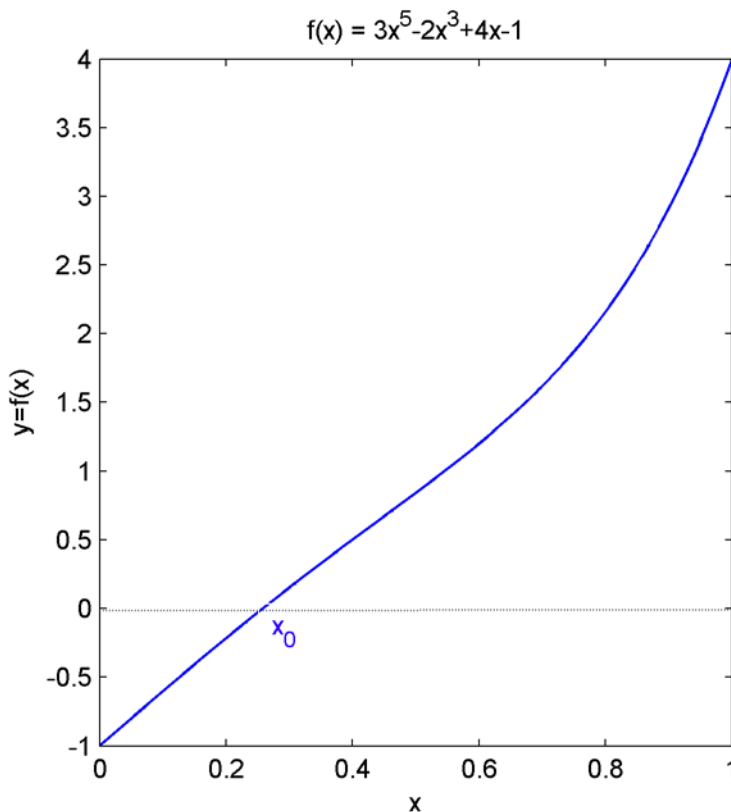
Παραδείγματα 4.5.13

- i) Το πολυώνυμο $3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Πράγματι, θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$, η οποία ως πολυωνυμική είναι συνεχής σε ολόκληρο το \mathbb{R} , επομένως και στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$. Εύκολα, διαπιστώνουμε ότι $f(a) \cdot f(b) = f(0) \cdot f(1) = (-1) \cdot 4 = -4 < 0$, οπότε σύμφωνα με το [Θεώρημα 4.5.11](#), η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, τέτοια ώστε $0 < x_0 < 1$.

Συνεπώς, $3x_0^5 - 2x_0^3 + 4x_0 - 1 = 0$, με $x_0 \in (0, 1)$.

Στο [Σχήμα 4.8](#) με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(0, 1)$, η ρίζα x_0 εντοπίζεται στο διάστημα $(0.2, 0.3)$.



Σχήμα 4.8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$

- ii) Η εξίσωση $\cos(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-5, 5)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos(x) - x$, η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} , συνεπώς είναι συνεχής και στο κλειστό διάστημα $[-5, 5]$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $[-\pi, \pi] \subset [-5, 5]$. Επιπλέον,

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) - (-\pi) = 1 + \pi > 0, \text{ και } f(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi < 0,$$

από όπου $f(\pi) \cdot f(-\pi) < 0$. Επομένως, επαληθεύονται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in [-\pi, \pi] \subset [-5, 5]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, (βλέπε, [Θεώρημα 4.5.11](#)). Άρα, η εξίσωση $\cos(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-5, 5)$. \diamond

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 4.5.11 διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.5.14. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(a) \neq f(b)$. Τότε, για κάθε τιμή λ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (a, b)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) = \lambda$.

Απόδειξη: Επειδή $f(a) \neq f(b)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $f(a) < f(b)$, οπότε ισχύει $f(a) < \lambda < f(b)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = f(x) - \lambda$, για κάθε $x \in [a, b]$. Η g επαληθεύει τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, (βλέπε, [Θεώρημα 4.5.11](#)), επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, και η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον για τη g ισχύει $g(a) \cdot g(b) = (f(a) - \lambda)(f(b) - \lambda) < 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $x_0 \in (a, b)$, τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο, $g(x_0) = f(x_0) - \lambda = 0$. Άρα, $f(x_0) = \lambda$. \diamond

Παρατηρήσεις 4.5.15.

- i) Η [Πρόταση 4.5.14](#) είναι γνωστή και ως «Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής» των συνεχών συναρτήσεων, επειδή για οποιαδήποτε τιμή λ , μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $k \in (a, b)$ του οποίου η εικόνα ισούται με λ .
- ii) Η γεωμετρική ερμηνεία της [Πρότασης 4.5.14](#) είναι ότι: αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y = \lambda$, όπου λ οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(k, \lambda)$.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ένα Θεώρημα χρήσιμο στον υπολογισμό της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής μίας συνεχούς συνάρτησης, που είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα, η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση και μπορεί να αναζητηθεί ([Ρασσιάς, 2014; Παντελίδης, 2008](#)).

Θεώρημα 4.5.16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) Η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.
- ii) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2 \in [a, b]$, τέτοιοι ώστε

$$f(x_1) = \min f = m, \text{ και } f(x_2) = \max f = M.$$

- iii) $f([a, b]) = [m, M]$.

Παρατήρηση 4.5.17.

Σύμφωνα με το [Θεώρημα 4.5.16](#), αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε το σύνολο $f([a, b]) = \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ των εικόνων της f είναι φραγμένο, υπάρχουν, δηλαδή, δύο πραγματικοί αριθμοί m και M , τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a, b]$. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι μία καμπύλη γραμμή, η οποία περικλείεται μεταξύ των οριζόντιων ευθειών $y = m$ και $y = M$, με τις οποίες εφάπτεται σε ένα τουλάχιστον σημείο. Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f τέμνει και κάθε οριζόντια ευθεία $y = \lambda$, όπου $m \leq \lambda \leq M$, (βλέπε, [Πρόταση 4.5.14](#)).

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων και η απόδειξή της προκύπτει από την [Πρόταση 4.2.9](#) και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 4.5.18. Έστω $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g:B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$.

Γενικότερα, αν η f είναι συνεχής στο A , και η g είναι συνεχής στο $f(A)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο A .

Παραδείγματα 4.5.19.

Έστω $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε:

- i) Οι συναρτήσεις $\sin(f(x))$, $\cos(f(x))$, $\tan(f(x))$ και $\cot(f(x))$ είναι συνεχείς στο A , ως συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων, (βλέπε, [Παραδείγματα 4.5.2 \(i\)](#) και [\(ii\)](#), και [Παράδειγμα 4.5.5 \(iii\)](#)).
- ii) Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh(f(x))$, $\cosh(f(x))$, $\tanh(f(x))$ και $\coth(f(x))$ είναι συνεχείς στο A , ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- iii) Οι εκθετικές συναρτήσεις, $e^{f(x)}$, $a^{f(x)}$, με $a > 0$, είναι συνεχείς στο A .
- iv) Η λογαριθμική συνάρτηση, $\log_a(f(x))$, με $a > 0$, και $f(x) > 0$, είναι συνεχής στο A .
- v) Η συνάρτηση $\sqrt{f(x)}$, όπου $f(x) \geq 0$, $x \in A$, είναι συνεχής στο A . ◊◊

Πρόταση 4.5.20. Έστω A ένα διάστημα του \mathbb{R} και $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Τότε, η $f^{-1}:f(A) \rightarrow A$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Παραδείγματα 4.5.21.

- i) Σύμφωνα με τους Ορισμούς και τις Παρατηρήσεις στην Ενότητα 1.5, καθώς και τα [Παραδείγματα 4.5.2 \(i\)](#) και [\(ii\)](#), [Παράδειγμα 4.5.5 \(iii\)](#) οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin^{-1}(x), \cos^{-1}(x), \tan^{-1}(x) \text{ και } \cot^{-1}(x)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους.

- ii) Σύμφωνα με τους Ορισμούς και τις Παρατηρήσεις στην Ενότητα 1.6, καθώς και το [Παράδειγμα 4.5.5 \(iv\)](#) οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh^{-1}(x), \cosh^{-1}(x), \tanh^{-1}(x), \text{ και } \coth^{-1}(x)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους.

iii) Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, ως αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης e^x , (βλέπε, Ενότητα 1.4).

iv) Η συνάρτηση $\ln(x^2 + 1)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \ln x$.

vi) Η συνάρτηση $\ln(1 - x^2)$ είναι συνεχής στο $(-1, 1)$, (γιατί). ◇◇

Παρατηρήσεις 4.5.22.

i) Στην Πρόταση 4.5.20 αν το A είναι ένα κλειστό διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A) = [m, M]$, όπου $m = \min f$ και $M = \max f$ στο διάστημα A .

ii) Το συμπέρασμα της Πρότασης 4.5.20 εξακολουθεί να ισχύει, όταν η υπόθεση «η f είναι αμφιμονοσήμαντη» αντικατασταθεί με την υπόθεση «η f είναι γνήσια μονότονη» (δηλαδή, γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα στο διάστημα A).

Επιπλέον, σύμφωνα με την [Πρόταση 4.5.20](#), αν η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής, τότε η f^{-1} είναι συνεχής, και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη συνάρτηση f , (βλέπε, Πρόταση 1.3.6).

4.6. Όριο πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `limit` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης f της ανεξάρτητης μεταβλητής x , η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχουμε:

Για τον υπολογισμό του ορίου η εντολή `limit` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση f
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x
- το σημείο x_0 ή άπειρο (`inf`), όπου τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή
Αν παραληφθεί, τότε το όριο υπολογίζεται στο $x_0 = 0$.
- το είδος του ορίου, με πλευρικά όρια από τις δύο πλευρές (δεν συμπληρώνεται τίποτα),
πλευρικό όριο από δεξιά σημειώνεται `right`, ή πλευρικό όριο από αριστερά σημειώνεται `left`.

Σύνταξη εντολής: `limit (f, x, x0, 'δηλώνεται το είδος του ορίου')`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit (f,x,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l=1
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit (f,x,0)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= NaN
```

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το όριο.

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
```

```
l=limit (f,x,0, 'right')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= Inf    δηλαδή το όριο είναι +∞
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x  
f = 1/x;  
l=limit (f,x,0, 'left')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= -Inf   δηλαδή το όριο είναι -∞
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x  
f = 1/x;  
l=limit (f,x,inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= 0
```

◇◇

4.7. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

4.7.1 Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \sin(x)}{x^2 - 3x + 1}$

Υπόδειξη: Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x^2 μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση: Το όριο είναι ίσο με 1.

4.7.2 Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, πολλαπλασιάστε με τη συζυγή παράσταση.

Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0.

4.7.3 Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cos(x) \right) = 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο παρεμβολής. Συμβουλευτείτε την απόδειξη στο [Παράδειγμα 4.1.10](#).

4.7.4 Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cos(x) \right) = 0$.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε την απόδειξη στο [Παράδειγμα 4.3.5 \(iii\)](#).

4.7.5 Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

Υπόδειξη: Απλοποιήστε τη ρίζα, παραγοντοποιήστε τον παρονομαστή και απλοποιήστε την παράσταση. Υπολογίστε πλευρικά όρια, είναι διαφορετικά.

Απάντηση: Το όριο δεν υπάρχει.

4.7.6 Να εξετάσετε, αν συγκλίνει το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(2x)}{x^3}$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $2x$ μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση: Δεν συγκλίνει, το όριο είναι $-\infty$.

4.7.7 Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - x - 2}{2x^2}$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, πολλαπλασιάστε με τη συζυγή παράσταση.

Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με $-\frac{1}{8}$.

4.7.8 Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 4.5.10](#).

Απάντηση: Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = 0$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). *Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). *Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). *Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυσούλλης, Χ. Γ. (1985). *Ολοκληρωτικός λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυσούλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. ed. Vol. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση Ι* (1η έκδοση 2014 ed.). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srinak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση ed.). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση Ι*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση ed.). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- GNU Octave. from <http://www.gnu.org/software/octave>
- Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>
- Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.
- Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>
- Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

- 4.1.** Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b$, όπου $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$.
- 4.2.** Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η f έχει όριο τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$, όταν x τείνει στο x_0 , αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του $A - \{x_0\}$, που συγκλίνει στο x_0 , η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ των εικόνων της f συγκλίνει στον ℓ .
Υπόδειξη: Πρόκειται για την Πρόταση 4.1.8. Για το αντίστροφο, να υποθέσετε ότι το όριο της f στο x_0 δεν ισούται με ℓ , δηλαδή, ότι υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ με $|x - x_0| < \delta$, ισχύει $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_1$ θεωρώντας $\delta = \frac{1}{n}$.
- 4.3.** Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \cap B \neq \emptyset$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του $A \cap B$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:
- i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
 - ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
 - iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, όταν $b \neq 0$
- Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 4.1.8.
- 4.4.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$, όπου x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f .
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε $||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell|$ και τον Ορισμό 4.1.3.
- 4.5.** Έστω οι συναρτήσεις f, g , και h με κοινό πεδίο ορισμού το A , και x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Αν ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, για κάθε $x \in A$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.
Υπόδειξη: Από τον Ορισμό 4.1.3 για τις συναρτήσεις g και h προκύπτει $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$, όταν $|x - x_0| < \delta_1$, για κάποιο $\delta_1 > 0$, και $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$, όταν $|x - x_0| < \delta_2$, για κάποιο $\delta_2 > 0$.
Να θεωρήσετε $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και να επαληθεύσετε τον Ορισμό 4.1.3.
- 4.6.** Έστω $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, με x_0 σημείο συσσώρευσης του A . Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot f(x)) = 0$.
Υπόδειξη: Επειδή η f είναι φραγμένη, θεωρήστε ότι είναι και απόλυτα φραγμένη, οπότε υπάρχει $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in A$.
Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, για $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$, ώστε $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, για κάθε $x \in A$, με $|x - x_0| < \delta_1$.
Να επαληθεύσετε τον Ορισμό 4.1.3 για τη συνάρτηση $g(x) \cdot f(x)$.
- 4.7.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.2 (iii).
- 4.8.** Έστω $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A , με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ και $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in A$, (ή σε ένα διάστημα $I \subseteq A$, όπου $x_0 \in I$).

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.2 (vi).

4.9. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στην Πρόταση 4.2.1 (iv).

4.10. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 7} - x) & \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^4 - 3x + 2} & \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 5x - 2}{x^3 + 3x^2 - 2x + 1} \\ \text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) & \text{vi)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) \end{array}$$

4.11. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 0 \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cos(x) = 0$$

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.5 (iii).

4.12. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{6-x}}{x^2-4} & \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} \right) \\ \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7-1}{x^{10}-1} & \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} \end{array}$$

Υπόδειξη: Για το (iv) να θέσετε $x = y^{12}$.

4.13. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos(x)} & \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \\ \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)} & \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)} \\ \text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{x^2} & \text{vi)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \end{array}$$

Υπόδειξη: Στο (i) να θέσετε $y = x - \frac{\pi}{6}$.

Στο (ii) να πολλαπλασιάσετε με $(1 + \cos(x))$.

Στο (iv) και (v) να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

4.14. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x) + x) = 3$, και $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x) - x) = 5$, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

4.15. Να εξετάσετε τη συνέχεια των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\text{i)} \quad f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \\ 2x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad \text{ii)} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 + \sin \left(\frac{1}{x-1} \right), & \text{αν } x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \\ x \cos \left(\frac{1}{x-1} \right), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{iii) } f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \text{iv) } f_4(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$

4.16. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση (Dirichlet)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάποια σημεία του \mathbb{R} .

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον Ορισμό 4.5.1, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, η f δεν είναι συνεχής.

4.17. Για ποιες τιμές του a οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3-ax^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad \text{ii) } g(x) = \begin{cases} \cos(x) + 3a - 3, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \sin(x) + a^2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

είναι συνεχείς στο \mathbb{R} .

4.18. Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $(x+1)2^{x+1} = 1$ έχει μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

4.19. Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^6+1}{x-b} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, b) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης

...Οι όροι άπειρο και απειροστό σημαίνουν ποσότητες που κάποιος μπορεί να θεωρήσει όσο μεγάλες ή όσο μικρές επιθυμεί, έτσι τα σφάλματα που πραγματοποιούνται είναι μικρότερα από κάθε αριθμό που μπορούμε να θεωρήσουμε ώστε δεν υπάρχει σφάλμα, τα απειροστά δεν είναι πραγματικοί αλλά πλασματικοί αριθμοί, που ωστόσο διέπονται από τους ίδιους νόμους με τους πραγματικούς....

περιοδικό Acta 1689

...Είμαι τόσο πολύ υπέρ του πραγματικού απείρου ώστε, αντί να δεχτώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης είναι, δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων.

επιστολή του Leibniz προς S. Foucher δημοσιεύθηκε στο Journal des Savants

...Τα διαφορικά είναι όπως οι κόκκοι της άμμου σε σχέση με τη γη, και όπως η γη σε σχέση με την απόσταση δύο απλανών αστέρων...

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι κανόνες παραγωγίσις των πραγματικών συναρτήσεων και αποδεικνύονται οι παράγωγοι των σημαντικότερων πραγματικών συναρτήσεων. Δίνεται ο ορισμός του διαφορικού μίας πραγματικής συνάρτησης και παρουσιάζονται γραμμικές προσεγγίσεις ορισμένων συναρτήσεων μέσα από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές.

Προαπαιτούμενη γνώση

Όρια πραγματικών συναρτήσεων, συνέχεια συναρτήσεων.

5.1 Έννοια παραγώγου

Ορισμός 5.1.1. Έστω μία συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$.

Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** (differentiable) στο x_0 , αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1.1)$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Η οριακή τιμή ονομάζεται **παράγωγος** της συνάρτησης **στο** x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Παράδειγμα 5.1.2

Έστω η συνάρτηση $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } -3 < x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$

Είναι συνεχής; Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και να ορίσετε την παράγωγο της f , όπου η παράγωγος υπάρχει. Να γίνει η γραφική της παράσταση της f .

Στο $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, επειδή σε κάθε διάστημα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο στο $x_0 = 0$ τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο $x_0 = 0$ είναι ίσα, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Άρα, η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Από την (5.1.1) και $f(0) = 0$, έχουμε:

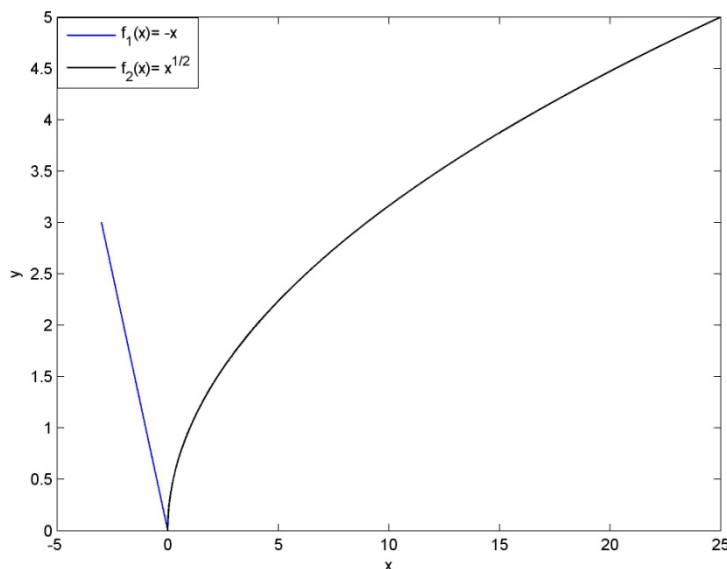
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = +\infty \quad (5.1.2)$$

Από τις διαφορετικές τιμές στην (5.1.2) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) από τον Πίνακα 5.2 υπολογίζεται ότι η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -3 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

Στο Σχήμα 5.1 διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, επειδή στο σημείο αυτό δεν ορίζεται εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη.



Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της f του Παραδείγματος 5.1.2

◇◇

Ορισμός 5.1.3. Έστω μία συνάρτηση f , το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f και $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Η **εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$** είναι η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_0, f(x_0))$ με κλίση $f'(x_0)$, δηλαδή η **εξίσωση της ευθείας** είναι :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (5.1.3)$$

Παράδειγμα 5.1.4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x - 4, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, και να βρείτε την παράγωγο όπου υπάρχει. Ορίζετε η εφαπτομένη στο $A(2, f(2))$; Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της f και της εφαπτομένης ευθείας, αν υπάρχει.

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

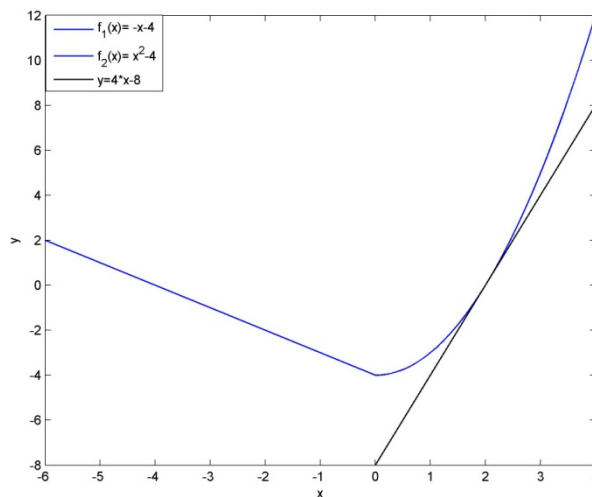
Εξετάζουμε την παράγωγο αν υπάρχει στο $x_0 = 0$. Από την (5.1.1) και $f(0) = 0^2 - 4 = -4$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 4 - (-4)}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4 - (-4)}{x} = 0 \quad (5.1.4)$$

Από τις διαφορετικές τιμές στην (5.1.4) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Στο Σχήμα 5.2 διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, επειδή στο σημείο αυτό δεν ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) από τον Πίνακα 5.2 υπολογίζεται ότι η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 2x, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Η παράγωγος στο $x_1 = 2$ ορίζεται από την (5.1.5) και είναι $f'(2) = 4$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την (5.1.3) και είναι $y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$.



Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση της f και της εφαπτόμενης ευθείας του Παραδείγματος 5.1.4

◇◇

5.1. Πίνακας με κανόνες παραγώγισης

1.	$(c \cdot f(x))' = cf'(x)$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$	$a, b \in \mathbb{R}$
3.	$(f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'$	
4.	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$	
5.	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'}{g^2(x)}$	
6.	$((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
7.	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	

5.2. Πίνακας παραγώγισης στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	Παράγωγος $f'(x)$	Πεδίο ορισμού
1.	c	$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$x^n, n \in \mathbb{R},$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
3.	e^x	$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
5.	$a^x, a > 0, a \neq 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\sin(x)$	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\tan(x)$	$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
9.	$\cot(x)$	$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
10.	$\sec(x)$	$(\sec(x))' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
11.	$\operatorname{co sec}(x)$	$(\operatorname{co sec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
12.	$\sin^{-1}(x)$	$(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
13.	$\cos^{-1}(x)$	$(\cos^{-1}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
14.	$\tan^{-1}(x)$	$(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\cot^{-1}(x)$	$(\cot^{-1}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\sinh(x)$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\cosh(x)$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
18.	$\tanh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$
19.	$\operatorname{coth}(x)$	$(\operatorname{coth}(x))' = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{(\sinh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$

20.	$\sinh^{-1}(x)$	$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
21.	$\cosh^{-1}(x)$	$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
22.	$\tanh^{-1}(x)$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$

5.2. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `diff` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων οποιασδήποτε τάξης μίας συνάρτησης f με ανεξάρτητη μεταβλητή x , η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές `syms` και `diff` είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για τον υπολογισμό της παραγώγου η εντολή `diff` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση f
 - την ανεξάρτητη μεταβλητή x
 - την τάξη της παραγώγου n .
- Αν δεν σημειωθεί τιμή για το n , τότε υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος.
Αν $n = 0$, τότε υπολογίζεται η συνάρτηση f

Σύνταξη εντολής: `diff(f, x, n)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} - 3x^3e^x$ γράφουμε:

```
syms x
f = exp(2*x)-3*x^3*exp(x);
diff(f,x,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
2*exp(2*x) - 9*x^2*exp(x) - 3*x^3*exp(x)
```

Για τον υπολογισμό της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \sin(2x) - x^2 \cos(x)$ γράφουμε:

```
syms x
f = sin(2*x)-x^2*cos(x);
[f1]=diff(f,x,1)
[f2]=diff(f,x,2)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
f1 = 2*cos(2*x) + x^2*sin(x) - 2*x*cos(x)
f2 = x^2*cos(x) - 2*cos(x) - 4*sin(2*x) + 4*x*sin(x)
```

5.3. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

5.3.1 Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $f(x) = xe^{-x^2}$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κανόνα γινομένου και σύνθετης συνάρτησης από τον Πίνακα 5.1.

Απάντηση: Η παράγωγος είναι $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφάντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυσφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>
- Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>
- Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.
- Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.
- Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>
- Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

- 5.1. Να αποδειχθούν οι κανόνες παραγωγίσης, που παρουσιάζονται στον [Πίνακα 5.1.](#), χρησιμοποιώντας τον [Ορισμό 5.1.1.](#)
- 5.2. Να αποδειχθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στον [Πίνακα 5.2.](#) χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των συναρτήσεων που αναφέρονται και τους κανόνες παραγωγίσης από τον [Πίνακα 5.1.](#)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεμελιώδη θεωρήματα διαφορικού λογισμού και εφαρμογές

...Αυτοί που θα δουν καθαρά την αλήθεια της Γεωμετρίας των αδιαιρέτων, θα μπορέσουν να θαυμάσουν το μεγαλείο και τη δύναμη της φύσης σ' αυτήν τη διπλή απειρία που μας περιτριγυρίζει από παντού, και να μάθουν από αυτή τη θαυμαστή θεώρηση πώς να γνωρίσουν τον εαυτό τους, βλέποντάς τον τοποθετημένο ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα κίνησης, ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα χρόνου. Έτσι θα μπορέσουν να μάθουν να αξιολογούν δίκαια τον εαυτό τους και να σχηματίζουν συλλογισμούς, που να αξίζουν περισσότερο από όλη την υπόλοιπη Γεωμετρία.

Blaise Pascal (1623 - 1662)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεμελιώδη θεωρήματα διαφορικού λογισμού και εφαρμογές

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, θεώρημα Fermat, Rolle, Μέσης Τιμής, τα οποία βρίσκουν εφαρμογές στη μελέτη μίας συνάρτησης κατά τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έλεγχος-εξέταση μονοτονίας και κυρτότητας, προσδιορισμός τοπικών ακροτάτων και σημείων καμψής μίας συνάρτησης, ύπαρξη ασύμπτωτων ευθειών στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, εντοπισμός ριζών μίας εξίσωσης είναι ορισμένες από τις εφαρμογές των παραπάνω θεωρημάτων. Επιπλέον, μελετώνται απροσδιόριστες μορφές.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κανόνες παραγωγίσισης μίας συνάρτησης, παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων, όρια μίας πραγματικής συνάρτησης, απροσδιόριστες μορφές ορίων, γραφικές παραστάσεις στοιχειωδών συναρτήσεων.

6.1. Θεωρήματα

Υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό μέγιστο** (αντ. τοπικό ελάχιστο), αν υπάρχει $x_0 \in A$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, (αντ. $f(x) \geq f(x_0)$), (βλέπε, Ορισμός 1.3.7).

Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα ονομάζονται τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Θεώρημα 6.1.1. (Θεώρημα Fermat) Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο τοπικού ακροτάτου $x_0 \in A$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του A . Τότε ισχύει,

$$f'(x_0) = 0.$$

Θεώρημα 6.1.2. (Θεώρημα Rolle) Έστω μία πραγματική συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) = f(b)$. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$

Θεώρημα 6.1.3. (Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω μία πραγματική συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

6.2. Συνέπειες Θεωρημάτων

Παράγωγος-ένα εργαλείο για τη μελέτη μίας πραγματικής συνάρτησης.

i) Υπολογισμός **μονοτονίας**: πρόσημο πρώτης παραγώγου

ii) **Ακρότατα**: εκεί όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, έστω x_0 , είναι *ακρότατο* (αποδεικνύεται με δύο τρόπους):

α) αν εκατέρωθεν του σημείου x_0 αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης, και

β) εξαρτάται το είδος του ακροτάτου από το πρόσημο της 2ης παραγώγου στο x_0 , αν $f''(x_0) > 0$, τότε x_0 είναι \min ή αν $f''(x_0) < 0$, τότε x_0 είναι \max .

iii) **Σύνολο τιμών**: υπολογίζεται από τις ακριανές τιμές, όπου υπήρχαν ακρότατα, και τις οριακές τιμές της συνάρτησης στα άπειρα (όταν αυτά ανήκουν στο π.ο. της συνάρτησης) ή εκατέρωθεν των τιμών όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται. Από όλες αυτές τις τιμές χρησιμοποιείται η ελάχιστη και η μέγιστη για να περιγραφεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iv) **Κοίλα-κυρτά**: εκεί όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος, έστω x_1 , είναι *σημείο καμπής* όταν εκατέρωθεν του σημείου x_1 αλλάζει το πρόσημο της 2ης παραγώγου της συνάρτησης. Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω όπου ισχύει $f''(x) > 0$ και στρέφει τα κοίλα κάτω όπου ισχύει $f''(x) < 0$.

v) **Ασύμπτωτες**: α) Αναζητούμε (αν υπάρχει) **οριζόντια ασύμπτωτη** όταν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ υπάρχει κάποιο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Τότε ελέγχουμε αν το $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) είναι

πραγματικός αριθμός. Αυτός ο αριθμός είναι η οριζόντια ασύμπτωτη.

β) Αναζητούμε (αν υπάρχει) **κατακόρυφη ασύμπτωτη** όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι της μορφής $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Όταν τα πλευρικά όρια καθώς $x \rightarrow x_0$ είναι $+\infty$ (ή $-\infty$), τότε $x = x_0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Αναζητούμε **πλάγια ασύμπτωτη** όταν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ υπάρχει κάποιο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \lambda x) = b \in \mathbb{R}$$

$$\text{(ή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = b \in \mathbb{R} \text{)}.$$

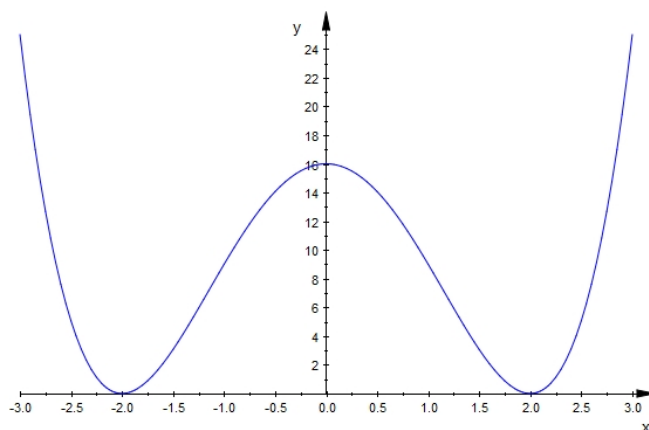
Τότε, η πλάγια ασύμπτωτη δίνεται $y = \lambda x + b$.

Παρατήρηση-Υπενθύμιση: Τέλος, ο κανόνας Hospital για να εφαρμοστεί θα πρέπει να υπάρχει οπωσδήποτε μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, και τότε εφαρμόζεται ο κανόνας όσες φορές χρειαστεί, συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παράδειγμα 6.1

Να υπολογισθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = (x-2)^2(x+2)^2$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.



Σχήμα 6.1: Γραφική παράσταση της $f(x) = (x-2)^2(x+2)^2$

◇◇

Παράδειγμα 6.2

Η συνάρτηση $h(t) = \frac{x-t}{1+t}$, για κάθε $t \in [0, x]$, είναι γνήσια φθίνουσα, επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης h είναι $[0, x]$, (βλέπε, Κεφάλαιο 8, Εφαρμογή 9.2.11, σύγκλιση διωνυμικής σειράς).

Παράδειγμα 6.3

Να διαπιστώσετε ότι είναι απροσδιόριστη μορφή 1^∞ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Δείτε και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα στην Πρόταση 2.6.6.

6.3. Προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `solve` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ριζών μίας εξίσωσης. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=0$, και στη συμβολική εντολή `syms` δηλώνονται όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην εξίσωση. Οι εντολές `syms` και `solve` είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για τον υπολογισμό των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ η εντολή `solve` δέχεται ως είσοδο, με τη σειρά που αναφέρονται τη συνέχεια:

- την εξίσωση
- τη μεταβλητή, η οποία θεωρείται ανεξάρτητη, δεν είναι παράμετρος

Σύνταξη εντολής: `solve('εξίσωση', 'x')`

Η έξοδος είναι διάνυσμα, που έχει τις ρίζες της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 1 = 0$, γράφουμε:

```
syms x
[x] = solve('x^3 - 1 = 0', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
x = 1
    - 1/2 - (3^(1/2)*i)/2
    - 1/2 + (3^(1/2)*i)/2 - (2*x)/(x^2 - 1)
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(x)
```

παίρνουμε τις ρίζες της εξίσωσης σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

```
1
- 1/2 - 31/2/2 i
- 1/2 + 31/2/2 i
```

Η εντολή χρειάζεται `solve` για να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

6.4. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

6.4.1 Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \sin(x)}{x^2 - 3x + 1}$

Υπόδειξη: Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x^2 μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση: Το όριο είναι ίσο με 1.

6.4.2 Ακολουθώντας τη διαδικασία που αναφέρεται στην Ενότητα 6.2 να γράψετε μία συνάρτηση (function) η οποία να έχει ως έξοδο τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (x-2)^2(x+2)^2$ του Παραδείγματος 6.1.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφάντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>
- Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>
- Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.
- Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.
- Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>
- Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

6.1 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι επόμενες συναρτήσεις:

i) $f(x) = |x^2 - 1|$

ii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

iii) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x - 2}$

iv) $f(x) = \frac{1 - e^x}{x}$

v) $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

vi) $f(x) = \frac{e^{2x}}{2e^{2x} + 5e^x + 2}$

vii) $f(x) = x - x \ln x$

viii) $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x^2}$

6.2 Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x+1))}{x^{1/2}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x})$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 2} + x}{3x + \cos(x)}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{1+x^4}$

vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 2} + 3x}{2x + 5 \sin(x)}$

vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$

viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2} \right)^x$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

6.3 Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{x-1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{x^5}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln \left(\frac{1}{x^2} \right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^k}{\sin(x)}, k = 1, 2, 1/2$

vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(2x)}{x^3}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{x^2}}{2 + 2x - 2 \cos(2x)}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$

x) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2 e^{-2x}}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

6.4 Να υπολογισθούν οι ασύμπτωτες των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 8}$

ii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

iii) $f(x) = \frac{1 - 3x^3}{x^2 - 1}$

iv) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + x}$

v) $f(x) = \frac{e^{2x}}{2e^{2x} + 5e^x + 2}$

vi) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης

... Ο λογισμός είναι λογικά εσφαλμένος, ωστόσο δίνει σωστά αποτελέσματα, γιατί τα λάθη αλληλοεξουδετερώνονται.

.... Αφού κατανοήσουμε το πνεύμα της απειροελάχιστης μεθόδου, και επαληθεύσουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της, είτε μέσω της γεωμετρικής μεθόδου των λόγων, είτε μέσω της αναλυτικής μεθόδου των συναρτήσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απείρως μικρές ποσότητες σαν ένα σίγουρο και πολύτιμο μαθηματικό εργαλείο για να συντομεύσουμε και να απλουστεύσουμε τις αποδείξεις μας.

Louis Lagrange (1736 -1813)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης

Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί το «πέραςμα» από το Διαφορικό στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Η θεμελιώδης έννοια, για το σκοπό αυτό, είναι η αντιπαράγωγος ή αόριστο ολοκλήρωμα, η οποία «λειτουργεί» ως αντίστροφη διαδικασία από εκείνη της παραγωγίσης. Παρουσιάζονται οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και αναπτύσσονται οι τεχνικές υπολογισμού του. Εισάγεται η έννοια του αθροίσματος Riemann, με τη χρήση του οποίου, δίνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann). Διατυπώνεται το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Προαπαιτούμενη γνώση

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης, κανόνες παραγωγίσης, τύποι παραγωγίσης βασικών συναρτήσεων.

7.1. Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος

Στο Διαφορικό Λογισμό (βλέπε, Κεφάλαιο 5) είδαμε ως ερμηνεία της παραγωγού μίας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, τον αριθμό που δίνει την κλίση (ή συντελεστή διεύθυνσης) της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Αντίστροφα, αν δοθεί μία συνάρτηση g , της οποίας οι τιμές παριστάνουν την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας κάποιας άγνωστης καμπύλης σε κάθε σημείο της, μπορούμε να βρούμε ποια είναι η καμπύλη με την παραπάνω ιδιότητα ;

Για παράδειγμα, έστω ότι η κλίση μίας καμπύλης δίνεται από τη συνάρτηση $g(x) = 5x^2$ και ζητούμε να βρούμε ποια είναι η καμπύλη, δηλαδή, αναζητούμε μία συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $(x, f(x))$ έχει κλίση ίση με $5x^2$. Τότε, ως γνωστό, θα ισχύει $f'(x) = 5x^2$. Οπότε αναζητούμε εκείνη τη συνάρτηση f , της οποίας η παράγωγος σε κάθε σημείο της x ισούται με $5x^2$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, από τις ιδιότητες παραγωγίσης, ότι μία συνάρτηση f , που ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = 5x^2$,

είναι η $f(x) = \frac{5}{3}x^3$. Επίσης, θα μπορούσε να παρατηρήσει κάποιος, ότι και η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{3}x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την απαίτησή μας. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1.1. Αν για τη συνάρτηση f υπάρχει μία συνάρτηση F , της οποίας η παράγωγος είναι η f , δηλαδή, $F' = f$ σε ένα διάστημα I υποσύνολο του \mathbb{R} , η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** (ή **παράγουσα** ή **αρχική** συνάρτηση) της f και συμβολίζεται με $A(f)$.

Παραδείγματα 7.1.2.

i) Μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5x^2$ (στο προηγούμενο παράδειγμα) είναι η συνάρτηση $A(5x^2) = F(x) = \frac{5}{3}x^3$, όπως επίσης και οι συναρτήσεις $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + \sqrt{7}$, $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 1$ είναι αντιπαράγωγοι της $f(x)$, εφόσον επαληθεύεται ο [Ορισμός 7.1.1](#).

ii) Η συνάρτηση $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 1$ είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$.

iii) Μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \cos(x)$ είναι η συνάρτηση $F(x) = \sin(x)$. Επίσης, $F(x) = \sin(x) - 2$ είναι μία αντιπαράγωγος της $f(x) = \cos(x)$. $\diamond\diamond$

Πρόταση 7.1.3.

Αν $F'(x) = 0$, για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $F(x) = c$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη: Έστω $x_1, x \in (a, b)$ με $x_1 < x$. Από την υπόθεση, η F ως παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα (βλέπε, Κεφάλαιο 5) και σε κάθε υποδιάστημα της μορφής (x_1, x) . Επομένως, για τη συνάρτηση F στο διάστημα $[x_1, x]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (βλέπε, Θεώρημα 6.1.3), οπότε υπάρχει $\xi \in [x_1, x]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$F(x) - F(x_1) = F'(\xi)(x - x_1) \quad (7.1.1)$$

Επειδή από την υπόθεση προκύπτει $F'(\xi) = 0$ η ισότητα στην (7.1.1) δίνει

$$F(x) = F(x_1), \text{ για κάθε } x \in (a, b).$$

Αυτό δηλώνει ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $F(x) = c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. $\diamond\diamond$

Εφαρμογή 7.1.4. Αν για τις συναρτήσεις F και G ισχύει $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε

$$F(x) = G(x) + c,$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την [Πρόταση 7.1.3](#), αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x) = F(x) - G(x)$. $\diamond\diamond$

Παρατηρήσεις 7.1.5.

i) Από την [Εφαρμογή 7.1.4](#), συμπεραίνουμε ότι, αν F είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης f , τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$, όπου c είναι μία πραγματική σταθερή συνάρτηση, αποτελεί επίσης μία αντιπαράγωγο της f . Δηλαδή, η αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης f δεν ορίζεται με μοναδικό τρόπο και όλες οι αντιπαράγωγοι διαφέρουν μεταξύ τους κατά τη σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

ii) Η υπόθεση για την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων F και G στο διάστημα (a, b) στην [Πρόταση 7.1.3](#) είναι απαραίτητη και δεν μπορεί να παραληφθεί. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x$, για κάθε $x \in I$ με $I = (1, 2) \cup (3, 4)$ και τις συναρτήσεις

$$F(x) = x^2, \text{ για κάθε } x \in I, \text{ και } G(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in [1, 2] \\ x^2 + 3, & \text{αν } x \in [3, 4] \end{cases}$$

τότε

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in I.$$

Όμως,

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in (1,2) \\ 3, & \text{αν } x \in (3,4) \end{cases}$$

δηλαδή, δεν υπάρχει μοναδική πραγματική σταθερή συνάρτηση c τέτοια ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in I$. ◊◊

Ορισμός 7.1.6. Έστω ένα διάστημα I υποσύνολο του \mathbb{R} , και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** (indefinite integral) της f στο I και συμβολίζεται με $\int f(x) dx$, όπου x η ανεξάρτητη μεταβλητή της f στο I . Επομένως, αν F παριστάνει μία αντιπαραγώγο της f , τότε

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (7.1.2)$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται **ολοκληρωτέα** ή **υπό ολοκλήρωση συνάρτηση** και dx είναι το διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής x , (βλέπε, Κεφάλαιο 5).

Από τον **Ορισμό 7.1.6.** και την **(7.1.2)** είναι φανερό ότι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων αποτελούν συναρτήσεις των οποίων η γραφική παράσταση είναι μετατοπισμένη κατά τη σταθερή c από τη γραφική παράσταση της αντιπαραγώγου $F(x)$ κατά μία διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα $y'Oy$. Επιπλέον μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών $F(x) + c$ στο σημείο x είναι παράλληλες, επειδή η παράγωγος όλων των αντιπαραγώγων της f έχουν την ίδια τιμή στο σημείο με τετμημένη x και είναι ίση με $(F(x) + c)' = f(x)$.

Παράδειγμα 7.1.7.

Αν η αρχική θέση ενός σώματος είναι $s = 10$, να βρεθεί η θέση του την χρονική στιγμή t , όταν η ταχύτητα του την ίδια χρονική στιγμή δίνεται ως $v(t) = 9,8t + 5$.

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα v ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, είναι ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος s στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή,

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt},$$

όπου η συνάρτηση $s(t)$ εκφράζει την απόσταση του σώματος την χρονική στιγμή t από ένα αρχικό σημείο. Επομένως,

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = 9,8t + 5.$$

Αναζητούμε τη συνάρτηση $s(t)$ της οποίας η παράγωγος δίνεται από την παραπάνω σχέση. Αναζητούμε, δηλαδή, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int v(t) dt$ της συνάρτησης $v(t) = 9,8t + 5$ και συγκεκριμένα, εκείνη την αντιπαραγώγο $A(v(t))$, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $s(0) = 10$.

Από τις ιδιότητες της παραγώγισης, είναι φανερό ότι

$$s(t) = A(9,8t + 5) = \frac{9,8}{2}t^2 + 5t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } s(t) = \int v(t) dt = \frac{9,8}{2}t^2 + 5t + c.$$

Για να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη θα πρέπει

$$s(0) = \frac{9,8}{2} \cdot 0 + 5 \cdot 0 + c = 10 \Rightarrow c = 10.$$

Τελικά, η ζητούμενη συνάρτηση $s(t)$ είναι

$$s(t) = 4,9t^2 + 5t + 10.$$

Σημείωση. Εξισώσεις της μορφής $\frac{ds}{dt} = 9,8t + 5$ ή $ds = (9,8t + 5)dt$ ονομάζονται *διαφορικές εξισώσεις*, οι λύσεις των οποίων ως προς την άγνωστη συνάρτηση (στο Παράδειγμα 7.1.7 είναι η $s(t)$) δίνονται με τη βοήθεια αόριστων ολοκληρωμάτων, (βλέπε, Κεφάλαιο 8). Όταν υπάρχει και αρχική συνθήκη, (όπως η $s(0) = 10$) λέμε ότι έχουμε ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών ή συνθηκών*. \diamond

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη γραμμική ιδιότητα του αόριστου ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.1.8.

Αν f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I του \mathbb{R} και έχουν αόριστα ολοκληρώματα στο I και $a, b \in \mathbb{R}$ (όχι και οι δύο μηδέν), τότε η συνάρτηση $af + bg$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I και ισχύει

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τους **Ορισμούς 7.1.1** και **7.1.6** η απόδειξη προκύπτει άμεσα. \diamond

Στην επόμενη εφαρμογή γενικεύεται η ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Εφαρμογή 7.1.9.

Αν $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ και για τις συναρτήσεις f_1, f_2, \dots, f_n υπάρχουν οι αντιπαράγωγοί τους, τότε

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \dots + c_n \int f_n(x)dx .$$

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την **Πρόταση 7.1.8** με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. \diamond

Κάθε φορά που εφαρμόζεται είτε η **Πρόταση 7.1.8** είτε η **Εφαρμογή 7.1.9** κατά τον υπολογισμό αόριστου ολοκληρώματος, δεν είναι αναγκαίο να γράφεται η σταθερά που προκύπτει σε κάθε επιμέρους αόριστο ολοκλήρωμα, επειδή το άθροισμα τελικά όλων των επιμέρους σταθερών είναι ξανά μία σταθερά, η οποία γράφεται μία φορά στο τέλος της συνολικής ολοκλήρωσης.

Δίνουμε παρακάτω τα αόριστα ολοκληρώματα στοιχειωδών συναρτήσεων, τα οποία προκύπτουν από τις παραγωγίσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.

7.1.10. Πίνακας ολοκλήρωσης στοιχειωδών συναρτήσεων

1.	$\int 0 dx = c, c \in \mathbb{R}$
2.	$\int 1 dx = x + c, x \in \mathbb{R}$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\}$
4.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, x \neq 0$
5.	$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\}$
6.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c, f(x) \neq 0$
7.	$\int e^x dx = e^x + c, x \in \mathbb{R}$

8.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$
9.	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$
10.	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$
11.	$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + c$
12.	$\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) + c$
13.	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
14.	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c, \quad ((k-1)\pi, k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
15.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = \sin^{-1}(x) + c, \quad x \in (-1, 1)$
16.	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c = \tan^{-1}(x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$
17.	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c \quad \text{και} \quad \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$
18.	$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x) + c \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\coth(x) + c$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c, \quad x \in \mathbb{R}$
20.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \cosh^{-1}(x) + c, \quad x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$

Παραδείγματα 7.1.11.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int p(x) dx$, όπου $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$.

ii) $\int x \sqrt{7x^2 + 5} dx$ iii) $\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}} dx$ iv) $\int \frac{2}{5x+1} dx$

v) $\int \frac{3x}{4x+1} dx$ vi) $\int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx$

i) Σύμφωνα με την [Εφαρμογή 7.1.9](#) και τους τύπους (2) και (3) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε

$$\begin{aligned} \int p(x) dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \\ &= \int a_n x^n dx + \int a_{n-1} x^{n-1} dx + \dots + \int a_1 x dx + \int a_0 dx = \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τον παραπάνω τρόπο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε πολυωνυμικής συνάρτησης.

ii) Εφαρμόζοντας τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n = \frac{1}{2}$ και $f(x) = 7x^2 + 5$ έχουμε:

$$\int x\sqrt{7x^2+5} dx = \int \frac{1}{14}(7x^2+5)' \sqrt{7x^2+5} dx = \frac{1}{14} \frac{(7x^2+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{\sqrt{(7x^2+5)^3}}{21} + c, c \in \mathbb{R}.$$

iii) Εφαρμόζοντας την [Πρόταση 7.1.8.](#) και τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n = -\frac{1}{2}$ και $f(x) = 2x - 3$ έχουμε:

$$\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}} dx = 5 \int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx = 5 \int \frac{1}{2} \frac{(2x-3)'}{\sqrt{2x-3}} dx = 5 \int (\sqrt{2x-3})' dx = 5\sqrt{2x-3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

iv) Εφαρμόζοντας τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε:

$$\int \frac{2}{5x+1} dx = 2 \int \frac{1}{5} \frac{(5x+1)'}{5x+1} dx = \frac{2}{5} \ln|5x+1| + c, c \in \mathbb{R}.$$

v) Εφαρμόζοντας την [Πρόταση 7.1.8.](#) και στη συνέχεια τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{4x+1} dx &= 3 \int \frac{1}{4} \frac{4x}{4x+1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x+1-1}{4x+1} dx = \\ &= \frac{3}{4} \left(\int \frac{4x+1}{4x+1} dx - \int \frac{1}{4x+1} dx \right) = \frac{3}{4} \int dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{4x+1} dx = \\ &= \frac{3}{4} x - \frac{3}{16} \int \frac{(4x+1)'}{4x+1} dx = \frac{3}{4} x - \frac{3}{16} \ln|4x+1| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

vi) Επειδή $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, εφαρμόζοντας τους τύπους (13) και (14) του Πίνακα 7.1.10. και την [Πρόταση 7.1.8.](#) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx &= \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx = \\ &= \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \\ &= \tan(x) - \cot(x) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◇◇

Επειδή οι ιδιότητες της παραγώγου του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων δίνουν πολύπλοκο τύπο, το αόριστο ολοκλήρωμα τέτοιων συναρτήσεων απαιτεί ανάπτυξη μεθοδολογίας τέτοιας ώστε στο αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα να μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της γραμμικότητας του αόριστου ολοκληρώματος για τις βασικές συναρτήσεις (βλέπε, [Πρόταση 7.1.8](#) και [Πίνακα 7.1.10](#)). Έτσι, στις επόμενες ενότητες παρουσιάζουμε τις σημαντικότερες μεθόδους υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, που είναι:

- μέθοδος αντικατάστασης,
- μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες,
- μέθοδος ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων,
- μέθοδος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων, και
- μέθοδος αναγωγής σε ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

7.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

Έστω η συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη και συνεχής στο διάστημα I και $x = g(t)$, όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα I' , τέτοιο ώστε $g(I') \subseteq I$. Αν F είναι μία αντιπαράγωγος της f , τότε

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

κι επομένως

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) + c = F(x) + c = \int f(x) dx$$

Έτσι,

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(x) dx \quad (7.2.1)$$

Η σχέση (7.2.1) μας επιτρέπει αντί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x) dx$ να υπολογίσουμε το $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$, το οποίο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή x με $x = g(t)$, με σκοπό το τελευταίο ολοκλήρωμα να είναι πιο εύκολο στον υπολογισμό του από ό,τι το αρχικό.

Παρατηρήσεις 7.2.1.

i) Επειδή $g'(t) \cdot dt = d(g(t))$, η σχέση (7.2.1) μπορεί να γραφεί κι ως

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(x) dx \quad (7.2.2)$$

ii) Η συνάρτηση $g(t) = x$ μέσω της οποίας αλλάζουμε τη μεταβλητή από x σε t πρέπει να είναι 1-1. Και αυτό γιατί, το ολοκλήρωμα $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$ είναι μία συνάρτηση (αντιπαράγωγος) του t , ενώ το αρχικό ολοκλήρωμα ζητείται ως συνάρτηση του x . Έτσι, αν G είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(g(t)) \cdot g'(t)$, τότε

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = G(t) + c.$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη, αφού είναι 1-1, έχουμε $t = g^{-1}(x)$, οπότε

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = G(t) + c = G(g^{-1}(x)) + c,$$

όπου $G(g^{-1}(x)) = F(x)$ μία αντιπαράγωγος της f .

iii) Κατά τη διαδικασία αλλαγής μεταβλητής για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int f(x) dx$ ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Επιλέγουμε κατάλληλη συνάρτηση g , η οποία είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη, θέτουμε $x = g(t)$ (το σύμβολο της νέας μεταβλητής μπορεί να είναι u, v, y, z ή όποιο άλλο θελήσουμε). Η επιλογή της g δεν είναι μοναδική (βλέπε, Παράδειγμα 7.2.2 (i)).

Βήμα 2. Αντικαθιστούμε την «παλιά» μεταβλητή x στο $\int f(x) dx$ καθώς και το διαφορικό dx από τη σχέση $dx = g'(t) \cdot dt$.

Βήμα 3. Υπολογίζουμε το $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$ και στο τέλος θέτουμε $t = g^{-1}(x)$.

Παραδείγματα 7.2.2.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int \frac{1}{\sqrt{3x-5}} dx \quad \text{ii) } \int \frac{1}{7+\sqrt{x}} dx \quad \text{iii) } \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{iv) } \int x e^{x^2} dx$$

i) Θέτουμε $t = 3x - 5$, άρα $x = g(t) = \frac{t+5}{3}$. Τότε $dt = (3x-5)' dx = 3dx$. Από τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n = \frac{1}{2}$ το ολοκλήρωμα γράφεται :

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3} \int (2\sqrt{t})' dt = \frac{2}{3} \sqrt{t} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $t = 3x - 5$ (και η g είναι αντιστρέψιμη (γιατί;)), προκύπτει τελικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3x-5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε, επίσης, να κάνουμε την αντικατάσταση $t = \sqrt{3x-5}$ (για $x > \frac{5}{3}$), οπότε

$$dt = (\sqrt{3x-5})' dx = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}} dx = \frac{3}{2t} dx. \text{ Επομένως,}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{t}{t} dt = \frac{2}{3} \int dt = \frac{2}{3} t + c = \frac{2}{3} \sqrt{3x-5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Θέτουμε $\sqrt{x} = t$, άρα $x = t^2 = g(t)$. Τότε $dt = (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$,

επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int \frac{2t}{7+t} dt = 2 \int \frac{t}{7+t} dt = 2 \int \frac{7+t-7}{7+t} dt = 2 \left(\int \frac{7+t}{7+t} dt - \int \frac{7}{7+t} dt \right) = 2 \int dt - 14 \int \frac{1}{7+t} dt$$

Από την ολοκλήρωση στοιχειωδών συναρτήσεων το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \frac{2t}{7+t} dt = 2t - 14 \ln|7+t| + c = 2\sqrt{x} - 14 \ln|7+\sqrt{x}| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

iii) Θέτουμε $t = \ln x$, άρα $x = e^t = g(t)$. Τότε $dt = \frac{1}{x} dx$, επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

iv) Θέτουμε $x^2 = t$, οπότε $dt = 2x dx$ και επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇◇

Εφαρμογή 7.2.3.

i) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, υπολογίζονται θέτοντας

$$bx = a \sin(t), \text{ όπου } a, b > 0 \text{ και } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι: $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx = \frac{1}{b} \sin^{-1}\left(\frac{b}{a} x\right) + c, \quad a, b > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$

ii) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$, υπολογίζονται θέτοντας

$$bx = a \cosh(t), \text{ όπου } a, b > 0 \text{ και } t \in [0, +\infty).$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι: } I_2 = \int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx = \frac{a^2}{4b} \sinh \left(2 \cosh^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) \right) - \frac{a^2}{2b} \cosh^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) + c, \quad a, b > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: i) Για $|x| < \frac{a}{b} \Rightarrow -\frac{a}{b} < x < \frac{a}{b}$ και $a, b > 0$, θέτουμε $bx = a \sin(t)$, οπότε έχουμε

$$a^2 - b^2 x^2 = a^2 - a^2 \sin^2(t) = a^2 (1 - \sin^2(t)) = a^2 \cos^2(t),$$

και

$$d(bx) = d(a \sin(t)) \Rightarrow b dx = a \cos(t) dt \Rightarrow dx = \frac{a}{b} \cos(t) dt.$$

Επιπλέον, για $x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ από $bx = a \sin(t)$ έχουμε $t = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)$, και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.5.3. η

συνάρτηση ημιτόνου είναι αντιστρέψιμη, όταν $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ από όπου προκύπτει $\cos(t) > 0$.

Επομένως, από $a > 0$ και μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2(t)}} \frac{a}{b} \cos(t) dt = \frac{a}{b} \int \frac{\cos(t)}{|a \cos(t)|} dt = \frac{a}{b} \int \frac{\cos(t)}{|a| |\cos(t)|} dt = \frac{1}{b} \int dt = \frac{1}{b} t + c = \frac{1}{b} \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Όταν το ριζικό $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ βρίσκεται στον παρονομαστή, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε και τον τύπο (15) του Πίνακα 7.1.10. Δηλαδή, μπορούμε να θέσουμε $bx = at$, οπότε

$$dx = \frac{a}{b} dt \quad \text{και} \quad \sqrt{a^2 - b^2 x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 t^2} = |a| \sqrt{1 - t^2} = a \sqrt{1 - t^2}, \quad a > 0.$$

Έτσι, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τον τύπο (15), έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{a \sqrt{1 - t^2}} \frac{a}{b} dt = \frac{1}{b} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \frac{1}{b} \sin^{-1}(t) + c = \frac{1}{b} \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Για $|x| \geq \frac{a}{b} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{a}{b}\right) \cup \left[\frac{a}{b}, +\infty\right)$ και $a, b > 0$, θέτουμε $bx = a \cosh(t)$, οπότε χρησιμοποιώντας

$\cosh^2(t) - 1 = \sinh^2(t)$ και $(\cosh(t))' = \sinh(t)$ (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16, Πίνακας 5.2, αντίστοιχα) έχουμε

$$b^2 x^2 - a^2 = a^2 \cosh^2(t) - a^2 = a^2 (\cosh^2(t) - 1) = a^2 \sinh^2(t)$$

και

$$d(bx) = (a \cosh(t))' dt \Rightarrow b dx = a \sinh(t) dt \Rightarrow dx = \frac{a}{b} \sinh(t) dt.$$

Επιπλέον, για κατάλληλα x από $bx = a \cosh(t)$ έχουμε $t = \cosh^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)$ και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση

υπερβολικό ημίτονο είναι γνήσια αύξουσα, οπότε από $t \in [0, +\infty)$ προκύπτει άμεσα $\sinh(t) \geq 0$.

Επομένως, από $a > 0$ και μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_2 = \int \sqrt{a^2 \sinh^2(t)} \frac{a}{b} \sinh(t) dt = \frac{a}{b} \int |a| |\sinh(t)| \sinh(t) dt = \frac{a^2}{b} \int \sinh^2(t) dt.$$

Επειδή $\sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t) - 1}{2}$ (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16) και $(\sinh(t))' = \cosh(t)$, έχουμε:

$$I_2 = \frac{a^2}{b} \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2} dt = \frac{a^2}{2b} \left(\int \cosh(2t) dt - \int dt \right) = \frac{a^2}{2b} \left(\frac{1}{2} \sinh(2t) - t \right) + c = \frac{a^2}{4b} \sinh(2t) - \frac{a^2}{2b} t + c =$$

$$= \frac{a^2}{4b} \sinh \left(2 \cosh^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) \right) - \frac{a^2}{2b} \cosh^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇◇

Παραδείγματα 7.2.4.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ ii) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$

i) Θέτουμε $x = 2\sin(t)$, οπότε

$$t = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \quad \text{και} \quad dx = 2\cos(t) dt.$$

Επιπλέον, το ημίτονο είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση όταν $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, από όπου εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\cos(t) > 0$, και τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(t)} = \sqrt{4(1-\sin^2(t))} = \sqrt{4\cos^2(t)} = 2|\cos(t)| = 2\cos(t).$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (3) από τον Πίνακα 1.5.1 έχουμε:

$$I_1 = \int \frac{4\sin^2(t)}{2\cos(t)} 2\cos(t) dt = 4 \int \sin^2(t) dt = 4 \int \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 2 \left(\int dt - \int \cos(2t) dt \right)$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \cos(2t) dt = 2t - \sin(2t) + c =$$

$$= 2\sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) - \sin \left(2\sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει το ριζικό $\sqrt{x^2-9}$ το οποίο είναι της μορφής $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ και σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.2.3 (ii) θέτουμε $x = 3\cosh(t)$ και ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης της Εφαρμογής 7.2.3 (ii) καταλήγουμε

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx = t + c = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή του τύπου (20) του Πίνακα 7.1.10., επειδή το ριζικό $\sqrt{x^2-9}$ βρίσκεται στον παρονομαστή.

Συνεπώς, αν θέσουμε $x = 3u$ έχουμε

$$dx = 3du \quad \text{και} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{\sqrt{9u^2-9}} = \frac{1}{3\sqrt{u^2-1}}.$$

Επομένως μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I_2 = \int \frac{1}{3\sqrt{u^2-1}} 3du = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \cosh^{-1}(u) + c = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για $x \geq 0$ και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.7 μπορούμε να γράψουμε ότι

$$I_2 = \ln \left(\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9}-1} \right) + c = \ln \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{x^2-9} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇◇

Εφαρμογή 7.2.5.

i) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν τη συνάρτηση $\sqrt{a^2x^2+b^2}$, υπολογίζονται θέτοντας $ax = b \sinh(t)$, όπου $a, b > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \sqrt{a^2x^2+b^2} \right) + c$, $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν τη συνάρτηση $a^2x^2+b^2$ υπολογίζονται, θέτοντας $ax = b \tan(t)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2} dx = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right) + c$, με $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: i) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} dx$ με $a, b > 0$ περιέχει $\sqrt{a^2x^2+b^2}$, επομένως, θέτουμε $ax = b \sinh(t)$, οπότε $t = \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right)$ (για κατάλληλα x) και από $(\sinh(t))' = \cosh(t)$ έχουμε

$$d(ax) = d(b \sinh(t)) \Rightarrow a dx = b \cosh(t) dt \Rightarrow dx = \frac{b}{a} \cosh(t) dt.$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.6.6 (ii) για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(t) \geq 1 \Rightarrow \cosh(t) > 0$, οπότε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1$, (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16 (i)) και $b > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{a^2x^2+b^2} = \sqrt{b^2 \sinh^2(t) + b^2} = \sqrt{b^2 (\sinh^2(t) + 1)} = b |\cosh(t)| = b \cosh(t).$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{b \cosh(t)} \frac{b}{a} \cosh(t) dt = \frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + c = \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για κατάλληλα x σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.3 και την (1.6.4) το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} dx = \frac{1}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right) + c = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \sqrt{a^2x^2+b^2} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2} dx$ περιέχει $a^2x^2+b^2$, επομένως, θέτουμε $ax = b \tan(t)$, οπότε $t = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right)$ και

$$d(ax) = d(b \tan(t)) \Rightarrow a dx = \frac{b}{\cos^2(t)} dt \Rightarrow dx = \frac{b}{a \cos^2(t)} dt.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (2) από τον Πίνακα 1.5.1 έχουμε:

$$a^2x^2+b^2 = b^2 \tan^2(t) + b^2 = b^2 (\tan^2(t) + 1) = b^2 \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2} dx$ προκύπτει

$$I_2 = \int \frac{1}{\frac{b^2}{\cos^2(t)}} \frac{b}{a \cos^2(t)} dt = \frac{1}{ab} \int dt = \frac{1}{ab} t + c = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{a}{b}x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇◇

Παραδείγματα 7.2.6.

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{4x^2 + 4x + 5} dx$.

Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 5} = \sqrt{(2x+1)^2 + 2^2},$$

συνεπώς, η ολοκληρωτέα συνάρτηση παίρνει τη μορφή των συναρτήσεων της Εφαρμογής 7.2.5.

Θέτουμε $2x+1 = 2\sinh(t)$ από όπου προκύπτει

$$d(2x+1) = d(2\sinh(t)) \Rightarrow dx = \cosh(t)dt.$$

Όπως στην απόδειξη της Εφαρμογής 7.2.5 (i), από την ταυτότητα $\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1$, και $\cosh(t) > 0$, έχουμε:

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 2^2} = \sqrt{4\sinh^2(t) + 4} = \sqrt{4(1 + \sinh^2(t))} = 2\sqrt{\cosh^2(t)} = 2|\cosh(t)| = 2\cosh(t).$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τον τύπο (17) του Πίνακα 7.1.10. και την ταυτότητα (iv) της Εφαρμογής 1.6.16, αυτό γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \int 2\cosh(t) \cdot \cosh(t) dt = 2\int \cosh^2(t) dt = 2\int \frac{1 + \cosh(2t)}{2} dt = \\ &= \int dt + \int \cosh(2t) dt = t + \frac{\sinh(2t)}{2} + c = \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sinh\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη μορφή αντικατάστασης επειδή καθιστά ευκολότερο τον υπολογισμό του δοσμένου ολοκληρώματος.

Αν θέταμε $2x+1 = 2\tan(t)$, τότε

$$d(2x+1) = d(2\tan(t)) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$$

και

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 2^2} = \sqrt{4\tan^2(t) + 4} = \sqrt{4(1 + \tan^2(t))} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}} = \frac{2}{|\cos(t)|}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int \frac{2}{|\cos(t)| \cos^2(t)} dt,$$

το οποίο είναι δυσκολότερο στον υπολογισμό του συγκριτικά με την παραπάνω αντικατάσταση. Στην Ενότητα 7.5, θα προτείνουμε μία γενικότερη μέθοδο υπολογισμού αυτών των ολοκληρωμάτων. \diamond

Στη συνέχεια μελετώνται τριγωνομετρικά ολοκληρώματα, που έχουν τουλάχιστον έναν από τους εκθέτες των $\sin(x), \cos(x)$ περιττό φυσικό αριθμό. Η περίπτωση, όπου οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι μελετάται στην Ενότητα 7.5.

Εφαρμογή 7.2.7.

i) Αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int \sin^{2k+1}(x) \cos^m(x) dx, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

υπολογίζονται, θέτοντας $t = \cos(x)$.

ii) Αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$J = \int \sin^n(x) \cos^{2k+1}(x) dx, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

υπολογίζονται, θέτοντας $t = \sin(x)$.

Απόδειξη: i) Το ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I = \int \sin^{2k+1}(x) \cos^m(x) dx = \int \sin^{2k}(x) \cos^m(x) \sin(x) dx$$

Θέτουμε $t = \cos(x)$, από όπου προκύπτει

$$dt = d(\cos(x)) = (\cos(x))' dx = -\sin(x) dx \Rightarrow -dt = \sin(x) dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin^{2k}(x) = (\sin^2(x))^k = (1 - \cos^2(x))^k = (1 - t^2)^k$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα I , αυτό μετασχηματίζεται στο

$$I = \int \sin^{2k+1}(x) \cos^m(x) dx = -\int (1 - t^2)^k t^m dt .$$

Για τις διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών k, m , στο I η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πολυωνυμική με ανεξάρτητη μεταβλητή t βαθμού $2k + m$ και υπολογίζεται σύμφωνα με το [Παράδειγμα 7.1.11\(i\)](#). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με $t = \cos(x)$.

ii) Ανάλογα εργαζόμαστε για το ολοκλήρωμα J . Θέτουμε $t = \sin(x)$, από όπου προκύπτει

$$dt = d(\sin(x)) = (\sin(x))' dx = \cos(x) dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\cos^{2k}(x) = (\cos^2(x))^k = (1 - \sin^2(x))^k = (1 - t^2)^k$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα J , αυτό μετασχηματίζεται στο

$$J = \int \sin^n(x) \cos^{2k+1}(x) dx = \int \sin^n(x) \cos^{2k}(x) \cos(x) dx = \int t^n (1 - t^2)^k dt .$$

Για τις διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών k, n , στο J η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πολυωνυμική με ανεξάρτητη μεταβλητή t βαθμού $2k + n$ και υπολογίζεται σύμφωνα με το [Παράδειγμα 7.1.11\(i\)](#). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με $t = \sin(x)$. ◇◇

Παράδειγμα 7.2.8.

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^3(x) \cos^4(x) dx$.

Θέτουμε $t = \cos(x)$, οπότε έχουμε

$$dt = -\sin(x) dx \Rightarrow -dt = \sin(x) dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin^3(x) = \sin^2(x) \sin(x) = (1 - \cos^2(x)) \sin(x)$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα, αυτό μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - \cos^2(x)) \cos^4(x) \sin(x) dx = -\int (1 - t^2) t^4 dt = \\ &= -\int (t^4 - t^6) dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c = -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◇◇

7.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένας τρόπος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων, όταν η μέθοδος αλλαγής μεταβλητής δεν συμβάλλει στον υπολογισμό τους. Η μέθοδος ανάγει ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f dg$ σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int g df$, όπου f, g συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Πρόταση 7.3.1.

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα διάστημα I . Αν η συνάρτηση $f' \cdot g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I , τότε η συνάρτηση $f \cdot g'$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I και ισχύει

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx. \quad (7.3.1)$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f' \cdot g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα I και έστω F μία αντιπαράγωγος αυτής. Τότε $F'(x) = f'(x) \cdot g(x)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1.5. έχουμε

$$f \cdot g - \int f(x) \cdot g'(x) dx = \{f \cdot g - F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω $G \in f \cdot g - \int f'(x) \cdot g(x) dx = \{f \cdot g - F + c : c \in \mathbb{R}\}$, οπότε $G = f \cdot g - F + c$, για κάποια σταθερή $c \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$G'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x).$$

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι η συνάρτηση G είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f \cdot g'$, δηλαδή $G \in \int f \cdot g' dx$. Επομένως,

$$f \cdot g - \int f'(x) \cdot g(x) dx = \{f \cdot g - F + c : c \in \mathbb{R}\} \subseteq \int f(x) \cdot g'(x) dx. \quad (7.3.2)$$

Έστω H μία αντιπαράγωγος της $f \cdot g'$, δηλαδή, $H \in \int f(x) \cdot g'(x) dx$ και

$$\begin{aligned} H'(x) &= f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x) = \\ &= (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x) = (f(x) \cdot g(x))' - F'(x), \end{aligned}$$

όπου F μία αντιπαράγωγος της $f'(x) \cdot g(x)$. Δηλαδή, υπάρχει σταθερή $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$H = f \cdot g - F + c,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι

$$H \in f \cdot g - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Άρα,

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx \subseteq f \cdot g - \int f'(x) \cdot g(x) dx. \quad (7.3.3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.3.2) και (7.3.3) με τον [Ορισμό 7.1.1](#), συμπεραίνουμε την ισχύ της (7.3.1). \diamond

Παρατηρήσεις 7.3.2.

i) Η Πρόταση 7.3.1 αναφέρεται σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων, όπου η μία εκ των δύο είναι η παράγωγος μίας γνωστής συνάρτησης. Επειδή

$$d(g(x)) = g'(x) dx,$$

ο τύπος (7.3.1) ανάγει ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f dg$ στο ολοκλήρωμα $\int g df$ του οποίου ο υπολογισμός είναι (πιθανώς) ευκολότερος.

ii) Σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int u(x) \cdot v(x) dx$, όπου είναι εύκολο να γράψουμε $u(x) = f'(x)$ και $v(x) = g'(x)$, ο τύπος στην (7.3.1) μπορεί να εφαρμοστεί είτε $\int f'(x) \cdot v(x) dx$ είτε $\int u(x) \cdot g'(x) dx$.

iii) Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και η εφαρμογή της (7.3.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί όσες φορές χρειάζεται προκειμένου να καταλήξουμε σε απλοποιημένη μορφή ολοκληρώματος (βλέπε, [Παράδειγμα 7.3.3. \(ii\)](#)).

Παραδείγματα 7.3.3.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \text{i) } I_1 &= \int x \cos(x) dx & \text{ii) } I_2 &= \int x^2 e^x dx & \text{iii) } I_3 &= \int e^x \cos(x) dx \\ \text{iv) } I_4 &= \int x \ln x dx & \text{v) } I_5 &= \int \tan^{-1}(2x) dx \end{aligned}$$

i) Είναι γνωστό ότι $\cos(x) = (\sin(x))'$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο (7.3.1) της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \cos(x) dx = \int x (\sin(x))' dx = x \sin(x) - \int x' \sin(x) dx = \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Αν κάποιος, αξιοποιώντας την Παρατήρηση 7.3.2 (ii), ορθά γράψει:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cos(x) dx = \frac{x^2}{2} \cos(x) - \int \frac{x^2}{2} (\cos(x))' dx = \frac{x^2}{2} \cos(x) - \int \frac{x^2}{2} (-\sin(x)) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cos(x) + \int \frac{x^2}{2} \sin(x) dx = \frac{x^2}{2} \cos(x) + I_{11}, \end{aligned}$$

όπου $I_{11} = \int \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) dx$, τότε πρέπει να υπολογίσει το I_{11} . Στη συνέχεια ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με την παραπάνω για τον υπολογισμό του I_{11} , αν γράψει

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' \sin(x) dx = \frac{x^3}{6} \sin(x) - \int \frac{x^3}{6} (\sin(x))' dx = \frac{x^3}{6} \sin(x) - \int \frac{x^3}{6} \cos(x) dx = \\ &= \frac{x^3}{6} \sin(x) - I_{12}, \end{aligned}$$

όπου $I_{12} = \int \frac{x^3}{6} \cos(x) dx$, τότε πρέπει να υπολογίσει το I_{12} , που για τον υπολογισμό του απαιτείται ένα

ολοκλήρωμα της μορφής $I_{13} = \int \left(\frac{x^4}{4} \right)' \cos(x) dx$. Όπως είναι φανερό, η παραπάνω υπολογιστική διαδικασία

είναι ατέρμονη, επειδή οι δυνάμεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x αυξάνονται διαρκώς, αν και η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) είναι ορθή.

Επομένως, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I = \int p(x) \cdot \cos(x) dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας του συνημιτόνου και όχι της πολυωνυμικής συνάρτησης.

ii) Εφαρμόζοντας δύο φορές τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int (x') e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I = \int p(x) \cdot e^{f(x)} dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της εκθετικής συνάρτησης και εφαρμογή του (7.3.1) τόσες φορές όσες και ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$.

iii) Επειδή $(\sin(x))' = \cos(x)$ και $(e^x)' = e^x$ έχουμε διπλή δυνατότητα για τη χρήση του τύπου (7.3.1). Εφαρμόζοντας δύο φορές τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int e^x (\sin(x))' dx = e^x \sin(x) - \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx = \\
&= e^x \sin(x) - \int e^x (-\cos(x))' dx = e^x \sin(x) + \int e^x (\cos(x))' dx = \\
&= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + c_1 - \int (e^x)' \cos(x) dx = \\
&= e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c_1 - \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c_1 - I_3.
\end{aligned}$$

Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα I_3 επανεμφανίζεται, οπότε

$$I_3 = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c_1 - I_3 \Rightarrow 2I_3 = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c_1 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

όπου $2c = c_1$.

Στην ίδια απάντηση θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε εξαρχής το $(e^x)' = e^x$ στην εφαρμογή του (7.3.1).

iv) Επειδή $\frac{1}{2}(x^2)' = x$ το αόριστο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως

$$I_4 = \int x \ln x dx = \int \frac{1}{2}(x^2)' \ln x dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' \ln x dx.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{2} \left[\int (x^2)' \ln x dx \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x - \int x^2 (\ln x)' dx \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x - \int x dx \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I = \int p(x) \cdot \ln(f(x)) dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , αρχικά απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$.

v) Όπως στο προηγούμενο Παράδειγμα 7.3.3(iv) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int x' \tan^{-1}(2x) dx = x \tan^{-1}(2x) - \int x (\tan^{-1}(2x))' dx = x \tan^{-1}(2x) - \int x \frac{(2x)'}{1+4x^2} dx = \\
&= x \tan^{-1}(2x) - \frac{1}{4} \int \frac{(1+4x^2)'}{1+4x^2} dx = x \tan^{-1}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I = \int p(x) \cdot \tan^{-1}(f(x)) dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , αρχικά απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$. \diamond

Εφαρμογή 7.3.4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$I_n = \int \sin^n(x) dx = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x) + (n-1)I_{n-2}}{n} \quad (7.3.4)$$

Απόδειξη: Επειδή $(\cos(x))' = -\sin(x)$, από τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n(x) dx = \int \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx \\
&= -\int \sin^{n-1}(x) (-\sin(x)) dx = \\
&= -\int \sin^{n-1}(x) (\cos(x))' dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) (1 - \sin^2(x)) dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) dx - (n-1) \int \sin^n(x) dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1)I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1)I_{n-2}}{n} \quad \diamond\diamond$$

Εφαρμογή 7.3.5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}, \quad (7.3.5)$$

$$\text{με } I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Για κάθε $n \geq 2$ το ολοκλήρωμα I_n μπορεί να γραφεί:

$$I_n = \int x' \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (7.3.1) έχουμε:

$$I_n = x \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{-n(x^2 + a^2)^{n-1} 2x}{(x^2 + a^2)^{2n}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx. \quad (7.3.6)$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (7.3.6) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx - \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \\
&= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = I_n - a^2 I_{n+1}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία ισότητα στην (7.3.6) έχουμε

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

ή ισοδύναμα, λύνοντας ως προς I_{n+1} :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$$

Επειδή $n \geq 2$, την παραπάνω ισότητα μπορούμε να την γράψουμε

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Για $n=1$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.2.5. (ii) είναι φανερό ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{1}{a}x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \(\diamond\diamond\)

Οι τύποι (7.3.4) και (7.3.5) ονομάζονται **αναγωγικοί** (ή **αναδρομικοί**) τύποι.

7.4 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, δηλαδή πηλίκων της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Διάφορα ολοκληρώματα, όπως εκείνα αρκετών τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων και επομένως, είναι σημαντική η γνώση του υπολογισμού τους.

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων βασίζεται στην ανάλυση μίας ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, δηλαδή κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A}{(x-r)^m} \text{ και } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ όπου } m, n \in \mathbb{N} \text{ και } p^2 - 4q < 0.$$

Η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων σε συνδυασμό με την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος ανάγει τον υπολογισμό του $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ στους υπολογισμούς απλούστερων

ολοκληρωμάτων όπως είναι $\int \frac{a}{(x-r)^m} dx$, και $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$. Συμβολίζουμε με $\deg P(x)$ (αντ. $\deg Q(x)$)

το βαθμό του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x)$ (αντ. του $Q(x)$). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$$\text{I) } \deg P(x) \geq \deg Q(x) \quad \text{και} \quad \text{II) } \deg P(x) < \deg Q(x).$$

I) $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση **(II)** μετά τη διαίρεση πολυωνύμων $P(x):Q(x)$. Επειδή $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ στη διαίρεση $P(x):Q(x)$ αντιστοιχεί, ως γνωστό, ένα πηλίκο $\pi(x)$ και ένα υπόλοιπο $\nu(x)$, που οι βαθμοί ικανοποιούν τη συνθήκη $0 \leq \deg \nu(x) < \deg Q(x)$ και τα πολυώνυμα συνδέονται μεταξύ τους με την ακόλουθη ισότητα

$$P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

από όπου προκύπτει:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{\nu(x)}{Q(x)}$$

Επομένως,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\pi(x) + \frac{\nu(x)}{Q(x)} \right) dx = \int \pi(x) dx + \int \frac{\nu(x)}{Q(x)} dx. \quad (7.4.1)$$

Η ολοκλήρωση $\int \pi(x) dx$ αφορά την πολυωνυμική συνάρτηση $\pi(x)$ και είναι απλή (βλέπε, [Παράδειγμα](#)

7.1.11 (i)). Η ολοκλήρωση $\int \frac{\nu(x)}{Q(x)} dx$ είναι μία ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης, που εντάσσεται στην

περίπτωση **(II)**, επειδή $0 \leq \deg \nu(x) < \deg Q(x)$, η οποία εξετάζεται στη συνέχεια.

II) $\deg P(x) < \deg Q(x)$

Ο υπολογισμός του $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, όταν $\deg P(x) < \deg Q(x)$, απαιτεί τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Ανάλυση του πολυωνύμου $Q(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων $(x-r)^m$, r είναι ρίζα του $Q(x)$, και δευτεροβαθμίων παραγόντων $(x^2+px+q)^n$, όταν $p^2 - 4q < 0$.

Βήμα 2: Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-r)^m$, r είναι ρίζα του $Q(x)$, αντιστοιχεί το άθροισμα των μερικών (ή απλών) κλασμάτων ως εξής:

$$(x-r)^m \rightarrow \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \frac{A_3}{(x-r)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x-r)^m}, \text{ όπου } A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}.$$

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2 + px + q)^n$ με $p^2 - 4q < 0$ αντιστοιχεί το άθροισμα των μερικών κλασμάτων ως εξής:

$$(x^2 + px + q)^n \rightarrow \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{B_3x + C_3}{(x^2 + px + q)^3} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n},$$

όπου $B_i, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$.

Βήμα 3: Επειδή, από την Άλγεβρα είναι γνωστό ότι, κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μερικών κλασμάτων, τέτοιων όπως στο Βήμα 2, απαιτείται το άθροισμα όλων των μερικών κλασμάτων να ισούται με τη ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Μετά την άθροιση των μερικών κλασμάτων (κάνοντας πρώτα

ομώνυμα τα κλάσματα), προκύπτει ρητή συνάρτηση με παρονομαστή $Q(x)$. Επομένως, η προηγούμενη απαίτηση, εξισώνει δυο ρητές συναρτήσεις με ίδιο παρονομαστή, $Q(x)$, οπότε πρέπει και οι αριθμητές να είναι ίσοι. Δηλαδή, ο νέος αριθμητής, ο οποίος είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση, πρέπει να είναι ίσος με $P(x)$. Η ισότητα των πολυωνύμων οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_i, B_j, C_j , από όπου υπολογίζονται.

Βήμα 4: Σύμφωνα με την [Εφαρμογή 7.1.9](#), το ολοκλήρωμα $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

ολοκληρωμάτων είτε της μορφής $\int \frac{1}{(x-r)^m} dx$, είτε $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, για τους διαφορετικούς φυσικούς

αριθμούς m και n .

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3) και (4) του Πίνακα 7.1.10, υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της πρώτης μορφής:

$$\int \frac{1}{(x-r)^m} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-r)^{m-1}}, & \text{όταν } m \neq 1 \\ \ln|x-r|, & \text{όταν } m = 1 \end{cases} \quad (7.4.2)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, το πολυώνυμο $x^2 + px + q$ γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2 = (x+c)^2 + d^2, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad (7.4.3)$$

όπου

$$c = \frac{p}{2}, \quad (7.4.4)$$

$$d = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad \text{με } 4q - p^2 > 0, \quad (7.4.5)$$

(υπενθυμίζεται ότι ισχύει $p^2 - 4q < 0$).

Θέτοντας $u = x + c$, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$ ανάγεται:

- είτε σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{u}{(u^2+c^2)^n} du$, το οποίο υπολογίζεται από τους τύπους (5) και (6) του

Πίνακα 7.1.10, και ισούται με:

$$\int \frac{u}{(u^2 + c^2)^n} du = \begin{cases} \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(u^2 + c^2)^{n-1}}, & \text{όταν } n \neq 1 \\ \frac{1}{2} \ln(u^2 + c^2), & \text{όταν } n = 1 \end{cases} \quad (7.4.6)$$

- είτε σε ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int \frac{1}{(u^2 + c^2)^n} du \quad (7.4.7)$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα στην (7.4.7) αντιμετωπίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου (7.3.5) της Εφαρμογής 7.3.5.

Παραδείγματα 7.4.1.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } I_1 = \int \frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 2} dx \quad \text{ii) } I_2 = \int \frac{x^3}{(x^2 + 2)^2} dx \quad \text{iii) } I_3 = \int \frac{1}{x^4 - 1} dx$$

$$\text{iv) } I_4 = \int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} dx \quad \text{v) } I_5 = \int \frac{x^4 + 3x^3 + x}{x^2 + 1} dx$$

i) Επειδή $\deg P(x) = \deg(4x^2 - 3x + 5) < \deg Q(x) = \deg(x^3 - 3x + 2)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 2}.$$

Έχουμε

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2 στον παράγοντα $(x-1)^2$ αντιστοιχεί άθροισμα δύο μερικών κλασμάτων, (τόσα κλάσματα όση είναι η πολλαπλότητα της ρίζας $r=1$, δηλαδή, 2)

$$(x-1)^2 \rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

και στον παράγοντα $x+2$ αντιστοιχεί ένα απλό κλάσμα

$$x+2 \rightarrow \frac{C}{x+2}.$$

Απαιτούμε

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x + (-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων:

$$4x^2 - 3x + 5 = (A+C)x^2 + (A+B-2C)x + (-2A+2B+C)$$

Η παραπάνω ισότητα δίνει:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ A+B-2C=-3 \\ -2A+2B+C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2}$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_1 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή των τύπων στην (7.4.2) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = \\ &= \ln|x-1| - 2\frac{1}{x-1} + 3 \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Επειδή $\deg P(x) = \deg x^3 < \deg Q(x) = \deg(x^2 + 2)^2$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{x^3}{(x^2 + 2)^2}.$$

Ο παρονομαστής $(x^2 + 2)^2$ είναι ένα πολυώνυμο χωρίς πραγματικές ρίζες, οπότε σύμφωνα με το Βήμα 2 η ρητή συνάρτηση γράφεται ως άθροισμα μερικών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{x^3}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)}{(x^2 + 2)^2}$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολωνύμων:

$$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D),$$

το οποίο δίνει:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 2B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \\ D = 0 \end{cases}$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{x^3}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2}$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_2 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή του τύπου στην (7.4.6) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \left(\frac{x}{x^2 + 2} + \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} \right) dx = \int \frac{x}{x^2 + 2} dx - \int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 2)'}{x^2 + 2} dx - \int \frac{(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + \frac{1}{x^2 + 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iii) Επειδή $\deg P(x) = \deg 1 < \deg Q(x) = \deg(x^4 - 1)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{1}{x^4 - 1}.$$

Έχουμε

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, η ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)}{x^4-1} = \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)}{x^4-1} \end{aligned}$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων προκύπτει:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=0 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}.$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_3 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή των τύπων στις (7.4.2) και (7.4.7) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \tan^{-1}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iv) Επειδή $\deg P(x) = \deg 1 < \deg Q(x) = \deg(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}.$$

Σύμφωνα με το Βήμα 1, προσπαθούμε να αναλύσουμε το $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή το πολύ δευτεροβάθμιων παραγόντων. Εξετάζουμε ποιοι από τους διαιρέτες του σταθερού όρου 2 (δηλαδή, τους $\pm 1, \pm 2$) αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου. Επειδή το -2 αποτελεί μία (πραγματική) ρίζα του πολυωνύμου, κάνουμε τη διαίρεση του $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ δια του $x + 2$ και παίρνουμε:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x + 2 \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline x^2 + 3x + 2 & \\ -x^2 - 2x & \\ \hline x + 2 & \\ -x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, επειδή το $x^2 + x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες η ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων έχει τη μορφή:

$$\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+2) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων:

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 2) = (A + B)x^2 + (A + 2B + C)x + (A + 2C),$$

από όπου προκύπτει:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B+C=0 \\ A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως, ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_4 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή του (7.4.2) ως ακολούθως:

$$I_4 = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} I, \quad (7.4.8)$$

όπου

$$I = \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx.$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (7.4.4) και (7.4.5) το τριώνυμο x^2+x+1 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τετραγώνων και σύμφωνα με την (7.4.3) αυτό γράφεται:

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Θέτουμε $x + \frac{1}{2} = u$, οπότε

$$x = u - \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad d(x) = d\left(u - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow dx = du.$$

Μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας τους τύπους (7.4.6), (7.4.7) και (7.3.5) της Εφαρμογής 7.3.5, το αόριστο ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{-x+1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \\ &= \int \frac{-\left(u - \frac{1}{2}\right) + 1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \int \frac{-u + \frac{3}{2}}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = -\int \frac{u}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du + \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} u \right) + c = -\frac{1}{2} \ln \left(u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right) + \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} u \right) + c = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα της (7.4.8) υπολογίζεται μετά την αντικατάσταση του I από το παραπάνω αποτέλεσμα, το οποίο ισούται με:

$$I_4 = \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} I = \frac{1}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ν) Επειδή $\deg(x^4 + 3x^3 + x) = 4 > \deg(x^2 + 1) = 2$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο (I), εκτελώντας αρχικά τη διαίρεση των πολυωνύμων:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^3 + 0x^2 + x & x^2 + 1 \\
-x^4 & -x^2 \\
\hline
3x^3 - x^2 + x & \\
-3x^3 & -3x \\
\hline
-x^2 - 2x & \\
x^2 & +1 \\
\hline
-2x + 1 &
\end{array}$$

Επομένως,

$$x^4 + 3x^3 + x = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 3x - 1) + (-2x + 1),$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{x^4 + 3x^3 + x}{x^2 + 1} = (x^2 + 3x - 1) + \frac{-2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Εφαρμόζοντας την (7.4.1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int (x^2 + 3x - 1) dx + \int \frac{-2x + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + \int \frac{-(x^2 + 1)' + 1}{x^2 + 1} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x - \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x - \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, η ρητή συνάρτηση $\frac{-2x+1}{x^2+1}$ δεν αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων και προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε τον πίνακα ολοκλήρωσης στοιχειωδών συναρτήσεων. \diamond

Εφαρμογή 7.4.2. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν ρητή παράσταση της e^x , θέτουμε $t = e^x$, οπότε $x = \ln t$ και $dx = \frac{1}{t} dt$ και οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t .

Παραδείγματα 7.4.3.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$i) I_1 = \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx \quad \text{ii) } I_2 = \int \frac{e^x}{13 \sinh(x) - 12 \cosh(x)} dx$$

i) Πρόκειται για ολοκλήρωμα που περιέχει μία ρητή έκφραση του e^x . Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.2 θέτουμε $t = e^x$ και έχουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης:

$$I_1 = \int \frac{1}{t(t^2 - 3t)} dt.$$

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{t(t^2 - 3t)} = \frac{1}{t^2(t - 3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t - 3} = \frac{(A + C)t^2 + (-3A + B)t - 3B}{t^2(t - 3)}.$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=0 \\ -3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{9} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{9} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{9} \int \frac{1}{t-3} dt = -\frac{1}{9} \ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9} \ln|t-3| + c = \\ &= -\frac{1}{9} \ln e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9} \ln|e^x - 3| + c = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9} \ln|e^x - 3| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Θέτουμε $t = e^x$, οπότε $x = \ln t$ και $dx = \frac{1}{t} dt$. Από τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων (βλέπε, Ορισμός 1.6.1 και 1.6.5) έχουμε:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad \text{και} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{t}{13 \frac{t^2-1}{2t} - 12 \frac{t^2+1}{2t}} \frac{1}{t} dt = 2 \int \frac{t}{t^2-25} dt = 2 \int \frac{t}{(t-5)(t+5)} dt = 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{t-5} dt + 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{t+5} dt = \\ &= \ln|t-5| + \ln|t+5| + c = \ln|t^2-25| + c = \ln|e^{2x}-25| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

επειδή,

$$\frac{t}{(t-5)(t+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{t-5} + \frac{\frac{1}{2}}{t+5} \quad \text{και} \quad \ln|t-5| + \ln|t+5| = \ln(|t-5| \cdot |t+5|) = \ln|(t-5)(t+5)|.$$

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να είναι:

$$I_2 = 2 \int \frac{t}{t^2-25} dt = \int \frac{(t^2-25)'}{t^2-25} dt = \ln|t^2-25| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Εφαρμογή 7.4.4. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν μία ρητή παράσταση του x και τα

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

θέτουμε

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

από όπου $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$ και, οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t .

Γενικότερα, για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν μία ρητή παράσταση του x και των

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{N},$$

θέτουμε $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, όπου n είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n_1, n_2, \dots, n_s .

Παραδείγματα 7.4.5.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$i) I_1 = \int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad ii) I_2 = \int \frac{1}{1+\sqrt{3x+2}} dx \quad iii) I_3 = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3+1}} dx$$

i) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα που περιέχει μία ρητή παράσταση του x και του $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., θέτουμε

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \quad \text{και} \quad dx = -\frac{4t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα I_1 γίνεται:

$$I_1 = -\int t \frac{t^2+1}{1-t^2} \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = 2 \int \frac{2t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 2 \int \frac{(t^2+1) + (t^2-1)}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt + 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt$$

Επειδή

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + c_1 = \frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

και

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \tan^{-1}(t) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, κάνοντας αντικατάσταση με τα παραπάνω ολοκληρώματα στο I_1 και χρησιμοποιώντας την

ιδιότητα $\ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$ έχουμε

$$I_1 = \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2 \tan^{-1}(t) + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2 \tan^{-1}(t) + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2 \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c,$$

Όπου $c = 2c_1 + 2c_2$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., θέτουμε $t = \sqrt{3x+2}$, από όπου $x = \frac{t^2-2}{3}$ και $dx = \frac{2}{3} t dt$. Επομένως,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{3} \int \frac{t}{1+t} dt = \frac{2}{3} \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \frac{2}{3} \int dt - \frac{2}{3} \int \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \frac{2}{3} t - \frac{2}{3} \ln|1+t| + c = \frac{2}{3} \sqrt{3x+2} - \frac{2}{3} \ln|1+\sqrt{3x+2}| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., επειδή $εκπ(2,3) = 6$, θέτουμε $2x-3 = t^6$, από όπου προκύπτει $dx = 3t^5 dt$. Τότε το ολοκλήρωμα I_3 γράφεται:

$$I_3 = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt = 3 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt$$

Επειδή από τη διαίρεση πολυωνύμων προκύπτει

$$t^8 = (t^6 - t^4 + t^2 - 1)(t^2 + 1) + 1,$$

από το παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_3 &= 3 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt + 3 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 3 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t \right) + 3 \tan^{-1}(t) + c = \\ &= 3 \left(\frac{(2x-3)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{(2x-3)^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{3} - (2x-3)^{\frac{1}{6}} \right) + 3 \tan^{-1}\left((2x-3)^{\frac{1}{6}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◇◇

7.5 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων των ακόλουθων μορφών:

$$\text{I)} \int \sin^m(x) \cos^n(x) dx, \quad m, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\text{II)} \int \sin(kx) \cos(lx) dx, \int \sin(kx) \sin(lx) dx \text{ και } \int \cos(kx) \cos(lx) dx, \quad k, l \in \mathbb{R}, \text{ με } k \neq l.$$

III) ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin(x)$ και $\cos(x)$.

$$\text{D)} \int \sin^m(x) \cos^n(x) dx, \quad m, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

(α) Όπως αποδείχθηκε στην [Εφαρμογή 7.2.7](#), αν ένας από τους m, n είναι περιττός, θέτουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό, που είναι υψωμένος στην άρτια δύναμη.

Αν $m = 2k + 1$, θέτουμε $t = \cos(x)$, από όπου $dt = d(\cos(x)) = -\sin(x)dx \Rightarrow -dt = \sin(x)dx$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^{2k+1}(x) \cos^n(x) dx = \int \sin^{2k}(x) \sin(x) \cos^n(x) dx = \\ &= \int (\sin^2(x))^k \cos^n(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^k \cos^n(x) \sin(x) dx = \\ &= -\int (1 - t^2)^k t^n dt \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα αφορά μία πολυωνυμική συνάρτηση, το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

Αν $n = 2k + 1$, θέτουμε $t = \sin(x)$, και εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο, (βλέπε, [Εφαρμογή 7.2.7\(ii\)](#)).

Αν και οι δύο m, n είναι περιττοί, τότε εκτελούμε την ίδια διαδικασία, όπως παραπάνω, είτε για τον m είτε για τον n .

(β) Αν οι m, n είναι και οι δύο άρτιοι, έχοντας σκοπό τον υποβιβασμό των άρτιων δυνάμεων, χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1 (3))

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{και} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}. \quad (7.5.1)$$

Στη συνέχεια, αν οι νέες εκφράσεις είναι υψωμένες σε περιττή δύναμη εφαρμόζεται **(I) (α)**, διαφορετικά, χρησιμοποιούνται εκ νέου οι τύποι υποβιβασμού από την (7.5.1).

Δηλαδή, αν $m = 2k$ και $n = 2p$, $k, p \in \mathbb{N}$, με $k \neq p$, τότε το γινόμενο των τριγωνομετρικών αριθμών γράφεται

$$\sin^m(x) \cos^n(x) = \sin^{2k}(x) \cos^{2p}(x) = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^p$$

και αναπτύσσοντας τις ταυτότητες, που υπάρχουν στο δεξιό μέρος της παραπάνω ισότητας, παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο του $\cos(2x)$, $(k + p)$ -βαθμού, (βλέπε, Παραδείγματα 7.5.1 (ii)). Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται, είτε χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις που προτάθηκαν στο **(I) (α)** για τους όρους του τριγωνομετρικού πολυωνύμου, που είναι υψωμένοι σε περιττή δύναμη, είτε κάνοντας εκ νέου την αντικατάσταση του $\cos^2(x)$ από την (7.5.1) στους όρους του πολυωνύμου, που είναι υψωμένοι σε άρτια δύναμη, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, όπως παραπάνω, για τον υποβιβασμό της δύναμης.

(γ) Στην ειδική περίπτωση, όπου ένας από τους m ή n είναι ίσος με μηδέν, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία της περίπτωσης **(I) (α)** ή **(I) (β)** ανάλογα με το αν ο μη μηδενικός εκθέτης είναι περιττός ή άρτιος, (βλέπε, Παραδείγματα 7.5.1 (vi)).

$$\text{II)} \int \sin(kx) \cos(lx) dx, \int \sin(kx) \sin(lx) dx \text{ και } \int \cos(kx) \cos(lx) dx, \quad k, l \in \mathbb{R} \text{ με } k \neq l.$$

Εφαρμόζοντας τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1(14).)

$$\sin(kx) \cos(lx) = \frac{1}{2} (\sin(kx - lx) + \sin(kx + lx)) \quad (7.5.2)$$

$$\sin(kx) \sin(lx) = \frac{1}{2} (\cos(kx - lx) - \cos(kx + lx)) \quad (7.5.3)$$

$$\cos(kx)\cos(lx) = \frac{1}{2}(\cos(kx-lx) + \cos(kx+lx)) \quad (7.5.4)$$

στα αντίστοιχα αόριστα ολοκληρώματα της (II) αυτά γράφονται:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \int \sin(kx)\cos(lx)dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(kx-lx) + \sin(kx+lx))dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin((k-l)x)dx + \frac{1}{2} \int \sin((k+l)x)dx = \\ &= -\frac{1}{2(k-l)}\cos((k-l)x) - \frac{1}{2(k+l)}\cos((k+l)x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad \int \sin(kx)\sin(lx)dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(kx-lx) - \cos(kx+lx))dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos((k-l)x)dx - \frac{1}{2} \int \cos((k+l)x)dx = \\ &= \frac{1}{2(k-l)}\sin((k-l)x) - \frac{1}{2(k+l)}\sin((k+l)x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad \int \cos(kx)\cos(lx)dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(kx-lx) + \cos(kx+lx))dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos((k-l)x)dx + \frac{1}{2} \int \cos((k+l)x)dx = \\ &= \frac{1}{2(k-l)}\sin((k-l)x) + \frac{1}{2(k+l)}\sin((k+l)x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

III Όταν έχουμε μία ρητή παράσταση¹ των $\sin(x)$ και $\cos(x)$, $R(\sin(x), \cos(x))$, αξιοποιούμε τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1(15)), με τη βοήθεια των οποίων $\sin(x)$ και $\cos(x)$ εκφράζονται συναρτήσει της $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi, \pi)$:

$$\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{και} \quad \cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (7.5.8)$$

Θέτουμε $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, από όπου προκύπτουν

$$x = 2 \tan^{-1}(t) \quad \text{και} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

οι δε τριγωνομετρικοί αριθμοί στην (7.5.8) γράφονται:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{και} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Επομένως, ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$ εφαρμόζοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης της μεταβλητής t , του οποίου η επίλυση μελετήθηκε στην [Ενότητα 7.4.](#)

Παραδείγματα 7.5.1.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } I_1 = \int \sin^2(x)\cos^3(x)dx \quad \text{ii) } I_2 = \int \sin^4(x)\cos^2(x)dx \quad \text{iii) } I_3 = \int \sin(3x)\cos(5x)dx$$

¹ Μία ρητή συνάρτηση σημειώνεται με $R(f(x), g(x))$ κι είναι μία ρητή έκφραση των συναρτήσεων f, g .

$$\text{iv) } I_4 = \int \cos(7x)\cos(2x)dx \quad \text{v) } I_5 = \int \frac{1}{1-\sin(x)+\cos(x)} dx \quad \text{vi) } I_6 = \int \cos^6(8x)dx$$

i) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως **(I) (α)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι περιττός. Επομένως,

$$I_1 = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)dx = \int \sin^2(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)dx = \int (\sin^2(x) - \sin^4(x))\cos(x)dx.$$

Θέτουμε $t = \sin(x)$, από όπου $dt = d(\sin(x)) = \cos(x)dx$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I_1 = \int (t^2 - t^4)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Έναν άλλο τρόπο υπολογισμού δείτε στο **Παράδειγμα 7.5.3(i)**.

ii) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα της περίπτωσης **(I) (β)**, όπου οι εκθέτες του ημιτόνου και συνημιτόνου είναι και οι δύο άρτιοι αριθμοί. Αρχικά έχουμε

$$I_2 = \int \sin^4(x)(1-\sin^2(x))dx = \int (\sin^4(x) - \sin^6(x))dx = \int \sin^4(x)dx - \int \sin^6(x)dx = I_{21} - I_{22},$$

όπου $I_{21} = \int \sin^4(x)dx$ και $I_{22} = \int \sin^6(x)dx$.

Εφαρμόζοντας τους τριγωνομετρικούς τύπους από την **(7.5.1)** γράφουμε:

$$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\cos(4x)}{2}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ισότητα στο I_{21} έχουμε:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x)dx + \frac{1}{8} \int (1+\cos(4x))dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4}\sin(4x) \right) + c_1 \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c_1. \end{aligned}$$

Ανάλογα,

$$\begin{aligned} \sin^6(x) &= (\sin^2(x))^3 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 = \frac{1-3\cos(2x)+3\cos^2(2x)-\cos^3(2x)}{8} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{3}{8}\cos^2(2x) - \frac{1}{8}\cos^3(2x) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{3}{8} \left(\frac{1+\cos(4x)}{2} \right) - \frac{1}{8}\cos^3(2x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ισότητα στο I_{22} έχουμε:

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos(2x)dx + \frac{3}{16} \int (1+\cos(4x))dx - \frac{1}{8} \int \cos^3(2x)dx = \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{8}I_{23} = \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{8}I_{23}, \end{aligned}$$

όπου

$$I_{23} = \int \cos^3(2x)dx = \int \cos^2(2x)\cos(2x)dx = \int (1-\sin^2(2x))\cos(2x)dx.$$

Θέτοντας $t = \sin(2x)$, έχουμε $dt = d(\sin(2x)) = 2\cos(2x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}dt = \cos(2x)dx$, οπότε

$$I_{23} = \int (1-\sin^2(2x))\cos(2x)dx = \frac{1}{2} \int (1-t^2)dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) + c_2 = \frac{1}{2} \left(\sin(2x) - \frac{\sin^3(2x)}{3} \right) + c_2.$$

Αντικαθιστώντας το I_{23} στο I_{22} έχουμε:

$$I_{22} = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c_3,$$

με $c_3 = -\frac{1}{8}c_2$. Τελικά, αντικαθιστώντας το I_{21}, I_{22} στο I_2 προκύπτει:

$$I_2 = I_{21} - I_{22} = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c,$$

όπου $c = c_1 + c_3$, $c \in \mathbb{R}$.

iii) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως στο **(II)(α)**, όπου από την (7.5.2) για $k=3$ και $l=5$ ισχύει

$$\sin(3x)\cos(5x) = \frac{1}{2}(\sin(-2x) + \sin(8x)) = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(8x),$$

επειδή, ως γνωστόν $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο στην (7.5.5) έχουμε:

$$I_3 = \int \sin(3x)\cos(5x)dx = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(8x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

iv) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως στο **(II)(γ)**, οπότε εφαρμόζοντας τον (7.5.7) για $k=7$ και $l=2$ έχουμε:

$$I_4 = \int \cos(7x)\cos(2x)dx = \frac{1}{10}\sin(5x) + \frac{1}{18}\sin(9x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

v) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα μίας ρητής συνάρτησης

$$R(\sin(x), \cos(x)) = \frac{1}{1 - \sin(x) + \cos(x)}.$$

Όπως αναφέρθηκε στο **(III)** θέτουμε, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, από όπου προκύπτουν

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(t) \Rightarrow x = 2 \tan^{-1}(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \text{και} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{1}{1 - \sin(x) + \cos(x)} dx = \int \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{\frac{2-2t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2}} dt = \\ &= \int \frac{2}{2-2t} dt = \int \frac{1}{1-t} dt = -\int \frac{1}{t-1} dt = -\ln|t-1| + c = -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

vi) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα της ειδικής περίπτωσης **(I)(γ)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι άρτιος και του ημιτόνου είναι ίσος με μηδέν. Εφαρμόζοντας τους τριγωνομετρικούς τύπους από την (7.5.1) γράφουμε:

$$\begin{aligned} \cos^6(8x) &= (\cos^2(8x))^3 = \left(\frac{1 + \cos(16x)}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{1 + 3\cos(16x) + 3\cos^2(16x) + \cos^3(16x)}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3\cos(16x)}{8} + \frac{3}{8}\cos^2(16x) + \frac{1}{8}\cos^3(16x) \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

Αντικαθιστώντας την (7.5.9) στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \cos^6(8x)dx = \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos(16x) + \frac{3}{8}\cos^2(16x) + \frac{1}{8}\cos^3(16x)\right) dx = \\ &= \int \frac{1}{8} dx + \int \frac{3}{8}\cos(16x)dx + \int \frac{3}{8}\cos^2(16x)dx + \int \frac{1}{8}\cos^3(16x)dx = \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\int \cos(16x)dx + \frac{3}{8}\int \cos^2(16x)dx + \frac{1}{8}\int \cos^3(16x)dx = \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8 \cdot 16}\sin(16x) + \frac{3}{8}I_{61} + \frac{1}{8}I_{62}, \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

όπου $I_{61} = \int \cos^2(16x)dx$ και $I_{62} = \int \cos^3(16x)dx$.

Εφαρμόζοντας τον τριγωνομετρικό τύπο του συνημιτόνου από την (7.5.1) στο I_{61} έχουμε:

$$I_{61} = \int \cos^2(16x)dx = \int \frac{1 + \cos(32x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(32x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{64}\sin(32x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Το I_{62} είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της μορφής **(I) (γ)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι περιττός και του ημιτόνου είναι ίσος με μηδέν, επομένως ακολουθούμε τη μεθοδολογία που προτάθηκε στο **(I) (α)**.

Θέτοντας $t = \sin(16x)$, έχουμε $dt = d(\sin(16x)) = 16 \cos(16x) dx \Rightarrow \frac{1}{16} dt = \cos(16x) dx$, οπότε

$$\begin{aligned} I_{62} &= \int \cos^3(16x) dx = \int \cos^2(16x) \cos(16x) dx = \int (1 - \sin^2(16x)) \cos(16x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{16} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) + c_2 = \frac{1}{16} \left(\sin(16x) - \frac{\sin^3(16x)}{3} \right) + c_2 = \frac{1}{16} \sin(16x) - \frac{1}{48} \sin^3(16x) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το I_{61} και το I_{62} στην **(7.5.10)** προκύπτει

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{1}{8} x + \frac{3}{128} \sin(16x) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{64} \sin(32x) + c_1 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{16} \sin(16x) - \frac{1}{48} \sin^3(16x) + c_2 \right) = \\ &= \frac{5}{16} x + \frac{1}{32} \sin(16x) + \frac{3}{512} \sin(32x) - \frac{1}{384} \sin^3(16x) + c, \end{aligned}$$

όπου $c = \frac{3}{8} c_1 + \frac{1}{8} c_2$, $c \in \mathbb{R}$.

◇◇

Εφαρμογή 7.5.2.

i) Αόριστα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, για τις οποίες ισχύει

$$R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x)),$$

υπολογίζονται θέτοντας

$$t = \cos(x).$$

ii) Αόριστα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, για τις οποίες ισχύει

$$R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x)),$$

υπολογίζονται θέτοντας

$$t = \sin(x).$$

Παραδείγματα 7.5.3.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } I_1 = \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx \quad \text{ii) } I_2 = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx$$

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(\sin(x), \cos(x)) = \sin^2(x) \cos^3(x)$. Αν θέσουμε στη θέση του $\cos(x)$ το $-\cos(x)$ έχουμε:

$$P(\sin(x), -\cos(x)) = \sin^2(x) (-\cos(x))^3 = -\sin^2(x) \cos^3(x) = -P(\sin(x), \cos(x)),$$

Σύμφωνα με την **Εφαρμογή 7.5.2 (ii)**, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_1 , θέτουμε

$$t = \sin(x) \text{ και } dt = \cos(x) dx.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^2(x) \cos^2(x) \cos(x) dx = \int \sin^2(x) (1 - \sin^2(x)) (\cos(x) dx) = \\ &= \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σύγκρινε με τη μεθοδολογία και το αποτέλεσμα στο **Παράδειγμα 7.5.1(i)**.

ii) Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $R(\sin(x), \cos(x)) = \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}$, όπου αν θέσουμε το $-\sin(x)$ στη θέση του $\sin(x)$, έχουμε

$$R(-\sin(x), \cos(x)) = \frac{(-\sin(x))^3}{\cos(x)} = -\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}.$$

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.5.2(i), για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I_2 , θέτουμε $t = \cos(x)$, από όπου $dt = -\sin(x)dx$. Επομένως,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx = -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} (-\sin(x)) dx = -\int \frac{(1-\cos^2(x))}{\cos(x)} (-\sin(x)) dx = \\ &= -\int \frac{1-t^2}{t} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int t dt = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} + c = \\ &= -\ln|\cos(x)| + \frac{\cos^2(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◇◇

7.6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* ή *ολοκλήρωμα του Riemann* είναι μία έννοια οριζόμενη με τη βοήθεια του ορίου συνάρτησης και έχει πολλές εφαρμογές, όπως, το εμβαδόν επίπεδης περιοχής (που δεν περικλείεται από ευθείες γραμμές), τον όγκο στερεού που παράγεται από περιστροφή επίπεδης περιοχής, το εμβαδόν επιφάνειας στερεού από περιστροφή, το μήκος καμπύλης, το έργο μίας μεταβλητής δύναμης, το κέντρο μάζας κλπ.

Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος μέσω του θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού, με τη χρήση του οποίου τα ορισμένα ολοκληρώματα υπολογίζονται ευκολότερα σε σύγκριση με τον αρχικό ορισμό τους (βλέπε, Ορισμός 7.6.3).

Για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος χρειαζόμαστε την έννοια του *αθροίσματος του Riemann* (βλέπε, Ορισμός 7.6.3) και για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.6.1. Στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ επιλέγουμε τυχαία σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Το σύνολο των n - υποδιαστημάτων

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

λέγεται **διαμέριση** (partition) του διαστήματος $[a, b]$. Στο $[a, b]$ μπορούμε να έχουμε άπειρες διαμερίσεις. Το μήκος του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ συμβολίζεται με $|\Delta x_i|$ και με $\Delta x = \max\{|\Delta x_i| : 1 \leq i \leq n\}$, τη μέγιστη από τα μήκη των υποδιαστημάτων της διαμέρισης.

Για παράδειγμα, μία διαμέριση του διαστήματος $[-3, 4]$ αποτελεί το σύνολο των υποδιαστημάτων:

$$[-3, -1.5], [-1.5, 0], [0, 1], [1, 2.5], [2.5, 4] \text{ με } |\Delta x| = 1.5.$$

Επίσης, τα σύνολα των υποδιαστημάτων

$$\{[-3, -1], [-1, 1], [1, 2], [2, 4]\} \text{ και } \{-3, 4\}$$

αποτελούν δύο διαφορετικές διαμερίσεις του $[-3, 4]$, με τη δεύτερη να είναι τετριμμένη. Για την πρώτη έχουμε $|\Delta x| = 2$ (γιατί;) και για τη δεύτερη $|\Delta x| = 4 - (-3) = 7$.

Παρατήρηση 7.6.2.

Μία διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ μπορεί να επιλεγεί τέτοια ώστε τα υποδιαστήματα να είναι ίδιου μήκους και ίσου με Δx . Συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε μία διαμέριση n - υποδιαστημάτων μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ η διαμέριση λέγεται **κανονική**.

Ορισμός 7.6.3. Έστω μία φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και μία διαμέριση

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

του $[a, b]$. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο w_i στο $[x_{i-1}, x_i]$. Το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = f(w_1) \Delta x_1 + f(w_2) \Delta x_2 + \dots + f(w_n) \Delta x_n \quad (7.6.1)$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** (Riemann sum) για την f στο διάστημα $[a, b]$.

Παρατήρηση 7.6.4.

i) Επειδή η επιλογή των w_i μπορεί να γίνει με άπειρους τρόπους, προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρα αθροίσματα Riemann για την f στο διάστημα $[a, b]$. Μπορεί, για παράδειγμα, να επιλέξει κάποιος ως $w_i = x_{i-1}$ ή $w_i = x_i$, δηλαδή, ένα από τα άκρα του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Αν $w_i = x_{i-1}$ το άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (7.6.2)$$

Ενώ, αν $w_i = x_i$ το άθροισμα Riemann είναι

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (7.6.3)$$

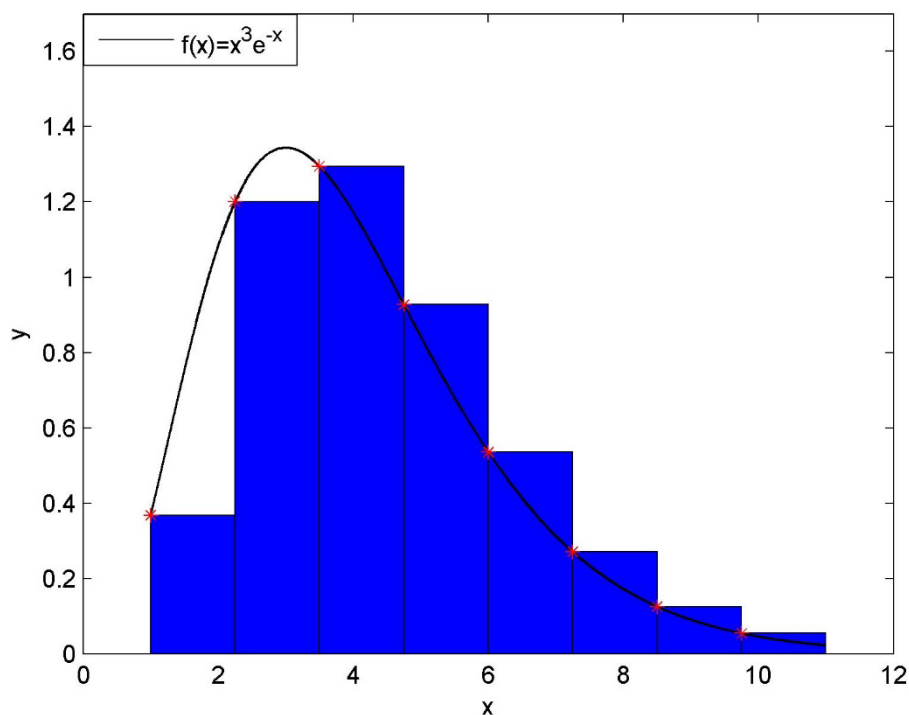
Εφόσον η συνάρτηση f είναι θετική η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann είναι εμβαδόν. Πράγματι, αν για τη φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, το άθροισμα Riemann των παραπάνω περιπτώσεων (7.6.2), (7.6.3) δηλώνει ένα άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων, όπου η μία διάσταση τους είναι $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (πάνω στον άξονα $x'Ox$) και η άλλη (δηλαδή το ύψος) είναι $f(x_{i-1})$ ή $f(x_i)$, αντίστοιχα. Ανάλογα, αν επιλεγεί μία διαμέριση ίδιου μήκους Δx , όπως η κανονική, το άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x. \quad (7.6.4)$$

Επειδή τα ύψη $f(x_{i-1})$ ή $f(x_i)$ των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, που σχηματίζονται με βάση Δx , έχουν τα πέρατά τους πάνω στη γραφική παράσταση της f το άθροισμα Riemann είναι ένας αριθμός που προσεγγίζει το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$. Όσο πιο «λεπτή» είναι η διαμέριση, τόσο πιο κοντά στην τιμή, που ισούται με το εμβαδόν, βρίσκεται το αποτέλεσμα. Φανταστείτε, για παράδειγμα, την κανονική διαμέριση για πολύ μεγάλο n .

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας Matlab δημιουργήσαμε συνάρτηση (function), στην οποία υπολογίζεται το άθροισμα Riemann όπως στην (7.6.4) και σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 e^{-x}$. Παρατηρήστε ότι $f(x) = x^3 e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in [1,11]$. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος Riemann γίνεται η κανονική διαμέριση του διαστήματος $[a,b] = [1,11]$ σε $n=8$ υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = 1.25$. Έχουμε επιλέξει ως $w_i = x_{i-1}$ το κάτω άκρο του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ και ως ύψος, κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου που δημιουργείται, θεωρούμε το $f(w_i)$.

Στο Σχήμα 7.1 σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 e^{-x}$, όπου η τιμή της συνάρτησης $f(w_i)$ σημειώνεται με *. Το άθροισμα Riemann $I = \sum_{i=1}^8 f(x_i)\Delta x = 5.9693$ είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής με μπλε χρώμα.



Σχήμα 7.1: Άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = x^3 e^{-x}$.


```

function [I] = riemannleft(a,b,n)

d=(b-a)/n;
x=a:d:b;
f=x.^3.*exp(-x);
Y=f;
Yleft=Y(1:n);
I=sum(Yleft.*d);

for i=1:n
    rectangle(1)=x(i);          rectangle(1)=0;
    rectangle(2)=x(i+1);      rectangle(2)=0;
    rectangle(3)=x(i+1);
    rectangle(3)=rectangle(1).^3.*exp(-rectangle(1));
    rectangle(4)=x(i);
    rectangle(4)=rectangle(1).^3.*exp(-rectangle(1));
    fill(rectangle,rectangle,'b')
    hold on
end
xp=a:0.001:b;
yp=xp.^3.*exp(-xp);
plot(xp,yp,'k');
hold on
xa=x(:,1:n);
Ya=Y(:,1:n);
plot(xa,Ya,'r*');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('f(x)=x^3e^{-x}');
axis([0 12 0 1.7])
end

```

ii) Γενικεύοντας τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann, που παρουσιάστηκε παραπάνω στο (i), και θεωρώντας ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο w_i του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ και μία φραγμένη και θετική συνάρτηση f στο $[a, b]$, το άθροισμα Riemann στον (7.6.1) παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής που σχηματίζεται από τα διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, που το καθένα έχει ως βάση $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος $f(w_i)$. Το εμβαδόν της προαναφερθείσας περιοχής προσεγγίζει το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$ με μεγαλύτερη ακρίβεια όσο πιο «λεπτή» είναι η διαμέριση του $[a, b]$ και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$. \diamond

Ορισμός 7.6.5. Έστω μία φραγμένη συνάρτηση $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω μία διαμέριση

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

του $[a, b]$ και $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Το όριο

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = L$$

υπάρχει και είναι ίσο με τον πραγματικό αριθμό L , αν, για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

για όλα τα αθροίσματα Riemann της f στο διάστημα $[a, b]$ για τα οποία $\Delta x < \delta$.

Η τιμή του ορίου (όταν υπάρχει) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** (definite integral) ή **ολοκλήρωμα Riemann**² (Riemann integral) της f από το a έως το b και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x) dx$. Δηλαδή, ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i \quad (7.6.5)$$

Όταν το ορισμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει στο διάστημα $[a, b]$ η συνάρτηση f ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** κατά Riemann στο $[a, b]$ ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$. Οι αριθμοί a και b ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης**, ιδιαίτερα ο a ονομάζεται **κατώτερο όριο** (ή άκρο) ολοκλήρωσης και ο b **ανώτερο όριο** (ή άκρο) ολοκλήρωσης.

Αν $a < b$ και υπάρχει το $\int_a^b f(x) dx$ ορίζουμε

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad (7.6.6)$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η f ισχύει:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (7.6.7)$$

Παρατήρηση 7.6.6.

i) Ο Ορισμός 7.6.3 είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των w_i στο $[x_{i-1}, x_i]$ και θα μπορούσαν να είναι $w_i = x_{i-1}$ ή $w_i = x_i$, (βλέπε, [Παρατήρηση 7.6.2](#)). Επίσης δεν ενδιαφέρει το μήκος Δx_i των υποδιαστημάτων διαμέρισης. Αυτό που ενδιαφέρει είναι $|\Delta x| \rightarrow 0$. Έτσι, για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μπορούμε να επιλέξουμε την κανονική διαμέριση με $|\Delta x| \rightarrow 0$, δηλαδή, υπολογίζουμε, αν υπάρχει,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n}.$$

Τότε, η ισότητα (7.6.5) γράφεται

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n}. \quad (7.6.8)$$

ii) Συνδυάζοντας τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann (βλέπε, [Παρατήρηση 7.6.4](#)) με τον Ορισμό 7.6.5. και τους τύπους (7.6.5) και (7.6.8) έχουμε να παρατηρήσουμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνεχούς και **θετικής** συνάρτησης f στο $[a, b]$ παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Αν η συνάρτηση είναι σε ορισμένα υποδιαστήματα του $[a, b]$ θετική και στα υπόλοιπα αρνητική, τότε η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a, b]$ παριστάνει το **αλγεβρικό άθροισμα** των εμβαδών των περιοχών, οι οποίες βρίσκονται πάνω και κάτω από τον άξονα $x'Ox$, (βλέπε, Ενότητα 8.1.1.).

Παράδειγμα 7.6.7.

Να υπολογισθεί το $\int_a^b f(x) dx$, $a, b \in \mathbb{R}$ των ακόλουθων συναρτήσεων:

² Ο ορισμός οφείλεται στο Γερμανό μαθηματικό του 19^{ου} αιώνα Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Το σύμβολο \int πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Gottfried Leibniz (1646-1716) στα τέλη του 17^{ου} αιώνα, επειδή θεώρησε ότι το ολοκλήρωμα ήταν το άθροισμα των εμβαδών απείρου πλήθους ορθογωνίων παραλληλογράμμων με ύψος αυτό της $f(x)$. Το σύμβολο \int είναι μία επιμήκυνση του συμβόλου S του αθροίσματος, προερχόμενου από τη γερμανική λέξη "Summe", παρότι το σύμβολο που επικράτησε τελικά για το άθροισμα είναι το ελληνικό γράμμα Σ, συμβολισμός που αποδίδεται στον Leonard Euler (1707-1783).

$$i) f(x) = x, \quad x \in [-2, 3] \qquad ii) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

i) Θεωρούμε διαμέριση του $[-2, 3]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$, οπότε

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -2 + \frac{5}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{5}{n} = -2 + 2\frac{5}{n}, \dots, \quad x_n = -2 + n\frac{5}{n}.$$

Επιλέγουμε $w_i = x_i = -2 + i\frac{5}{n}$, οπότε $f(w_i) = w_i = -2 + i\frac{5}{n}$. Σύμφωνα με τον [Ορισμό 7.6.5](#) και την (7.6.5) αναζητούμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(-2 + i\frac{5}{n}\right) \frac{5}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό άθροισμα $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.2(i)), μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^n \left(-2 + i\frac{5}{n}\right) \frac{5}{n} = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n (-2) + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{5}{n} n(-2) + \frac{25}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = -10 + \frac{25(n+1)}{2n}.$$

Σύμφωνα με την [Παρατήρηση 7.6.6](#), από τον (7.6.8) το παραπάνω όριο, όταν $\Delta x \rightarrow 0$, είναι ισοδύναμο με το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(-2 + i\frac{5}{n}\right) \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-10 + \frac{25(n+1)}{2n}\right) = -10 + \frac{25}{2} = \frac{5}{2}.$$

Επομένως, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{-2}^3 x dx = \frac{5}{2}.$$

ii) Θεωρούμε τη διαμέριση του $[-1, 0]$, όπου $f(x) = x^2$, σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$ και όμοια τη διαμέριση του $[0, 1]$, όπου $f(x) = x$, σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$. Δηλαδή, έχουμε μία διαμέριση

του $[-1, 1]$ σε $2n$ υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$, όπου

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{1}{n}, \dots, \quad x_n = -1 + n\frac{1}{n} = 0,$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}, \dots, \quad x_{2n} = -1 + 2n\frac{1}{n} = 1.$$

Επιλέγουμε $w_i = x_i = -1 + i\frac{1}{n}$, $0 \leq i \leq 2n$, οπότε

$$f(w_i) = \begin{cases} \left(-1 + i\frac{1}{n}\right)^2, & 0 \leq i \leq n \\ -1 + i\frac{1}{n}, & n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της f , σύμφωνα με τον [Ορισμό 7.6.5](#) και την (7.6.5) αναζητούμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^{2n} f(w_i) \Delta x \right) = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \left(-1 + i\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right) + \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + i\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \right). \quad (7.6.9)$$

Χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα γνωστά αθροίσματα, (βλέπε, Παραδείγματα 3.1.2(i)-(ii)),

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

για καθένα από τα αθροίσματα στην (7.6.9) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(-1 + i \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - 2i \frac{1}{n} + i^2 \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{1}{n} n - \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 1 - \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + i \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + i \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=n+1}^{2n} i = -\frac{n}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \quad (7.6.11)$$

Αντικαθιστώντας τις (7.6.10) και (7.6.11) στην (7.6.9), όταν $\Delta x \rightarrow 0$ ή ισοδύναμα $n \rightarrow +\infty$, (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.6.) έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Επομένως,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{6}. \quad \diamond$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι «πώς μπορεί να υπολογισθεί ένα ορισμένο ολοκλήρωμα χωρίς να γίνει η χρήση του Ορισμού 7.6.5;». Η απάντηση βρίσκεται στο θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.6.8. (Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και F είναι μία οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο $[a, b]$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (7.6.12)$$

Η σημαντικότητα του Θεωρήματος 7.6.8 έγκειται στο ότι ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a, b]$ ανάγεται αρχικά στην εύρεση μίας αντιπαραγώγου, F , της f στο $[a, b]$, και κατόπιν υπολογίζεται η διαφορά των τιμών της F στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης. Συμβολικά το ορισμένο ολοκλήρωμα σημειώνεται

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$ θεωρώντας $t \in [a, b]$ και συνδυάζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, Θεώρημα 7.6.8.) με τον Ορισμό 7.1.6 του αόριστου ολοκληρώματος μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a) \Rightarrow (F(t))' = f(t).$$

Παράδειγμα 7.6.9.

Να υπολογισθεί το $\int_a^b f(x) dx$, $a, b \in \mathbb{R}$ των παρακάτω συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = x, x \in [-2, 3] \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{iii) } f(x) = x^3 e^{-x}, x \in [1, 11]$$

με τη βοήθεια του θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού.

i) Μία αντιπαράγωγος της $f(x) = x$ είναι η $F(x) = \frac{x^2}{2}$, οπότε εφαρμόζοντας την (7.6.12) του Θεωρήματος 7.6.8 για το διάστημα $[-2, 3]$ έχουμε

$$\int_{-2}^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Σύγκρινε την απάντηση με την αντίστοιχη στο Παράδειγμα 7.6.7 (i).

ii) Μία αντιπαράγωγος της $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[-1, 0]$ είναι η $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Μία αντιπαράγωγος της $f(x) = x$ στο $[0, 1]$ είναι η $G(x) = \frac{x^2}{2}$. Έτσι, εφαρμόζοντας την (7.6.12) του Θεωρήματος 7.6.8 έχουμε

$$\int_{-1}^0 x^2 dx = [F(x)]_{-1}^0 = 0 - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3},$$

και

$$\int_0^1 x dx = [G(x)]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10 που ακολουθεί, έχουμε:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

το οποίο επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.6.7(ii).

iii) Εφαρμόζοντας τρεις φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως στο Παράδειγμα 7.3.3 (ii) υπολογίζεται ότι μία αντιπαράγωγος της $f(x) = x^3 e^{-x}$ είναι η $F(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$, οπότε εφαρμόζοντας την (7.6.12) για το διάστημα $[1, 11]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_1^{11} x^3 e^{-x} dx &= [-(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}]_1^{11} \\ &= -(11^3 + 3 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11 + 6)e^{-11} + (1^3 + 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 6)e^{-1} = -1766e^{-11} + 16e^{-1} \cong 5.8566 \end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **riemannleft** (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.4. (i)), με $a=1$, $b=11$ και $n=1000$, βρίσκουμε $I=5.8583$, το οποίο σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών 1000 ορθογωνίων παραλληλογράμμων, που «πλησιάζουν» τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 e^{-x}$, είναι ίσο με 5.8583, τιμή που προσεγγίζει το πραγματικό αποτέλεσμα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των τύπων (7.6.12) και (7.6.8), παρατηρούμε ότι για $n \geq 23400$ η τιμή, που υπολογίζεται για το $I=5.8566$, προσεγγίζει το πραγματικό αποτέλεσμα με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. $\diamond\diamond$

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται οι σημαντικότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, μερικές από τις οποίες είναι γνωστές από το αόριστο ολοκλήρωμα, (βλέπε, Πρόταση 7.1.8 και σύγκρινε με την Πρόταση 7.6.10. (vi)). Η απόδειξη των ιδιοτήτων της ακόλουθης πρότασης μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα της βιβλιογραφίας (Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρνοφύλλης, 1985; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014) και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Πρόταση 7.6.10.

- i) Αν η συνάρτηση f είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
- iii) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a, b]$.
- iv) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $c \in (a, b)$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

v) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $c, e, k \in [a, b]$ με $a \leq c < e < k \leq b$, τότε ισχύει

$$\int_c^e f(x) dx + \int_e^k f(x) dx + \int_k^c f(x) dx = 0 .$$

vi) Αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $k, l \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $kf + lg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b (kf(x) + lg(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx .$$

vii) Αν για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 .$$

viii) Αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

ix) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Παράδειγμα 7.6.11.

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{|x-1|}{|x-2|+1} dx .$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10. και τον ορισμό της απόλυτης τιμής

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{αν } x < 1 \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{|x-1|}{|x-2|+1} dx &= \int_0^1 \frac{-(x-1)}{-(x-2)+1} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{-(x-2)+1} dx + \int_2^3 \frac{x-1}{x-2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x-1}{x-3} dx - \int_1^2 \frac{x-1}{x-3} dx + \int_2^3 \frac{x-1}{x-1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x-3+2}{x-3} dx - \int_1^2 \frac{x-3+2}{x-3} dx + \int_2^3 1 dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-3} \right) dx - \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x-3} \right) dx + \int_2^3 1 dx = \\ &= [x + 2 \ln(3-x)]_0^1 - [x + 2 \ln(3-x)]_1^2 + [x]_2^3 = \\ &= (1 + 2 \ln 2 - 2 \ln 3) - (2 + 2 \ln 1 - 1 - 2 \ln 2) + (3 - 2) = \\ &= 1 + 4 \ln 2 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

◇◇

Εφαρμογή 7.6.12.

i) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και περιττή στο $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε ισχύει:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

ii) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και άρτια στο $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε ισχύει:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Απόδειξη: i) Από την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10. έχουμε:

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Αν στη θέση της μεταβλητής x στο πρώτο ολοκλήρωμα θέσουμε $-x$, τότε τα αντίστοιχα άκρα μετατρέπονται σε a και 0 , δηλαδή,

$$I = -\int_a^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Επιπλέον η f είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$I = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx,$$

από την οποία το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την (7.6.7).

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη του (i), αρκεί να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της άρτιας συνάρτησης και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.6.6. (ii) η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$, (βλέπε, Εφαρμογή 8.1.2), ισούται με το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$, $x=b$ και τον άξονα $x'Ox$. Κλείνοντας την ενότητα, διατυπώνουμε ένα θεώρημα, που είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, όπου το εμβαδόν της προαναφερθείσας επίπεδης περιοχής δίνεται από μία απλούστερη ισοδύναμη σχέση (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.14. (ii)), η οποία εξαρτάται μόνο από τα άκρα του $[a,b]$ και την τιμή της συνάρτησης σε ένα ενδιάμεσο σημείο του $[a,b]$, χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 7.6.13. (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\zeta \in [a,b]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a)$$

Παρατήρηση 7.6.14.

i) Ο αριθμός $f(\zeta) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

ii) Η γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος 7.6.13. είναι η εξής: το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη της f , τις κατακόρυφες $x=a$, $x=b$ και τον άξονα $x'Ox$, ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που έχει διαστάσεις $b-a$ (δηλαδή, η βάση του είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα a και b επί του $x'Ox$) και ύψος ίσο με $f(\zeta)$, για κάποιο $\zeta \in [a,b]$.

7.7. Ολοκλήρωμα σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `int` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μίας συνάρτησης f της ανεξάρτητης μεταβλητής x , η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x)dx$, η εντολή `int` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση f
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Σύνταξη εντολής: `int(f,x)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int \sin(x+1)dx$ γράφουμε:

```
syms x
f= sin(x+1);
int(f,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
-cos(x+1)
```

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $I = \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx$ του [Παραδείγματος 7.4.3.\(i\)](#) γράφουμε:

```
syms x
f=1/(exp(2*x)-3*exp(x));
[I]=int(f,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
I = 1/(3*exp(x)) - x/9 + log(exp(x) - 3)/9
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(I)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{1}{3\exp(x)} - \frac{x}{9} + \frac{\log(\exp(x) - 3)}{9}$$

Για τον υπολογισμό του *ορισμένου ολοκληρώματος* $\int_a^b f(x)dx$ με $a < b$, η εντολή `int` δέχεται ως εισόδους με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη συνάρτηση `f`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.
- `a` το κάτω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι μείον άπειρο (`-Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.
- `b` το άνω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι άπειρο (`Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Σύνταξη εντολής: `int(f, x, a, b)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^1 (2x^2 - x - 1)dx$ και του γενικευμένου

ολοκληρώματος $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$, γράφουμε:

```
syms x
f=2*x^2-x-1;
int(f,x,0,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
-5/6
```

Για το ολοκλήρωμα I γράφουμε:

```
syms x
f=exp(-x);
[I]=int(f,x,0,+Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
I = 1
```

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος με καμία από τις μεθόδους υπολογισμού, που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες Ενότητες 7.2-7.5 και τότε ο υπολογισμός γίνεται με προσεγγιστικές μεθόδους, οι οποίες στηρίζονται στον Ορισμό 7.6.5 και στους τύπους (7.6.5) και (7.6.8), περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει (Moler, 2010; Γεωργίου & Ξενοφώντος, 2007; Οδηγός Χρήσης Matlab). Όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την εντολή `quad` σε Matlab/Octave μπορούμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος.

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ με $a < b$, η εντολή `quad`

δέχεται ως εισόδους με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη συνάρτηση `f`, που έχει οριστεί με την εντολή `inline`
- α το κάτω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι μείον άπειρο (`-Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.
- b το άνω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι άπειρο (`Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Σύνταξη εντολής: `quad(f, alpha, b)`

Για παράδειγμα, σύμφωνα με το [Θεώρημα 7.6.8](#) και την (7.6.12) το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^\pi \cos(x)dx$ υπολογίζεται ότι ισούται με

$$I_1 = \int_0^\pi \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0.$$

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό I_a του ορισμένου ολοκληρώματος I_1 γράφουμε:

```
f = inline('cos(x)');  
[Ia] = quad(f,0,pi)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η τιμή

```
Ia = -1.1102e-016
```

η οποία προσεγγίζει την πραγματική τιμή του I_1 με ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων.

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^1 e^{x^2} dx$ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι καμία από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στις Ενότητες 7.2 και 7.3 δεν εφαρμόζεται. Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του I_a μπορούμε να γράψουμε:

```
f=inline(vectorize('exp(x.^2)')) ;  
[Ia]= quad(f,0,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το αποτέλεσμα:

```
Ia = 1.4627
```

Παρατήρηση 7.7.1. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ είναι θετική σύμφωνα με την [Πρόταση 7.6.10 \(vii\)](#) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής, που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x^2}$, τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'Ox$, ισούται με I_a , (βλέπε, [Σχήμα 7.2](#)).

Επίσης, χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, τους τύπους (7.6.5) και (7.6.8) και μεγάλες τιμές στο n , μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορετικές συναρτήσεις (functions), οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα και επαληθεύουν τα παραπάνω αποτελέσματα (βλέπε, [Παρατήρηση 7.6.6 \(ii\)](#)). Όπως στη συνάρτηση `riemannleft` στην Παρατήρηση 7.6.4. (i), κάνουμε κανονική διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a,b]=[0,1]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (b-a)/n$. Θεωρούμε έναν τυχαίο αριθμό

$0 < r < 1$, χρησιμοποιώντας το r κατασκευάζουμε ένα σημείο x του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ και υπολογίζουμε το ύψος $f(x)$ του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Από τον (7.6.8) είναι φανερό ότι το ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών απείρου πλήθους ορθογωνίων παραλληλογράμμων, οπότε η τιμή του ολοκληρώματος προσεγγίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια για μεγάλες τιμές του n , γεγονός που διαπιστώνεται από την υλοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης.

```
function [I,r] = riemannrand(a,b,n)

    d=(b-a)/n;
    r=rand;
    I=0;

    for i=1:n
        x=a+(i+r-1)*d;
        f=exp(x^2);
        I=I+f;
    end
    I=I*d;
end
```

Εκτελώντας τρεις φορές την παραπάνω συνάρτηση για $n = 100$ προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές:

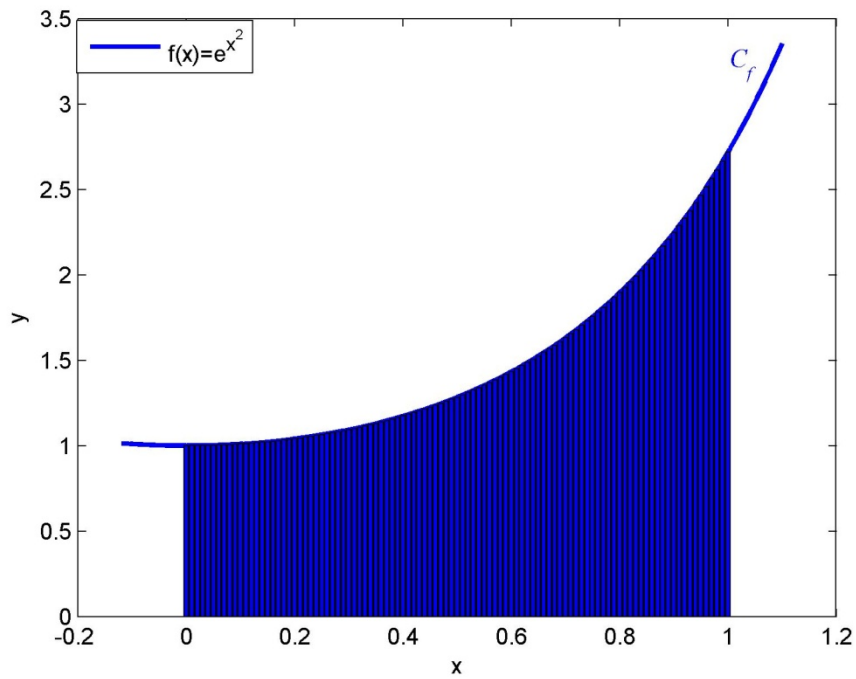
```
I = 1.4653      r = 0.6555
I = 1.4682      r = 0.8235
I = 1.4549      r = 0.0462
```

Παρατηρήστε ότι, σε μικρές τιμές του r , το I προσεγγίζει την τιμή του $I_a = 1.4627$ με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

Εκτελώντας τρεις φορές την παραπάνω συνάρτηση για $n = 5000$ προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές:

```
I = 1.4627      r = 0.6555
I = 1.4628      r = 0.9502
I = 1.4625      r = 0.0344
```

Παρατηρήστε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του r , το I προσεγγίζει την τιμή του I_a με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.



Σχήμα 7.2: Γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x^2}$ στο $[0,1]$.

◇◇

7.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα στις 7.8.1-7.8.14:

7.8.1. $I_1 = \int \frac{x-2}{x^3-3x-2} dx.$

Υπόδειξη: Παραγοντοποιήστε τον παρονομαστή και εφαρμόστε τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_1 = -\frac{1}{x+1} + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.2. $I_2 = \int \sin^7(x) \cos(x) dx.$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $\sin(x) = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (3) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_2 = \frac{\sin^8(x)}{8} + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.3. $I_3 = \int \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}} dx.$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $e^{-x} = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_3 = \ln|e^{-x} - 2| + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.4. $I_4 = \int \frac{dx}{x \ln^2(3x)}.$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $\ln(3x) = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (3) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_4 = -\frac{1}{\ln(3x)} + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.5. $I_5 = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $t = x^4$.

Απάντηση: $I_5 = \frac{1}{4} \sin^{-1}(x^4) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.6. $I_6 = \int \frac{1}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} dx, a, b > 0.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.2.3(ii).

Απάντηση: $I_6 = \frac{1}{b} \cosh^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.7. $I_7 = \int \frac{1}{4x^2+9} dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.2.5(ii).

Απάντηση: $I_7 = \frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.8. $I_8 = \int (3x^2+1) \tan^{-1}(x) dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Απάντηση: $I_8 = (x^3+x) \tan^{-1}(x) - \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.9. $I_9 = \int \frac{3x^2+15}{(x-1)^2(x^2-4x+6)} dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων.

Απάντηση: $I_9 = 6 \ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - 3 \ln(x^2-4x+6) + \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.10. $I_{10} = \int (\sin^2(x) + \cos^2(2x)) dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο (I), της Ενότητας 7.5, και τα Παραδείγματα 7.5.1(ii) και (vi).

Απάντηση: $I_{10} = x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.11. $I_{11} = \int \frac{1}{3\sin^2(x) + 5\cos^2(x)} dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο (III), της Ενότητας 7.5.

Απάντηση: $I_{11} = \frac{1}{\sqrt{15}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan(x)\right) + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.12. $I_{12} = \int \frac{\sin^4(x)}{\cos(x)} dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.5.2.(ii).

Απάντηση: $I_{12} = -\frac{\sin^3(x)}{3} - \sin(x) - \frac{1}{2} \ln|\sin(x) + 1| + \frac{1}{2} \ln|\sin(x) - 1| + c, c \in \mathbb{R}.$

7.8.13. $I_{13} = \int_0^\pi x \sin(x) dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Απάντηση: $I_{13} = \pi.$

7.8.14. $I_{14} = \int_{-1}^1 x^{2015} e^{x^2} dx.$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 7.6.12(i).

Απάντηση: $I_{14} = 0.$

7.8.15. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, και το φυσικό αριθμό n , που να υλοποιεί για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$, το άθροισμα $\sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n}$, όπου x_i είναι το δεξιό άκρο του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ θεωρώντας την κανονική διαμέριση του $[a, b]$.

Στη συνέχεια, υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b] = [-1, 2]$ με τη χρήση της εντολής `int` και επαληθεύστε την ορθότητα της συνάρτησης υπολογίζοντας το όριο όπως στην (7.6.8) με $n = 1000$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 7.7.1.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). *Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). *Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρνοφύλλης, Χ. Γ. (1985). *Ολοκληρωτικός λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρνοφύλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση Ι* (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Spivak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση Ι*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- GNU Octave. from <http://www.gnu.org/software/octave>
- Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>
- Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.
- Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>
- Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

7.1. Να αποδείξετε ότι, αν για τις συναρτήσεις F και G ισχύει $F'(x) = G'(x)$, για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $F(x) = G(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 7.1.3).

7.2. Να βρεθεί μία αντιπαράγωγος των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $3x^4(2x^5 + 9)^3$

ii) $(5x^2 + 1)\sqrt{5x^3 + 3x - 2}$

iv) $\frac{7x}{\sqrt{3x^2 + 5}}$

iv) $(x^3 - 6)^3(2x^5 - 12x^2)$

v) $\frac{7x^4 - 10x^2 + 4}{2x^2}$

vi) $\sqrt{\frac{5x^2}{3x^2 + 7}}$

7.3. Να αποδείξετε ότι η ισότητα $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ δεν ισχύει στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $F(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{αν } x > 0 \\ 2 + \ln|x|, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

και παρατηρήστε ότι ενώ αποτελεί αντιπαράγωγο της $\frac{1}{x}$ δεν μπορεί να γραφεί ως $F(x) = \ln|x| + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

7.4. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int e^x(x^2 + x + 1) dx$

ii) $\int (3x + 5)^{10} dx$

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 5x}}$

iv) $\int \cos(3x - 2) dx$

v) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} dx$

vi) $\int \sin(5x)\cos(5x) dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.5. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Αν $I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

Υπόδειξη: Δείτε στον Πίνακα 7.1.10.

7.6. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I_n = \int \ln^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε I_1 και I_2 . Στη συνέχεια παρατηρήστε και αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή έναν αναδρομικό τύπο του I_n .

Απάντηση: $I_n = x \ln^n x - n \cdot I_{n-1}$

7.7. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$

ii) $\int \sqrt{1 - 4x - x^2} dx$

iii) $\int \sqrt{-x^2 - 2x} dx$

iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

Υπόδειξη: Δημιουργήστε άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε τις Εφαρμογές 7.2.3, 7.2.5. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.8. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I_n = \int \cos^n(x) dx$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλογη μεθοδολογία με αυτήν της Εφαρμογής 7.3.4.

Απάντηση: $I_n = \frac{\cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) + (n-1)I_{n-2}}{n}$

7.9. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int x^3 \cos(2x) dx & \text{ii)} \int x^4 e^{-x} dx \\ \text{iv)} \int e^{2x} \sin(3x) dx & \text{iv)} \int \sin^{-1}(x) dx \\ \text{v)} \int e^{-3x} \cos(5x-2) dx & \text{vi)} \int (x^2 - 3x + 1) \sin(4x) dx \end{array}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.10. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int \frac{x dx}{(x-3)^2} & \text{ii)} \int \frac{x^3}{x(x-1)^3} dx \\ \text{iii)} \int \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} dx & \text{iv)} \int \frac{4x^2 - 6x + 1}{x^3 - x^2} dx \\ \text{v)} \int \frac{dx}{x^3 + 1} & \text{vi)} \int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx \\ \text{vii)} \int \frac{x + 2}{(x^2 - x + 1)^2} dx & \text{viii)} \int \frac{x}{(x-3)(x+3)(x^2 + 1)} dx \end{array}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.11. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int \frac{1}{\sin^2(x) \cos^3(x)} dx & \text{ii)} \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^7(x)} dx \\ \text{iii)} \int \sin^9(x) \cos^{2016}(x) dx & \text{iv)} \int \sin^{2014}(x) \cos^5(x) dx \\ \text{v)} \int \sin^{10}(x) \cos^{16}(x) dx & \text{vi)} \int \sqrt{(1 + \cos(x))^2 + \sin^2(x)} dx \end{array}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην [Ενότητα 7.5](#). Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.12. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx & \text{ii)} \int_{-1}^0 (1-x)e^{-x} dx \\ \text{iii)} \int_0^{\pi} (2x+6) \cos(2x) dx & \text{iv)} \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx \end{array}$$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.13. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και άρτια στο $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε

$$\text{ισχύει: } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Υπόδειξη: Ανάλογα με την [Εφαρμογή 7.6.12](#).

7.14. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, και το φυσικό αριθμό n , για να υπολογίζει προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$ κάνοντας κανονική διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας τα μέσα των υποδιαστημάτων, αντί να χρησιμοποιεί την αρχή των υποδιαστημάτων, όπως υλοποιείται στη συνάρτηση `riemannleft` ή ένα τυχαίο σημείο των υποδιαστημάτων, όπως στη συνάρτηση `riemannrand`. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$ στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b] = [0, 1]$ και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την υλοποίηση της συνάρτησης `riemannleft` (Παρατήρηση 7.6.4. (i)) και της συνάρτησης `riemannrand` (Παρατήρηση 7.7.1).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εφαρμογές ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος

Αποσπάσματα από την επιστολή (06/09/1916) του Albert Einstein (1879 -1955)

προς τον Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή,

λίγες μέρες πριν την ανακοίνωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Μου δώσατε την ελπίδα ότι θα θέλατε να γράψετε μία παραστατική ανάπτυξη της σχέσης Hamilton-Jakobi. Τώρα το κατάφερα ήδη μόνος μου και σας δείχνω τον απλό συλλογισμό μου, μόνο για να σας απαλλάξω από τον κόπο.

...

Δι αυτού δεν έχει φυσικά αποδειχθεί με κανέναν τρόπο το 'αντίστροφο' του Jakobi. Αλλά ήδη αρκεί η τυπική, αλλά λιγότερο διαφανής απόδειξη, όπως αυτή δίνεται από τον Appell. Αυτό που μου έλειπε ήταν ένας φυσικός δρόμος, για να φτάσω από τις ιδιότητες Lagrange στις ιδιότητες

Δεν θέλετε να σκεφτείτε περαιτέρω επί του προβλήματος των κλειστών χρονικών γραμμών; Σε αυτό έγκειται ο πυρήνας του ακόμα άλυτου Tesla του προβλήματος του χωρο-χρόνου.

Σας στέλνει τους καλύτερους του χαιρετισμούς ο απολύτως αφοσιωμένος σ' εσάς,

A. Einstein.

Υ.Γ.: Φυσικά, δεν φαντάζομαι ότι αυτές οι ασημαντότητες θα ήταν κάτι ή κάτι καινούριο. Πρόκειται για πράγματα, που μου δίνουν την αίσθηση της εξοικείωσης με το αντικείμενο.

Η απάντηση βρίσκεται στο Transcription de la lettre de C. Carathéodory à A. Einstein (16/12/1916)

Το κύριο πρόβλημα στη θεωρία των κανονικών αντικαταστάσεων μπορεί να αναπτυχθεί κατά τη γνώμη μου με τον πιο απλό τρόπο, ως εξής:
Εφόσον το ολοκλήρωμα Hamilton έχει τη μορφή ... κι εφόσον σε αυτό τεθούν ..., τότε οι διαφορικές εξισώσεις της Μηχανικής γίνονται ...

Ολόκληρη η θεωρία έπεται ως συνέπεια του μετασχηματισμού, ο οποίος οδήγησε στην εξίσωση.... Συγκρίνετε και με την περιγραφή από Whittakers Αναλυτική Δυναμική.

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873 - 1950)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εφαρμογές ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος στη γεωμετρία, στη μηχανική, στη φυσική και στα οικονομικά, όπως είναι το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, ο όγκος ενός στερεού από περιστροφή, το μήκος μίας καμπύλης, η συνάρτηση του κέρδους (αντίστοιχα κόστους) μίας επιχείρησης. Επιπλέον, παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, όπως είναι οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και η διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Προαπαιτούμενη γνώση

Αόριστο ολοκλήρωμα, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, Ορισμένο ολοκλήρωμα.

8.1. Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

8.1.1. Εμβαδόν επίπεδης περιοχής

Στον Ορισμό 7.6.3 και στη συνέχεια στην Παρατήρηση 7.6.4 είδαμε ότι για μία φραγμένη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κάνοντας μία διαμέριση του $[a, b]$ σε υποδιαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ και επιλέγοντας τυχαία $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, το άθροισμα Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = f(w_1)(x_1 - x_0) + f(w_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(w_n)(x_n - x_{n-1})$$

δίνει το κίνητρο για τον υπολογισμό του εμβαδού της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, (βλέπε, Σχήμα 8.1 και 8.2). Όσο η διαμέριση γίνεται λεπτότερη, δηλαδή, $|\Delta x| \rightarrow 0$, τότε το όριο

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i,$$

όταν υπάρχει, δίνει το εμβαδόν, E , αυτής της επίπεδης περιοχής, (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.6.).

Ορισμός 8.1.1. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, και το **εμβαδόν** της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, είναι ίσο με

$$E = \int_a^b f(x) dx,$$

όπου E συμβολίζει το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής.

Αν $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

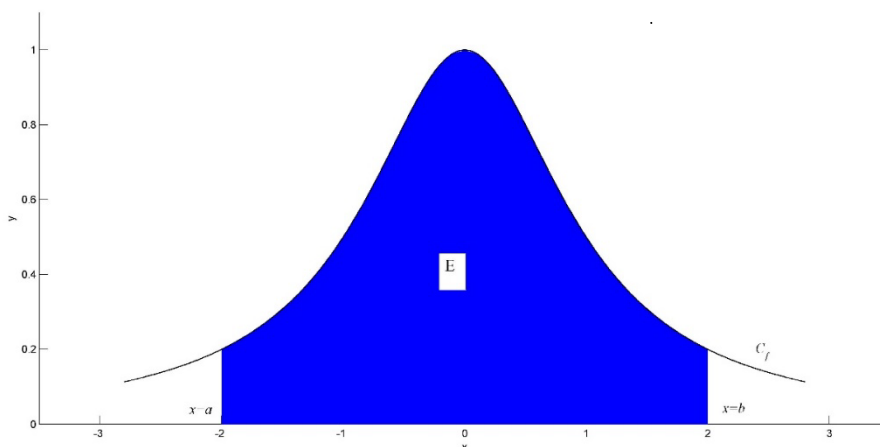
$$E = - \int_a^b f(x) dx.$$

Γενικά, ισχύει

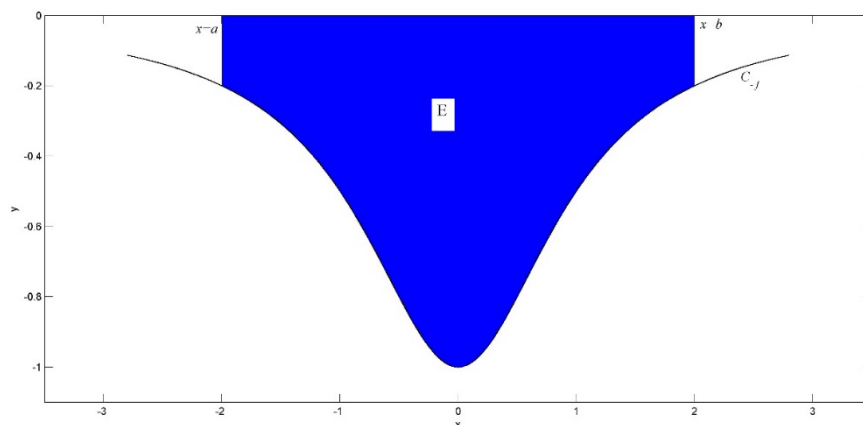
$$E = \int_a^b |f(x)| dx \tag{8.1.1}$$

Παρατηρήσεις 8.1.2.

i) Επειδή το εμβαδόν E ενός επίπεδου χωρίου παριστάνεται από θετικό πραγματικό αριθμό, γι' αυτόν το λόγο η συνάρτηση f απαιτείται να είναι θετική στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή, πρέπει να έχει γραφική παράσταση πάνω από τον άξονα $x'Ox$ (βλέπε, Σχήμα 8.1). Ενώ, αν η f είναι αρνητική στο $[a, b]$, δηλαδή, αν έχει γραφική παράσταση κάτω από τον άξονα $x'Ox$, ως εμβαδόν θεωρούμε τον αντίθετο αριθμό του $\int_a^b f(x) dx$ (βλέπε, Σχήμα 8.2). Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση $y = -f(x)$ έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $x'Ox$ και επομένως τα δύο επίπεδα τμήματα, που βρίσκονται είτε μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x = a$ και $x = b$, του άξονα $x'Ox$ και της καμπύλης $y = f(x)$ είτε μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x = a$ και $x = b$, του άξονα $x'Ox$ και της καμπύλης $y = -f(x)$, έχουν το ίδιο εμβαδόν.



Σχήμα 8.1: Γραφική παράσταση της f .



Σχήμα 8.2: Γραφική παράσταση της $-f$.

ii) Αν το ζητούμενο εμβαδόν E περικλείεται από την καμπύλη $x = g(y)$ και τις οριζόντιες ευθείες $y = c$ και $y = d$ και τον άξονα $y'Oy$, τότε, ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με τα παραπάνω, στο διάστημα $[c, d]$ έχουμε:

$$E = \int_c^d |g(y)| dy \quad (8.1.2)$$

Όταν έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε την περιοχή, της οποίας αναζητείται το εμβαδόν, είτε σαν περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $x = g(y)$, τις οριζόντιες ευθείες $y = c$, $y = d$ και τον άξονα $y'Oy$, είτε σαν περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = b$

και τον άξονα $x'Ox$, ακολουθούμε, για τον υπολογισμό του εμβαδού, είτε τον τύπο (8.1.2) είτε τον τύπο (8.1.1) και τότε η απάντηση παραμένει ίδια.

Ορισμός 8.1.3. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{ή} \quad g(x) \geq f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Το **εμβαδόν** E της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g , τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, είναι ίσο με

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (8.1.3)$$

Ανάλογα, αν $x = f(y)$ και $x = g(y)$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[c, d]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$f(y) \geq g(y) \quad \text{ή} \quad g(y) \geq f(y), \quad \text{για κάθε } y \in [c, d],$$

τότε το **εμβαδόν** E της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g , και τις οριζόντιες ευθείες $y = c$ και $y = d$, είναι ίσο με

$$E = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy. \quad (8.1.4)$$

Εφαρμογή 8.1.4.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από

i) τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x - 3$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -\frac{3}{2}$ και $x = 1$ και από τον άξονα $x'Ox$.

ii) τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 2$ και από τον άξονα $x'Ox$.

iii) την καμπύλη $y^2 = x$ και από την ευθεία $y = x - 6$.

iv) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$.

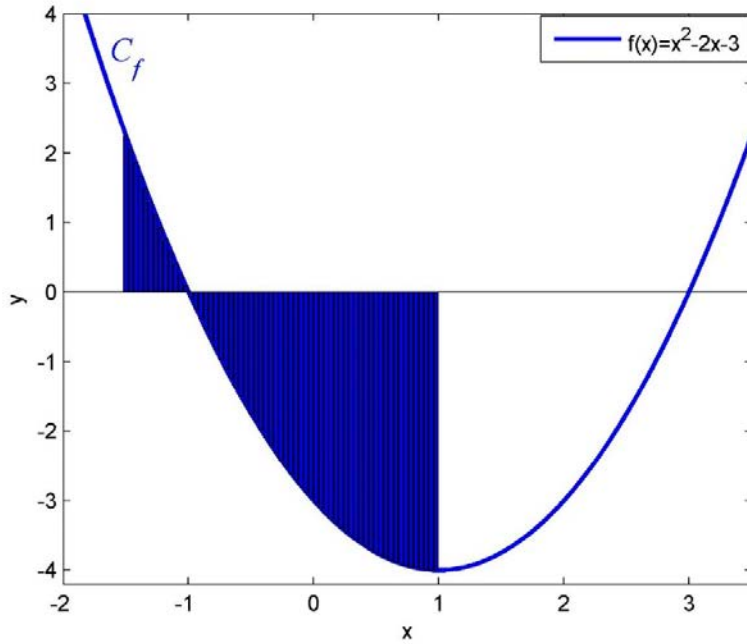
Απόδειξη:

i) Επειδή, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση ($2^{\text{ου}}$ βαθμού), είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, σύμφωνα με τον **Ορισμό 8.1.1**, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f . Ως γνωστόν, η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι μία παραβολή, η οποία τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $(-1, 0)$ και $(3, 0)$, (βλέπε, **Σχήμα 8.3**).

Παρατηρήστε ότι, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ και $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Επομένως, εφαρμόζοντας την (8.1.1) το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 |f(x)| dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx + \int_{-1}^1 -(x^2 - 2x - 3) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[\left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{27}{24} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) \right] + \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right] = \frac{47}{8}. \end{aligned}$$



Σχήμα 8.3: Εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο $[-3/2, 1]$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{47}{8}$ τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.) μέτρησης.

ii) Αρχικά $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση ($4^{\text{ου}}$ βαθμού).

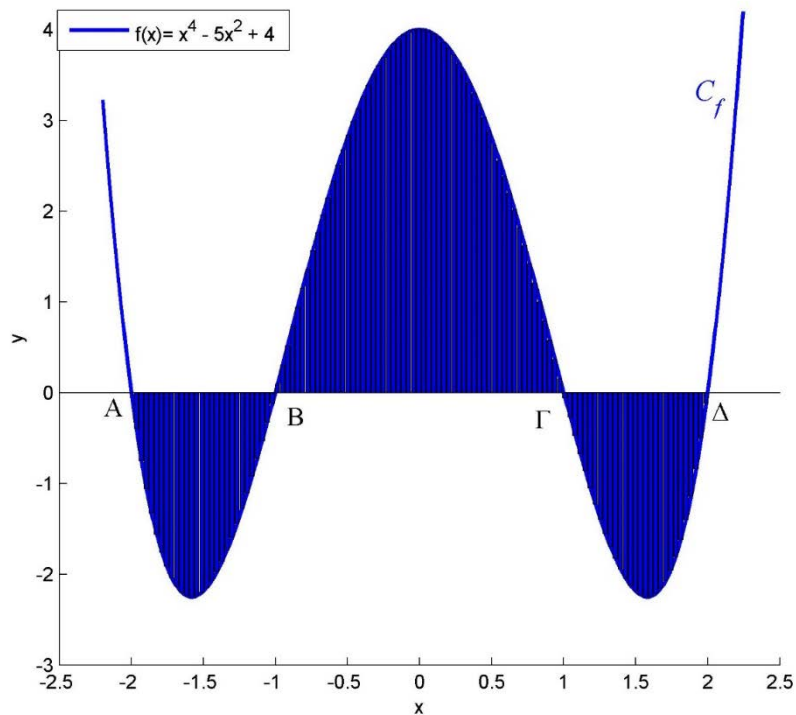
Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1. χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης f , οπότε αρχικά ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης.

Παρατηρήστε ότι, η εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ γράφεται $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$, οπότε οι ρίζες της είναι $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, και $x_4 = 2$, επομένως, όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 8.4 η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στα σημεία $A(-2,0)$, $B(-1,0)$, $\Gamma(1,0)$ και $\Delta(2,0)$. Επιπλέον, επειδή μπορούμε να γράψουμε $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της συνάρτησης f , το οποίο παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	-	+	+	+
$x^2 - 4$	+	-	-	-	+	+
$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	+	-	+	-	+	+

Συνεπώς, για κάθε $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ είναι $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$, ενώ για κάθε $x \in [-1, 2]$ είναι $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από την (8.1.1) και λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσημα της f έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} -(x^4 - 5x^2 + 4) dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx + \int_1^2 -(x^4 - 5x^2 + 4) dx = \\
 &= \left[-\frac{x^5}{5} + 5\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^5}{5} + 5\frac{x^3}{3} - 4x \right]_1^2 = \\
 &= \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8 \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4 \right) \right] + \left[\left(-\frac{32}{5} + \frac{40}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4 \right) \right] = 8.
 \end{aligned}$$



Σχήμα 8.4: Εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο $[-2, 2]$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι 8 τ.μ. μέτρησης.

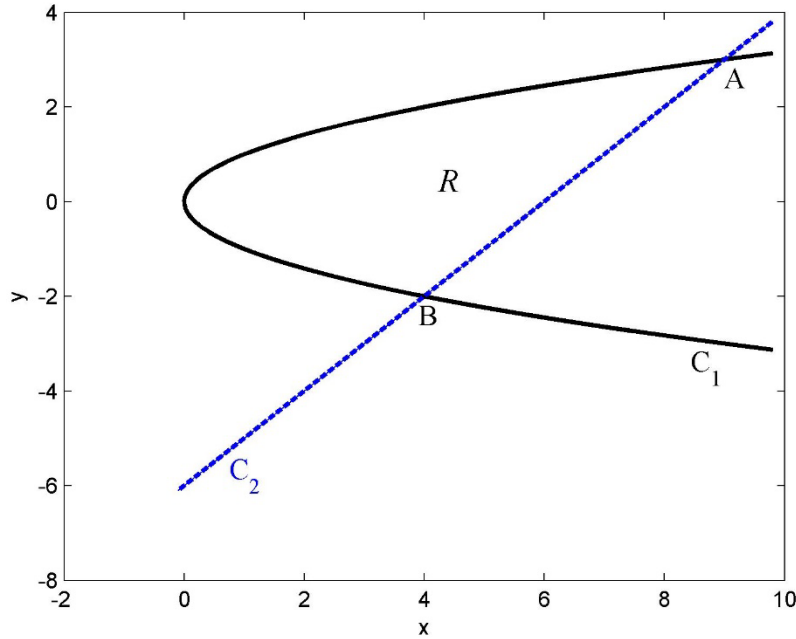
iii) Στο [Σχήμα 8.5](#) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση (C_1) της ευθείας $y = x - 6$, που τέμνει τη γραφική παράσταση (C_2) της παραβολής $y^2 = x$ (έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'Ox$) στα σημεία $A(9, 3)$ και $B(4, -2)$. Η καμπύλη της παραβολής $y^2 = x$ μπορεί να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση function parabola για μία μόνο συνάρτηση και αλλάζοντας τους άξονες x, y , (βλέπε, Ενότητα 1.7.2). Υπενθυμίζεται ότι τα σημεία τομής των παραπάνω καμπυλών υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ y &= x - 6 \end{aligned}$$

Η περιοχή R , της οποίας αναζητείται το εμβαδόν, φράσσεται από την παραβολή $x = y^2$, την ευθεία $x = y + 6$ και τις οριζόντιες ευθείες $y = -2$ και $y = 3$. Επειδή στο διάστημα $[-2, 3]$, της μεταβολής του y , έχουμε $y^2 \leq y + 6$, από την (8.1.4) υπολογίζουμε το ζητούμενο εμβαδόν:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^3 |f(y) - g(y)| dy = \int_{-2}^3 |y^2 - (y + 6)| dy = \int_{-2}^3 (y + 6 - y^2) dy = \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 6y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{125}{6}$ τ.μ. μέτρησης.



Σχήμα 8.5: Γραφικές παραστάσεις της ευθείας $y = x - 6$ και της παραβολής $y^2 = x$.

Για το E_{R_1} παρατηρήστε ότι η περιοχή R_1 είναι ένωση δύο συμμετρικών ως προς τον άξονα $x'Ox$ περιοχών, άρα και ισεμβαδικών. Επομένως, το E_{R_1} είναι το διπλάσιο του εμβαδού της περιοχής, που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα $x'Ox$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ (άξονας $y'Oy$) και $x = 4$. Οπότε, από την (8.1.1) έχουμε:

$$E_{R_1} = 2 \int_0^4 \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{4}{3} \sqrt{4^3} = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

Για το E_{R_2} από τη σχέση (8.1.3) έχουμε

$$\begin{aligned} E_{R_2} &= \int_4^9 |\sqrt{x} - (x-6)| dx = \int_4^9 (\sqrt{x} - x + 6) dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_4^9 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{9^3} - \frac{9^2}{2} + 54 \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{4^3} - \frac{16}{2} + 24 \right) = \frac{61}{6} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

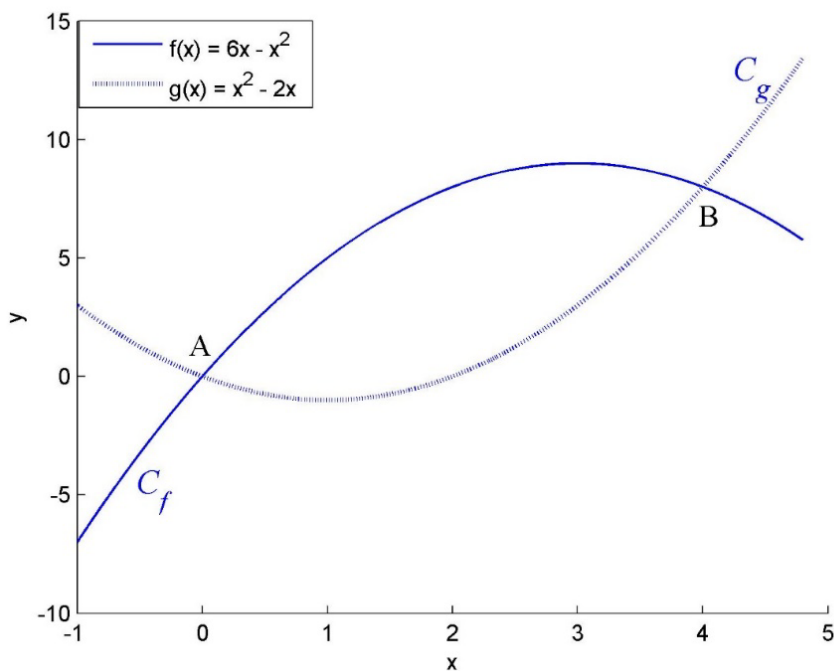
Τελικά,

$$E = E_{R_1} + E_{R_2} = \frac{32}{3} + \frac{61}{6} = \frac{125}{6} \text{ τ.μ.}$$

iv) Στο **Σχήμα 8.6** παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία A(0, 0) και B(4, 8), που υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων. Επειδή ενδιαφερόμαστε για το πρόσημο της $f(x) - g(x)$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $x^2 - 2x \leq 6x - x^2$, όταν $x \in [0, 4]$, (βλέπε, Σχήμα 8.6). Επομένως, από τη σχέση (8.1.3), το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ τ.μ. μέτρησης.}$$

Παρατήρηση. Ανεξάρτητα από το Σχήμα 8.6, αν $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$, τότε για κάθε $x \in [0, 4]$ ισχύει: $f(x) - g(x) = (6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2 = 2x(4 - x) \geq 0$



Σχήμα 8.6: Γραφικές παραστάσεις των παραβολών $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$.

◇◇

8.1.2. Όγκος στερεού από περιστροφή

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της επίπεδης περιοχής R , που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = b$ και τον άξονα $x'Ox$.

Ακολουθούμε μία ανάλογη διαδικασία με εκείνη που περιγράψαμε για τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδης περιοχής (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.4). Έστω μία διαμέριση

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

του διαστήματος $[a, b]$, μήκους $\Delta x = \max \{ |\Delta x_i| : 1 \leq i \leq n \}$ και έστω $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε, ο αριθμός

$$\Delta V_i = \pi (f(w_i))^2 \Delta x$$

παριστάνει τον όγκο ενός στοιχειώδους κυλίνδρου με ύψος το Δx και ακτίνα βάσης $f(w_i)$, δηλαδή, παριστάνει τον όγκο ενός κυλίνδρου, που παράγεται από την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις Δx και $f(w_i)$ γύρω από τον άξονα $x'Ox$. Σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi (f(w_i))^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^n (f(w_i))^2 \Delta x.$$

Όσο λεπτότερη είναι η αρχική διαμέριση, δηλαδή $|\Delta x| \rightarrow 0$, τόσο πιο κοντά στην πραγματική τιμή του όγκου του στερεού είναι η προσεγγιστική τιμή του αθροίσματος των στοιχειωδών όγκων ΔV_i . Ορίζουμε, με τον τρόπο αυτό, τον **όγκο του στερεού από περιστροφή** γύρω από τον άξονα $x'Ox$ να είναι

$$V = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi(f(w_i))^2 \Delta x \quad (8.1.5)$$

Επειδή, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ προκύπτει ότι και η f^2 είναι συνεχής στο $[a, b]$. Επομένως, το παραπάνω όριο υπάρχει και ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$, το οποίο διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 8.1.5. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, και ο **όγκος** του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, είναι

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx. \quad (8.1.6)$$

Ανάλογα, αν $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[c, d]$ επί του άξονα $y'Oy$ με

$$g(y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in [c, d].$$

Ο **όγκος** του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'Oy$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $x = g(y)$ και τις οριζόντιες ευθείες $y = c$ και $y = d$, είναι

$$V = \int_c^d \pi(g(y))^2 dy. \quad (8.1.7)$$

Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ με

$$0 \leq g(x) \leq f(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Ο **όγκος** του στερεού, που προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, $y = g(x)$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, είναι

$$V = \int_a^b \pi(f^2(x) - g^2(x)) dx. \quad (8.1.8)$$

Παράδειγμα 8.1.6

i) Να υπολογισθεί ο όγκος V ενός βαρελιού σε μονάδες κυβικών μέτρων (κ.μ.), που σχηματίζεται περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα $x'Ox$ την επίπεδη περιοχή, που περικλείεται από τη συνάρτηση $y = f(x) = 2 - x^2$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.

ii) Θέτοντας $\Delta x = \frac{2}{n}$, να υπολογίσετε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann, V_n , που προσεγγίζει τον όγκο του βαρελιού με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς αυξάνει το n . Να γράψετε μία συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave, που να υπολογίζει το V_n για ποικίλες τιμές του n , και να εκτιμήσετε, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n , ώστε το V_n να προσεγγίζει τον ακριβή όγκο V με ακρίβεια τουλάχιστον έξι δεκαδικών ψηφίων.

Αρχικά παρατηρήστε ότι, η συνεχής συνάρτηση $f(x) = 2 - x^2$ είναι **θετική** για κάθε $x \in [-1, 1]$, επομένως το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο, δηλαδή, η περιστροφή της $f(x) = 2 - x^2$ γύρω από τον άξονα $x'Ox$ δημιουργεί κάποιο στερεό, το βαρέλι.

Επομένως, το βαρέλι έχει κυκλική άνω και κάτω βάση ακτίνας 1 μέτρου, έχει συνολικό ύψος 2 μέτρα και μέγιστη κυκλική διατομή ακτίνας 2 μέτρων. Χωρίζοντας το βαρέλι σε λεπτές «φέτες» παράλληλες προς τη βάση του και κάθετες τον άξονα $x'Ox$, δημιουργούνται κυκλικοί δίσκοι ακτίνας $y = f(x) = 2 - x^2$, το δε ύψος κάθε «φέτας» είναι Δx . Καθώς $\Delta x \rightarrow 0$, ο όγκος του βαρελιού δίνεται από τη σχέση (8.1.5)

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi (f(w_i))^2 \Delta x = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx = \pi \left(\int_{-1}^0 (2 - x^2)^2 dx + \int_0^1 (2 - x^2)^2 dx \right),$$

και λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα $y'Oy$ τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα αναφέρονται σε στερεά ίσου όγκου, οπότε έχουμε:

$$V = 2\pi \int_0^1 (2 - x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (4 - 4x^2 + x^4) dx = 2\pi \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{86}{15}\pi = 18.0117978805$$

Άρα, ο όγκος του βαρελιού είναι $V = 18.0117978805$ κ.μ.

Όπως στην Παρατήρηση 7.6.4, κάνοντας κανονική διαμέριση του διαστήματος $[-1, 1]$, μήκους $\Delta x = \frac{2}{n}$, για το

$w_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [-1, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ μπορούμε να επιλέξουμε $w_i = x_{i-1} = -1 + (i-1)\Delta x = -1 + \frac{2i-2}{n}$, με

$x_0 = -1$. Τότε η συνάρτηση γράφεται $f(w_i) = 2 - \left(-1 + \frac{2i-2}{n} \right)^2$, οπότε χρησιμοποιώντας Matlab/Octave

δημιουργούμε την ακόλουθη συνάρτηση (function) για να υπολογίζει την τιμή του αθροίσματος

$$Vn = \pi \sum_{i=1}^n (f(w_i))^2 \Delta x = \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left(2 - \left(-1 + \frac{2i-2}{n} \right)^2 \right)^2.$$

Παρατηρήστε ότι, η Vn εξαρτάται μόνο από το n (και μάλιστα αντιστρόφως ανάλογα), οπότε Vn θα προσεγγίζει τον όγκο V του βαρελιού με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς θα αυξάνει το n .

```
function [Vn]=volumebarrel(n)

s=0;
for i=1:n
    s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
    s=s+s1;
end
Vn=2*pi*(1/n)*s;
end
```

Εκτελώντας την παραπάνω συνάρτηση για κατάλληλες τιμές του n προέκυψαν οι αντίστοιχες τιμές για τον όγκο Vn , όπως παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$n = 100$	$Vn = 18.0109600890$
$n = 500$	$Vn = 18.0117643702$
$n = 1000$	$Vn = 18.0117895029$
$n = 2000$	$Vn = 18.0117957861$
$n = 3000$	$Vn = 18.0117969497$

$n = 3084$	$Vn = 18.0117969997$
$n = 3085$	$Vn = 18.0117970003$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για τιμές του $n \gg 3085$ διαπιστώνουμε ότι η προσεγγιστική τιμή του όγκου Vn στα πρώτα έξι δεκαδικά ψηφία δεν μεταβάλλεται. Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του n , που προσεγγίζει την τιμή του όγκου V με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων είναι $n = 3085$.

Παρατήρηση: Αν δεν γνωρίζαμε τον όγκο V (θεωρητική λύση του προβλήματος) και χρειαζόταν να τον υπολογίσουμε, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα Riemann για διαδοχικές τιμές του n , μέχρι η διαφορά δύο διαδοχικών αθροισμάτων να γίνει μικρότερη ή ίση από μια τιμή ε .

Στη συνάρτηση που ακολουθεί, γραμμένη για Matlab/Octave, εισάγουμε την επιθυμητή τιμή ε (epsilon) και με βάση αυτήν υπολογίζεται το άθροισμα Riemann, προσεγγιστική τιμή του όγκου (Vn), γίνεται ο έλεγχος δύο διαδοχικών αθροισμάτων (Vn_{prev} , Vn) και όταν η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη από ε , τότε ο αλγόριθμος σταματά και εμφανίζονται η τιμή του n , καθώς και η τιμή του Vn .

```
function [Vn]=volumebarrel2(epsilon)

n=1;
s=0;
    for i=1:n
        s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
        s=s+s1;
    end
Vn=2*pi*(1/n)*s;
d=Vn;
Vnprev=Vn;

while d>epsilon
    n=n+1;
    s=0;
        for i=1:n
            s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
            s=s+s1;
        end
    Vn=2*pi*(1/n)*s;
    d=Vn-Vnprev;
    Vnprev=Vn;

end
display(n);
end
```

Εκτελώντας την παραπάνω συνάρτηση για $\text{epsilon} = 10^{-6}$ προκύπτει η απάντηση:

$n = 257$	$Vn = 18.0116710409$
-----------	----------------------

◇◇

Εφαρμογή 8.1.7.

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή

i) γύρω από τον άξονα $y'Oy$ της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $y = x^3$ τον άξονα $y'Oy$ και την ευθεία $y = 3$.

ii) γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y^2 = 8x$.

iii) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$.

Απόδειξη:

i) Η περιοχή, που περιστρέφεται, περικλείεται από τις οριζόντιες ευθείες $y = 0$ και $y = 3$ τον άξονα $y'Oy$ και την καμπύλη $x = \sqrt[3]{y}$. Σύμφωνα με τον τύπο (8.1.7) ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_0^3 \pi (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^3 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5} \pi \left[y^{\frac{5}{3}} \right]_0^3 = \frac{9\sqrt[3]{9}\pi}{5} \text{ κυβικές μονάδες (κ.μ.).}$$

ii) Η περιοχή, που περιστρέφεται, περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο παραβολών $y = x^2$ και $y^2 = 8x$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία $(0,0)$ και $(2,4)$. Υπενθυμίζεται ότι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y^2 &= 8x \end{aligned}$$

δίνει τα σημεία τομής των παραπάνω παραβολών. Επίσης, αν θέσουμε $f^2(x) = x^4$ και $g^2(x) = 8x$, μπορούμε να γράψουμε:

$$g^2(x) - f^2(x) = 8x - x^4 = x(8 - x^3) = x(2^3 - x^3) = x(2 - x)(x^2 - 2x + 4)$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα του γινομένου στην $g^2(x) - f^2(x)$ παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	+	+	+
$2 - x$	+	+	-	-
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+	+
$g^2(x) - f^2(x)$	-	+	-	-

Είναι φανερό ότι

$$g^2(x) - f^2(x) = 8x - x^4 \geq 0, \text{ για } 0 \leq x \leq 2.$$

Επομένως, από τον τύπο (8.1.8) έχουμε:

$$V = \int_0^2 \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^2 (8x - x^4) dx = \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \text{ κ.μ.} \quad \diamond$$

8.1.3. Μήκος καμπύλης

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, της οποίας η παράγωγος f' είναι συνεχής στο $[a, b]$. Μία τέτοια συνάρτηση λέγεται **λεία** (smooth) στο $[a, b]$. Πάνω στην καμπύλη $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, θεωρούμε δύο σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$. Αναζητούμε να υπολογίσουμε το μήκος του τόξου \widehat{AB} .

Θεωρούμε μία διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

μήκους $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όπου, για $1 \leq i \leq n$, στο x_i αντιστοιχεί το σημείο $P_i(x_i, f(x_i))$ του τόξου \widehat{AB} , στο x_0 το σημείο A και στο x_n το B . Τότε, είναι γνωστό ότι, το μήκος $|P_{i-1}P_i|$ είναι

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

όπου $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Εφόσον η f είναι μία λεία συνάρτηση στο $[a, b]$, έπεται ότι υπάρχει η f' σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλέπε, Θεώρημα 6.1.3)

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(w_i), \text{ για κάποιο } w_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Επομένως,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} |\Delta x_i| = \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} |\Delta x_i|.$$

Το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} |\Delta x_i|$$

προσεγγίζει το ζητούμενο μήκος του τόξου \widehat{AB} και μάλιστα η προσέγγιση αυτή γίνεται καλύτερη, όταν η διαμέριση έχει μήκος $\Delta x \rightarrow 0$, όπου $\Delta x = \max\{|\Delta x_i|; 1 \leq i \leq n\}$, (βλέπε, Ορισμός 7.6.1). Ορίζουμε το μήκος του \widehat{AB} ως το

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \Delta x \right),$$

όταν το όριο υπάρχει. Επίσης, επειδή η συνάρτηση $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ υπάρχει και είναι ίσο με το παραπάνω όριο.

Ορισμός 8.1.8. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Το μήκος l του τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο $A(a, f(a))$ ως το σημείο $B(b, f(b))$ είναι:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (8.1.9)$$

Ανάλογα, αν $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[c, d]$ επί του άξονα $y'Oy$, το μήκος l του τόξου της καμπύλης $x = g(y)$ από το σημείο $y = c$ ως το σημείο $y = d$ είναι:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy \quad (8.1.10)$$

Παραδείγματα 8.1.9.

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

i) $y = x^{\frac{3}{2}}$ από το σημείο $(1, 1)$ ως το σημείο $(4, 8)$.

ii) $y = \cosh(x)$ από το σημείο $(0, 1)$ ως το σημείο $(1, \cosh(1))$.

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ είναι λεία στο $[1, 4]$. Εφόσον $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, το μήκος του τόξου της καμπύλης

υπολογίζεται από τον τύπο (8.1.9) και είναι:

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx$$

Θέτουμε $1 + \frac{9x}{4} = t$, οπότε $dx = \frac{4}{9} dt$ και $\sqrt{1 + \frac{9x}{4}} = t^{\frac{1}{2}}$. Το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{4}{9} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στο μήκος τόξου l προκύπτει:

$$l = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + c \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[10^{\frac{3}{2}} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{8} \right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \frac{13\sqrt{13}}{8} \right]$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \cosh(x)$ είναι λεία στο διάστημα $[0,1]$ και $(\cosh(x))' = \sinh(x)$, καθώς και $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$, (βλέπε, Πίνακα 5.2 και Εφαρμογή 1.6.16 (i), αντίστοιχα). Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(x) \geq 1 \Rightarrow |\cosh(x)| = \cosh(x)$, και $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.6.6 (ii), και Πίνακα 7.1.10, αντίστοιχα). Επομένως, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις στον (8.1.9) το ζητούμενο μήκος τόξου της καμπύλης είναι:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[(\cosh(x))'\right]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = \int_0^1 |\cosh(x)| dx = \int_0^1 \cosh(x) dx = [\sinh(x)]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2e}. \quad \diamond$$

Εφαρμογή 8.1.10. Έστω $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Το διαφορικό ds του τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ δίνεται:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8.1.11)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

η οποία δίνει το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο $(a, f(a))$ ως το σημείο $(x, f(x))$, για κάποιο $x \in [a,b]$. Σύμφωνα με το θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, Θεώρημα 7.6.8.) και την (7.6.12) έχουμε

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

και από $y = f(x)$, η απόδειξη του τύπου στην (8.1.11) ολοκληρώνεται. ◇

8.2 Εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος σε Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών με πάρα πολλές εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα διαφόρων προβλημάτων, που παρουσιάζονται στις Φυσικές, Βιολογικές και Κοινωνικές Επιστήμες, για παράδειγμα, ο νόμος του Νεύτωνα $F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$ είναι η πρώτη διαφορική εξίσωση στην ιστορία, η κίνηση σώματος αναρτημένου σε ελατήριο, η ένταση του ρεύματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, η κατανομή θερμοκρασίας σε μία ράβδο, η μετατόπιση ορόφων ενός κτηρίου σε σεισμό, τα λογιστικά μοντέλα και μοντέλα επενδύσεων κεφαλαίων κ.α. Αρκετά παραδείγματα εφαρμογών, στη μηχανική, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στα φαινόμενα ψύξης-θέρμανσης, στη ροή των ρευστών, στην ταχύτητα των χημικών αντιδράσεων, στα πληθυσμιακά μαθηματικά πρότυπα, στην ιατρική, στην οικονομία, στην ψυχολογία, στην εκπαίδευση, κ.α. και από άλλους τομείς των επιστημών, αναπτύσσονται αναλυτικά (Σιαφάρικας, 2014).

Ορισμός 8.2.1. Έστω $x \in A$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ και $y: A \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Η εξίσωση

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (8.2.1)$$

που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή x με την **άγνωστη** συνάρτηση y και τις παραγώγους $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ ή τα διαφορικά dy, d^2y, \dots, d^ny αυτής μέχρι n τάξης, ονομάζεται **πραγματική συνήθης διαφορική εξίσωση** (ordinary differential equation) **n τάξης**.

Ο φυσικός αριθμός, ο οποίος δηλώνει τη μεγαλύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης y στη διαφορική εξίσωση, ονομάζεται **τάξη** της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Όταν έχουμε εξισώσεις, που συνδέουν συναρτήσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές και τις μερικές παραγώγους αυτών, τις ονομάζουμε *διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους* ή *μερικές διαφορικές εξισώσεις* (partial differential equations). Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης στην παρούσα ενότητα, οπότε στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο διαφορική εξίσωση αναφερόμαστε μόνο σε συνήθη διαφορική εξίσωση.

Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι:

$$y'(x) - y(x) = 1 \quad (8.2.2)$$

$$(1+x)dx - x^2y(x)dy = 0 \quad (8.2.3)$$

$$3y(x)y'(x) + y^2(x) + x^2 = 0 \quad (8.2.4)$$

$$y''(x) + 9y(x) = 5\sin(x) \quad (8.2.5)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y(x) = 2e^x \quad (8.2.6)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις στις (8.2.2)-(8.2.4) είναι πρώτης τάξης, ενώ οι (8.2.5), (8.2.6) είναι δεύτερης τάξης.

Ορισμός 8.2.2. Η συνήθης διαφορική εξίσωση n τάξης στην (8.2.1), αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (8.2.7)$$

ονομάζεται **κανονική μορφή** ή **λυμένη μορφή** της (8.2.1).

Σύμφωνα με τους Ορισμούς 8.2.1 και 8.2.2, μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει τη μορφή $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ ή $y'(x) = f(x, y(x))$.

Τα παραπάνω παραδείγματα στην (8.2.2) και στην (8.2.3) γράφονται αντίστοιχα:

$$F(x, y(x), y''(x)) = y'(x) - y(x) - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad y'(x) = y(x) + 1 = f(x, y(x))$$

$$1 + x - x^2 y(x) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F(x, y(x), y'(x)) = 1 + x - x^2 y(x) y'(x) = 0$$

ή $y'(x) = \frac{1+x}{x^2 y(x)} = f(x, y(x))$, όταν $x^2 y(x) \neq 0$.

Κατά τη διαδικασία επίλυσης μίας διαφορικής εξίσωσης σκοπός είναι να υπολογισθεί ο τύπος της συνάρτησης y , ο οποίος να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση. Μία τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Πριν προχωρήσουμε στον αυστηρό ορισμό της λύσης της διαφορικής εξίσωσης, ας δούμε ένα παράδειγμα. Η συνάρτηση $y(x) = \sin(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

επειδή

$$y''(x) = -\sin(x) \quad \text{και} \quad y''(x) + y(x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0.$$

Επίσης, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι και η συνάρτηση $y(x) = \cos(x)$ αποτελεί λύση της $y''(x) + y(x) = 0$.

Για τη διαφορική εξίσωση $y''(x) = 0$ έχουμε (με πρώτη ολοκλήρωση) ότι $y'(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, και (με δεύτερη ολοκλήρωση)

$$y(x) = \int c_1 dx = c_1 x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η **λύση** της διαφορικής εξίσωσης $y''(x) = 0$ είναι η $y(x) = c_1 x + c_2$, η οποία για διαφορετικά $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ δίνει άπειρες λύσεις. Επομένως, η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης **δεν είναι μοναδική**.

Ορισμός 8.2.3. Γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης ορισμένη στο διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$, όπως στην (8.2.1), ονομάζεται η πραγματική συνάρτηση

$$y(x) = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

η οποία περιέχει n αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n , και έχει παραγώγους μέχρι n τάξης, που ορίζονται στο A , η δε διαφορική εξίσωση επαληθεύεται ταυτοτικά για κάθε $x \in A$ μετά από την αντικατάσταση της γενικής λύσης καθώς και των παραγώγων της.

Μία λύση, που προκύπτει από τη γενική λύση για μία συγκεκριμένη n -αδα των αυθαίρετων σταθερών, ονομάζεται **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης.

- Όταν το διάστημα A είναι της μορφής $[x_0, a)$ ή $[x_0, a]$ ή $[x_0, +\infty)$ και αναζητείται η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης, που είναι ορισμένη στο A , και για κάποια γνωστά $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες n συνθήκες

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$y''(x_0) = y_2$$

⋮

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

τότε λέμε ότι πρόκειται για ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**¹ (initial value problem) ή **πρόβλημα αρχικών συνθηκών** ή **πρόβλημα Cauchy**.

¹ Ο χαρακτηρισμός «πρόβλημα αρχικών τιμών» οφείλεται στο γεγονός ότι συχνά η ανεξάρτητη μεταβλητή του προβλήματος είναι ο χρόνος, η αρχική συνθήκη ορίζει την κατάσταση στην αρχική στιγμή του και η λύση της διαφορικής εξίσωσης περιγράφει τι συμβαίνει οποιαδήποτε χρονική στιγμή αργότερα.

- Όταν $A = [a, b]$ και αναζητείται η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης, που είναι ορισμένη στο A και ικανοποιεί συνθήκες οι οποίες αναφέρονται στα άκρα του διαστήματος $A = [a, b]$, τότε λέμε ότι πρόκειται για ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών** (boundary value problem).

Παρατήρηση 8.2.4.

i) Όπως έχουμε αναφέρει στην Ενότητα 1.1. μία συνάρτηση y είναι γνωστή, όταν ο τύπος που δίνει την εικόνα $y(x)$ είναι γνωστός, όπου x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Επομένως, στη συνέχεια, κατά τη διαδικασία υπολογισμού της γενικής (ή μερικής) λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης θα γράφουμε y και όταν αποκτούμε τη λύση θα την γράφουμε με τον τύπο της, δηλαδή $y(x)$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, για να μην δημιουργείται σύγχυση στον αναγνώστη στη συνέχεια, θα μπορούσαμε να ξαναγράψουμε τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης από την (8.2.1) ως $F(x, y, y'(x)) = 0$, και την κανονική μορφή της από την (8.2.7) ως

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (8.2.8)$$

ii) Η γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της, δηλαδή n . Αυτές υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος, που προκύπτει, όταν δοθούν αρχικές συνθήκες, που σε πλήθος πρέπει να είναι τόσες όσες και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή n .

iii) Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση εφόσον η συνάρτηση f στην (8.2.7) είναι συνεχής σε μία περιοχή B του σημείου $A_0(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$. Επιπλέον, αν η συνάρτηση f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους στην περιοχή B , τότε η μερική λύση είναι μοναδική, (βλέπε, Θεώρημα 3.2.1., (Σιαφαρίκας, 2014)).

iv) Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν έχει πάντοτε λύση ή αν έχει, αυτή μπορεί να μην είναι μοναδική.

v) Η γραφική παράσταση της γενικής λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** ή γραμμή της διαφορικής εξίσωσης.

vi) Σε μερικές περιπτώσεις η γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή, $C(x, y(x)) = 0$, επειδή δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί η ισότητα $C(x, y(x)) = 0$ ως προς $y(x)$.

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται, συνήθως, ανάλογα με την τάξη τους ή με το αν είναι γραμμικές, (βλέπε, Ορισμός 8.2.10) ή μη-γραμμικές. Για όλες τις κατηγορίες των διαφορικών εξισώσεων είναι δύσκολο να αναπτυχθεί μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό της γενικής λύσης, και σε ορισμένες περιπτώσεις και μεθοδολογία να υπάρχει η επίλυση δεν είναι εύκολη, οπότε τότε αναζητούμε αριθμητικές λύσεις, το οποίο ξεφεύγει από τους σκοπούς μας. Ακόμη και οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης οδηγούν σε σύνθετους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων, τότε χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για να προσεγγίσουν τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης, περισσότερο για τις μεθόδους ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει (Βραχάτης, 2011; Σαρής & Καρακασίδης, 2014; Chapra, S. C., & Canale, R. P. 2014). Εδώ, ως εφαρμογές των αόριστων ολοκληρωμάτων, αναφέρουμε τις ακόλουθες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

- Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και ως εφαρμογή της είναι
 - η ομογενής διαφορική εξίσωση.
- Γραμμική διαφορική εξίσωση και ως εφαρμογή της είναι
 - η διαφορική εξίσωση του Bernoulli.

8.2.1. Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και Ομογενής διαφορική εξίσωση

Ορισμός 8.2.5. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης στην κανονική μορφή της, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται διαφορική εξίσωση **χωριζόμενων μεταβλητών**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{P(x)}{Q(y)}, \quad (8.2.9)$$

ισοδύναμα

$$P(x)dx - Q(y)dy = 0,$$

όπου $P(x)$, $Q(y)$ είναι συναρτήσεις του x και του y , αντίστοιχα.

Επειδή από την ισοδύναμη μορφή της (8.2.9) μπορούμε να γράψουμε

$$Q(y)dy = P(x)dx \quad (8.2.10)$$

είναι φανερό ότι ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (8.2.10) αποκτούμε τη γενική λύση της (8.2.9). Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών υπολογίζεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\int Q(y)dy = \int P(x)dx$$

Παρατηρήστε ότι, το κάθε μέλος της ισότητας στην (8.2.10) είναι συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής, στο γεγονός αυτό οφείλεται ο χαρακτηρισμός αυτής της κατηγορίας των διαφορικών εξισώσεων.

Παραδείγματα 8.2.6.

Να υπολογισθεί η λύση (γενική ή μερική) σε κάθε μία από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

i) $xy'(x) + y^2(x) = 0$.

ii) $y'(x) + y^2(x)e^x = 0$, όταν $y(0) = 1$.

i) Αρχικά παρατηρούμε ότι για $x = 0$, η διαφορική εξίσωση έχει λύση την $y(0) = 0$, άρα το σημείο $(0, 0)$ συμπεριλαμβάνεται στη λύση.

Στη συνέχεια θεωρούμε $x \neq 0$. Σύμφωνα με τα σχόλια στην [Παρατήρηση 8.2.4. \(i\)](#) η διαφορική εξίσωση $xy'(x) + y^2(x) = 0$ γράφεται $xy'(x) + y^2 = 0$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$xy'(x) + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x}dx$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη στην τελευταία ισότητα, το καθένα ως προς τη δική του μεταβλητή, προκύπτει:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{y} + c_1 = \ln|x| + c_2 \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x| + c_3,$$

όπου $c_3 = c_2 - c_1$. Θέτουμε $c_3 = \ln c$, για κάποιο c θετικό πραγματικό αριθμό και από τη γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων έχουμε

$$\frac{1}{y} = \ln|x| + c_3 \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x| + \ln c = \ln|cx| \Rightarrow y = \frac{1}{\ln|cx|} \Rightarrow y = y(x) = \frac{1}{\ln|cx|}, \quad c \in \mathbb{R},$$

η οποία αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, όταν $x \neq 0$.

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη συνάρτηση:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{\ln|cx|}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, από την ολοκλήρωση και των δύο μελών προκύπτουν δύο αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες ουσιαστικά είναι μία (επειδή πράξεις μεταξύ σταθερών είναι σταθερός αριθμός). Η γενική λύση περιέχει μία αυθαίρετη σταθερά, όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, γεγονός που επιβεβαιώνει το σχόλιο στην [Παρατήρηση 8.2.4 \(ii\)](#).

ii) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x) + y^2 e^x = 0$ σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i), είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$y'(x) + y^2 e^x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2 e^x \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = e^x dx,$$

η οποία είναι της μορφής όπως στην (8.2.10). Επομένως, η γενική λύση προκύπτει μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη ως εξής:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int e^x dx \Rightarrow \frac{1}{y} = e^x + c \Rightarrow y = y(x) = \frac{1}{e^x + c}.$$

Συνδυάζοντας τη γενική λύση

$$y(x) = \frac{1}{e^x + c}$$

με την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς c , για την οποία έχουμε:

$$1 = \frac{1}{e^0 + c} = \frac{1}{1 + c} \Rightarrow c = 0$$

Επομένως, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(x) + y^2(x)e^x = 0$, που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = 1$ είναι

$$y(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Υπενθυμίζεται ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση, επειδή διατυπώνεται με αρχική συνθήκη αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, (βλέπε, Ορισμός 8.2.3.). ◇◇

Εφαρμογή 8.2.7. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται **ομογενής**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x) = f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (8.2.11)$$

όταν, δηλαδή, η $y'(x)$ είναι συνάρτηση του πηλίκου $\frac{y}{x}$.

Κάθε ομογενής διαφορική εξίσωση ανάγεται σε μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $u = u(x)$, αν θέσουμε

$$u = \frac{y}{x}. \quad (8.2.12)$$

Απόδειξη: Από την (8.2.12) η συνάρτηση $y = y(x)$ μπορεί να γραφεί $y = xu$, οπότε παραγωγίζοντάς την κατά μέλη και εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγώγου του γινομένου συναρτήσεων, προκύπτει:

$$y'(x) = x'u(x) + xu'(x) \Leftrightarrow y'(x) = u + xu'(x) \quad (8.2.13)$$

Χρησιμοποιώντας τις (8.2.13) και (8.2.12) σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.11), αυτή γράφεται:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu'(x) = f(u) \Rightarrow xu'(x) = f(u) - u$$

Υποθέτοντας ότι $x \neq 0$, η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί $u'(x) = \frac{f(u) - u}{x}$, η οποία είναι της μορφής (8.2.9), δηλαδή, είναι διαφορική εξίσωση των χωριζόμενων μεταβλητών x, u . ◇◇

Παραδείγματα 8.2.8.

Να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $2xy(x)y'(x) = x^2 + 3y^2(x)$, όταν $x \neq 0$.

ii) $x^3 dy + (y^3(x) - x^2 y(x)) dx = 0$, όταν $x \neq 0$.

i) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i) η διαφορική εξίσωση γράφεται $2xyy'(x) = x^2 + 3y^2$, την οποία λύνουμε ως προς $y'(x)$ και έχουμε:

$$y'(x) = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} \quad (8.2.14)$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $y \neq 0$, διότι αν υποθέσουμε ότι $y = 0$, η διαφορική εξίσωση δίνει $x = 0$, που είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή του δεξιού μέλους της ισότητας στην (8.2.14) δια x^2 , ($x \neq 0$), οπότε προκύπτει

$$y'(x) = \frac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

δηλαδή, πρόκειται για μία ομογενή διαφορική εξίσωση, σύγκρινε με την (8.2.11). Από τις (8.2.12) και (8.2.13) παράγεται

$$u + xu'(x) = \frac{1 + 3u^2}{2u} \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{2u}{1 + u^2} du = \frac{1}{x} dx \quad (8.2.15)$$

η οποία είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $u = u(x)$. Μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη της (8.2.15) έχουμε

$$\int \frac{2u}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln(u^2 + 1) = \ln|xc| \Rightarrow u^2 + 1 = |xc| \Rightarrow u^2 = |xc| - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση προκύπτει από την παραπάνω και την (8.2.12)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = |xc| - 1 \Rightarrow y^2 = x^2(|xc| - 1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η γενική λύση (ολοκληρωτική καμπύλη) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$$x^2 + y^2(x) = x^2|xc|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση. Στο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (8.2.15) διαδοχικά μπορούμε να γράψουμε

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c_1 = \ln|x| + \ln|c| = \ln|xc|,$$

όπου $c_1 = \ln|c|$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, $x \neq 0$, η δοθείσα διαφορική εξίσωση $x^3 dy + (y^3(x) - x^2 y(x)) dx = 0$

σημειώνεται $x^3 dy + (y^3 - x^2 y) dx = 0$ σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i), και γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y - y^3}{x^3} \Rightarrow y'(x) = \frac{x^2 y}{x^3} - \frac{y^3}{x^3} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Συνεπώς, πρόκειται για μία ομογενή διαφορική εξίσωση. Από τις (8.2.12) και (8.2.13) παράγεται

$$u + xu'(x) = u - u^3 \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = -u^3 \Leftrightarrow \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{x} dx,$$

η οποία είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως,

$$\int \frac{1}{u^3} du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = -\ln|x| + c_1 \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = -\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow -\frac{x^2}{2y^2} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι $-\frac{x^2}{2y^2(x)} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$, $c \in \mathbb{R}$. ∞

Παρατήρηση 8.2.9.

Υποθέτουμε ότι μία ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει ως κανονική μορφή:

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ έχουν την εξής ιδιαιτερότητα: αν για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ οι μεταβλητές x, y αντικατασταθούν με τις λx και λy , αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y) \quad \text{και} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y), \quad (8.2.16)$$

δηλαδή, το πηλίκο $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ παραμένει αμετάβλητο μετά από την παραπάνω αντικατάσταση.

Συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα στην (8.2.16) λέγονται **ομογενείς βαθμού n** .

Στο **Παράδειγμα 8.2.8 (ii)** παρατηρήστε ότι, αν στις συναρτήσεις $P(x, y) = x^2 y - y^3$ και $Q(x, y) = x^3$ αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές x, y με τις λx και λy , αντίστοιχα, τότε έχουμε

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 \lambda y - (\lambda y)^3 = \lambda^3 x^2 y - \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^2 y - y^3) = \lambda^3 P(x, y),$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 = \lambda^3 x^3 = \lambda^3 Q(x, y),$$

δηλαδή, οι $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι ομογενείς βαθμού 3 και το πηλίκο $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ είναι επίσης μία ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού.

Ανάλογα, στο **Παράδειγμα 8.2.8 (i)** οι αντίστοιχες συναρτήσεις $P(x, y) = x^2 + 3y^2$ και $Q(x, y) = 2xy$ είναι ομογενείς βαθμού 2.

8.2.2. Γραμμική διαφορική εξίσωση και διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Ορισμός 8.2.10. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται **γραμμική**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x) = f(x, y) = -a(x)y + b(x)$$

ισοδύναμα

$$y'(x) + a(x)y = b(x) \quad (8.2.17)$$

όπου $a(x), b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Όταν $b(x) = 0$, τότε η (8.2.17) ονομάζεται **ομογενής** γραμμική διαφορική εξίσωση.

Όταν $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$, τότε η (8.2.17) ονομάζεται γραμμική διαφορική εξίσωση με **σταθερούς συντελεστές**.

Για παράδειγμα, οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές:

- $y'(x) - y(x) = 1$, με $a(x) = -1$, $b(x) = 1$, δηλαδή, πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.
- $y'(x) - y(x) = \sin(x)$, με $a(x) = -1$, $b(x) = \sin(x)$.
- $y'(x) - 3xy(x) = x^3$, με $a(x) = -3x$, $b(x) = x^3$.
- $xy'(x) = 1 + x^3 + y(x) \Leftrightarrow y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x} + x^2$, αν $x \neq 0$, με $a(x) = -\frac{1}{x}$, $b(x) = \frac{1}{x} + x^2$.

Εφαρμογή 8.2.11. Η γενική λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.17), είναι

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbb{R}. \quad (8.2.18)$$

Απόδειξη: Αρχικά αναζητούμε μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(x) + a(x)y = 0$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή γράφεται ισοδύναμα:

$$y'(x) = -a(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -a(x)dx$$

Επομένως, η γενική λύση της προκύπτει μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη και είναι

$$\ln|y| = -\int a(x)dx + c_1 \Rightarrow |y| = e^{-\int a(x)dx + c_1} \Rightarrow y = y(x) = \pm e^{c_1} e^{-\int a(x)dx}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $c_2 = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_2 e^{-\int a(x)dx}, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \quad (8.2.19)$$

Υποθέτουμε ότι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης στην (8.2.17) είναι της μορφής

$$y(x) = c_3(x)e^{-\int a(x)dx}, \quad (8.2.20)$$

όπου αναζητούμε να προσδιοριστεί η $c_3(x)$. Η (8.2.20) ως λύση πρέπει να επαληθεύει την (8.2.17), οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y &= b(x) \Leftrightarrow \\ \left(c_3(x)e^{-\int a(x)dx} \right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} &= b(x) \Leftrightarrow \\ c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} + c_3(x) \left(e^{-\int a(x)dx} \right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} &= b(x) \Leftrightarrow \\ c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} + c_3(x)e^{-\int a(x)dx} \left(-\int a(x)dx \right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} &= b(x) \Leftrightarrow \\ c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} - a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} &= b(x) \Leftrightarrow \\ c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} &= b(x) \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με άγνωστη συνάρτηση τη $c_3(x)$, οπότε έχουμε

$$c_3'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx} \Leftrightarrow \frac{dc_3}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx} \Leftrightarrow \int dc_3 = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \Leftrightarrow c_3 = c_3(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Επομένως, η αντικατάσταση της $c_3(x)$ στην (8.2.20) αποδεικνύει ότι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από την (8.2.18). $\diamond\diamond$

Παρατηρήσεις 8.2.12.

i) Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x),$$

όπου $p(x), q(x), r(x)$ είναι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x με $p(x) \neq 0$, είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση, επειδή μπορεί να πάρει τη μορφή όπως στην (8.2.17).

Πράγματι,

$$p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \Rightarrow y'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}y(x) = \frac{r(x)}{p(x)} \Rightarrow y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

$$\text{όπου } a(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad b(x) = \frac{r(x)}{p(x)}.$$

ii) Η συνάρτηση $g(x) = e^{-\int a(x)dx}$ δεν είναι μοναδική, επειδή εμπεριέχει ένα ολοκλήρωμα. Γενικά

$$g(x) = e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int a(x)dx+c} = e^{-\int a(x)dx} e^c = c_1 e^{-\int a(x)dx}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για τη λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης θεωρούμε την ευκολότερη περίπτωση, $c=0$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

iii) Ειδικές περιπτώσεις τιμών των $a(x), b(x)$ απλοποιούν τη γραμμική διαφορική εξίσωση $y'(x) + a(x)y = b(x)$ και οδηγούν σε γνωστές γενικές λύσεις.

Συγκεκριμένα, αν $a(x) = 0$, τότε έχουμε

$$y'(x) = b(x),$$

που είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως, η γενική λύση της είναι:

$$\frac{dy}{dx} = b(x) \Rightarrow dy = b(x)dx \Rightarrow \int dy = \int b(x)dx \Rightarrow y = y(x) = \int b(x)dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αν $b(x) = 0$, τότε πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (βλέπε, [Ορισμός 8.2.10](#)), και η γενική λύση της είναι $y(x) = ce^{-\int a(x)dx}$, $c \in \mathbb{R}$, όπως υπολογίστηκε στην [\(8.2.19\)](#).

Παραδείγματα 8.2.13.

Να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $y'(x) - 2xy(x) = x$.

ii) $y'(x) - \frac{2x}{x^2+1}y(x) = x^2 + 1$.

i) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x) - 2xy = x$, οπότε είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με $a(x) = -2x$ και $b(x) = x$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, και $b(x)$ στον [\(8.2.18\)](#), έχουμε:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int -2x dx} \left(\int x e^{\int -2x dx} dx + c \right) = e^{\frac{2x^2}{2}} \left(\int x e^{-x^2} dx + c \right) = \\ &= e^{x^2} \left(\int x e^{-x^2} dx + c \right) = e^{x^2} \left(-\frac{1}{2} \int (e^{-x^2})' dx + c \right) = e^{x^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right) = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επομένως, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$, οπότε είναι γραμμική διαφορική εξίσωση

με $a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ και $b(x) = 1+x^2$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ στον [\(8.2.18\)](#) και χρησιμοποιώντας

την ιδιότητα των λογαρίθμων $e^{k \ln h} = h^k$, για κάθε $h > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(\int (1+x^2) e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx + c \right) = e^{\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx} \left(\int (1+x^2) e^{-\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx} dx + c \right) = \\ &= e^{\ln(1+x^2)} \left(\int (1+x^2) e^{-\ln(1+x^2)} dx + c \right) = (1+x^2) \left(\int (1+x^2)(1+x^2)^{-1} dx + c \right) = \\ &= (1+x^2) \left(\int dx + c \right) = (1+x^2)(x+c) = x^3 + x + c(x^2+1), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επομένως, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = x^3 + x + c(x^2 + 1), \quad c \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Εφαρμογή 8.2.14. Μία διαφορική εξίσωση Bernoulli είναι της μορφής

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y^k = 0 \quad (8.2.21)$$

όπου $a(x), b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x και $k \neq 0, 1$.

Κάθε διαφορική εξίσωση Bernoulli ανάγεται σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $u = u(x)$, αν θέσουμε

$$u = y^{1-k}. \quad (8.2.22)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli υπολογίζεται από την

$$y^{1-k}(x) = e^{-\int (1-k)a(x)dx} \left[\int (k-1)b(x)e^{\int (1-k)a(x)dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbb{R}. \quad (8.2.23)$$

Απόδειξη: Προφανής λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli είναι η τετριμμένη, δηλαδή, $y(x) = 0$. Θεωρώντας ότι αναζητούμε και μη τετριμμένες λύσεις, παραγωγίζουμε ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x τα δύο μέλη της ισότητας στην (8.2.22), οπότε έχουμε

$$u'(x) = (1-k)y^{-k}y'(x)$$

και αντικαθιστούμε από την (8.2.21) την $y'(x) = -a(x)y - b(x)y^k$, οπότε προκύπτει

$$u'(x) = (1-k)y^{-k}(-a(x)y - b(x)y^k) \Rightarrow u'(x) = -(1-k)a(x)y^{1-k} - (1-k)b(x)$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$u'(x) + (1-k)a(x)u = (k-1)b(x),$$

δηλαδή, έχει την έκφραση όπως στην (8.2.17), συνεπώς είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση, της οποίας η γενική λύση ως προς την άγνωστη συνάρτηση $u = u(x)$ δίνεται από την (8.2.18) και είναι της μορφής:

$$u(x) = y^{1-k}(x) = e^{-\int (1-k)a(x)dx} \left[\int (k-1)b(x)e^{\int (1-k)a(x)dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Παρατήρηση 8.2.15. Η διαφορική εξίσωση Bernoulli στην (8.2.21) για $k = 0$ γράφεται

$$y'(x) + a(x)y + b(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y = -b(x).$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2.10 είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση.

Επίσης, η διαφορική εξίσωση στην (8.2.21) για $k = 1$ γράφεται

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y = 0 \Leftrightarrow y'(x) + (a(x) + b(x))y = 0,$$

επομένως, είναι μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, (βλέπε Ορισμός 8.2.10).

Παραδείγματα 8.2.16.

Να λυθούν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

i) $y'(x) + y(x) - xy^2(x) = 0$.

ii) $y'(x) - y(x) - e^x \sqrt{y(x)} = 0$.

i) Προφανής λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι η τετριμμένη. Αν θεωρήσουμε ότι αναζητούμε μη τετριμμένη λύση ($y(x) \neq 0$), η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x) + y - xy^2 = 0$, οπότε είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $a(x) = 1$, $b(x) = -x$, και $k = 2$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ και k στον (8.2.23), έχουμε:

$$\begin{aligned}
y^{-1}(x) &= e^{-\int^{(-1)dx} \left(\int (-x)e^{\int^{(-1)dx} dx + c} \right)} = \\
&= e^x \left(\int (-x)e^{-x} dx + c \right) = e^x \left(\int x(e^{-x})' dx + c \right) = \\
&= e^x \left(xe^{-x} - \int (x)' e^{-x} dx + c \right) = e^x \left(xe^{-x} - \int e^{-x} dx + c \right) = e^x \left(xe^{-x} - \int (-e^{-x})' dx + c \right) = \\
&= e^x \left(xe^{-x} + e^{-x} + c \right) = e^x \left((x+1)e^{-x} + c \right) = x+1+ce^x, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$y(x) = \frac{1}{x+1+ce^x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) Παρατηρήστε ότι, αναζητούμε λύσεις $y(x) \geq 0$, για να έχει νόημα η δοθείσα διαφορική εξίσωση. Εκτός από την τετριμμένη λύση, η οποία προφανώς επαληθεύει τη δοθείσα διαφορική εξίσωση, θεωρούμε ότι αναζητούμε λύσεις $y(x) > 0$. Επειδή η διαφορική εξίσωση γράφεται $y'(x) - y - e^x y^{1/2} = 0$, σύμφωνα με τον (8.2.21), είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $a(x) = -1$, $b(x) = -e^x$, και $k = \frac{1}{2}$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ και k στον (8.2.23), έχουμε:

$$\begin{aligned}
y^{1/2}(x) &= e^{-\int^{(-1/2)dx} \left(\int \left(-\frac{1}{2}\right)(-e^x)e^{\int^{(-1/2)dx} dx + c} \right)} = \\
&= e^{x/2} \left(\int \frac{1}{2} e^x e^{-x/2} dx + c \right) = e^{x/2} \left(\int \frac{1}{2} e^{x/2} dx + c \right) = \\
&= e^{x/2} \left(\int (e^{x/2})' dx + c \right) = e^{x/2} (e^{x/2} + c) = e^x + ce^{x/2}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$y^{1/2}(x) = \left(\sqrt{y(x)} \right) = e^x + ce^{x/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Τελικά, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = \left(e^x + ce^{x/2} \right)^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇◇

8.3. Λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η λύση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, είτε πρόκειται για τη γενική λύση της, είτε για τη μερική, δηλαδή την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συμβολική εντολή `dsolve`. Η εντολή είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Συγκεκριμένα, για την επίλυση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, αν με y σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , χρησιμοποιείται η συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθούν τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή όσο και η άγνωστη συνάρτηση. Επίσης, στη σύνταξη της εντολής της διαφορικής εξίσωσης απαιτείται να δηλωθεί η τάξη της παραγώγου, το οποίο σημειώνεται `D`, όταν πρόκειται για πρώτη παράγωγο ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x , δηλαδή, $D = \frac{d}{dx}$, `D2`, όταν πρόκειται για δεύτερη παράγωγο, `D3`, όταν πρόκειται για τρίτη παράγωγο κ.λ.π.

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να χρησιμοποιείται το `D` για να δηλωθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή της λύσης.

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης η εντολή `dsolve` δέχεται ως είσοδο, με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη διαφορική εξίσωση
- την ανεξάρτητη μεταβλητή (αν δεν σημειωθεί, τότε θεωρείται ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η t)

Σύνταξη εντολής: `dsolve('διαφορική εξίσωση', 'x')`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) = y^2(x) + xy(x) + 2 \quad (8.3.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + xy + 2$$

γράφουμε:

```
syms x y
[y] = dsolve('Dy = y^2+x*y+2', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$y = -(2*x) / (x^2 - 1)$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε τη γενική λύση σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

* Η διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(x) = a_2(x)y^2(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x)$, όπου $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ είναι γνωστές μη μηδενικές συνεχείς συναρτήσεις, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως διαφορική εξίσωση Riccati. Ο υπολογισμός της γενικής λύσης της δεν είναι πάντοτε εφικτός.

$$-\frac{2x}{x^2-1}$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η γενική λύση που υπολογίστηκε επαληθεύει την εξίσωση Riccati (8.3.1).

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης στην (8.2.5),

$$y''(x) + 9y(x) = 5\sin(x)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5\sin(x),$$

γράφουμε:

```
syms x y
[y] = dsolve('D2y+9*y=5*sin(x)', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$y = (5*\sin(7*x))/48 - (5*\sin(5*x))/24 + (5*\sin(x))/16 - \sin(3*x)*((5*\cos(4*x))/24 - (5*\cos(2*x))/12 + 5/24) + C1*\cos(3*x) + C2*\sin(3*x)$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε τη γενική λύση σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{5\sin(7x)}{48} - \frac{5\sin(5x)}{24} + \frac{5\sin(x)}{16} - \sin(3x)\left(\frac{5\cos(4x)}{24} - \frac{5\cos(2x)}{12} + \frac{5}{24}\right) + c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

Υπενθυμίζεται ότι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μερική λύση, η οποία είναι απαλλαγμένη από τις σταθερές, που εμφανίζονται στις γενικές λύσεις παραπάνω, (βλέπε, Ορισμός 8.2.3), επειδή οι αρχικές συνθήκες, που ορίζουν το πρόβλημα, επιτρέπουν τον υπολογισμό των σταθερών. Όταν πρόκειται για ένα τέτοιο πρόβλημα, οι αρχικές συνθήκες συμπεριλαμβάνονται στην εντολή `dsolve`.

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης η εντολή `dsolve` δέχεται ως είσοδο, με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη διαφορική εξίσωση
- τις αρχικές συνθήκες
- την ανεξάρτητη μεταβλητή (αν δεν σημειωθεί, τότε θεωρείται ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η t)

Σύνταξη εντολής: `dsolve('διαφορική εξίσωση', '1η συνθήκη', '2η συνθήκη', 'x')`

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y'(x) + y^2(x)e^x = 0$, όταν $y(0) = 1$, του Παραδείγματος 8.2.6. (ii), γράφουμε:

```
syms x y
```

```
[y] = dsolve ('Dy+y^2*exp(x)=0', 'y(0)=1', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y = 1/exp(x)
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση που υπολογίστηκε.

Περισσότερα για τα προβλήματα αρχικών τιμών οποιασδήποτε τάξης μόνο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στην Ενότητα 10.2. $\diamond\diamond$

8.4 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

8.4.1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = 2x$, τον άξονα $y'Oy$ και την ευθεία $y = 2$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.2).

Απάντηση: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{4}{3}$.

8.4.2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y^2 = 4x$ και $x^2 = 4y$.

Υπόδειξη: Επιλύστε το σύστημα των καμπυλών (παραβολών) και προσδιορίστε τα κοινά τους σημεία. Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Εφαρμογή 8.1.4 (iv) και χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.3).

Απάντηση: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{16}{3}$.

8.4.3. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$, όταν $x \in [1, 2]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.5) και τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το $\int \ln^2(x) dx$.

Απάντηση: Ο ζητούμενος όγκος είναι $V = 6 - 2\ln^2 2 + 4\ln 2$ κ.μ.

8.4.4. Να υπολογισθεί ο όγκος της σφαίρας με ακτίνα r .

Υπόδειξη: Θεωρείστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ και την καμπύλη $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, την ημιπεριφέρεια του κύκλου, η οποία μαζί με τον άξονα $x'Ox$ δημιουργεί το μισό ενός κυκλικού δίσκου. Η περιστροφή αυτής της περιοχής γύρω από τον άξονα $x'Ox$ παράγει μία σφαίρα, της οποίας ο όγκος υπολογίζεται από τον (8.1.5).

Απάντηση: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 7.2.3.

8.4.5. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = f(x) = (e^x + e^{-x})/2$, όταν $x \in [-\ln 2, \ln 2]$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι ισχύει: $1 + (f'(x))^2 = (e^x + e^{-x})^2$

Απάντηση: Από τον τύπο (8.1.9) το ζητούμενο μήκος τόξου είναι $l = 3$.

8.4.6. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = x$ στο διάστημα $[0, 1]$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για ευθεία γραμμή.

Απάντηση: Το ζητούμενο μήκος τόξου είναι ίσο με $\sqrt{2}$.

8.4.7. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1 + x^3)dy - x^2y(x)dx = 0$.

Απάντηση: Πρόκειται για διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με γενική λύση:

$$y^3(x) = (1 + x^3)c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

8.4.8. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $xy(x)dy + (x^2 + y^2(x))dx = 0$.

Απάντηση: Πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση με γενική λύση: $x^2(x^2 + 2y^2(x)) = c, \quad c \in \mathbb{R}$.

8.4.9. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 1$.

Απάντηση: Πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με γενική λύση: $y(x) = \frac{x+c}{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$.

8.4.10. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $xy(x)y'(x) + x^2 - y^2(x) + 1 = 0$.

Υπόδειξη: Να διακρίνετε περιπτώσεις, για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Για $x \neq 0$, είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $k = -1$, και η γενική λύση δίνεται από την (8.2.23).

Απάντηση: Για $x = 0$, $y(0) = \pm 1$, και για $x \neq 0$, η γενική λύση είναι: $y^2(x) = -x^2 \ln(x^2) + 1 + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Βραχάτης, Μ. Ν. (2011). *Αριθμητική Ανάλυση: Εισαγωγή*. Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (1999). *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Αθήνα: Παν. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). *Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). *Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.
- Moler, C. B. (2010). *Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α*. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμείων.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση Ι* (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς* (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σιαφρικάς, Π. Δ. (2014). *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (τεύχος Ιο)*. Πάτρα: Gotsis Εκδόσεις.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srivak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τραχανάς, Σ. Α. (2013). *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*: ΠΕΚ (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση Ι*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave. from <http://www.gnu.org/software/octave>

Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Lebl, J. (2014). *Basic Analysis: Introduction to Real Analysis*: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>

Ross, K. A. (2013). *Elementary Analysis: The Theory of Calculus* (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

- 8.1.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = xe^{-x}$ από τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και από τον άξονα $x'Ox$.
- 8.2.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -3$, $x = 2$ και από τον άξονα $x'Ox$.
- 8.3.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και την ευθεία $x - y - 1 = 0$.
- 8.4.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $f(x) = 2\sqrt{x}$ και την ευθεία $2x - y - 4 = 0$.
- 8.5.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 - 2x = 0$ και $y^2 + 4x - 12 = 0$.
- 8.6.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'Ox$ της περιοχής, που περικλείεται από τις $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = -1$, $x = 2$, και $y = 0$.
- 8.7.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'Oy$ της περιοχής, που περικλείεται από τις $x = \sqrt{y}$, $y = 4$ και $x = 0$.
- 8.8.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή του ελλειπτικού δίσκου $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με $y \geq 0$ γύρω από τον άξονα $x'Ox$.
- 8.9.** Βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος επί της ευθείας $y = 3x + 5$ από τη θέση $x = 1$ ως τη θέση $x = 4$.
- 8.10.** Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = f(x) = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ από το σημείο $(1, 3\sqrt{3})$ ως το σημείο $(8, 0)$.
- 8.11.** Να γράψετε μία συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave, με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, το φυσικό αριθμό n και τον τύπο μίας συνάρτησης f , που να υλοποιεί $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \frac{b-a}{n}$, όπου x_i είναι το αριστερό άκρο του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ θεωρώντας την κανονική διαμέριση του $[a, b]$.
 Στη συνέχεια, για την καμπύλη $y = f(x) = \sqrt{x^3}$, υπολογίστε το μήκος της από το σημείο $(1, 1)$ ως το σημείο $(4, 8)$ εφαρμόζοντας τον τύπο στην (8.1.9) με τη χρήση των εντολών diff και int, συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά του Παραδείγματος 8.1.9 (i). Επαληθεύστε την ορθότητα της συνάρτησης (function) υπολογίζοντας το $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \Delta x \right)$ με $n = 1000$. Συγκρίνετε με τα προηγούμενα αποτελέσματα.
 Υπόδειξη: Αναπτύξτε συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave ανάλογη με αυτήν στην Παρατήρηση 7.6.4.
- 8.12.** Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:
- i) $xy'(x) - y(x) = xe^{-x}$
 - ii) $y'(x) + \frac{1 + y^3(x)}{(x + x^3)y^2(x)} = 0$
 - iii) $y'(x) = x^2 - 2xy(x) + y^2(x)$
 - iv) $(x^2 - y^2(x))y'(x) = 2xy(x)$
 - v) $y'(x) = x + \sin(x) + y(x)$

- vi) $xy'(x) = 1 + x^3 + y(x)$
- vii) $xy'(x) - (1 - xy(x))y(x) = 0$
- viii) $x^4 y'(x) = (x^3 + y(x))y(x)$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

8.13. Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

- i) $x^2 y(x) y'(x) = x + 1$, όταν $y(1) = 0$.
- ii) $y'(x) = \frac{y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)}}{x}$, όταν $y(1) = 1$.
- iii) $y'(x) = x + y(x)$, όταν $y(0) = 1$.
- iv) $x \ln x y'(x) = 3x^3 \ln^2 x + y(x)$, όταν $y(2) = 1$.
- v) $y'(x) + \frac{2}{x} y(x) + x^9 y^5(x) = 0$, όταν $y(1) = 1$.

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σειρές συναρτήσεων

Καθώς το πεπερασμένο περικλείει μία άπειρη σειρά
Και στο απεριόριστο εμφανίζονται όρια
Έτσι και η ψυχή της απεραντοσύνης φωλιάζει στις μικρές λεπτομέρειες
Και μέσα στα πιο στενά όρια, όρια δεν υπάρχουν.
Τι χαρά, να διακρίνεις το απειροελάχιστο μέσα στο άπειρο!
Το τεράστιο να αντιλαμβάνεσαι μέσα στο μικρό, πόσο θεϊκό!

Jacob Bernoulli (1655 - 1705)

...Τα μαθηματικά συγκρίνουν τα πιο διαφορετικά φαινόμενα και ανακαλύπτουν τις μυστικές αναλογίες, που τα ενώνουν.

...Η βαθιά μελέτη της φύσης είναι η πιο γόνιμη πηγή των μαθηματικών ανακαλύψεων.

... Η θερμότητα, όπως η βαρύτητα, διαπερνά κάθε ουσία του σύμπαντος, οι ακτίνες της καταλαμβάνουν όλα τα μέρη του χώρου. Το αντικείμενο της εργασίας μας είναι να εκθέσουμε τους μαθηματικούς νόμους, που υπακούουν σε αυτό το στοιχείο. Η θεωρία της θερμότητας από εδώ και πέρα θα διαμορφώσει έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους της Γενικής Φυσικής.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σειρές συναρτήσεων

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος προσέγγισης μίας συνάρτησης από μία πολυωνυμική συνάρτηση, δίνεται ο ορισμός της δυναμοσειράς, της σειράς Taylor και Maclaurin. Παρουσιάζεται, επίσης, η προσέγγιση μίας συνάρτησης από τριγωνομετρικά πολυώνυμα και περιγράφεται η ανάλυση μίας συνάρτησης σε σειρά Fourier, δηλαδή, σε μία σειρά που αποτελείται από τις συναρτήσεις $\sin(nx)$ και $\cos(nx)$.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κριτήρια σύγκλισης σειρών πραγματικών αριθμών, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου και ορισμένου ολοκληρώματος.

9.1 Δυναμοσειρές

Ορισμός 9.1.1. Η ακολουθία $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, με γενικό όρο

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, όπου $a_0, a_1, \dots, a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ και x μία πραγματική μεταβλητή, ονομάζεται **δυναμοσειρά με κέντρο** x_0 και συμβολίζεται με

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (9.1.1)$$

Η πολυωνυμική συνάρτηση

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

ονομάζεται **μερικό άθροισμα** της δυναμοσειράς και οι συναρτήσεις

$$a_0, a_1(x - x_0), a_2(x - x_0)^2, \dots, a_n(x - x_0)^n, \dots$$

ονομάζονται **όροι** της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Αν $x_1 \in \mathbb{R}$ και η αριθμητική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$ είναι συγκλίνουσα (αντίστοιχα, απόλυτα συγκλίνουσα ή

αποκλίνουσα), τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι **συγκλίνουσα** στο x_1 (αντίστοιχα, **απόλυτα συγκλίνουσα** στο x_1 ή **αποκλίνουσα** στο x_1).

Παράδειγμα 9.1.2.

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n + \dots$$

έχει κέντρο $x_0 = 2$ και συντελεστές

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, \dots$$

- Είναι φανερό ότι για $x = 2$ η δοθείσα δυναμοσειρά είναι ίση με 1, άρα συγκλίνει.

- Αν x είναι συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 2, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy (βλέπε, Πρόταση 3.2.19) και χρησιμοποιώντας $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (βλέπε, Πίνακα 2.3) η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} |(x-2)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x-2|^{n-1}$$

συγκλίνει, αν

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} |x-2|^{n-1}} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{\sqrt[n]{|x-2|^{n-1}}}{\sqrt[n]{|x-2|}} \right) < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{\sqrt[n]{|x-2|}} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Επομένως, επειδή η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα για $x \in (1,2) \cup (2,3)$, σύμφωνα με το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης είναι και συγκλίνουσα, (βλέπε, Πρόταση 3.2.21.). Άρα, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in (1,2) \cup (2,3)$, (βλέπε, Ορισμός 9.1.1.).

Παρατηρήστε ότι:

- για $x=1$ η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (1-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία είναι αποκλίνουσα αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2.).

- Για $x=3$ η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (3-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα εναλλάσσουσα σειρά, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).

Συνεπώς, η δοθείσα δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (1,3]$. ◇◇

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, γενικά, δεν

συγκλίνει για κάθε τιμή της μεταβλητής x , συγκλίνει πάντοτε στο κέντρο της x_0 . Δηλαδή, υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο (το κέντρο της δυναμοσειράς), στο οποίο η δυναμοσειρά συγκλίνει. Το ερώτημα που τίθεται είναι: «ποιοί είναι οι πραγματικοί αριθμοί x , για τους οποίους η δυναμοσειρά συγκλίνει;», ισοδύναμα ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε το διάστημα του πραγματικού άξονα, όπου ανήκουν οι αριθμοί x , ώστε η δυναμοσειρά να είναι συγκλίνουσα. Θεωρώντας ότι το x λαμβάνει μία σταθερή πραγματική τιμή, μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα στη μελέτη σύγκλισης της αντίστοιχης (αριθμητικής) σειράς και να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς εφαρμόζοντας τα κριτήρια, που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Ορισμός 9.1.3. Το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ στην (9.1.1) συγκλίνει, ονομάζεται **περιοχή ή τύπος σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Έστω το σύνολο

$$S = \{r: r = |x-x_0|, x \in \mathbb{R} \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ συγκλίνουσα}\}. \quad (9.1.2)$$

Ο αριθμός

$$R = \begin{cases} 0, & \text{όταν } S = \{0\} \\ +\infty, & \text{όταν } S \text{ δεν είναι άνωφραγμένο} \\ \sup S, & \text{όταν } S \neq \{0\} \text{ και είναι άνωφραγμένο} \end{cases} \quad (9.1.3)$$

ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς στην (9.1.1), και

$$(x_0 - R, x_0 + R) \quad (9.1.4)$$

ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς στην (9.1.1).

Αν A είναι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς στην (9.1.1) ορίζουμε ως **άθροισμα της δυναμοσειράς** τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \text{ για κάθε } x \in A. \quad (9.1.5)$$

Παρατήρηση 9.1.4. Στην περίπτωση που η δυναμοσειρά συγκλίνει με ακτίνα σύγκλισης $0 < R < +\infty$, τότε η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς μπορεί να είναι ένα από τα διαστήματα

$$(x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R), (x_0 - R, x_0 + R], [x_0 - R, x_0 + R]$$

Για να προσδιορίσουμε τη μορφή της περιοχής σύγκλισης μετά τον υπολογισμό του διαστήματος σύγκλισης θέτουμε στη δυναμοσειρά τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$, και κατόπιν ελέγχουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της αντίστοιχης (αριθμητικής) σειράς, εφαρμόζοντας τα γνωστά κριτήρια, που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Εφαρμογή 9.1.5. Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$ και διάστημα σύγκλισης $(-1, 1)$, και τότε το άθροισμα της δυναμοσειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (9.1.6)$$

Απόδειξη: Προφανώς η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ είναι της μορφής όπως στην (9.1.1), άρα είναι μία δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 0$ και σταθερούς συντελεστές $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 1$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7. (i), αν

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1),$$

τότε η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{1 - x}$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τη σχέση (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \{r: r = |x| < 1, x \in \mathbb{R} \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ συγκλίνουσα}\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 1$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η γεωμετρική σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$, και επειδή $x_0 = 0$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1, 1)$.

Επειδή η γεωμετρική σειρά για $x = \pm 1$ αποκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (ii), (iii)), η περιοχή σύγκλισης ταυτίζεται με το διάστημα σύγκλισης, δηλαδή, είναι $(-1, 1)$. Θεωρώντας $A = (-1, 1)$ από την (9.1.5) ορίζεται η

αντίστοιχη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1 - x}$, η οποία είναι το άθροισμα της δυναμοσειράς, (βλέπε,

Εφαρμογή 3.1.7. (i)). ◇◇

Παραδείγματα 9.1.6.

Να προσδιορισθούν η ακτίνα, το διάστημα και η περιοχή σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n$$

i) Στο Παράδειγμα 9.1.2. αποδείχθηκε ότι για κάθε $x \in (1,3]$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ με κέντρο $x_0 = 2$ συγκλίνει. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \left\{ r: r = |x-2| < 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n \quad \text{συγκλίνουσα} \right\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 1$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$, και επειδή $x_0 = 2$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(1,3)$.

Επειδή $0 < R < +\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.4, χρειάζεται να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι για $x = 1$ αποκλίνει και για $x = 3$ συγκλίνει, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.2). Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $(1,3]$.

ii) Η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n = \frac{1}{2} (x-3) + \frac{1}{2^2 \cdot 2} (x-3)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} (x-3)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n$$

Είναι φανερό ότι είναι της μορφής όπως στην (9.1.1), άρα πρόκειται για δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 3$ και με

$$\text{συντελεστές} \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3} \dots$$

- Είναι φανερό ότι για $x = 3$ η δοθείσα δυναμοσειρά είναι ίση με 0, άρα συγκλίνει.
- Αν x είναι συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 3, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.19) και χρησιμοποιώντας $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (βλέπε, Πίνακα 2.3) συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n$$

συγκλίνει αν

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n \right|} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n \right|} < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

Επειδή η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n$ για τις παραπάνω τιμές του x συγκλίνει, εφαρμόζοντας την (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \left\{ r: r = |x-3| < 2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n \quad \text{συγκλίνουσα} \right\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 2$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 2$, και επειδή $x_0 = 3$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(1,5)$.

Επιπλέον, επειδή $0 < R < +\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.4, εξετάζουμε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι:

- Για $x = 1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα εναλλάσσουσα σειρά, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).

- Για $x = 5$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία είναι αποκλίνουσα αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p = 1$), (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2.).

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω, με το διάστημα σύγκλισης (1,5) της δυναμοσειράς, προκύπτει ότι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $[1,5)$. $\diamond\diamond$

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 9.1.3 με τα κριτήρια λόγου του D' Alembert, και ρίζας του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17, Πρόταση 3.2.19, αντίστοιχα) προκύπτει ο τρόπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης και ταυτόχρονα ένα κριτήριο σύγκλισης ή απόκλισης της δυναμοσειράς μέσω της τιμής της ακτίνας, όπως διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα, (βλέπε, Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999; Παντελίδης, 2008; Ρασιτιάς, 2014).

Θεώρημα 9.1.7. i) Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ στην (9.1.1). Τότε

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty \\ \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα,

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(x_0 - R, x_0 + R)$.

ii) Έστω ότι R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, τότε

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{αν } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα,

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
- συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Παρατηρήσεις 9.1.8.

- i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 η σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ εξαρτάται από την τιμή της ακτίνας σύγκλισης, η οποία έχει μία από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:
- αν η ακτίνα σύγκλισης είναι $R > 0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (απόλυτα).
 - αν $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο κέντρο της x_0 και αποκλίνει σε κάθε άλλο $x \neq x_0$.
 - αν $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει (απόλυτα) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.7, όταν $R > 0$, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς, επειδή το θεώρημα δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση ή μη της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης. Όπως σχολιάστηκε και στην Παρατήρηση 9.1.4, μετά τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης, θέτουμε στη δυναμοσειρά $x = x_0 - R$, $x = x_0 + R$ και στη συνέχεια ελέγχουμε τη σύγκλιση ή μη της (αριθμητικής) σειράς, εφαρμόζοντας τα γνωστά κριτήρια, που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Παραδείγματα 9.1.9.

Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$, με $p > 1$

- i) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n!}$, παρατηρούμε ότι $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, και έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 (i), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$. Επομένως, η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το \mathbb{R} .

- ii) Θέτουμε $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ και έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{1}{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1,$$

επειδή $1 < \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.8 (ii), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$, και επειδή $x_0 = 2$ η δυναμοσειρά συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(1, 3)$. Για τον υπολογισμό της περιοχής σύγκλισης, ακολουθώντας τα σχόλια της Παρατήρησης 9.1.8 (ii), εξετάζουμε τη σύγκλιση για $x = 1$ και $x = 3$, με τον τρόπο που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 9.1.6 (i), και τότε συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει περιοχή σύγκλισης $(1, 3]$.

- iii) Πρόκειται για δυναμοσειρά κέντρου $x_0 = 0$ με $a_n = \frac{1}{n^p}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 (i), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$, και επειδή $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(-1, 1)$.

Επιπλέον, επειδή $0 < R < +\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.8 (ii), χρειάζεται να εξετάσουμε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι:

- για $x = -1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$, η οποία είναι εναλλάσσουσα σειρά με $p > 1$, συνεπώς συγκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).
- Για $x = 1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, η οποία είναι αρμονική σειρά p -τάξης με $p > 1$, συνεπώς συγκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13.).

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω με το διάστημα σύγκλισης $(-1, 1)$ της δυναμοσειράς, προκύπτει ότι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $[-1, 1]$. \diamond

Στον **Ορισμό 9.1.3** είδαμε ότι με τη βοήθεια μίας συγκλίνουσας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ορίζεται στην (9.1.5) η συνάρτηση

$$f: (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

όπου R είναι η ακτίνα και A η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς. Στις προτάσεις που ακολουθούν, παρουσιάζεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ του διαστήματος σύγκλισης $(x_0 - R, x_0 + R)$, δηλώνεται δηλαδή, ότι η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη (όρο-προς-όρο) και ολοκληρώσιμη (όρο-προς-όρο) για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος σύγκλισής της, όπως συμβαίνει και στα πεπερασμένα αθροίσματα. Οι αποδείξεις των προτάσεων μπορούν να αναζητηθούν σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα, (βλέπε, [Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009](#); [Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010](#); [Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999](#); [Παντελίδης, 2008](#); [Ρασσιάς, 2014](#)).

Πρόταση 9.1.10. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, όπου R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (9.1.7)$$

και η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + \dots + n a_n (x - x_0)^{n-1} + \dots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R .

Παράδειγμα 9.1.11.

Να υπολογισθεί:

i) η παράγωγος της σειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

ii) η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, όπου $-1 < x < 1$.

i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισής της είναι $R = +\infty$, (βλέπε, [Παράδειγμα 9.1.9 \(i\)](#)). Σύμφωνα με την [Πρόταση 9.1.10](#), η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και από την (9.1.7) ισχύει

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = 1 + 2 \frac{x}{2!} + 3 \frac{x^2}{3!} + \dots + n \frac{x^{n-1}}{n(n-1)!} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \dots = f(x). \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

Στην επόμενη ενότητα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση στην (9.1.8) είναι η $f(x) = e^x$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.2.3).

ii) Αν θεωρηθεί ότι η δοθείσα σειρά συγκλίνει στην $f(x)$ για κάποιες τιμές του x , σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.10 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα ισχύει:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία είναι μία γεωμετρική σειρά, αρκεί να θέσουμε στη γεωμετρική σειρά, όπου x το $-x^2$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, αν $|-x^2| = x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, η σειρά συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(-1, 1)$, και τότε το άθροισμα της δυναμοσειράς είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε, (βλέπε, Πίνακα 7.1.10)

$$f(x) = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (9.1.9)$$

Επειδή για την αρχική σειρά είναι $f(0) = 0$ από την (9.1.9) προκύπτει ότι

$$\tan^{-1}(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Επομένως, η ζητούμενη συνάρτηση, για την οποία ίσχυε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \text{όπου } -1 < x < 1,$$

είναι η $f(x) = \tan^{-1}(x)$. ◇◇

Πρόταση 9.1.12. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, όπου R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[x_0, x]$ (ή $[x, x_0]$) για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, και ισχύει

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \quad (9.1.10)$$

δηλαδή,

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}. \quad (9.1.11)$$

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} = a_0 (x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + \dots$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R με την αρχική δυναμοσειρά.

Εφαρμογή 9.1.13. Αν $-1 < x < 1$, να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (9.1.12)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad (9.1.13)$$

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, η γεωμετρική σειρά στην (9.1.13) συγκλίνει, αν $|-x| = |x| < 1$, και τότε το άθροισμά της προκύπτει αν θέσουμε στην (9.1.6) όπου x το $-x$, άρα

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots. \quad (9.1.14)$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$.

Σύμφωνα με την (9.1.10) στην Πρόταση 9.1.12, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μέλη την ισότητα στην (9.1.14), οπότε υποθέτοντας ότι $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$, έχουμε

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln|1+t| \right]_0^x = \ln|1+x| - \ln 1 = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12 η παραπάνω σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης την ίδια με την αρχική δυναμοσειρά, δηλαδή, $R=1$. Επομένως, η δυναμοσειρά στην (9.1.12) συγκλίνει, αν $-1 < x < 1$. $\diamond\diamond$

9.2 Σειρά Taylor και Maclaurin

Στην προηγούμενη ενότητα συμπεράναμε ότι μία συγκλίνουσα δυναμοσειρά αποτελεί μία συνάρτηση συνεχή, παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη στο διάστημα σύγκλισης. Στην ενότητα αυτή, θα μας απασχολήσει το αντίστροφο πρόβλημα. Μία γνωστή συνάρτηση f , που έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα I , μπορεί να γραφεί με τη μορφή δυναμοσειράς στο ίδιο διάστημα; Έστω ότι αυτό είναι εφικτό, δηλαδή, έστω ότι υπάρχει μία δυναμοσειρά κέντρου x_0 , τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

Αναζητούμε τους συντελεστές a_n της παραπάνω δυναμοσειράς. Είναι φανερό ότι

$$f(x_0) = a_0$$

Επιπλέον,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots \Rightarrow f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-x_0) + \dots \Rightarrow f'''(x_0) = 2 \cdot 3a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 a_n + (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 a_{n+1} (x-x_0) + \dots \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{κ.ο.κ}$$

Επομένως, ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία συμπεραίνουμε ότι, αν η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, τότε η σειρά έχει τη μορφή

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Ορισμός 9.2.1. Έστω f συνάρτηση, που έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα I και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I . Ονομάζουμε **πολυώνυμο του Taylor n βαθμού** της συνάρτησης f στο σημείο x_0 το πολυώνυμο

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (9.2.1)$$

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (9.2.2)$$

ονομάζεται **σειρά ή ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης f με κέντρο ανάπτυξης το σημείο x_0** .

Αν $x_0 = 0$, η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (9.2.3)$$

ονομάζεται **σειρά ή ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης f με κέντρο ανάπτυξης το 0**.

Παρατήρηση 9.2.2.

Αν μία συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα I και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I , τότε πάντοτε μπορεί να υπολογιστεί το πολυώνυμο του Taylor της f στο σημείο x_0 από τη σχέση (9.2.1) και

μάλιστα $p_n(x_0) = f(x_0)$. Το ερώτημα είναι, οι τιμές της f για τα x , που βρίσκονται σε μία περιοχή γύρω από το x_0 , μπορούν να υπολογιστούν από το πολυώνυμο του Taylor (ή τη σειρά Taylor, αν αυτή συγκλίνει) της f στο σημείο x_0 ; Μία εικασία για την απάντηση παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 9.2.3, που ακολουθεί, η δε απάντηση δίνεται στη συνέχεια στο Θεώρημα 9.2.5.

Παράδειγμα 9.2.3.

Να υπολογισθεί η σειρά Maclaurin και τα πολυώνυμα $5^{\text{ου}}$ και $10^{\text{ου}}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x) = e^x$. Ποιές είναι οι τιμές $p_5(1)$, $p_8(1)$; Τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τις τιμές του υπερβατικού αριθμού e ως προς την ακρίβεια της προσέγγισής του, (βλέπε, Ενότητα 2.6, Πίνακα 2.2).

Είναι γνωστό ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει παραγώγους κάθε τάξης και μάλιστα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Επομένως, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης e^x , δίνεται από την (9.2.3), και είναι

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (9.2.4)$$

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς (9.2.4) με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι το \mathbb{R} , επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.9 (i)).

Τα πολυώνυμα της $f(x) = e^x$ υπολογίζονται από την (9.2.1) για $x_0 = 0$, και είναι:

- το πολυώνυμο $5^{\text{ου}}$ βαθμού

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5,$$

- το πολυώνυμο $8^{\text{ου}}$ βαθμού

$$p_8(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 = p_5(x) + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8.$$

Επειδή το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς (9.2.4) είναι το \mathbb{R} , επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί $x = 1$ στα παραπάνω πολυώνυμα, συνεπώς οι ζητούμενες τιμές είναι:

$$p_5(1) = 2.71666666, \quad \text{και} \quad p_8(1) = 2.718278769841270$$

Η τιμή $e = f(1) = 2.718281828459046$, που υπολογίστηκε στην Ενότητα 2.6 προσεγγίζεται από το πολυώνυμο Maclaurin $5^{\text{ου}}$ βαθμού με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων και από το πολυώνυμο Maclaurin $8^{\text{ου}}$ βαθμού με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Παρατηρήστε ότι, η προσέγγιση είναι «αρκετά γρήγορη» εξαιτίας του παραγοντικού που υπάρχει στον παρονομαστή του τύπου των πολυωνύμων. \diamond

Εφαρμογή 9.2.4. Να αποδειχθεί ότι:

i) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ έχει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \quad (9.2.5)$$

ii) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \cos(x)$ έχει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \quad (9.2.6)$$

Απόδειξη: i) Είναι γνωστό ότι, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης, επομένως, για $x_0 = 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin(0) = 0$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \Rightarrow (\sin(x))'_{x=0} = \cos(0) = 1$$

$$(\sin(x))'' = -\sin(x) \Rightarrow (\sin(x))''_{x=0} = -\sin(0) = 0$$

$$(\sin(x))''' = -\cos(x) \Rightarrow (\sin(x))'''_{x=0} = -\cos(0) = -1$$

$$(\sin(x))^{(4)} = \sin(x) \Rightarrow (\sin(x))^{(4)}_{x=0} = \sin(0) = 0$$

Γενικά, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύουν

$$(\sin(x))^{(2n)} = (-1)^n \sin(x) \Rightarrow (\sin(x))^{(2n)}_{x=0} = (-1)^n \sin(0) = 0,$$

και

$$(\sin(x))^{(2n+1)} = (-1)^n \cos(x) \Rightarrow (\sin(x))^{(2n+1)}_{x=0} = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n.$$

Επομένως, οι συντελεστές των άρτιων δυνάμεων του x στη σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ είναι ίσοι με 0 και οι παράγωγοι των περιττών δυνάμεων είναι ίσοι με $(-1)^n$.

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στη σχέση (9.2.3) προκύπτει ότι η σειρά Maclaurin της $f(x) = \sin(x)$ είναι της μορφής

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης, και αποδεικνύεται ότι για $x_0 = 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύουν:

$$(\cos(x))^{(2n)} = (-1)^n \cos(x), \quad \text{και} \quad (\cos(x))^{(2n+1)} = (-1)^n \sin(x).$$

Επομένως, θέτοντας $x = 0$ στις παραπάνω παραγώγους έχουμε αντίστοιχα

$$(\cos(0))^{(2n)} = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n, \quad \text{και} \quad (\cos(x))^{(2n+1)}_{x=0} = (-1)^n \sin(0) = 0.$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στην (9.2.3), υπολογίζεται ότι η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \cos(x)$ είναι της μορφής

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}. \quad \diamond$$

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα της Παρατήρησης 9.2.2, δηλαδή, αν το πολυώνυμο Taylor n -οστού βαθμού της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , $p_n(x)$, προσεγγίζει ή δίνει ακριβώς τις τιμές $f(x)$ χρειαζόμαστε την έννοια του υπολοίπου $R_n(x)$. Το **υπόλοιπο** $R_n(x)$ είναι εκείνη η συνάρτηση του x , που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x).$$

Η απόλυτη τιμή $|R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$ λέγεται **σφάλμα** της προσέγγισης της $f(x)$ από το $p_n(x)$. Αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα (βλέπε, Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

Θεώρημα 9.2.5. (Taylor) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα I και το εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$. Τότε, για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (9.2.7)$$

όπου για κάποιο $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ το υπόλοιπο είναι της μορφής

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (\text{υπόλοιπο Lagrange}) \quad (9.2.8)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-x_0)(x-\xi)^n, \quad (\text{υπόλοιπο Cauchy})$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (9.2.9)$$

Για την $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για τη σειρά Taylor της f με κέντρο ανάπτυξης το εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$, γράφουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad (9.2.10)$$

αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \quad (9.2.11)$$

Παρατήρηση 9.2.6.

i) Μία γνωστή συνάρτηση f για να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor **δεν** αρκεί να έχει παραγώγους κάθε τάξης στην περιοχή του σημείου ανάπτυξης της, και **δεν** αρκεί να γνωρίζουμε την περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς η οποία να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της f , (βλέπε, (9.1.5) στον Ορισμό 9.1.3). Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor **ικανή** και **αναγκαία** συνθήκη ώστε το άθροισμα μίας σειράς Taylor (δυναμοσειράς) να ισούται με τη συνάρτηση f είναι το υπόλοιπο να τείνει στο 0, (βλέπε, [Θεώρημα 9.2.5](#)), ανεξάρτητα από τον τύπο του υπολοίπου, είτε αυτό δίνεται από την (9.2.8), είτε από την (9.2.9).

Στη συνέχεια, στις εφαρμογές που ακολουθούν αποδεικνύονται ότι τα υπόλοιπα των στοιχειωδών συναρτήσεων (εκθετικής, ημιτόνου, συνημιτόνου, διωνυμικής συνάρτησης) τείνουν στο μηδέν, επομένως οι αντίστοιχες συναρτήσεις μπορούν να γράφονται ισοδύναμα ως σειρές.

ii) Οι ιδιότητες της συνάρτησης f καθορίζουν τον τύπο του υπολοίπου $R_n(x)$, που θα επιλεγεί για τον έλεγχο της (9.2.11).

Η ολοκληρωτική μορφή υπολοίπου, που δίνεται από τη (9.2.9), εφαρμόζεται όταν η παράγωγος $(n+1)$ -τάξης της f ορίζεται και είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$, (βλέπε, [Παντελίδης, 2008](#); [Ρασιτιάς, 2014](#)). Εκτός από τους τύπους υπολοίπου, που δόθηκαν στο Θεώρημα 9.2.5, στη βιβλιογραφία δίνονται και άλλοι τύποι.

Εφαρμογή 9.2.7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (9.2.12)$$

Για $x=1$, ο αριθμός e είναι το άθροισμα της σειράς

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

Απόδειξη: Πράγματι, συνδυάζοντας την (9.2.7) με την (9.2.4) (βλέπε, Παράδειγμα 9.2.3) μπορούμε να γράψουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

όπου το υπόλοιπο $R_n(x)$ δίνεται όπως στην (9.2.8),

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ του 0 και του x . Τότε,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ αν } x > 0 \text{ ή}$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ αν } x < 0.$$

Επιπλέον, για την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{x^n}{n!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης των ακολουθιών προκύπτει $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, (βλέπε, όριο λόγου του D'Alembert- Πρόταση 2.6.2), επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σύγκλιση της σειράς Maclaurin, (βλέπε, [Θεώρημα 9.2.5](#)). Συνεπώς, η e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$

αποδεικνύοντας την (9.2.12).

Προφανώς, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι το \mathbb{R} , επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (βλέπε, [Παράδειγμα 9.1.9 \(i\)](#)). Η τιμή $x=1$ ανήκει στο διάστημα σύγκλισης, οπότε κάνοντας αντικατάσταση στη (9.2.12) προκύπτει η έκφραση του αριθμού e από μία σειρά. Δείτε και συγκρίνετε με την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην Πρόταση 2.6.6. $\diamond\diamond$

Θεώρημα 9.2.8. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο ανοικτό διάστημα I , x_0 εσωτερικό σημείο του I , και έστω ότι υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, \text{ και για κάθε } x \in I.$$

Τότε, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο x_0 .

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, (βλέπε, [Θεώρημα 9.2.5](#)), η f γράφεται από την (9.2.7)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας ως $R_n(x)$ θεωρούμε το υπόλοιπο Lagrange από την (9.2.8),

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

Η ακολουθία

$$a_n = \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

είναι μηδενική, επειδή

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} = 0.$$

Άρα, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, το οποίο επαληθεύει την (9.2.11), ικανή και αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος Taylor για τη σύγκλιση της ομώνυμης σειράς, (βλέπε, [Θεώρημα 9.2.5](#)). Επομένως, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο σημείο x_0 . ◇◇

Εφαρμογή 9.2.9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\cos(x)$ αναπτύσσονται σε σειρά Maclaurin και οι αντίστοιχες σειρές είναι :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

Απόδειξη: Για τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$, οι παράγωγοι κάθε τάξης n εξαρτώνται από το αν ο αριθμός n είναι άρτιος ή περιττός, (βλέπε, [Εφαρμογή 9.2.4 \(i\)](#)), και είναι της ακόλουθης μορφής:

$$f^{(2n)}(x) = (\sin(x))^{(2n)} = (-1)^n \sin(x), \quad \text{και} \quad f^{(2n+1)}(x) = (\sin(x))^{(2n+1)} = (-1)^n \cos(x). \quad (9.2.13)$$

Επειδή οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι φραγμένες συναρτήσεις, από την (9.2.13) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $M > 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανίσωση με το [Θεώρημα 9.2.8](#), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\sin(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η μορφή της οποίας υπολογίστηκε στην Εφαρμογή 9.2.4(i) δίνεται από την (9.2.5), και είναι:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin του ημιτόνου είναι το \mathbb{R} , επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (γιατί).

Ανάλογα, για τη συνάρτηση $g(x) = \cos(x)$, οι παράγωγοι κάθε τάξης n είναι της ακόλουθης μορφής:

$$g^{(2n)}(x) = (\cos(x))^{(2n)} = (-1)^n \cos(x), \quad \text{και} \quad g^{(2n+1)}(x) = (\cos(x))^{(2n+1)} = (-1)^n \sin(x), \quad (9.2.14)$$

Επειδή οι συναρτήσεις του συνημιτόνου και του ημιτόνου είναι φραγμένες συναρτήσεις, από την (9.2.14) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $M > 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|g^{(n)}(x)| \leq M.$$

Επομένως, σύμφωνα με το [Θεώρημα 9.2.8](#), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\cos(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η μορφή της οποίας υπολογίστηκε στην Εφαρμογή 9.2.4(ii), δίνεται από την (9.2.6), και είναι:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin του ημιτόνου είναι το \mathbb{R} , επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (γιατί). ◇◇

Εφαρμογή 9.2.10. Για κάθε $x \in (-1,1)$, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Απόδειξη: Γράφοντας τη συνάρτηση $f(x) = (1-x)^{-1}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους κάθε τάξης και να αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (9.2.15)$$

Επειδή για $x_0 = 0$ η (9.2.15) δίνει $f^{(n)}(0) = n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε είναι φανερό ότι, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στην (9.2.3) προκύπτει η σειρά Maclaurin της $f(x) = \frac{1}{1-x}$ η οποία είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots.$$

Είναι γνωστό ότι, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι η γεωμετρική σειρά, η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.1.5).

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ από την (9.2.7) και την παραπάνω γεωμετρική σειρά γράφεται

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + R_n(x) \quad (9.2.16)$$

Υπενθυμίζοντας ότι $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, το υπόλοιπο $R_n(x)$ από την (9.2.16) γράφεται:

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Επειδή $x \in (-1,1) \Rightarrow |x| < 1$ είναι γνωστό από την ιδιότητα της γεωμετρικής ακολουθίας ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^{n+1} = 0$, (βλέπε, Πρόταση 2.6.1, Πίνακα 2.3), επομένως

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.11) και ικανοποιεί την προϋπόθεση σύγκλισης της σειράς Maclaurin, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Άρα, η $f(x) = \frac{1}{1-x}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad \diamond$$

Εφαρμογή 9.2.11. Για κάθε $x \in (-1, 1)$, η διωνυμική* συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad (9.2.17)$$

όπου $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$, με $\binom{a}{0} = 1$ και $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, με $0! = 1$.

Αν $a \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ το ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Για τη διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ είναι φανερό ότι $f(0) = 1$. Θεωρώντας ότι $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ οι παράγωγοι της συνάρτησης είναι :

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \Rightarrow f'(0) = a$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \Rightarrow f''(0) = a(a-1)$$

$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \Rightarrow f'''(0) = a(a-1)(a-2)$$

$$f^{(4)}(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)$$

...

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους κάθε τάξης και να αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι :

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-(n-1))(1+x)^{a-n} \quad (9.2.18)$$

Θέτοντας $x_0 = 0$ στην (9.2.18) οι παράγωγοι κάθε τάξης είναι:

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-(n-1)) = a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-n+1)$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στη σχέση (9.2.3) προκύπτει ότι η σειρά Maclaurin της $f(x) = (1+x)^a$ είναι της μορφής:

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n \quad (9.2.19)$$

Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 9.1.7 (i)** αποδεικνύεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Maclaurin είναι $R = 1$, συνεπώς το διάστημα σύγκλισης της διωνυμικής σειράς είναι το $(-1, 1)$.

Η διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ από την (9.2.7) και την (9.2.19) γράφεται

$$f(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ως $R_n(x)$ θεωρούμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο από την (9.2.9),

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt,$$

στο οποίο αντικαθιστούμε από την (9.2.18) τις παραγώγους $(n+1)$ -τάξης και έχουμε :

* Η σειρά που προκύπτει στην (9.2.13) ονομάζεται διωνυμικό ανάπτυγμα, και η αντίστοιχη σειρά διωνυμική, ο δε συντελεστής του x^n στη σειρά ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής και συμβολίζεται $\binom{a}{n}$.

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \cdot a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)(1+t)^{a-n-1} dt = \\
&= \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n \cdot (1+t)^{a-n-1} dt = \\
&= \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \cdot (1+t)^{a-1} dt \quad (9.2.20)
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, η συνάρτηση $h(t) = \frac{x-t}{1+t}$, για κάθε $t \in [0, x]$, είναι γνήσια φθίνουσα, επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης h είναι $[0, x]$, (βλέπε, Κεφάλαιο 6).

Συνδυάζοντας το σύνολο τιμών της h με την (9.2.20) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \int_0^x (h(t))^n \cdot (1+t)^{a-1} dt \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \int_0^x |h(t)|^n \cdot (1+t)^{a-1} dt \right| \leq \quad (\text{επειδή } 0 \leq |h(t)| \leq |x|) \\
&\leq \left| \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \int_0^x |x|^n \cdot (1+t)^{a-1} dt \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!} \right| |x|^n \left[\frac{(1+t)^a}{a} \right]_0^x = \frac{|(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)|}{n!} |x|^n |(1+x)^a - 1|
\end{aligned}$$

Επιπλέον, για την ακολουθία με γενικό όρο

$$a_n = \frac{|(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)|}{n!} |x|^n, \text{ για κάθε } |x| < 1,$$

έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a-n-1|}{n+1} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|-n|}{n} = |x| < 1,$$

και από το γνωστό κριτήριο σύγκλισης των ακολουθιών προκύπτει $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, (βλέπε, όριο λόγου του D'Alembert- Πρόταση 2.6.2).

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n |(1+x)^a - 1|) = |(1+x)^a - 1| \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.11) και ικανοποιεί την προϋπόθεση σύγκλισης της σειράς Maclaurin, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Άρα, η $f(x) = (1+x)^a$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.17), ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι, αν $a \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, τότε η σειρά έχει πεπερασμένο πλήθος όρων. Παρατηρήστε ότι όλοι οι παράγωγοι $(a+1)$ -τάξης είναι ίσοι με μηδέν, συνεπώς, μηδενίζονται οι συντελεστές των δυνάμεων του x με $n \geq a+1$. Άρα, η σειρά είναι το πεπερασμένο άθροισμα των n -όρων με $1 \leq n \leq a$ αυξημένο κατά τη μονάδα, σύμφωνα με τον τύπο στην (9.2.17).

Παρατήρηση: Στην απόδειξη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ο τύπος στην (9.2.8) με το υπόλοιπο Lagrange, (αφήνεται ως άσκηση). \diamond

Παραδείγματα 9.2.12.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin οι ακόλουθες διωνυμικές συναρτήσεις και να δοθεί το διάστημα σύγκλισής τους:

$$i) f(x) = \sqrt{1+x} \quad ii) g(x) = (1+x)^8 \quad iii) h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad iv) k(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

i) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a = \frac{1}{2}$. Για κάθε $n \geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19) είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n \cdot n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της f , που είναι :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n \cdot n!} x^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n \cdot n!} x^n$$

Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11).

ii) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $g(x) = (1+x)^8$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a = 8$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.2.11, επειδή a είναι φυσικός αριθμός, η σειρά έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων, οι συντελεστές των x^n με $n \geq 9$ είναι ίσοι με μηδέν. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $1 \leq n \leq 8$, οι μη μηδενικοί συντελεστές των δυνάμεων του x δίνονται από την (9.2.19) και είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{8 \cdot 7 \cdots (9-n)}{n!}.$$

Αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή του αθροίσματος της g , που είναι :

$$\begin{aligned} (1+x)^8 &= 1 + 8x + \frac{8 \cdot 7}{2!} x^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} x^3 + \cdots + \frac{8 \cdot 7 \cdots 3}{6!} x^6 + \frac{8 \cdot 7 \cdots 2}{7!} x^7 + \frac{8 \cdot 7 \cdots 2 \cdot 1}{8!} x^8 = \\ &= 1 + 8x + \frac{8 \cdot 7}{2!} x^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} x^3 + \cdots + \frac{8 \cdot 7}{2!} x^6 + 8x^7 + x^8 \end{aligned}$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι ένα πολυώνυμο 8^{ου} βαθμού (με πραγματικούς συμμετρικούς συντελεστές) και προφανώς, για κάθε πραγματικό αριθμό x το αποτέλεσμα είναι η τιμή του πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, επειδή για $a \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11).

iii) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a = -\frac{1}{3}$. Για κάθε $n \geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19) είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(2-3n)}{3^n \cdot n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της h , που είναι :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3 \cdot 3!} x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^n$$

Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1,1)$.

iv) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $k(x) = \frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a = -3$. Για κάθε $n \geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19) είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-2-n)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της k , που είναι :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^3} &= 1 - 3x + \frac{3 \cdot 4}{2!} x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{n!} x^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{n!} x^n \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1, 1)$. \diamond

Παρατήρηση 9.2.13.

i) Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού επί μία σταθερά, ή με δυνάμεις του x έχουν νόημα στις σειρές Taylor, αρκεί η νέα σειρά Taylor να είναι ορισμένη στην τομή των διαστημάτων σύγκλισης των αρχικών σειρών. Για παράδειγμα, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\sin(x) + 2\cos(x)$ προκύπτει από τους τύπους στην Εφαρμογή 9.2.9, ορίζεται στο $x \in \mathbb{R}$ και είναι:

$$\sin(x) + 2\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

ii) Οι σειρές Taylor σύνθετων συναρτήσεων μπορούν να προκύψουν με αντικατάσταση του x μίας γνωστής σειράς από τη σύνθετη συνάρτηση. Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας στην (9.2.5) το x με $3x$, προκύπτει η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\sin(3x)$, που είναι

$$\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

και συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.9).

iii) Οι σειρές Taylor βρίσκουν εφαρμογές σε πολλά προβλήματα υπολογισμού του λογισμού των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, όπως είναι όρια συναρτήσεων απροσδιόριστης μορφής, υπολογισμός ολοκληρωμάτων στα οποία δεν εφαρμόζονται οι μέθοδοι ολοκλήρωσης που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 7, λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σειρές, ή και στους αριθμητικούς υπολογισμούς τριγωνομετρικών αριθμών, κ.α. (βλέπε, Παραδείγματα 9.2.14, 9.2.15)

Παραδείγματα 9.2.14.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin, οι ακόλουθες συναρτήσεις, και να δοθεί η περιοχή σύγκλισής τους: Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε κατάλληλη τιμή για την ανεξάρτητη μεταβλητή x , για να βρείτε μία πολύ καλή εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που παρουσιάζεται.

i) $f(x) = \cosh(2x)$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} = 1 + \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} + \frac{4^3}{6!} + \dots + \frac{4^n}{(2n)!} + \dots = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \cong 3.7622$

ii) $g(x) = \tan^{-1}(x)$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$

iii) $p(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{4^n} = \frac{8}{27}$

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.5 του υπερβολικού συνημιτόνου η συνάρτηση $f(x) = \cosh(2x)$ γράφεται:

$$\cosh(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}, \text{ επομένως είναι το ημι-άθροισμα δύο σύνθετων εκθετικών συναρτήσεων.}$$

Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $2x$ μπορούμε να πάρουμε τη μορφή της σειράς Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης e^{2x} , που είναι :

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4}{2!} x^2 + \frac{8}{3!} x^3 + \frac{16}{4!} x^4 + \dots + \frac{2^n}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad (9.2.22)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $-2x$, να πάρουμε:

$$e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{4}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n \quad (9.2.23)$$

Επομένως, προσθέτοντας τις (9.2.22), (9.2.23) κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} \cosh(2x) &= \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{4}{2!}x^2 + 2\frac{16}{4!}x^4 + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 + \frac{16}{4!}x^4 + \dots + \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}x^{2n} \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση έχει σειρά Maclaurin, που συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.7), η σειρά Maclaurin του υπερβολικού συνημιτόνου συγκλίνει σε όλο το \mathbb{R} , (βλέπε, Παρατήρηση 9.2.13 (i)).

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $x=1$ στην (9.2.24), οπότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} = 1 + \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} + \frac{4^3}{6!} + \dots + \frac{4^n}{(2n)!} + \dots = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \cong 3.7622$$

ii) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.10) και αντικαθιστώντας το x με $-x^2$ στην (9.1.6), προκύπτει:

$$g(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (9.2.25)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, η σειρά συγκλίνει αν $|-x^2| = x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, η σειρά στην (9.2.25) συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, η σειρά στην (9.2.25) ταλαντεύεται στα άκρα του διαστήματος $(-1,1)$, επειδή για $x = \pm 1$ είναι $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12, η σειρά στην (9.2.25) είναι ολοκληρώσιμη και χρησιμοποιώντας την (9.1.11) ολοκληρώνουμε όρο προς όρο, ως ακολούθως:

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (9.2.26)$$

Επιπλέον ισχύει $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Άρα, η (9.2.26) γράφεται

$$\tan^{-1}(x) + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \quad (9.2.27)$$

Στην τελευταία ισότητα, αν θέσουμε $x=0$, τότε $\tan^{-1}(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$. Επομένως, η (9.2.27) γράφεται:

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (9.2.28)$$

Τέλος, η δυναμοσειρά $k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, όπως και η αρχική δυναμοσειρά

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, (βλέπε, Πρόταση 9.1.12). Ως γνωστός, χρειάζεται να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος $(-1,1)$.

Παρατηρήστε ότι, για $x=1$ η σειρά $k(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, και για $x=-1$ είναι $k(-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Πρόκειται για

εναλλάσσουσες σειρές με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{2n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι

θετικών όρων, είναι φθίνουσα και μηδενική. Επομένως, ισχύει το κριτήριο Leibniz, άρα οι σειρές $k(1)$, $k(-1)$ συγκλίνουν.

Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης της σειράς Maclaurin στην (9.2.28) είναι $[-1,1]$. Έτσι αποδείχθηκε και ο τύπος (7) στον Πίνακα 9.1.

Θέτοντας $x=1 \in [-1,1]$ στην (9.2.28), τότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \textcircled{\ast}$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι, αν και πρόκειται για την ίδια σειρά και την ίδια συνάρτηση με αυτήν του Παραδείγματος 9.1.11 (ii), το διάστημα σύγκλισης είναι διαφορετικό στις δύο περιπτώσεις. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

iii) Η δοθείσα συνάρτηση γράφεται ως γινόμενο συναρτήσεων: $p(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} = 2x^2 \frac{1}{(1-x)^3}$ και ο δεύτερος

παράγοντας θυμίζει τη διωνυμική συνάρτηση με $a=-3$, η διαφορά των δύο συναρτήσεων είναι το πρόσθετο της ανεξάρτητης μεταβλητής. Χρησιμοποιώντας το **Παράδειγμα 9.2.12 (iv)**, αντικαθιστώντας στην (9.2.21) το

x με $-x$ προκύπτει η σειρά Maclaurin της $\frac{1}{(1-x)^3}$, που είναι:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} (-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} x^n$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της τελευταίας σειράς επί $2x^2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{(1-x)^3} &= 2x^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} x^n \right) = 2x^2 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} x^n = \\ &= 2x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} x^{n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^{n+2} \end{aligned}$$

Άρα,

$$p(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^{n+2} \quad (9.2.29)$$

Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11), το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin στην (9.2.29) είναι $(-1,1)$.

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $x = \frac{1}{4}$ στην (9.2.29), τότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{4^n} = \frac{8}{27}. \quad \diamond\diamond$$

Παράδειγμα 9.2.15.

Χρησιμοποιήστε κατάλληλη σειρά Maclaurin από τον Πίνακα 9.1, για να κάνετε τους επόμενους υπολογισμούς:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(3x)}{4x^3} \quad ii) g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad iii) \frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} - \frac{4}{81} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n \cdot 3^n} + \dots$$

i) Παρατηρήστε, με απλή αντικατάσταση, ότι το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Χωρίς να εφαρμοστεί η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 6, (κανόνα Hospital), μπορεί να γίνει άρση της απροσδιοριστίας,

* Το 1671, η εναλλάσσουσα σειρά χρησιμοποιήθηκε από τον James Gregory (1638 - 1675), για να υπολογίσει μία προσέγγιση του αριθμού π .

χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της $f(x) = \sin(3x)$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.5) το x με $3x$ προκύπτει η σειρά Maclaurin της $\sin(3x)$, που είναι

$$\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 3x - \frac{3^3}{3!} x^3 + \frac{3^5}{5!} x^5 - \frac{3^7}{7!} x^7 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$$

Επομένως, το όριο γράφεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(3x)}{4x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \left(3x - \frac{3^3}{3!} x^3 + \frac{3^5}{5!} x^5 - \frac{3^7}{7!} x^7 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right)}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3^3}{3!} x^3 - \frac{3^5}{5!} x^5 + \frac{3^7}{7!} x^7 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{3^3}{3!} - \frac{3^5}{5!} x^2 + \frac{3^7}{7!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n-1} + \dots \right)}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^3}{4 \cdot 3!} - \frac{3^5}{4 \cdot 5!} x^2 + \frac{3^7}{4 \cdot 7!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{2n+1}}{4 \cdot (2n+1)!} x^{2n-1} + \dots \right) = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

ii) Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $-t^2$ προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης e^{-t^2} , που είναι :

$$h(t) \equiv e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2!} t^4 - \frac{1}{3!} t^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \quad (9.2.30)$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση έχει σειρά Maclaurin, που συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.7), η σειρά Maclaurin στην (9.2.30) συγκλίνει σε όλο το \mathbb{R} , (βλέπε, Παρατήρηση 9.2.13 (i)).

Επιπλέον, επειδή η δυναμοσειρά $h(t)$ συγκλίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12 η $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$ είναι

ολοκληρώσιμη και μάλιστα χρησιμοποιώντας την (9.1.10) μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο τη δυναμοσειρά και να γράψουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right) dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2!} t^4 - \frac{1}{3!} t^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} + \dots \right) dt = \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]_0^x = \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!} x^5 - \frac{1}{7 \cdot 3!} x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Τέλος, η δυναμοσειρά $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n!} x^{2n+1}$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως και η αρχική δυναμοσειρά

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}, \quad (\text{βλέπε, Πρόταση 9.1.12}).$$

iii) Παρατηρήστε από τον γενικό όρο της σειράς που δίνεται ότι, ο παρονομαστής δεν έχει παραγοντικό και είναι πολλαπλάσιο του 3^n , (όχι μόνο το περιττό πολλαπλάσιό του), και με αυτά ως κριτήρια αναζητήστε τον τύπο της κατάλληλης σειράς Maclaurin. Η μόνη σειρά, που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις, είναι η σειρά που προκύπτει από τη λογαριθμική συνάρτηση, $\ln(1+x)$. Συνεπώς, η δοθείσα σειρά πρέπει να προσαρμοστεί κατάλληλα, ώστε να έχει τη μορφή της σειράς στο (2) του Πίνακα 9.1. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} - \frac{4}{81} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n \cdot 3^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για τη λογαριθμική συνάρτηση $\ln(1+x)$, με $x = \frac{2}{3}$. Επειδή η συγκεκριμένη σειρά έχει περιοχή σύγκλισης $(-1,1)$, (βλέπε, [Εφαρμογή 9.1.13](#)), και $x \in (-1,1)$, είναι φανερό ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \ln\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \cong 0.5108 \quad \diamond$$

Οι σημαντικότερες σειρές Maclaurin των συναρτήσεων, που αποδείχθηκαν στις εφαρμογές της παρούσας ενότητας και η περιοχή σύγκλισης κάθε σειράς παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 9.1: Αναπτύγματα Maclaurin στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	Maclaurin	Περιοχή σύγκλισης
1.	e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
2.	$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \dots$	$ x < 1$
3.	$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
5.	$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\tan^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots$	$ x \leq 1$
8.	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$	$ x < 1$
9.	$(1+x)^a$ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n =$ $= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 +$ $+ \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x < 1$
10.	$(1+x)^a$ $a \in \mathbb{N}_0$	$1 + \sum_{n=1}^a \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 +$ $= + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \dots + x^a$	$x \in \mathbb{R}$

9.3 Σειρές Fourier

Στην προηγούμενη ενότητα διατυπώθηκαν οι προϋποθέσεις ώστε μία συνάρτηση f , που έχει παραγώγους κάθε τάξης, να μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά κέντρου x_0 , δηλαδή, διατυπώθηκαν οι συνθήκες και υπολογίστηκαν οι συντελεστές της δυναμοσειράς ώστε το ανάπτυγμα να συγκλίνει στη ίδια τη συνάρτηση f , δηλαδή, να ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x σε μια περιοχή που περιέχει το x_0 .

Στην ενότητα αυτή, θα μας απασχολήσει ένα παρόμοιο πρόβλημα: θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις, ώστε μία γνωστή συνάρτηση f , να μπορεί να γραφεί ως σειρά των συναρτήσεων μίας ταλάντωσης, δηλαδή, να αναλυθεί σε σειρά με όρους τις περιοδικές συναρτήσεις του ημιτόνου και συνημιτόνου, αυτές οι σειρές ονομάζονται σειρές Fourier.

Η ανάγκη προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας, η οποία είναι μία μερική διαφορική εξίσωση. Πριν από το έργο του Fourier, καμία γενική λύση της εξίσωσης της θερμότητας δεν ήταν γνωστή. Γνωστές ήταν μόνο οι μερικές λύσεις της, οι οποίες ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις, και αυτές μόνο για την περίπτωση που η πηγή θερμότητας περιγραφόταν ως ένα απλό ημιτονικό ή συνημιτονικό κύμα. Το βασικό πρόβλημα είναι να βρεθεί, κατά μήκος μίας λεπτής ράβδου, το πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η θερμοκρασία με βάση το πρότυπο της αρχικής θερμοκρασίας. Ο Fourier** θεώρησε ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται ως ημιτονοειδές κύμα κατά μήκος της ράβδου, αναπαράστησε το (σύνθετο) πρότυπο με ένα γραμμικό συνδυασμό ημιτονικών και συνημιτονικών καμπυλών με διαφορετικά μήκη κύματος, έλυσε την εξίσωση για κάθε συνιστώσα, ημιτονική / συνημιτονική καμπύλη (αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση), και έγραψε τη λύση ως γραμμικό συνδυασμό όλων των ιδιοσυναρτήσεων. Ο Fourier υποστήριξε ότι η μέθοδος αυτή ίσχυε για οποιοδήποτε πρότυπο, ακόμη και για εκείνα στα οποία η θερμοκρασία αλλάζει απότομα τιμή. Το άπειρο άθροισμα των συνιστωσών των ημιτονοειδών και συνημιτονικών καμπυλών είναι η σειρά Fourier ή ανάπτυγμα Fourier.

Οι σειρές Fourier είναι ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο της Μαθηματική Ανάλυσης, που βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορα πεδία της επιστήμης, π.χ. στην απόλωση του θορύβου από παλαιές ηχογραφήσεις, στην ψηφιακή φωτογραφία, γενικά στην ανάλυση σήματος και εικόνας, στην ανακάλυψη της δομής του DNA μέσω της απεικόνισης με ακτίνες X, στη βελτίωση της λήψης των ραδιοηλεκτρικών σημάτων και στην αποφυγή ανεπιθύμητων κραδασμών στα αυτοκίνητα, στις χρονολογικές σειρές στη στατιστική, στην οικονομετρία, στη μηχανική κλπ.

Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, η σειρά Fourier είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο των συναρτήσεων $\sin(nx)$ και $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, μέσω του οποίου προσεγγίζουμε τις τιμές μίας περιοδικής συνάρτησης f , καθώς $n \rightarrow +\infty$. Για να προσδιορισθεί η σειρά Fourier αρκεί να υπολογισθούν οι όροι-συντελεστές του αντίστοιχου τριγωνομετρικού πολυωνύμου, το οποίο μελετούμε στη συνέχεια.

** Το 1807, ο Jean-Baptiste Joseph Fourier επινόησε μία εξίσωση θερμότητας και υπέβαλε ένα άρθρο στη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών, όμως αυτό απερρίφθη. Το 1812 η Ακαδημία όρισε τη θερμότητα ως θέμα για το ετήσιο βραβείο της. Ο Fourier υπέβαλε εκ νέου ένα αναθεωρημένο άρθρο και κέρδισε το βραβείο.

Το άρθρο του Fourier επικρίθηκε ότι δεν ήταν αρκετά τεκμηριωμένο και η Γαλλική Ακαδημία αρνήθηκε να το δημοσιεύσει. Το 1822 ο Fourier αγνόησε τις αντιρρήσεις και δημοσίευσε τη θεωρία του ως βιβλίο. Ωστόσο οι επικριτές είχαν ένα δίκιο. Οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να συνειδητοποιούν ότι οι άπειρες σειρές ήταν «επικίνδυνα όντα»: δεν συμπεριφέρονταν πάντα «καλά, όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα». Η επίλυση των ζητημάτων που τέθηκαν αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολη, και η ιδέα του Fourier τεκμηριώθηκε πλήρως. Το αποτέλεσμα είναι η σειρά Fourier, μία εξίσωση η οποία αντιμετωπίζει ένα μεταβαλλόμενο με τον χρόνο σήμα ως το άθροισμα μίας σειράς με συνιστώσες, ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς καμπύλες, υπολογίζοντας τα πλάτη και τις συχνότητές τους.

Ορισμός 9.3.1. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο k βαθμού έχει τη μορφή

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

όπου $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, και $x \in \mathbb{R}$.

Ο ελάχιστος αριθμός T_n για τον οποίο ισχύει

$$\sin(n(x+T_n)) = \sin(nx) \quad \text{ή} \quad \cos(n(x+T_n)) = \cos(nx)$$

ονομάζεται **περίοδος** των αντίστοιχων συναρτήσεων $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, και ισούται με

$$T_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Τριγωνομετρική σειρά ονομάζεται το παραπάνω τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\varphi_k(x)$, όταν $k \rightarrow +\infty$, και έχει τη μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (9.3.1)$$

όπου $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$.

Τα ερωτήματα που εύλογα τίθενται είναι: (α) πώς υπολογίζονται οι συντελεστές a_0, a_n, b_n της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1); (β) η τριγωνομετρική σειρά στον Ορισμό 9.3.1 συγκλίνει; Σε περίπτωση θετικής απάντησης για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ και ποιο είναι το άθροισμά της;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα θα δοθεί στη συνέχεια της ενότητας, χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση που «προσεγγίζει» τη σειρά για κατάλληλες τιμές του x . Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα σχετίζεται με τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς των συντελεστών a_n, b_n . Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, αν η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ συγκλίνει, τότε η σειρά στην (9.3.1) συγκλίνει απόλυτα σε μία συνάρτηση f , η οποία είναι

συνεχής και περιοδική με περίοδο 2π , (βλέπε, [Παντελίδης, \(1999\), Πρόταση 2.1](#)). Η προηγούμενη πρόταση αναφέρεται σε σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς σε μία συνάρτηση, εφόσον έχει εξασφαλιστεί η απόλυτη σύγκλιση της σειράς των συντελεστών, οπότε ας προσπαθήσουμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη της ενότητας με τον υπολογισμό των συντελεστών a_0, a_n, b_n της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1).

Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η οποία προσεγγίζει την τριγωνομετρική σειρά στην (9.3.1), δηλαδή γνωρίζουμε τη συνάρτηση όπου συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά, έστω

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (9.3.2)$$

αναρωτιόμαστε αν υπάρχει κάποια σχέση, που συνδέει τους συντελεστές a_0, a_n, b_n με τη συνάρτηση f .

- Γράφουμε την (9.3.2) με τη μορφή

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

την ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο διάστημα $[0, 2\pi]$, θεωρώντας ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε όρο-προς-όρο την τριγωνομετρική σειρά, και προκύπτει

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx. \quad (9.3.3)$$

Σύμφωνα με την Ενότητα 7.5, όταν $m, n \in \mathbb{N}$, με $m \neq n$, τα ολοκληρώματα γινομένου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου (βλέπε, περίπτωση II, Ενότητα 7.5) δίνουν

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0, \quad (9.3.4)$$

και όταν $m = n$ τα ολοκληρώματα των δυνάμεων του ημιτόνου και συνημιτόνου (βλέπε, περίπτωση I (β), Ενότητα 7.5), δίνουν

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \pi. \quad (9.3.5)$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (9.3.2) με $\cos(mx)$, στη συνέχεια ολοκληρώσουμε κατά μέλη, και χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα από τις (9.3.3)-(9.3.4) προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \cos(mx) dx + b_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \sin(mx) dx = \pi a_m$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.6)$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (9.3.2) με $\sin(mx)$, στη συνέχεια ολοκληρώσουμε κατά μέλη, και χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα από τις (9.3.3)-(9.3.4) προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx) dx = a_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(mx) dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(mx) dx = \pi b_m$$

Επομένως,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.7)$$

Από την παραπάνω διαδικασία συμπεραίνεται ότι οι συντελεστές a_0, a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}$, της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1) σχετίζονται με τη συνάρτηση f , οπότε μπορούμε να διακρίνουμε μία κατηγορία τριγωνομετρικών σειρών, όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 9.3.2. Έστω μία συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 2\pi]$. **Σειρά Fourier ή ανάπτυγμα Fourier** της συνάρτησης f ονομάζεται η τριγωνομετρική σειρά της (9.3.1)

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

όπου οι συντελεστές a_0, a_n, b_n υπολογίζονται από τις σχέσεις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), και σημειώνεται με

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (9.3.8)$$

Στην (9.3.8) χρησιμοποιούμε το συμβολισμό \approx επειδή η f θεωρήθηκε ως μία προσέγγιση της σειράς Fourier του δεξιού μέλους, η ίδια η σειρά μπορεί να μην συγκλίνει ή και αν συγκλίνει να μη συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης f .

Παράδειγμα 9.3.3.

Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in [0, 2\pi]$ και να δοθεί η γραφική παράσταση της f και των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $1^{\text{ου}}$, $2^{\text{ου}}$, $3^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Η σειρά Fourier απαιτεί τον υπολογισμό:

- του συντελεστή a_0 από την (9.3.3), που είναι ίσος με:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi} [e^x]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - 1),$$

- των συντελεστών a_n , $n \in \mathbb{N}$, από την (9.3.6), οι οποίοι υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Ενότητα 7.3, Παραδείγματα 7.3.3 (iii)) και είναι ίσοι με:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)} \left[e^x (\cos(nx) + n \sin(nx)) \right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{1}{(n^2+1)\pi} \left(e^{2\pi} (\cos(2\pi n) + n \sin(2\pi n)) - e^0 (\cos(0) + n \sin(0)) \right) = \\
&= \frac{1}{(n^2+1)\pi} \left(e^{2\pi} (\cos(2\pi n) + 0) - (1 + 0) \right) = \frac{1}{(n^2+1)\pi} (e^{2\pi} - 1),
\end{aligned}$$

- και των συντελεστών b_n , $n \in \mathbb{N}$, από την (9.3.7), οι οποίοι υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Παραδείγματα 7.3.3 (iii)) και είναι ίσοι με:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)} \left[e^x (\sin(nx) - n \cos(nx)) \right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{1}{(n^2+1)\pi} \left(e^{2\pi} (\sin(2\pi n) - n \cos(2\pi n)) - e^0 (\sin(0) - n \cos(0)) \right) = \\
&= \frac{1}{(n^2+1)\pi} \left(e^{2\pi} (0 - n \cos(2\pi n)) - (0 - n) \right) = \frac{n}{(n^2+1)\pi} (1 - e^{2\pi}).
\end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0, a_n, b_n , η σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{(n^2+1)\pi} \cos(nx) + \frac{n(1 - e^{2\pi})}{(n^2+1)\pi} \sin(nx) \right)
\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

Στο Σχήμα 9.1 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο $x \in [0, 2\pi]$ με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού,

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) = \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - 1) + \frac{(e^{2\pi} - 1)}{2\pi} \cos(x) + \frac{(1 - e^{2\pi})}{2\pi} \sin(x),$$

σχεδιάζεται με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή, το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier στην (9.3.9), κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο της σειράς και παραλείποντας όλους τους άλλους.

Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) \\
&= \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - 1) + \frac{(e^{2\pi} - 1)}{2\pi} \cos(x) + \frac{(1 - e^{2\pi})}{2\pi} \sin(x) + \frac{(e^{2\pi} - 1)}{5\pi} \cos(2x) + \frac{2(1 - e^{2\pi})}{5\pi} \sin(2x),
\end{aligned}$$

σχεδιάζεται με ανοικτό μωβ χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dot), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους δύο πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9) και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού,

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x) = \\
&= \varphi_2(x) + \frac{(e^{2\pi} - 1)}{10\pi} \cos(3x) + \frac{3(1 - e^{2\pi})}{10\pi} \sin(3x)
\end{aligned}$$

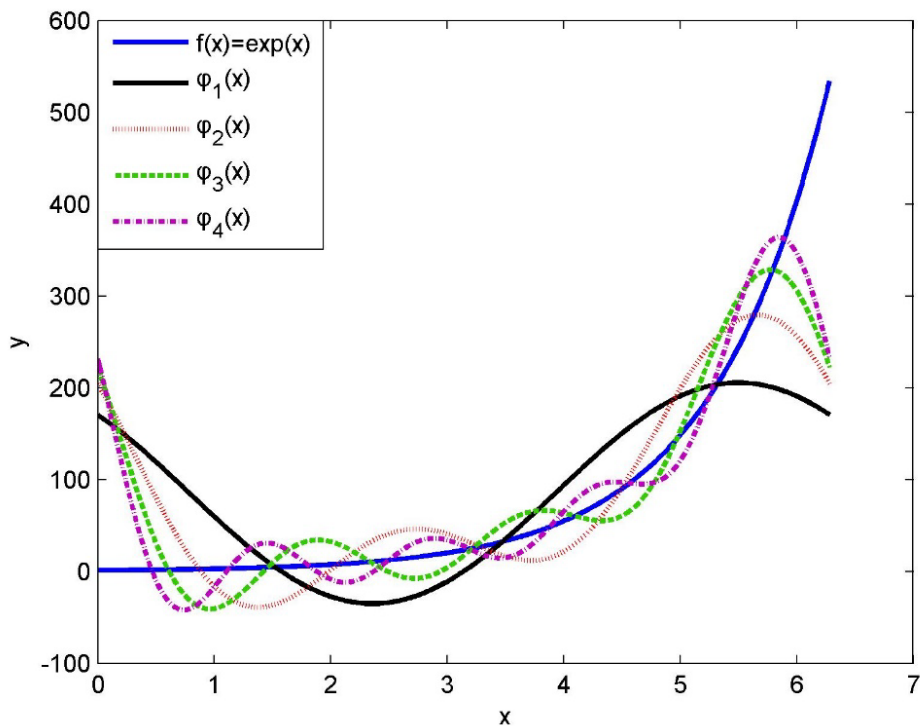
σχεδιάζεται με πράσινο χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dash), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους τρεις πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9) και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Τέλος, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού,

$$\begin{aligned}
\varphi_4(x) &= a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x) + a_4 \cos(4x) + b_4 \sin(4x) = \\
&= \varphi_3(x) + \frac{(e^{2\pi} - 1)}{17\pi} \cos(4x) + \frac{4(1 - e^{2\pi})}{17\pi} \sin(4x)
\end{aligned}$$

σχεδιάζεται με μωβ χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dash-dot), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9), παραλείποντας όλους τους άλλους.

Σχόλια: Παρατηρήστε στο Σχήμα 9.1, ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα πολύ «αργά» προσεγγίζουν τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$, και μάλιστα στα άκρα του διαστήματος $[0, 2\pi]$ προσεγγιστικές τιμές των τριγωνομετρικών πολυωνύμων απέχουν αρκετά από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης.



Σχήμα 9.1: Η προσέγγιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ από τα $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, στο $x \in [0, 2\pi]$.

◇◇

Παρατήρηση 9.3.4.

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή t μίας συνάρτησης f μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$, αν θέσουμε

$$t = \frac{2\pi a + x(b-a)}{2\pi},$$

η $f(t)$ μετασχηματίζεται στην $f(x)$, με $x \in [a, b]$, και αντίστροφα.

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι η αρχική συνάρτηση f έχει ανεξάρτητη μεταβλητή t με $t \in [0, 2\pi]$ χρησιμοποιώντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, την $t = x - \pi$, μπορεί να μετασχηματιστεί στην $f(x)$, με $x \in [-\pi, \pi]$ (πλάτους 2π).

Τότε, είναι φανερό ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier, που υπολογίστηκαν στις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), δίνουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα, αρκεί τα ολοκληρώματα να είναι ορισμένα στο $[-\pi, \pi]$, δηλαδή, οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (9.3.10)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \quad (9.3.11)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.12)$$

Εφαρμογή 9.3.5. i) Αν μία περιττή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad (9.3.13)$$

με τους συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίζονται από τον τύπο

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx. \quad (9.3.14)$$

Δηλαδή, το ανάπτυγμα Fourier μίας περιττής συνάρτησης περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις.

ii) Αν μία άρτια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad (9.3.15)$$

με τους συντελεστές a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, να υπολογίζονται από τους τύπους

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (9.3.16)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.17)$$

Δηλαδή, το ανάπτυγμα Fourier μίας άρτιας συνάρτησης περιέχει μόνο συνημιτονικές συναρτήσεις.

Απόδειξη: i) Υποθέτουμε ότι f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$, δηλαδή, ισχύει

$$f(-x) = -f(x).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και $\sin(nx)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι περιττές και ορισμένες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της περιττής και της άρτιας συνάρτησης, (βλέπε, Ορισμός 1.2.15.), εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $g(x) = f(x) \cdot \sin(nx)$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ είναι άρτια συνάρτηση και η $h(x) = f(x) \cdot \cos(nx)$ είναι περιττή συνάρτηση. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) για την περιττή συνάρτηση h ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = 0,$$

και από την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx. \quad (9.3.18)$$

Τώρα, επειδή η f είναι περιττή συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) ο τύπος στην (9.3.10), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Με ανάλογο τρόπο ο τύπος στην (9.3.11), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, γράφεται

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = 0.$$

Επομένως, αν η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$, επειδή $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, η (9.3.8) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας την (9.3.18) με την (9.3.12) για τους συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx,$$

αποδεικνύοντας την (9.3.14).

ii) Ανάλογα, αν η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$, τότε ισχύει

$$f(-x) = f(x).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και $\cos(nx)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι άρτιες και ορισμένες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της άρτιας και της περιττής συνάρτησης εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $h(x) = f(x) \cdot \cos(nx)$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ είναι άρτια συνάρτηση και η $g(x) = f(x) \cdot \sin(nx)$ είναι περιττή. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) για την περιττή συνάρτηση g ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = 0, \quad (9.3.19)$$

και από την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx. \quad (9.3.20)$$

Τώρα, συνδυάζοντας την (9.3.19) με την (9.3.12) για τους συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = 0.$$

Επομένως, αν η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$, επειδή $b_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (9.3.8) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη της (9.3.15) και επιβεβαιώνοντας ότι το ανάπτυγμα Fourier είναι μία σειρά με συνημιτονικές συναρτήσεις.

Επειδή η f είναι άρτια συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ο τύπος στην (9.3.10), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Επιπλέον, ο τύπος στην (9.3.11), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, από την (9.3.20) γράφεται

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◇◇

Παραδείγματα 9.3.6.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι συναρτήσεις

$$\text{i) } f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in [-\pi, \pi] \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } -\pi \leq x < 0 \\ -x+1, & \text{αν } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = -x$ στο (i) να δοθεί η γραφική παράστασή της καθώς και των τριγωνομετρικών πολωνύμων 1^{ov} , 2^{ov} , 3^{ov} και 4^{ov} βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

i) Επειδή για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ ισχύει $f(-x) = -(-x) = x = -f(x)$, η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.5 (i), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις και δίνεται από την (9.3.13) ως $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, οι δε συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.14), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-x) \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x \cdot (\cos(nx))' dx = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left([x \cdot \cos(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx) dx \right) = \frac{2}{n\pi} \left([x \cdot \cos(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx) dx \right) = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left([x \cdot \cos(nx)]_0^\pi - \frac{1}{n} [\sin(nx)]_0^\pi \right) = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left((\pi \cos(n\pi) - 0) - \frac{1}{n} (\sin(n\pi) - \sin(0)) \right) = \frac{2}{n\pi} (\pi \cos(n\pi)) = \frac{2}{n} ((-1)^n) = \frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές b_n στην (9.3.13) προκύπτει η σειρά των ημιτονικών όρων:

$$-x \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx) = -2 \sin(x) + \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{2}{4} \sin(4x) - \frac{2}{5} \sin(5x) + \dots$$

Στο Σχήμα 9.2 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = -x$ στο $x \in [-\pi, \pi]$ με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή καθώς και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα 1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού,

$$\varphi_1(x) = -2 \sin(x),$$

σχεδιάζεται με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή, το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier στην (9.3.13), κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο της σειράς και παραλείποντας τους υπόλοιπους. Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού,

$$\varphi_2(x) = -2 \sin(x) + \sin(2x),$$

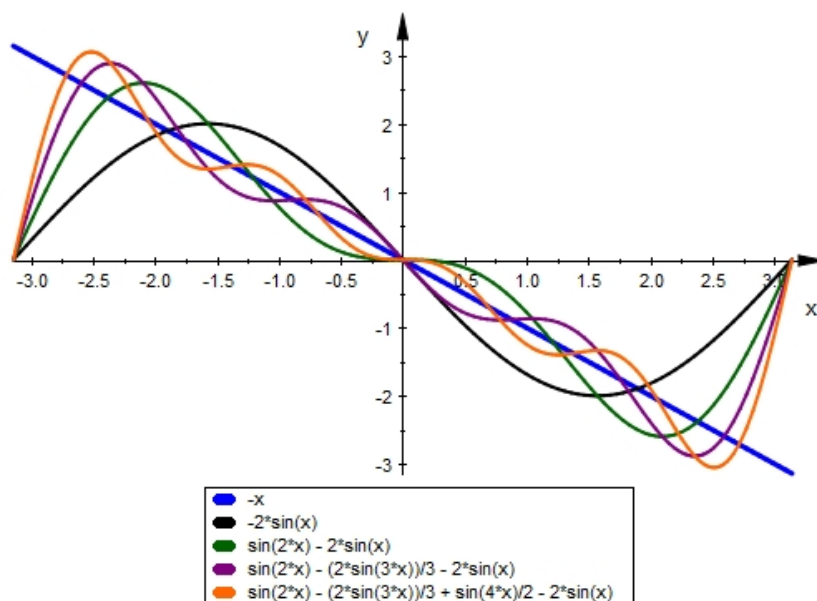
σχεδιάζεται με ανοικτό πράσινο χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dot)), το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού,

$$\varphi_3(x) = -2 \sin(x) + \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin(3x),$$

σχεδιάζεται με μωβ χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dash)), και το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού,

$$\varphi_4(x) = -2 \sin(x) + \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{2}{4} \sin(4x),$$

σχεδιάζεται με πορτοκαλί χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dash-dot)).



Σχήμα 9.2: Η προσέγγιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = -x$ από τα $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, στο $x \in [-\pi, \pi]$.

Σχόλια: Παρατηρήστε ότι, στο Σχήμα 9.2 υπάρχουν υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα βρίσκονται «πολύ κοντά» στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και υπάρχουν και τιμές του x , που οι αντίστοιχες τιμές των τριγωνομετρικών πολυωνύμων δεν προσεγγίζουν την τιμή της συνάρτησης. Για παράδειγμα, για $x=0$, προφανώς οι τιμές των αντίστοιχων τριγωνομετρικών πολυωνύμων, όπως και το άθροισμα της ημιτονικής σειράς Fourier, είναι ίσο με $f(0)=0$, ενώ για $x=\pm\pi$, η τιμή των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, όπως και της σειράς Fourier, είναι ίση με μηδέν, και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι $f(\pm\pi)=\mp\pi$.

Επιπλέον, επειδή η σειρά Fourier της $f(x)=-x$ μπορεί να γραφεί

$$-x \approx 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) = 2 \left(-\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

αντικαθιστώντας στην παραπάνω παράσταση $x = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \approx 2 \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \frac{1}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) - \dots \right) = 2 \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots \right)$$

Παρατηρήστε ότι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$$

επομένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί

$$\frac{\pi}{2} \approx 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots \right) = 2 \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right),$$

από όπου προκύπτει :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \approx 1 - \frac{\pi}{4}$$

Η παραπάνω (αριθμητική) σειρά είναι μία εναλλάσσουσα σειρά, στην οποία εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz, διαπιστώνουμε ότι συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2). Επιπλέον, από την εφαρμογή της Πρότασης 3.3.5 προκύπτει μία εκτίμηση του αθροίσματός της. Στο Παράδειγμα 3.3.6, αποδείχθηκε ότι απαιτείται ο υπολογισμός του αθροίσματος των 50 πρώτων όρων της σειράς, προκειμένου να υπάρχει ακρίβεια με 2 δεκαδικά ψηφία της προσέγγισης του αθροίσματός της. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας Matlab/Octave και τις συμβολικές εντολές `syms`, `symsum`, παρουσιάστηκε η παραπάνω προσέγγιση του αθροίσματος της εναλλάσσουσας σειράς, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.3). Συνεπώς, η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει στην προσεγγιστική τιμή που υπολογίστηκε μέσω της σειράς Fourier της $f(x)=-x$ για $x = \frac{\pi}{2}$.

Παρατηρήστε στο Σχήμα 9.2, ότι η προσεγγιστική τιμή των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «αρκετά διαφορετική» από την τιμή της συνάρτησης, επειδή $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \neq -\frac{\pi}{2} \approx -1.5708$, καθώς και $\varphi_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3} \neq -\frac{\pi}{2}$.

ii) Επειδή, για κάθε $x \in [0, \pi] \Rightarrow -x \in [-\pi, 0]$ ισχύει $f(-x) \stackrel{y=-x}{=}_{y \in [-\pi, 0]} f(y) = y + 1 = -x + 1 = f(x)$, και για κάθε $x \in [-\pi, 0] \Rightarrow -x \in [0, \pi]$ ισχύει $f(-x) \stackrel{y=-x}{=}_{y \in [0, \pi]} f(y) = -y + 1 = x + 1 = f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.5 (ii), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο

συνημιτονικές συναρτήσεις και δίνεται από την (9.3.15) ως $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.16) και είναι

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-x+1) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-x+1) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi \right) = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2},$$

οι δε συντελεστές a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.17), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-x+1) \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (-x+1) \cdot (\sin(nx))' dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left([(-x+1) \cdot \sin(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi (-x+1)' \cdot \sin(nx) dx \right) = \frac{2}{n\pi} \left([(-x+1) \cdot \sin(nx)]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left([(-x+1) \cdot \sin(nx)]_0^\pi - \frac{1}{n} [\cos(nx)]_0^\pi \right) = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left((-\pi+1) \cdot \sin(n\pi) - (0+1) \cdot \sin(0) - \frac{1}{n} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \right) = \\ &= -\frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}, & \text{av } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{av } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0 και a_n στην (9.3.15) προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{2-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) = \\ &= \frac{2-\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x) = \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) = \\ &= \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{9\pi} \cos(3x) + \frac{4}{25\pi} \cos(5x) + \frac{4}{49\pi} \cos(7x) + \dots = \\ &= \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) \end{aligned}$$

◇◇

Γενικεύοντας τα αποτελέσματα της Παρατήρησης 9.3.4, μπορούμε να αναλύσουμε μία συνάρτηση ορισμένη σε συμμετρικό διάστημα σε σειρά Fourier, δηλαδή, σε μία σειρά συναρτήσεων που αποτελείται από συνδυασμό ημιτονικών και συνημιτονικών συναρτήσεων, όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 9.3.7. Έστω μία συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a, a]$ με $a > 0$. Η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right), \quad (9.3.21)$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n , δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \quad (9.3.22)$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.3.23)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.24)$$

Βασιζόμενοι στην [Εφαρμογή 9.3.5](#) και παρατηρώντας ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι περιττές, ενώ $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι άρτιες, όταν πρόκειται για μία περιττή/άρτια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[-a, a]$, με $a > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 9.3.8. i) Αν μία περιττή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (9.3.25)$$

με τους συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίζονται από τον τύπο

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \quad (9.3.26)$$

ii) Αν μία άρτια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a, a]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (9.3.27)$$

με τους συντελεστές a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, να υπολογίζονται από τους τύπους

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx, \quad (9.3.28)$$

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (9.3.29)$$

Απόδειξη: Έστω f περιττή στο διάστημα $[-a, a]$ με $a > 0$, δηλαδή, $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in [-a, a]$. Τότε, από την (9.3.23) για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_a^0 f(-x) \cdot \cos\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) d(-x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = (f \text{ περιττή}) \\ &= \frac{1}{a} \int_a^0 f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, αν η f είναι περιττή στο $[-a, a]$, επειδή $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, η (9.3.21) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Επιπλέον, από την (9.3.24) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_a^0 f(-x) \cdot \sin\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) d(-x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \quad (f \text{ περιττή}) \\
&= -\frac{1}{a} \int_a^0 f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,
\end{aligned}$$

αποδεικνύοντας την (9.3.26).

ii) Με ανάλογο τρόπο, αν η f είναι άρτια στο $[-a, a]$, με $a > 0$, τότε $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in [-a, a]$, τότε, από την (9.3.24) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_a^0 f(-x) \cdot \sin\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) d(-x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \quad (f \text{ άρτια}) \\
&= \frac{1}{a} \int_a^0 f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= -\frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 0
\end{aligned}$$

Επομένως, αν η f είναι άρτια στο $[-a, a]$, επειδή $b_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (9.3.21) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

αποδεικνύοντας την (9.3.27).

Επιπλέον, ο τύπος στην (9.3.22), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^0 f(x) dx + \frac{1}{2a} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2a} \int_a^0 f(-x) d(-x) + \frac{1}{2a} \int_0^a f(x) dx = \\
&= -\frac{1}{2a} \int_a^0 f(x) dx + \frac{1}{2a} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2a} \int_0^a f(x) dx + \frac{1}{2a} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx,
\end{aligned}$$

επαληθεύοντας τον τύπο στην (9.3.28).

Τέλος, ο τύπος στην (9.3.23), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γράφεται:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_a^0 f(-x) \cdot \cos\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) d(-x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \quad (f \text{ άρτια}) \\
&= -\frac{1}{a} \int_a^0 f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) d(x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,
\end{aligned}$$

αποδεικνύοντας τον τύπο στην (9.3.29).

◇◇

Παραδείγματα 9.3.9.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι ακόλουθες συναρτήσεις:

i) $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in [-3, 3]$.

ii) $f(x) = x^3$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

i) Από τον ορισμό της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι $a = 3$ και από τον ορισμό της απόλυτης τιμής μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } -3 \leq x < 0 \\ x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Επειδή, για κάθε $x \in [0, 3] \Rightarrow -x \in [-3, 0]$ ισχύει $f(-x) = -(-x) = x = f(x)$, και για κάθε $x \in [-3, 0] \Rightarrow -x \in [0, 3]$ ισχύει $f(-x) = -x = f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια στο $[-3, 3]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.8 (ii), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο συνημιτονικές συναρτήσεις, δίνεται από την (9.3.27) και έχει τη μορφή $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$.

Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.28) και είναι

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 x dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3^2}{2} - 0 \right) = \frac{3}{2},$$

οι δε συντελεστές a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.29), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3} x\right)}{\frac{n\pi}{3}} \right)' dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(n\pi/3)} \int_0^3 x \cdot \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right)' dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\left[x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right]_0^3 - \int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \right) = \frac{2}{n\pi} \left(\left[x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right]_0^3 + \frac{1}{(n\pi/3)} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right]_0^3 \right) = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(3 \cdot \sin(n\pi) - 0 \cdot \sin(0) + \frac{3}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \right) = \\ &= \frac{6}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-12}{(2k+1)^2 \pi^2}, & \text{αν } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{αν } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0 και a_n στην (9.3.27) προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-12}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{3}\right) = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \frac{12}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{3}\right) - \frac{12}{25\pi^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) - \frac{12}{49\pi^2} \cos\left(\frac{7\pi x}{3}\right) - \dots = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right) \end{aligned}$$

ii) Από τον ορισμό της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι $a = 1$. Επειδή, το διάστημα όπου ορίζεται η συνάρτηση είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, προφανώς για κάθε $x \in [0, 1] \Rightarrow -x \in [-1, 0]$ και για κάθε $x \in [-1, 0] \Rightarrow -x \in [0, 1]$ και επιπλέον ισχύει $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-1, 1]$.

Σύμφωνα με την [Εφαρμογή 9.3.8 \(i\)](#), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις, δίνεται από την (9.3.25) και έχει τη μορφή $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, όπου οι συντελεστές $b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.26). Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Ενότητα 7.3) ή χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, (βλέπε, Ενότητα 9.4) υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \int x^3 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int x^3 \cdot \sin(n\pi x) dx$$

για το οποίο βρίσκουμε

$$I = \int x^3 \cdot \sin(n\pi x) dx = \left(-\frac{1}{n\pi} x^3 + \frac{6}{n^3 \pi^3} x\right) \cos(n\pi x) - \left(-\frac{3}{n^2 \pi^2} x^2 - \frac{6}{n^4 \pi^4}\right) \sin(n\pi x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Οι συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δίνονται από το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x^3 \cdot \sin(n\pi x) dx = 2 \left[\left(-\frac{1}{n\pi} x^3 + \frac{6}{n^3 \pi^3} x\right) \cos(n\pi x) - \left(-\frac{3}{n^2 \pi^2} x^2 - \frac{6}{n^4 \pi^4}\right) \sin(n\pi x) + c \right]_0^1 = \\ &= 2 \left(\left(-\frac{1}{n\pi} + \frac{6}{n^3 \pi^3}\right) \cos(n\pi) - \left(-\frac{3}{n^2 \pi^2} - \frac{6}{n^4 \pi^4}\right) \sin(n\pi) + c \right) - 2 \left(-\left(\frac{6}{n^4 \pi^4}\right) \sin(0) + c \right) = \\ &= 2 \frac{(-1)^n (6 - n^2 \pi^2)}{n^3 \pi^3} = \frac{(-1)^n (12 - 2n^2 \pi^2)}{n^3 \pi^3} \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές b_n στην (9.3.25) προκύπτει:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (12 - 2n^2 \pi^2)}{n^3 \pi^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (12 - 2n^2 \pi^2)}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x) \quad \diamond$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.3.7, μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και από την (9.3.21) είναι φανερό ότι, οι τιμές της f βρίσκονται «πολύ κοντά» στις τιμές της σειράς, ωστόσο όπως σχολιάστηκε και στα [Παραδείγματα 9.3.3](#) και [9.3.6 \(i\)](#), δεν γνωρίζουμε, αν η σειρά συγκλίνει ή και αν συγκλίνει μπορεί να μη συγκλίνει στις τιμές $f(x)$, για κάθε $x \in [-a, a]$. Επιπλέον, δεν εξετάσαμε αν ήταν ορθό, που ολοκληρώσαμε όρο-προς-όρο τη σειρά Fourier, προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς, υπενθυμίζεται ότι, αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει στις δυναμοσειρές χωρίς περιορισμούς, (βλέπε, [Πρόταση 9.1.12](#)). Η απάντηση στο ερώτημα σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς Fourier δίνεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία, (βλέπε, [Παντελίδης, 1999](#)).

Θεώρημα 9.3.10. Έστω ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και η παράγωγος f' είναι τμηματικά συνεχείς[§] στο διάστημα $[-a, a]$. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην $f(x)$, για κάθε $x \in (-a, a)$, όπου η f είναι συνεχής. Αν x_0 σημείο ασυνέχειας της f , τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \quad (9.3.30)$$

όπου $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ με $f(x_0^+), f(x_0^-) \in \mathbb{R}$.

[§] Μία συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα I , αν υπάρχουν πεπερασμένοι πλήθους σημεία ασυνέχειας $x_0 \in I$, δηλαδή, οι πλευρικές οριακές τιμές στο x_0 υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιώντας είτε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, είτε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$.

Παρατηρήσεις 9.3.11. i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f μέσω της σχέσης στην (9.3.21) ισούται με την τιμή της f σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $(-a, a)$, όπου η συνάρτηση είναι συνεχής. Ακόμη και σε σημεία, όπου η συνάρτηση f είναι ασυνεχής, έστω $x_0 \in (-a, a)$, αν είναι πραγματικοί αριθμοί τα πλευρικά όρια καθώς και οι πλευρικές παράγωγοι σε αυτές τις θέσεις ασυνέχειας, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$, δηλαδή την (9.3.21) την γράφουμε:

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \right)$$

Τέλος, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.3.10, η σειρά Fourier μπορεί να συγκλίνει στα άκρα $\pm a$ του διαστήματος $(-a, a)$, με αντίστοιχες τιμές

$$\frac{f(-a^-) + f(-a^+)}{2} \quad \text{και} \quad \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2} \quad (9.3.31)$$

όπου οι τιμές $f(-a^-)$ και $f(a^+)$ υπολογίζονται από την επέκταση της συνάρτησης f , δείτε στη συνέχεια.

ii) Επειδή με το Θεώρημα 9.3.10 εξασφαλίζεται ένα κριτήριο ελέγχου σύγκλισης της σειράς Fourier στην τιμή της συνάρτησης, μπορούμε μετά τον έλεγχο του κριτηρίου, να αντικαθιστούμε το συμβολισμό \approx με $=$ στις περιπτώσεις, στις περιπτώσεις που γνωρίζουμε ότι η σειρά Fourier συγκλίνει.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -x$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ του Παραδείγματος 9.3.6 (i) είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10. μπορούμε να σημειώσουμε:

$$-x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx) = -2\sin(x) + \sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{4}\sin(4x) - \frac{2}{5}\sin(5x) + \dots$$

Όπως αναφέρεται και στα Σχόλια του παραδείγματος, στα άκρα του διαστήματος $[-\pi, \pi]$, οι τιμές της f είναι

$$f(-\pi) = \pi \quad \text{και} \quad f(\pi) = -\pi,$$

και τότε ισχύει

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0 \neq f(\mp\pi),$$

άρα δεν επαληθεύεται η (9.3.30), (βλέπε, τη σχετική παρατήρηση παραπάνω στο (i)).

Επομένως, για $x = \pm\pi$ η σειρά Fourier προσεγγίζει τις τιμές της συνάρτησης, (βλέπε σχετικά και το Σχήμα 9.2). Προφανώς, αν η συνάρτηση οριζόταν

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{αν } x = \pm\pi \end{cases},$$

τότε για κάθε x θα σημειωνόταν

$$-x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx) = -2\sin(x) + \sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{4}\sin(4x) - \frac{2}{5}\sin(5x) + \dots$$

Ανάλογα, μπορούμε να συμπεράνουμε για τη συνάρτηση του Παραδείγματος 9.3.6 (ii), όπου η συνάρτηση είναι συνεχής για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1, \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1,$$

$$f(-\pi^+) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (x + 1) = -\pi + 1, \quad \text{και} \quad f(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (-x + 1) = -\pi + 1$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10., για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$, μπορούμε να σημειώσουμε

$$f(x) = \frac{2 - \pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x).$$

Παρατηρήστε ότι, οι συναρτήσεις $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ και $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2a$, επειδή από τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Τυπολόγιο 1.5.18 (6) και (7)), μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{n\pi(x+2a)}{a}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{a} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(2n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(2n\pi) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \diamond, \\ \cos\left(\frac{n\pi(x+2a)}{a}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{a} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(2n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(2n\pi) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier ως άθροισμα περιοδικών συναρτήσεων είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2a$. Επομένως, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.3.10 από μία περιοδική συνάρτηση f , τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier, που αντιστοιχεί σε αυτήν την f , συγκλίνει στην

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να σκεφτούμε έναν τρόπο ώστε η συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $[-a, a]$, να μπορεί να **επεκταθεί** στο \mathbb{R} μέσω μίας περιοδικής συνάρτησης, η οποία να συγκλίνει στην αντίστοιχη σειρά Fourier.

Ορισμός 9.3.12. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-a, a]$, η οποία μπορεί να επεκταθεί με περίοδο $T = 2a$. Η **περιοδική επέκταση** της συνάρτησης f είναι μία συνάρτηση f_e ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-a, a] \\ f(x_i), & \text{αν } x = x_i + 2ka, k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-a, a], \text{ και } x_i \in [-a, a] \end{cases} \quad (9.3.32)$$

Στην (9.3.32) ο ακέραιος k δηλώνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση της f .

Παραδείγματα 9.3.13.

Να υπολογισθούν οι περιοδικές επεκτάσεις σε όλο τον πραγματικό άξονα των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in [-2, 2]$

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = \pm 1 \end{cases}$

i) Από τον ορισμό της f προκύπτει ότι $a = 2$, οπότε θεωρώντας ότι η f επεκτείνεται με περίοδο $T = 2a = 4$ σε όλο τον πραγματικό άξονα, η επέκτασή της δίνεται από τον Ορισμό 9.3.12 και την (9.3.32) και είναι:

$$f_e(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x \in [-2, 2] \\ e^{x-4k}, & \text{αν } x \notin [-2, 2], k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

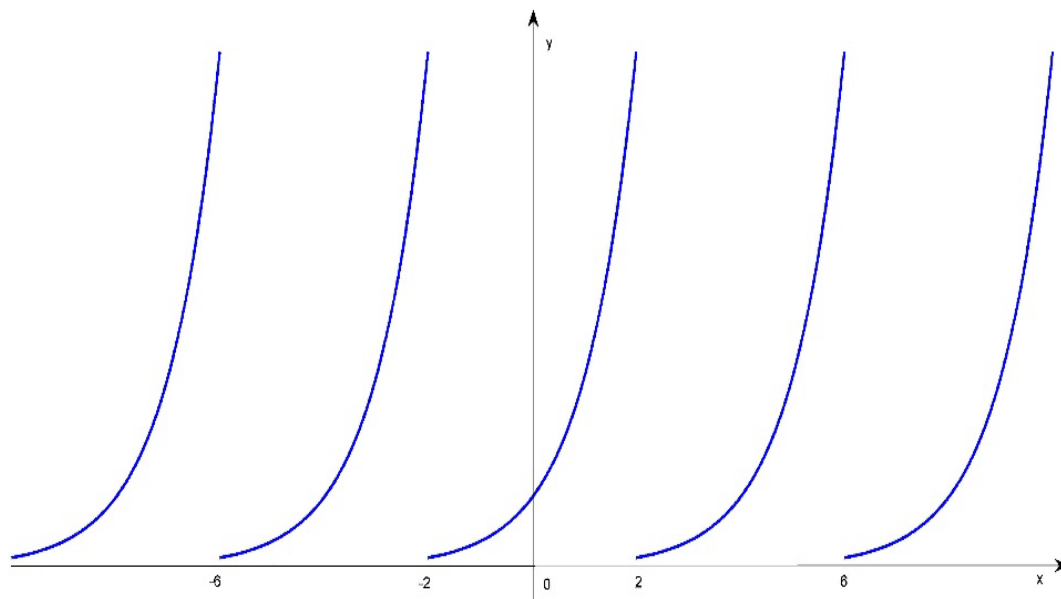
Στο Σχήμα 9.3 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της f_e , περιοδική επέκταση της f , στο $[-10, 10]$.

ii) Από τον ορισμό της g προκύπτει ότι $a = 1$, επομένως η περιοδική επέκταση της συνάρτησης g δίνεται από την (9.3.32) και είναι:

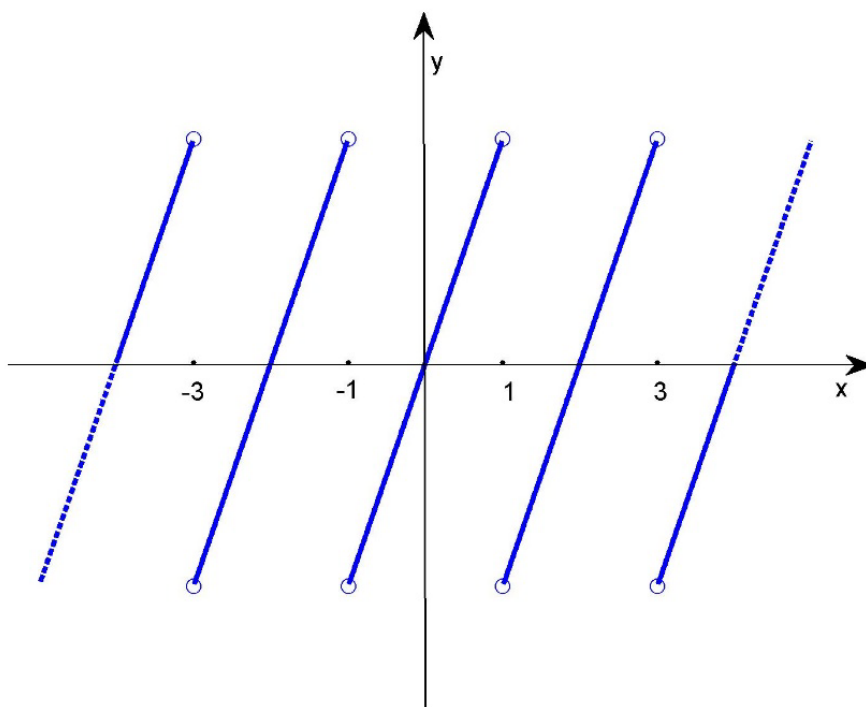
$$g_e(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{αν } x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ x - 2k, & \text{αν } x \notin (-1, 1), x \neq 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9.4 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της g_e , περιοδική επέκταση της g , στο $(-5, 5)$.

♦ Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(2n\pi) = 0$ και $\cos(2n\pi) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.



Σχήμα 9.3: Η γραφική παράσταση της f_e .



Σχήμα 9.4: Η γραφική παράσταση της g_e .

◇◇

Συνδυάζοντας τον παραπάνω ορισμό της περιοδικής επέκτασης της f στην (9.3.32), με το Θεώρημα 9.3.10 συμπεραίνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.3.14. Έστω ότι η συνάρτηση f και η παράγωγος f' είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα $[-a, a]$. Έστω f_e η περιοδική επέκταση της f , όπως στον Ορισμό 9.3.12. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-a, a] \text{ και } f \text{ συνεχής στο } x \\ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, & \text{αν } x = x_0 \text{ σημείο ασυνέχειας της } f, \text{ όπου } x_0 \in [-a, a] \\ f(x_{i_0}), & \text{αν } x = x_{i_0} + 2ka, k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-a, a], \\ & \text{και } x_{i_0} \in [-a, a], \text{ με } x_{i_0} \text{ σημείο συνέχειας της } f \\ \frac{f(x_{i_0}^+) + f(x_{i_0}^-)}{2}, & \text{αν } x = x_{i_0} + 2ka, k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-a, a], \\ & \text{και } x_{i_0} \in [-a, a], \text{ με } x_{i_0} \text{ σημείο ασυνέχειας της } f \end{cases} \quad (9.3.33)$$

όπου $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ και $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.3.15.

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική επέκταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.3.13.

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = \pm 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10 η σειρά Fourier της f , για κάθε $x \in (-1, 1)$, συγκλίνει στην $f(x)$.

Τώρα για τον υπολογισμό της σειράς Fourier, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για μία περιττή συνάρτηση, επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει $f(-x) = -x = f(x)$. Συνεπώς, η σειρά Fourier της f περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις (βλέπε, Εφαρμογή 9.3.8 (i)), υπολογίζεται από την (9.3.25), οι δε συντελεστές b_n δίνονται από

την (9.3.26), και είναι $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (δείτε, άσκηση αυτοαξιολόγησης 9.5.14). Επομένως, για κάθε $x \in (-1, 1)$, η σειρά είναι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) \quad (9.3.34)$$

Επειδή η f είναι συνεχής $x \in [-1, 1]$, η σειρά συγκλίνει στην f , οπότε γράφουμε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x)$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.3.11 (i) μπορούμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς και στα άκρα του διαστήματος $(-1, 1)$, χρησιμοποιώντας τις τιμές της επέκτασης της f και από την (9.3.31) να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς.

Για το αριστερό άκρο του διαστήματος $(-1, 1)$ είναι:

$$f(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f_e(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1, \quad f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1,$$

και για το δεξιό άκρο του διαστήματος είναι:

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_e(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1,$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά συγκλίνει

- στην τιμή $\frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, αν $x = -1$, και

- στην τιμή $\frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, για $x = -1$.

Η περιοδική επέκταση της f δίνεται στο Παράδειγμα 9.3.13. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με την Πρόταση 9.3.14, η σειρά Fourier στην (9.3.34) συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στην περιοδική επέκταση της f , η οποία δίνεται από την (9.3.33) και είναι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{αν } x = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ x-2k, & \text{αν } x \in \mathbb{R}, \text{ με } x \notin (-1, 1), x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

◇◇

Παράδειγμα 9.3.16.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{αν } -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & \text{αν } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας της f ;
- Να ορίσετε μία επέκταση της f ορισμένη σε όλο το \mathbb{R} , την f_e , ώστε η σειρά Fourier του (i) να συγκλίνει στην f_e .
- Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier στο (i) και για $x = \pi$, να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

i) Προφανώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην $f(x)$, αρκεί να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς.

- Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.22) και είναι:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{2} [x]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

- Οι συντελεστές a_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.23), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \\ &= \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x (\sin(nx))' dx = \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (x)' \sin(nx) dx = \\ &= \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} (\cos(nx))' dx = \\ &= \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [x \sin(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2 \pi} [\cos(nx)]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}. \end{aligned}$$

- Οι συντελεστές b_n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.24), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \\
 &= \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \\
 &= -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x (\cos(nx))' dx = -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (x)' \cos(nx) dx = \\
 &= -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} (\sin(nx))' dx = \\
 &= -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2 \pi} [x \sin(nx)]_0^{\pi} = \\
 &= -\frac{1}{n} (\cos(0) - \cos(n(-\pi))) - \frac{1}{n\pi} (\pi \cos(n\pi)) + \frac{1}{n^2 \pi} (\pi \sin(\pi))_0^{\pi} = \\
 &= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 = -\frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Άρα, η σειρά Fourier προκύπτει αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0 , a_n και b_n από παραπάνω στην (9.3.21):

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \\
 &= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx)
 \end{aligned} \tag{9.3.35}$$

ii) Στο σημείο 0 υπάρχει ασυνέχεια, επειδή

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pi, \quad f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \tag{9.3.36}$$

Για το αριστερό άκρο του διαστήματος έχουμε:

$$f(-\pi^-) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f_e(x) = \pi, \quad f(-\pi^+) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \pi = \pi.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \pi = f(-\pi)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $-\pi$.

Για το δεξιό άκρο του διαστήματος έχουμε:

$$f(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x = \pi, \quad f(\pi^+) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f_e(x) = \pi.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \pi = f(\pi)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο π .

Συνεπώς, η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi, \pi]$, ενώ, στο \mathbb{R} τα σημεία ασυνέχειας είναι τα $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Θεωρώντας ότι η f επεκτείνεται με περίοδο $T = 2\pi$, σύμφωνα με τον Ορισμό 9.3.12 και την (9.3.32) η περιοδική επέκταση της f είναι:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-\pi, \pi] \\ f(x - 2k\pi), & \text{αν } x = x_i + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-\pi, \pi], \text{ και } x_i \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.3.14, η σειρά Fourier στην (9.3.35) συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε x , όπου η f είναι συνεχής.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier συγκλίνει και σε σημεία ασυνέχειας με άθροισμα (τιμή σύγκλισης), την τιμή που υπολογίζεται από την (9.3.30). Επειδή στο (ii) αποδείχθηκε ότι τα σημεία ασυνέχειας είναι για $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, αντικαθιστώντας τις τιμές της συνάρτησης από την (9.3.36) στην (9.3.30) έχουμε:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{9.3.37}$$

Συνεπώς από (9.3.35), (9.3.37) και την (9.3.33), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει ως ακολούθως :

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) = \begin{cases} \pi, & \text{αν } x \in [-\pi, 0] \\ x, & \text{αν } x \in (0, \pi] \\ \frac{\pi}{2}, & \text{αν } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}_0 \\ \pi, & \text{αν } x = x_i + 2k\pi, x_i \in [-\pi, 0], x \notin [-\pi, \pi], x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - 2k\pi, & \text{αν } x = x_i + 2k\pi, x_i \in [0, \pi], \text{ με } x \notin [-\pi, \pi], x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

iv) Επειδή η $f(\pi) = \pi$, αν στη σειρά Fourier στην (9.3.35) θέσουμε $x = \pi$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi = f(\pi) &= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \sin(n\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^1}{1^2} + \frac{1 - (-1)^2}{2^2} + \frac{1 - (-1)^3}{3^2} + \frac{1 - (-1)^4}{4^2} + \frac{1 - (-1)^5}{5^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

◇◇

9.4. Σειρές συναρτήσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον

9.4.1. Σειρές Taylor

Η εντολή `taylor` χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μίας συνάρτησης f από το πολυώνυμο Taylor n βαθμού.

Η εντολή είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Taylor, η εντολή `taylor` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση f
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .
Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι η μεταβλητή είναι η x
- τον αριθμό n , ο οποίος δηλώνει το $(n-1)$ βαθμό του πολυωνύμου Taylor.
Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι 5^{ου} βαθμού.
- το κέντρο ανάπτυξης x_0 του πολυωνύμου (και της σειράς) Taylor
Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι το κέντρο ανάπτυξης είναι το 0, συνεπώς πρόκειται για πολυώνυμο Maclaurin.

Σύνταξη εντολής: `taylor(f,x,n,x0)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Taylor 5^{ου} βαθμού της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ με κέντρο ανάπτυξης το $x_0 = \frac{\pi}{6}$, γράφουμε:

```
syms x
f = sin(x);
[y]=taylor(f,x,6,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y = -(3^(1/2)*(pi/6 - x)^5)/240+ (pi/6 - x)^4/48 +
      +(3^(1/2)*(pi/6 - x)^3)/12 - (pi/6 - x)^2/4 +
      - (3^(1/2)*(pi/6 - x))/2 + 1/2
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε το πολυώνυμο Taylor 5^{ου} βαθμού με κέντρο ανάπτυξης το $x_0 = \frac{\pi}{6}$ σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$-\frac{\sqrt{3}}{240}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^5 + \frac{1}{48}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^4 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-x\right) + \frac{1}{2}$$

Για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Maclaurin 6^{ου} βαθμού της συνάρτησης $p(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$ με κέντρο ανάπτυξης το $x_0 = 0$, σύμφωνα με το [Παράδειγμα 9.2.14 \(iii\)](#), γράφουμε:

```
syms x
p = (2x^2)/(1-x)^3
[y]=taylor(p,x,7,0);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το πολυώνυμο 6^ο βαθμού, που είναι:

$$y = 30*x^6 + 20*x^5 + 12*x^4 + 6*x^3 + 2*x^2$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$y = 30x^6 + 20x^5 + 12x^4 + 6x^3 + 2x^2$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν δεν βάζουμε το κέντρο ανάπτυξης στην εντολή `taylor`, αν γράψουμε:

```
syms x
p = (2x^2)/(1-x)^3
[y]=taylor(p,x,7);
```

Η απάντηση είναι :

$$y = 30*x^6 + 20*x^5 + 12*x^4 + 6*x^3 + 2*x^2$$

◇◇

9.4.2. Σειρές Fourier

Οι συντελεστές $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, της σειράς Fourier στις (9.3.22), (9.3.23), (9.3.24)[♦], επειδή δίνονται από ορισμένα ολοκληρώματα, μπορούν να υπολογιστούν με Matlab/Octave. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τη συμβολική εντολή `syms` δηλώνονται δύο μεταβλητές, η ανεξάρτητη μεταβλητή x της ακολουθίας των συντελεστών και η ανεξάρτητη μεταβλητή x της συνάρτησης f , επίσης απαιτείται η εντολή `int` για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, (βλέπε, Ενότητα 7.7). Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των τύπων των συντελεστών που χρησιμοποιούνται και στα αντίστοιχα διαστήματα ολοκλήρωσης.

Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox ([Symbolic Math Toolbox](#)) και Octave με το Symbolic package ([Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave](#)).

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ του Παραδείγματος 9.3.3, ο υπολογισμός των συντελεστών $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, της σειράς Fourier γίνεται με τη χρήση των τύπων στις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), ως ακολούθως:

```
syms n x
f = exp(x);
[a0]= (int(f,x,0,2*pi))/(2*pi)
[an]= (int(f*cos(n*x),x,0,2*pi)/pi
[bn]= (int(f*sin(n*x),x,0,2*pi))/pi
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
a0 = (exp(2*pi) - 1)/(2*pi)
an = -(1/(n^2 + 1)-(exp(2*pi)*(cos(2*n*pi)+n*sin(2*n*pi)))/(n^2 + 1))/pi
bn = (exp(2*pi)*sin(2*n*pi)-n*(exp(2*pi)*cos(2*n*pi) - 1))/((n^2 + 1)*pi)
```

Εκτελώντας την εντολή `pretty` για τον κάθε συντελεστή ξεχωριστά

```
pretty(a0)
pretty(an)
pretty(bn)
```

παίρνουμε τη ρητή μορφή των συντελεστών ως ακολούθως:

$$a_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$
$$a_n = -\frac{1 - e^{2\pi} (\cos(2n\pi) + n \sin(2n\pi))}{(n^2 + 1)\pi}$$
$$b_n = \frac{e^{2\pi} \sin(2n\pi) - n(e^{2\pi} \cos(2n\pi) - 1)}{(n^2 + 1)\pi}$$

Παρατηρήστε ότι, αν γίνουν οι αντικαταστάσεις $\sin(2n\pi) = 0$ και $\cos(2n\pi) = 1$ στην παραπάνω μορφή, επαληθεύονται τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 9.3.3.

[♦] Οι συντελεστές στη σειρά Fourier που δίνονται από οποιονδήποτε από τους τύπους, (9.3.26), (9.3.28), (9.3.29), (9.3.3), (9.3.6), (9.3.7), ή (9.3.10)-(9.3.12), ή (9.3.14), (9.3.16), (9.3.17) αρκεί να δίνονται σωστά τα άκρα ολοκλήρωσης.

Στην περίπτωση που υπάρχει συμμετρία στη συνάρτηση, άρτια ή περιττή, το ανάπτυγμα Fourier απαιτεί ορισμένους συντελεστές, (βλέπε Εφαρμογή 9.3.5 και 9.3.8), οπότε οι υπολογισμοί απλοποιούνται. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^3$, για κάθε $x \in [-1, 1]$ του Παραδείγματος 9.3.9 (ii), επειδή απαιτείται ο υπολογισμός μόνο των συντελεστών b_n , οι οποίοι δίνονται από την (9.3.26), $b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$, γράφουμε:

```
syms n x
f = x^3;
[bn]= 2*(int(f*sin(n*pi*x),x,0,1))
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
bn = 2*sin(pi*n)*(3/(pi^2*n^2) - 6/(pi^4*n^4)) -
-2*cos(pi*n)*(1/(pi*n) - 6/(pi^3*n^3))
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(bn)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$b_n = 2 \sin(n\pi) \left(\frac{3}{n^2 \pi^2} - \frac{6}{n^4 \pi^4} \right) - 2 \cos(n\pi) \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{6}{n^3 \pi^3} \right)$$

Παρατηρήστε ότι, αν στην παραπάνω μορφή γίνουν οι αντικαταστάσεις $\sin(n\pi) = 0$ και $\cos(n\pi) = (-1)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επαληθεύονται τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 9.3.9 (ii). ◊◊

9.5 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

9.5.1 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Παράδειγμα 9.1.6](#).

Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$ και το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1,1)$.

9.5.2 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} x^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Παράδειγμα 9.1.9](#).

Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$ και η περιοχή σύγκλισης είναι $(-1,1]$.

9.5.3 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-3)^{2n}$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Παράδειγμα 9.1.9](#).

Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=+\infty$ και η περιοχή σύγκλισης είναι \mathbb{R} .

9.5.4 Να προσδιορισθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)|}{n!} x^n$, όπου

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Παράδειγμα 9.1.9](#) και συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 9.2.11](#).

Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$.

9.5.5 Να προσδιορισθεί η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1} (x-4)^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Παράδειγμα 9.1.9](#).

Απάντηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι $(3,5)$.

9.5.6 Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ σε δυνάμεις του $x-2$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ και χρησιμοποιήστε την [\(9.2.2\)](#).

Απάντηση: Η σειρά Taylor είναι: $f(x) = 29 + 41(x-2) + 21(x-2)^2 + 4(x-2)^3$.

9.5.7 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = \sinh(x)$ και να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 9.2.14](#). (i) και τον ορισμό του υπερβολικού ημιτόνου.

Απάντηση: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ζητούμενη σειρά Maclaurin είναι: $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

9.5.8 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 9.2.10 και στην [\(9.2.5\)](#) αντικαταστήστε όπου x το $-x^2$.

Απάντηση: Η ζητούμενη σειρά Maclaurin είναι: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, αν $-1 < x < 1$.

9.5.9 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = \sin^2(x)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τριγωνομετρικό τύπο $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, την [\(9.2.6\)](#) και συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 9.2.14](#).

Απάντηση: Η ζητούμενη σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $\sin^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

9.5.10 Να υπολογισθεί το $\int \sin(x^2) dx$ με τη μορφή δυναμοσειράς Maclaurin.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε στην [\(9.2.5\)](#), όπου x το x^2 και χρησιμοποιήστε την [Πρόταση 9.1.12](#) και συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 9.2.15](#) (ii).

Απάντηση: Η ζητούμενη δυναμοσειρά Maclaurin είναι : $\int \sin(x^2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 3!}x^7 + \frac{1}{11 \cdot 5!}x^{11} - \dots$

9.5.11 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^2$, με $x \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον [Ορισμό 9.3.2](#), για τους συντελεστές χρησιμοποιήστε τους τύπους [\(9.3.3\)](#), [\(9.3.6\)](#) και [\(9.3.7\)](#). Συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 9.3.3](#).

Απάντηση: Το ανάπτυγμα Fourier για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι:

$$f(x) \approx \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right)$$

9.5.12 Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x) = |x|$, με $x \in [-\pi, \pi]$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, η f είναι άρτια και συμβουλευτείτε το [Παράδειγμα 9.3.6.\(ii\)](#)

Απάντηση: Το ανάπτυγμα της f είναι $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

9.5.13 Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Απάντηση: Από τις σχέσεις [\(9.3.10\)](#), [\(9.3.11\)](#) και [\(9.3.12\)](#) υπολογίζονται οι συντελεστές της

σειράς Fourier, οι οποίοι είναι: $a_0 = 1 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ και $b_n = \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi}$, και η σειρά

Fourier δίνεται από την [\(9.3.8\)](#).

9.5.14 Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για περιττή συνάρτηση, από την [\(9.3.26\)](#) υπολογίζονται οι συντελεστές b_n και από την [\(9.3.25\)](#) η σειρά Fourier.

Συμβουλευτείτε την [Εφαρμογή 9.3.8 \(i\)](#) και το [Παράδειγμα 9.3.9.\(ii\)](#).

Απάντηση: Η σειρά Fourier είναι: $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.
- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). Ολοκληρωτικός λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση, τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (1999). Μαθηματική Ανάλυση (τόμος Ι, ΙΙ). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

9.1. Να προσδιορισθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης στις ακόλουθες δυναμοσειρές:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} (x-1)^n$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \cdot n^2} (x-2)^{n-1}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n \cdot n^2} (x-3)^n$

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-4)^n$

vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n+1} \cdot (n+1)^2} (x+1)^n$

viii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (2n+1)} (2x+1)^n$

9.2. Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin οι ακόλουθες συναρτήσεις και να δοθεί το διάστημα σύγκλισής τους:

i) $f_1(x) = -1 + 2x + e^{-x^2}$

ii) $f_2(x) = \frac{e^{4x+1} - 1}{e^x}$

iii) $f_3(x) = x \ln(1+2x)$

iv) $f_4(x) = \ln\left(\frac{4+2x}{1-x}\right)$

v) $f_5(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

vi) $f_6(x) = \frac{3-2x}{(1+x)(4+x^2)}$

vii) $f_7(x) = \frac{x^2+4}{-2x^6+x}$

viii) $f_8(x) = \frac{-x}{3+2x^4}$

ix) $f_9(x) = \sqrt{3-2x^2}$

x) $f_{10}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

xi) $f_{11}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$

xii) $f_{12}(x) = \frac{x+2}{(x^6+1)^2}$

9.3. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σειρές Maclaurin:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2 e^{-2x}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{x^2}}{2 + 2x - 2 \cos(2x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x) - \sin(x)}{x^3 \cos(x)}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (e^{-1/x^2} - 1)}{\ln(x+1)}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\ln(1-x) + \sin(x)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(x) - \cosh(x)}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.4. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σειρές Maclaurin:

i) $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$

ii) $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2} dx$

iii) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x - \sin(x)}{x^2} dx$

iv) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x^2 - \cos(x)}{x^3} dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.5. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, και να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{4^n}$.

9.6. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = xe^{2x}$, και να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n}{(n-1)!}$.

9.7. Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι ακόλουθες συναρτήσεις:

i) $f_1(x) = -2x + 1, x \in [0, 2\pi]$

ii) $f_2(x) = \pi x - x^2, x \in [0, 2\pi]$

iii) $f_3(x) = -2x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

iv) $f_4(x) = \pi^2 x - x^3, x \in [-\pi, \pi]$

v) $f_5(x) = -x^2, x \in [-3, 3]$

vi) $f_6(x) = 4|x|, x \in [-2, 2]$

vii) $f_7(x) = |\sin(x)|, x \in [-\pi, \pi]$

viii) $f_8(x) = |\cos(x)|, x \in [-\pi, \pi]$

ix) $f_9(x) = \begin{cases} -x(\pi-x), & \text{αν } -\pi \leq x \leq 0 \\ x(\pi-x), & \text{αν } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

x) $f_{10}(x) = \begin{cases} -4x - \pi, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 4x - \pi, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

xi) $f_{11}(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -2 \leq x < 0 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

xii) $f_{12}(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{αν } -\pi \leq x < 0 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

xii) $f_{13}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -\pi \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x), & \text{αν } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

xiv) $f_{14}(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -2 \leq x < -1 \\ -3, & \text{αν } -1 < x < 0 \\ 3, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.8. Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι περιοδικές επεκτάσεις σε όλο τον πραγματικό άξονα των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f_1(x) = 3x + 1, x \in [-2, 2]$

ii) $f_2(x) = e^x, x \in [-1, 1]$

iii) $f_3(x) = 2x + 3, x \in [-5, 5]$

iv) $f_4(x) = 1 - x, x \in [-\pi, \pi]$

v) $f_5(x) = x^2 - 1, x \in [-2, 2]$

vi) $f_6(x) = 2|x-1|, x \in [-2, 2]$

vii) $f_7(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν } -2 \leq x < 0 \\ x+4, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

viii) $f_8(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } -2 \leq x \leq 0 \\ x+2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.9. Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(x) = |x|$, που ορίζεται στο διάστημα $[-a, a]$ με περίοδο $T = 2a$. Να γράψετε μία συνάρτηση (function), που να έχει ως είσοδο τον τύπο της f , το διάστημα ορισμού της και το πλήθος N των συντελεστών $a_n, n = 0, 1, \dots, N$ της σειράς Fourier της f , η οποία (function) να υπολογίζει αυτούς τους συντελεστές. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier για $a = 3$ και για $N = 5$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά του Παραδείγματος 9.3.9(i). Επίσης, υπολογίστε το ανάπτυγμα της σειράς Fourier για $x = 2$ με $N = 5$ και $N = 10$. Τέλος, υπολογίστε την τιμή του N , για την οποία ο N -στός όρος του αναπτύγματος της σειράς Fourier για $x = 2$ να είναι μικρότερος από $\varepsilon = 10^{-6}$.

9.10. Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^4 + e^x$, που ορίζεται στο διάστημα $[-a, a]$ με περίοδο $T = 2a$. Να γράψετε μία συνάρτηση (function), που να υπολογίζει τους συντελεστές a_0, a_n και $b_n, n = 1, \dots, N$ της σειράς Fourier της f . Η συνάρτηση (function) να έχει ως είσοδο τον τύπο της f , το διάστημα ορισμού της και το πλήθος N των συντελεστών που υπολογίζει. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier για $a = 1$ και για $N = 5$. Επίσης, υπολογίστε το ανάπτυγμα της σειράς Fourier για $x = 2$ με $N = 5$ και $N = 10$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές

... Η θεωρία του Einstein έχει επιπλέον τη θέληση μίας γεωμετρικής θεωρίας εφ' όσον αποτελεί το αποκορύφωμα μίας πορείας, που άρχισε με τη Γεωμετρία του Ευκλείδη. Αυτά ήταν που με τράβηξαν προς τον Einstein και τη θεωρία του. Αργότερα προστέθηκε η πρόκληση των μεγάλων μαθηματικών προβλημάτων.

... Το πρόβλημα της μακρόχρονης συμπεριφοράς του στροβιλισμού περιέχει το σημαντικότερο πρόβλημα της Υδροδυναμικής, το πρόβλημα της τυρβώδους ροής (δηλαδή της ροής που μέσα της σχηματίζονται στροβίλοι). Αυτό το πρόβλημα, το οποίο εμφανίζεται και στην απλουστευμένη περίπτωση που το ρευστό μπορεί να θεωρηθεί ασυμπιεστο, όπως το νερό στην καθημερινή μας εμπειρία, παραμένει απλησίαστο 260 χρόνια μετά τη διατύπωση των σχετικών εξισώσεων από τον Euler. Η εμπειρία δείχνει ότι έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα ο στροβιλισμός αποκτά χαώδη συμπεριφορά, με τον αέναο σχηματισμό μίας ατέρμονης ακολουθίας μικρότερων στροβίλων μέσα σε μεγαλύτερους. Αυτό το χάος αποκαλείται "τύρβη". Είναι κάτι, που αποτελεί καθημερινή μας εμπειρία και αξεπέραστη πρόκληση για το μαθηματικό φυσικό.

Δημήτρης Χριστοδούλου (1951 –)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό γενικεύεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε περιπτώσεις όπου το ολοκλήρωμα μελετάται για συνάρτηση ορισμένη σε μη φραγμένο διάστημα, καθώς επίσης για μη φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα ή ο συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων. Ως εφαρμογές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μελετώνται ο μετασχηματισμός Laplace και ο αντίστροφός του.

Προαπαιτούμενη γνώση

Ορισμένο ολοκλήρωμα, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, όριο πραγματικών συναρτήσεων, σειρές πραγματικών αριθμών.

10.1 Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προϋποθέτει μία πραγματική συνάρτηση φραγμένη και ορισμένη σε ένα φραγμένο διάστημα. Στην παρούσα ενότητα, γίνεται η μελέτη ολοκληρωμάτων μίας συνάρτησης που δεν ικανοποιούν μία από τις δύο ή και τις δύο προαναφερθείσες προϋποθέσεις. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα** (*improper integrals*). Στη βιβλιογραφία μερικές φορές συναντάμε και τον όρο «μη γνήσιο ολοκλήρωμα» αντί του όρου «γενικευμένο» ολοκλήρωμα (Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1985).

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα ανάλογα με τα άκρα ολοκλήρωσης της συνάρτησης διακρίνονται σε: α' -είδους, β' -είδους και όταν είναι ταυτόχρονα α' και β' -είδους ονομάζονται γ' -είδους.

Ορισμός 10.1.1. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, +\infty)$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(x) dx, \quad (10.1.1)$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $[a, +\infty)$, και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.1) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[r, a]$, για κάθε $r \in (-\infty, a)$, με $a \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^a f(x) dx, \quad (10.1.2)$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται, επίσης, **γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους**, και συμβολίζεται $\int_{-\infty}^a f(x) dx$.

Λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $(-\infty, a]$, και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.2) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Όταν τα όρια στις σχέσεις (10.1.1) και (10.1.2) δεν υπάρχουν ή δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα **αποκλίνουν** ή **δεν συγκλίνουν** ή **δεν υπάρχουν** στο \mathbb{R} .

Παραδείγματα 10.1.2.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα α'-είδους:

$$i) I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx \quad ii) I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2-x)^2} dx$$

i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, +\infty)$, με μοναδικό σημείο «ανωμαλίας» του ολοκληρώματος το $+\infty$. Σύμφωνα με τη σχέση (10.1.1) έχουμε:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \frac{1}{x^2 + 4} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right]_0^r = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{r}{2} \right) - \frac{1}{2} \tan^{-1}(0) \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\pi}{4}$.

ii) Σύμφωνα με τη (10.1.2) έχουμε:

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2-x)^2} dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{1}{(2-x)^2} dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2-x} \right]_r^0 = \frac{1}{2} - \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-r} = \frac{1}{2}$$

Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. ◇◇

Εφαρμογή 10.1.3. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a , το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

- i) αν $p \leq 1$, αποκλίνει.
ii) αν $p > 1$ συγκλίνει, και είναι

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{a^{1-p}}{p-1}. \quad (10.1.3)$$

Στην ειδική περίπτωση $a=1$ και $p > 1$, η συνάρτηση

$$J(p) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad (10.1.4)$$

ονομάζεται **συνάρτηση ζήτα**.

Απόδειξη: i) Έστω $p=1$. Τότε από τη σχέση (10.1.1)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r \frac{1}{x} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} [\ln|x|]_a^r = \lim_{r \rightarrow +\infty} [\ln x]_a^r = \lim_{r \rightarrow +\infty} \ln r - \ln a = +\infty.$$

Δηλαδή, για $p=1$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Έστω $p < 1$. Τότε

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r \frac{1}{x^p} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^r = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{a^{1-p}}{1-p} = +\infty,$$

επειδή $1-p > 0$ και $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{1-p} = +\infty$.

ii) Έστω $p > 1$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1, έχουμε:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r \frac{1}{x^p} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^r = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{a^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{p-1},$$

επειδή $1-p < 0$ και $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{1-p} = 0$. ◇◇

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος και των ορίων αποδεικνύονται οι συνθήκες ύπαρξης και ο τρόπος υπολογισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος με άκρα το $-\infty$ και $+\infty$, που περιγράφονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 10.1.4. Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[r', r]$, για κάθε $r', r \in \mathbb{R}$, και υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{για κάποιο } a \in \mathbb{R},$$

τότε υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^s f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_s^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^s f(x) dx + \int_s^{+\infty} f(x) dx \quad (10.1.5)$$

δηλαδή, το άθροισμα (10.1.5) είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $s \in \mathbb{R}$.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.1.5) συμβολίζεται με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

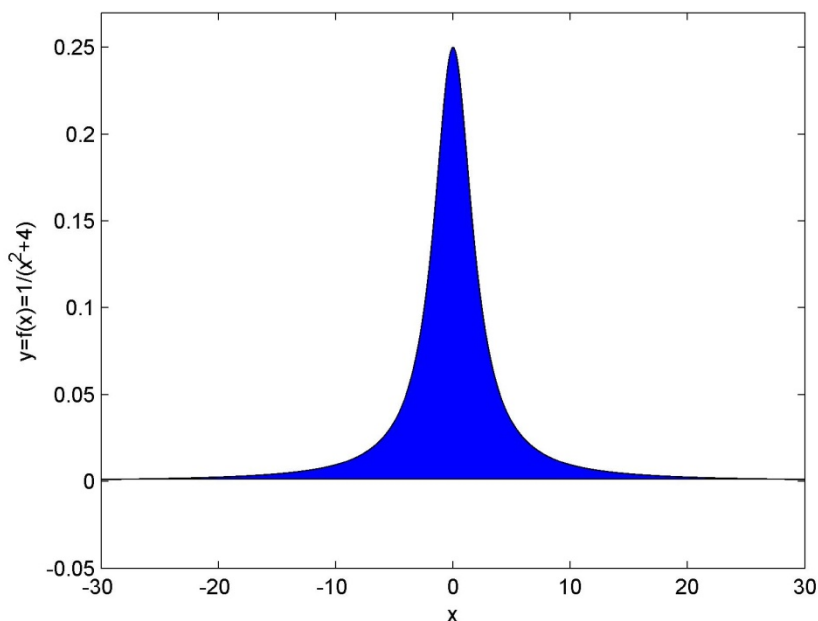
Θεωρώντας ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους μίας μη αρνητικής συνάρτησης f στις σχέσεις (10.1.1), (10.1.2) και (10.1.5) υπάρχει, μπορούμε να σκεφτούμε τη **γεωμετρική ερμηνεία** του. Συγκεκριμένα:

- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ για μία συνάρτηση $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.1) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'Ox$ και της ευθείας $x = a$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ για μία συνάρτηση $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, a]$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.2) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'Ox$ και της ευθείας $x = a$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.5) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'Ox$, (βλέπε, Σχήμα 10.1).

Παράδειγμα 10.1.5.

Να υπολογισθεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 10.1.4.**, αν επιλέξουμε ως $s = 0$ το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι (βλέπε, **Παράδειγμα 10.1.2 (i)** και **Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 10.4.1.**)



Σχήμα 10.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + 4)^{-1}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ απεικονίζεται στο [Σχήμα 10.1](#). Είναι φανερό ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση f είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια η γραμμοσκιασμένη περιοχή (με μπλε χρώμα) μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'Ox$ έχει εμβαδόν που ισούται με $\pi/2$. \diamond

Ορισμός 10.1.6. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $[r, b)$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx, \quad (10.1.6)$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^b f(x) dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $[a, b)$ και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.6) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Ανάλογα, υποθέτουμε ότι $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r, b]$, για κάθε $r \in (a, b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $(a, r]$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx, \quad (10.1.7)$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^b f(x) dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $(a, b]$ και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.7) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Τα a και b στις σχέσεις (10.1.6) και (10.1.7) αντίστοιχα ονομάζονται **ανώμαλα σημεία** για την f (ή **πόλοι**) και είναι τα μοναδικά ανώμαλα σημεία σε καθένα από τα γενικευμένα ολοκληρώματα (10.1.6) και (10.1.7).

Όταν τα όρια στις σχέσεις (10.1.6) και (10.1.7) δεν υπάρχουν ή δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα **αποκλίνουν** ή **δεν συγκλίνουν**.

Παραδείγματα 10.1.7.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα β'-είδους:

$$\text{i) } I_1 = \int_{-2}^8 \frac{1}{\sqrt{8-x}} dx \quad \text{ii) } I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{iii) } I_3 = \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$$

i) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8-x}}$ είναι $(-\infty, 8)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=8$.

Επομένως, το $x=8$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $[-2, 8)$, άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.6 πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους και από τη (10.1.6) έχουμε:

$$I_1 = \int_{-2}^8 \frac{1}{\sqrt{8-x}} dx = \lim_{r \rightarrow 8^-} \int_{-2}^r \frac{1}{\sqrt{8-x}} dx = \lim_{r \rightarrow 8^-} \left[-2\sqrt{8-x} \right]_{-2}^r = -2 \lim_{r \rightarrow 8^-} (\sqrt{8-r} - \sqrt{10}) = 2\sqrt{10}$$

Επομένως, το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $2\sqrt{10}$.

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ είναι $(-1, 1)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=-1$.

Επομένως, το $x=-1$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $(-1, 0]$, άρα πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους. Σύμφωνα με τη σχέση (10.1.7) έχουμε

$$I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{r \rightarrow -1^+} \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{r \rightarrow -1^+} \left[\sin^{-1}(x) \right]_r^0 = \lim_{r \rightarrow -1^+} (\sin^{-1}(0) - \sin^{-1}(r)) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2},$$

επειδή $\sin^{-1}(0) = 0$ και $\sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}(1)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ είναι $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=0$. Επομένως, το $x=0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $(0, 1]$, άρα πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $\cos(x)$, το οποίο είναι η συγκλίνουσα δυναμοσειρά, (βλέπε, τη σχέση (6) στον Πίνακα 9.1.),

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!},$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$, για κάθε $x \neq 0$, μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} \right)}{x^2} = \frac{x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}}{x^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της f στο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 και κάνοντας ολοκλήρωση όρο-προς-όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} + \dots \right) dx = \\
&= \left[\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} - \frac{x^7}{7 \cdot 8!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots \right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!} - \frac{1}{7 \cdot 8!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n)!} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n)!},
\end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι το I_3 είναι μία εναλλάσσοσα σειρά. Θεωρώντας την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)!}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για ακολουθία θετικών όρων, για την οποία ισχύουν:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+2)!}}{\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)!}} = \frac{(2n-1) \cdot (2n)!}{(2n+1) \cdot (2n+2)!} = \frac{(2n-1)}{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)} < 1$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, και
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)!} = 0$, άρα $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία.

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, άρα η εναλλάσσοσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n)!}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2.).

Επομένως, σύμφωνα με τον [Ορισμό 10.1.6](#), το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 υπάρχει και συγκλίνει στον ίδιο αριθμό, στον οποίο συγκλίνει η εναλλάσσοσα σειρά

$$I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n)!}. \quad \diamond$$

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα β'-είδους αποδεικνύεται ανάλογο αποτέλεσμα με το Θεώρημα 10.1.4, το οποίο διατυπώνεται στη συνέχεια.

Θεώρημα 10.1.8. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r', r]$, για κάθε $r', r \in (a, b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στα $(a, r']$ και $[r, b)$, δηλαδή τα a και b είναι τα μοναδικά ανώμαλα σημεία για την f στο (a, b) . Αν υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιος ώστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_c^b f(x) dx$$

να υπάρχουν, τότε το άθροισμα

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

είναι ανεξάρτητο της επιλογής του c και δίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (10.1.8)$$

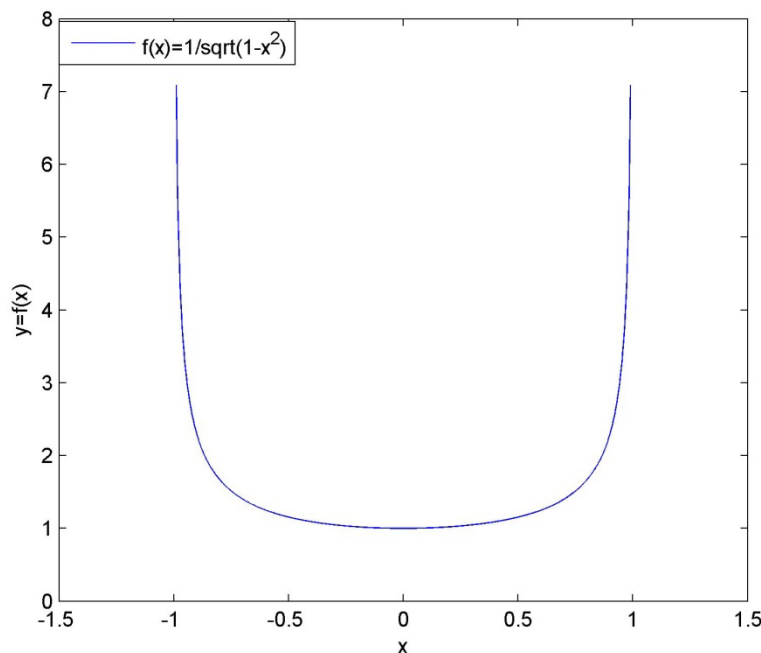
Θεωρώντας ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β'-είδους μίας μη αρνητικής συνάρτησης f στις σχέσεις (10.1.6), (10.1.7) και (10.1.8) υπάρχει, μπορούμε να σκεφτούμε τη **γεωμετρική ερμηνεία** του. Συγκεκριμένα:

- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.6) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'Ox$ και των ευθειών $x = a$, $x = b$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a,b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.7) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'Ox$ και των ευθειών $x = a$, $x = b$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.8) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'Ox$, και των ευθειών $x = a$, $x = b$.

Παράδειγμα 10.1.9.

Να υπολογισθεί το $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ είναι $(-1,1)$, και η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο Σχήμα 10.2. Προφανώς η άρτια συνάρτηση f στο διάστημα $(-1,1)$ έχει δύο ανώμαλα σημεία τα $x = \pm 1$, στα οποία απειρίζεται, (σύγκρινε με το Παράδειγμα 10.1.7(ii)).



Σχήμα 10.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 10.1.8** και για $c=0$ η σχέση (10.1.8) γίνεται:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{r \rightarrow -1^+} [\sin^{-1}(x)]_r^0 + \lim_{r \rightarrow 1^-} [\sin^{-1}(x)]_0^r = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Είναι φανερό ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση f είναι θετική για κάθε $x \in (-1, 1)$, και σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια η περιοχή μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'Ox$ έχει εμβαδόν που ισούται με π . ◇◇

Ορισμός 10.1.10. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r', r]$, για κάθε $r', r \in (a, +\infty)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $(a, r']$, (δηλαδή, στο a η f απειρίζεται). Αν υπάρχουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα β' -είδους και α' -είδους,

$$\int_a^s f(x) dx \text{ και } \int_s^{+\infty} f(x) dx, \text{ για κάποιο } s \in (a, +\infty),$$

τότε υπάρχει το άθροισμα

$$\int_a^s f(x) dx + \int_s^{+\infty} f(x) dx$$

είναι ανεξάρτητο της επιλογής του s και ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' -είδους** στο $(a, +\infty)$

και συμβολίζεται $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Δηλαδή,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^s f(x) dx + \int_s^{+\infty} f(x) dx \quad (10.1.9)$$

Ανάλογα, αν $b \in \mathbb{R}$ και $f: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $[r', r]$, $r', r \in (-\infty, b)$ και στο $x=b$ η f δεν είναι φραγμένη και επιπλέον υπάρχουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα α' -είδους και β' -είδους,

$$\int_{-\infty}^s f(x) dx \text{ και } \int_s^b f(x) dx, \text{ για κάποιο } s \in (-\infty, b),$$

τότε υπάρχει το **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' -είδους** στο $(-\infty, b)$, συμβολίζεται $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ και δίνεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \int_{-\infty}^s f(x) dx + \int_s^b f(x) dx. \quad (10.1.10)$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' -είδους στο $(-\infty, b)$ στην (10.1.10) είναι ανεξάρτητο της επιλογής του s .

Παρατήρηση. Στα ολοκληρώματα γ' -είδους εκτός του $+\infty$ (ή $-\infty$) υπάρχει ένα ακόμη σημείο ανωμαλίας και ο υπολογισμός τους ανάγεται σε άθροισμα ενός ολοκληρώματος α' -είδους και ενός β' -είδους, σύμφωνα με τις σχέσεις (10.1.9) και (10.1.10).

Παράδειγμα 10.1.11.

Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ είναι $(1, +\infty)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=1$ και ∞ .

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.10 πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' -είδους στο $(1, +\infty)$ και σύμφωνα με τη (10.1.9) για $s=2$, έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = I_1 + I_2, \quad (10.1.11)$$

$$\text{όπου } I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ θέτουμε $t = \sqrt{x-1}$ από όπου προκύπτουν :

$$x = t^2 + 1 \quad \text{και} \quad dx = 2t dt$$

Αντικαθιστώντας στο αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{2t}{t(t^2+1)} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \tan^{-1}(t) + c = 2 \tan^{-1}(\sqrt{x-1}) + c \quad (10.1.12)$$

Εφαρμόζοντας την (10.1.12) στα I_1, I_2 της (10.1.11) και χρησιμοποιώντας $\lim_{r \rightarrow 1^+} (\tan^{-1}(\sqrt{r-1})) = 0$ και

$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}(\sqrt{r-1})) = \frac{\pi}{2}$, τα γενικευμένα ολοκληρώματα γράφονται ως ακολούθως:

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_r^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \lim_{r \rightarrow 1^+} \left[2 \tan^{-1}(\sqrt{x-1}) \right]_r^2 = \frac{\pi}{2} - 2 \lim_{r \rightarrow 1^+} (\tan^{-1}(\sqrt{r-1})) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_2^r \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[2 \tan^{-1}(\sqrt{x-1}) \right]_2^r = 2 \lim_{r \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}(\sqrt{r-1})) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων I_1 και I_2 στην (10.1.11) έχουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = I_1 + I_2 = \pi.$$

Επομένως, το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό π . ◇◇

Σε αρκετές περιπτώσεις ο υπολογισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι αρκετά σύνθετος, ενώ είναι ευκολότερος ο υπολογισμός ενός άλλου απλούστερου γενικευμένου ολοκληρώματος, που σχετίζεται με το αρχικό διατηρώντας τα ίδια «ανώμαλα σημεία». Στις περιπτώσεις αυτές, όπως και στη μελέτη των σειρών πραγματικών αριθμών, εργαλείο για την άντληση της πληροφορίας σύγκλισης/απόκλισης ενός γενικευμένου ολοκληρώματος είναι η εφαρμογή κατάλληλων κριτηρίων, τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια και είναι ανάλογα των σειρών.

Πρόταση 10.1.12. (κριτήριο απόλυτης σύγκλισης) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, +\infty)$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ συγκλίνει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (10.1.13)$$

Ανάλογα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων a' -είδους στο $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Στις επόμενες προτάσεις διατυπώνονται δύο κριτήρια σύγκλισης γενικευμένου ολοκληρώματος, τα οποία αφορούν θετικές συναρτήσεις. Το ένα βασίζεται στη μονοτονία του ολοκληρώματος, προκύπτει άμεσα από την ιδιότητα (viii) της Πρότασης 7.6.10. και το άλλο κριτήριο αναφέρεται στην οριακή τιμή του λόγου των δύο θετικών συναρτήσεων, όπου γνωρίζοντας τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος της μίας συνάρτησης προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος της άλλης συνάρτησης.

Πρόταση 10.1.13. (πρώτο κριτήριο σύγκρισης) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, +\infty)$, (δηλαδή, έχουν μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$) και τέτοιες ώστε

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \text{ για κάθε } x \in [a, +\infty).$$

i) Αν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (10.1.14)$$

ii) Αν αποκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, τότε αποκλίνει και το $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α' -είδους στο $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Εδώ χρειάζεται να σχολιάσουμε ότι εφαρμόζοντας το πρώτο κριτήριο σύγκρισης στην περίπτωση σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, εφόσον υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού της τιμής του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, από τη (10.1.14) είναι φανερό ότι υπάρχει εκτίμηση ενός άνω φράγματος του $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, δυνατότητα που δεν εξασφαλίζεται από την εφαρμογή του δεύτερου κριτηρίου σύγκρισης, όπως παρατηρούμε από τη διατύπωση της επόμενης πρότασης, (βλέπε, Παραδείγματα 10.1.15 (ii), (iii)).

Πρόταση 10.1.14. (δεύτερο κριτήριο σύγκρισης ή οριακό κριτήριο σύγκρισης) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, +\infty)$, (δηλαδή, έχουν μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$), τέτοιες ώστε $f(x) \geq 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

i) Αν $0 < k < +\infty$, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση, δηλαδή,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ συγκλίνει (αποκλίνει)} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ συγκλίνει (αποκλίνει)}.$$

ii) Αν $k = 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ συγκλίνει, τότε $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει.

iii) Αν $k = +\infty$ και $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ αποκλίνει, τότε $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ αποκλίνει.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α' -είδους στο $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Κριτήρια σύγκλισης, ανάλογα αυτών που διατυπώνονται στο Θεώρημα 10.1.12 και αφορούν το γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους, μπορούν να διατυπωθούν και να αποδειχθούν για τα γενικευμένα ολοκληρώματα β' -είδους και γ' -είδους.

Παραδείγματα 10.1.15.

Να εξετάσετε τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση των ακόλουθων γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

$$\text{i) } I_1 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx \quad \text{ii) } I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+2}} dx \quad \text{iii) } I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 e^x} dx$$

Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν να βρεθεί ένα άνω φράγμα σύγκλισης, όπου είναι δυνατόν.

i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{0\}$, συνεπώς για κάθε $x \in [1/2, +\infty)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_1 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx$ είναι α'-είδους (έχει μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$).

Επίσης, για κάθε $x \in [1/2, +\infty)$ μπορούμε να γράψουμε

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{|x|^3} \leq \frac{1}{x^3}.$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_4 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ είναι α'-είδους στο $[1/2, +\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι της μορφής που μελετήθηκε στην [Εφαρμογή 10.1.3 \(ii\)](#) με $a=1/2$ και $p=3>1$, συμπεραίνουμε ότι το I_4 συγκλίνει και σύμφωνα με την [\(10.1.3\)](#) ισχύει

$$I_4 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{(1/2)^{1-3}}{3-1} = 2. \quad (10.1.15)$$

Επειδή οι προϋποθέσεις της [Πρότασης 10.1.13.\(i\)](#) ικανοποιούνται, συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx$ συγκλίνει και συνδυάζοντας την [\(10.1.14\)](#) με την [\(10.1.15\)](#) προκύπτει ότι

$$\int_{1/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx \leq \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = 2. \quad (10.1.16)$$

Επειδή $\int_{1/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx$ συγκλίνει, σύμφωνα με την [Πρόταση 1.10.12](#) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$I_1 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx$ συγκλίνει και συνδυάζοντας την [\(10.1.13\)](#) με την [\(10.1.16\)](#) μπορούμε να γράψουμε

$$\left| \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx \right| \leq \int_{1/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx \leq 2.$$

Επομένως, ένα άνω φράγμα σύγκλισης του I_1 είναι το 2.

ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [1, +\infty)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ είναι α'-είδους στο $[1, +\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην [Εφαρμογή 10.1.3 \(ii\)](#) με $a=1$ και $p = \frac{3}{2} > 1$. Συνεπώς, το I_5 συγκλίνει και από την [\(10.1.4\)](#) ισχύει

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2. \quad (10.1.17)$$

Επειδή οι προϋποθέσεις της [Πρότασης 10.1.13.\(i\)](#) ικανοποιούνται, συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2 συγκλίνει. Συνδυάζοντας την [\(10.1.14\)](#) με την [\(10.1.17\)](#) προκύπτει ότι

$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+2}} dx \leq I_5 = 2$, άρα ένα άνω φράγμα σύγκλισης του I_2 είναι το 2.

iii) Η θετική συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^4 e^x}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{0\}$, συνεπώς για κάθε $x \in [1, +\infty)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 e^x} dx$ είναι α'-είδους στο $[1, +\infty)$ (γιατί;). Θεωρούμε τη θετική

συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x^4}$ που ορίζεται $\mathbb{R} - \{0\}$ και υπολογίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_6 = \int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ είναι α'-είδους στο $[1, +\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην [Εφαρμογή 10.1.3 \(ii\)](#) με $a=1$ και $p=4$. Συνεπώς, το I_6 συγκλίνει και από την [\(10.1.4\)](#) ισχύει

$$I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k = 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_6 συγκλίνει, μπορεί να εφαρμοστεί το δεύτερο κριτήριο σύγκρισης (βλέπε, [Πρόταση 10.1.14\(ii\)](#)), από όπου συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 e^x} dx$ συγκλίνει. \diamond

Κλείνουμε την ενότητα διατυπώνοντας ένα κριτήριο σύγκλισης/απόκλισης ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μίας θετικής συνάρτησης, το οποίο βασίζεται στη σύγκλιση/απόκλιση μίας αντίστοιχης σειράς.

Θεώρημα 10.1.16. Έστω f μία ολοκληρώσιμη και φθίνουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ και η αντίστοιχη σειρά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Ιδιαίτερα, αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε ισχύει:

$$I < S < I + f(1) \tag{10.1.18}$$

Παραδείγματα 10.1.17.

Να εξετάσετε τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Αν οι σειρές συγκλίνουν να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα σύγκλισης αυτών.

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ με πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι θετική και φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της (γιατί;). Εξετάζουμε τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln|2x-1| \right]_1^r = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow +\infty} (\ln|2r-1|) - 0 = +\infty.$$

Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 αποκλίνει. Επειδή I_1 αποκλίνει εφαρμόζοντας το [Θεώρημα 10.1.16](#), η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει.

Παρατήρηση. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 7.7 τα γενικευμένα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν και σε προγραμματιστικό περιβάλλον χρησιμοποιώντας την εντολή `int`. Επειδή η συμβολική εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στα λογισμικά Matlab και Octave, όταν αυτά είναι εφοδιασμένα με τα Symbolic πακέτα, (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave ; Symbolic Math Toolbox), το

παραπάνω αποτέλεσμα επαληθεύεται με Matlab/Octave, όπου χρησιμοποιώντας την εντολή syms για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, έχουμε :

```
syms x
f=1/(2*x-1);
int(f,x,1,Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

Inf

ii) Η σειρά είναι γνωστή ως p -αρμονική με $p=2$ ή σειρά Dirichlet, (βλέπε, Ορισμός 3.1.8.). Επειδή $p > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13). Στην Εφαρμογή 3.1.9 έχει αποδειχθεί μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων, η οποία είναι:

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1.644 = \frac{\pi^2}{6} \quad (10.1.19)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι θετική και φθίνουσα (γιατί;).

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ είναι a' -είδους στο $[1, +\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην [Εφαρμογή 10.1.3 \(ii\)](#) με $a=1$ και $p=2$. Συνεπώς, το I_2 συγκλίνει και από την [\(10.1.4\)](#) ισχύει

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2-1} = 1. \quad (10.1.20)$$

Σύμφωνα με το [Θεώρημα 10.1.16](#), η αντίστοιχη σειρά $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Συνδυάζοντας την [\(10.1.18\)](#) με την [\(10.1.20\)](#) μπορούμε να βρούμε άνω και κάτω φράγμα της προσέγγισης της σειράς γράφοντας

$$I_2 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < I_2 + f(1) \Rightarrow 1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2,$$

επαληθεύοντας την προσεγγιστική τιμή στη [\(10.1.19\)](#). ◇◇

10.2 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μία ειδική περίπτωση μίας γενικότερης κατηγορίας μετασχηματισμών, που είναι γνωστοί ως γενικευμένοι γραμμικοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι δρουν επί μίας συνάρτησης, η οποία ονομάζεται συνάρτηση εισόδου, και παράγουν μία άλλη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται συνάρτηση εξόδου. Ο μετασχηματισμός Laplace βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της επιστήμης του μηχανικού, όπως η ανάλυση σημάτων, η μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων, και περιγράφει φυσικά φαινόμενα τόσο μηχανικής όσο και ηλεκτρομαγνητισμού. Φαινόμενα, τα οποία παρουσιάζουν χρονική εξέλιξη που συνοδεύεται από απόσβεση, μπορούν να περιγραφούν από μία γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές ή από ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace προσφέρουν έναν από τους αποτελεσματικότερους τρόπους επίλυσης αυτών των εξισώσεων μετατρέποντας τις εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Ορισμός 10.2.1. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, +\infty)$. Ονομάζουμε **μετασχηματισμό Laplace** (Laplace transform) της συνάρτησης f , και συμβολίζουμε με $L(f(x))$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$L(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad (10.2.1)$$

για κάθε τιμή της πραγματικής μεταβλητής s , για την οποία το ολοκλήρωμα στη (10.2.1) συγκλίνει.

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.2.1) αποκλίνει για κάθε $s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι **δεν υπάρχει** ο μετασχηματισμός Laplace της f .

Παρατηρήστε ότι όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.2.1) συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα αποτελεί μία συνάρτηση της μεταβλητής s , που συμβολίζεται, πολλές φορές, με $L(f(x)) = F(s)$. Επίσης, η F ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f ή **συνάρτηση εξόδου της f κατά Laplace**.

Επιπλέον, όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους και, αν υπάρχει για την f ένα ανώμαλο σημείο στο $[0, +\infty)$ (εκτός του $+\infty$), τότε ο μετασχηματισμός είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' -είδους.

Εφαρμογή 10.2.2.

Για την πραγματική μεταβλητή s και για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

i) $f(x) = e^{ax}$ υπάρχει, όταν $s > a$, και ισούται με: $L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$

ii) $f(x) = \sin(ax)$ υπάρχει, όταν $s > 0$, και ισούται με: $L(\sin(ax)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

Απόδειξη: i) Σύμφωνα με τον **Ορισμό 10.2.1**, ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = e^{ax}$ απαιτεί τον υπολογισμό και τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} dx$.

Επειδή, για $s > a$ ισχύει $\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{(a-s)r} = 0$, στο ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} L(e^{ax}) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} dx = \frac{1}{a-s} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r (e^{(a-s)x})' dx = \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{r \rightarrow +\infty} (e^{(a-s)r} - 1) = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι $\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{(a-s)r} = +\infty$, όταν $s < a$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει. Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = e^{ax}$ είναι

$$L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}, \text{ όταν } s > a.$$

ii) Σύμφωνα με τον [Ορισμό 10.2.1](#), ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = \sin(ax)$ απαιτεί τον υπολογισμό του ακόλουθου γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$F(s) = L(\sin(ax)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin(ax) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-sx} \sin(ax) dx.$$

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος (βλέπε, Παράδειγμα 7.3.3.(iii)) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-sx} \sin(ax) dx = -\frac{1}{s} \int (e^{-sx})' \sin(ax) dx = -\frac{1}{s} \left[e^{-sx} \sin(ax) - a \int e^{-sx} \cos(ax) dx \right] = \\ &= -\frac{1}{s} \left[e^{-sx} \sin(ax) + \frac{a}{s} (e^{-sx} \cos(ax) + a \int e^{-sx} \sin(ax) dx) \right] = -\frac{1}{s} e^{-sx} \sin(ax) - \frac{a}{s^2} e^{-sx} \cos(ax) - \frac{a^2}{s^2} I, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει

$$I = -\frac{s}{s^2 + a^2} \left(e^{-sx} \sin(ax) + \frac{a}{s} e^{-sx} \cos(ax) \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} L(\sin(ax)) &= -\frac{s}{s^2 + a^2} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[e^{-sr} \sin(ar) + \frac{a}{s} e^{-sr} \cos(ar) + c \right] + \frac{s}{s^2 + a^2} e^0 \sin(0) + \frac{a}{s^2 + a^2} e^0 \cos(0) - c = \\ &= -\frac{s}{s^2 + a^2} \lim_{r \rightarrow +\infty} (e^{-sr} \sin(ar)) - \frac{a}{s^2 + a^2} \lim_{r \rightarrow +\infty} (e^{-sr} \cos(ar)) + \frac{a}{s^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (e^{-sr} \sin(ar)) = 0 \text{ και } \lim_{r \rightarrow +\infty} (e^{-sr} \cos(ar)) = 0, \text{ για κάθε } s > 0, \quad (10.2.3)$$

επειδή είναι όρια γινομένου μηδενικής συνάρτησης, όπως είναι e^{-sr} , επί φραγμένης συνάρτησης, όπως είναι $\sin(ar)$, $\cos(ar)$.

Στην περίπτωση όπου $s < 0$, τα όρια στη (10.2.3) απειρίζονται ($\pm\infty$) και επομένως ο μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει.

Τελικά, αντικαθιστώντας από τη (10.2.3) στη (10.2.2) συμπεραίνουμε ότι

$$L(\sin(ax)) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ όταν } s > 0. \quad \diamond$$

Εφαρμόζοντας τον [Ορισμό 10.2.1](#), αποδεικνύονται οι επόμενες σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίες είναι συνέπεια της ιδιότητας της γραμμικότητας και του ορισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος στη (10.2.1). Έναν πλήρη κατάλογο των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού με τις αποδείξεις τους ο αναγνώστης μπορεί να βρει στη βιβλιογραφία (Ασημάκης & Αδάμ, 2015; Μυλωνάς & Σχοινιάς, 2015).

Πρόταση 10.2.3. i) Αν για τις συναρτήσεις f_1 και f_2 υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace $L(f_1(x))$ και $L(f_2(x))$, τότε για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$L(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 L(f_1(x)) + c_2 L(f_2(x)) \quad (10.2.4)$$

δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία γραμμική συνάρτηση.

ii) Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f , $L(f(x)) = F(s)$, τότε

$$L(f'(x)) = sL(f(x)) - f(0) = sF(s) - f(0) \quad (10.2.5)$$

$$L(f''(x)) = s^2 L(f(x)) - sf(0) - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (10.2.6)$$

Γενικότερα,

$$L(f^{(n)}(x)) = s^n L(f(x)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (10.2.7)$$

Με την εφαρμογή των ιδιοτήτων της [Πρότασης 10.2.3](#) αναδεικνύεται η σημαντικότητα του μετασχηματισμού Laplace κυρίως στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, (βλέπε, [Παραδείγματα 10.2.2.](#)), επειδή μετασχηματίζουν τις συναρτήσεις-εισόδου f του μετασχηματισμού σε συναρτήσεις-εξόδου F και μετασχηματίζουν την παραγωγή σε πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Έτσι, η επίλυση των σύνθετων αρχικών προβλημάτων ανάγεται σε επίλυση με αλγεβρικό τρόπο, με τον περιορισμό να μπορεί να οριστεί και η αντίστροφη πορεία εύρεσης της αρχικής συνάρτησης-εισόδου f . Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 10.2.4. Ονομάζουμε **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης-εξόδου F της πραγματικής μεταβλητής s , συμβολίζουμε $L^{-1}(F(s))$, εκείνη τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$L(f(x)) = F(s), \quad (10.2.8)$$

θεωρώντας τη x ως ανεξάρτητη μεταβλητή της f .

Επειδή το πρόβλημα ύπαρξης αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης-εξόδου F είναι αρκετά σύνθετο, στη συνέχεια θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση-εξόδου F , που δίνεται, υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση f , η οποία επαληθεύει τη (10.2.8).

Εφαρμόζοντας τον [Ορισμό 10.2.4](#) και την [Πρόταση 10.2.3.\(i\)](#) αποδεικνύεται η ιδιότητα της γραμμικότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες για τις εφαρμογές, η οποία διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 10.2.5. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, δηλαδή, αν $F_1(s)$ και $F_2(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των αντίστοιχων συναρτήσεων f_1, f_2 και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$L^{-1}(c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)) = c_1 L^{-1}(F_1(s)) + c_2 L^{-1}(F_2(s)) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (10.2.9)$$

Με τη βοήθεια του [Ορισμού 10.2.1](#) και εργαζόμενοι όπως στην [Εφαρμογή 10.2.2](#), αποκτούμε τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων μετασχηματισμού Laplace και του αντιστρόφου του, θεωρώντας δεδομένο ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης-εξόδου ορίζεται κατάλληλα για να υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

10.2.6. Πίνακας μετασχηματισμών Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x) = L^{-1}(F(s))$ $x \geq 0$	$L(f(x)) = F(s)$	Πεδίο ορισμού s
1.	c	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
2.	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	\sqrt{x}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$	$s > 0$
4.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$

5.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
6.	$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
7.	$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
8.	$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > a $
10.	$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > a $
11.	$x \sin(ax)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
12.	$x \cos(ax)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
13.	$e^{ax} \sin(bx)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
14.	$e^{ax} \cos(bx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
15.	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
16.	$\sin(ax) - ax \cos(ax)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
17.	$u(x-a), a \in \mathbb{R}$ συνάρτηση βήματος	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$s > 0$

Τεκμηριώνοντας τον ισχυρισμό που διατυπώθηκε στην εισαγωγή της παρούσας ενότητας, κλείνουμε την ενότητα δίνοντας μία εφαρμογή, όπου αναπτύσσεται η μεθοδολογία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό της λύσης μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές. Η ιδιότητα της παραγώγου του μετασχηματισμού Laplace (βλέπε, Πρόταση 10.2.3(ii)), οι ιδιότητες της γραμμικότητας των μετασχηματισμών Laplace, (βλέπε, σχέσεις (10.2.4) και (10.2.9)) και οι τύποι των μετασχηματισμών Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων, (βλέπε, Πίνακα 10.2.6) είναι τα μοναδικά «εργαλεία» που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρική.

Εφαρμογή 10.2.7.

Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να λυθούν οι ακόλουθες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

- i) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{5x}$, όταν $y(0) = 0$ και $y'(0) = 2$.
- ii) $y'''(x) + y'(x) = e^x$, όταν $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Απόδειξη: i) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, θέτοντας $L(y(x)) = Y(s)$, και χρησιμοποιώντας από τη (10.2.4) την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace καθώς και τις ιδιότητες της παραγώγου από τις (10.2.5), (10.2.6), έχουμε:

$$L(y''(x) - 3y'(x) + 2y(x)) = L(4e^{5x}) \Rightarrow L(y''(x)) - 3L(y'(x)) + 2L(y(x)) = 4L(e^{5x}) \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 4 \frac{1}{s-5}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα και τις αρχικές συνθήκες, $y(0) = 0$ και $y'(0) = 2$, αποκτούμε:

$$s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s-5} + 2 \Rightarrow Y(s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{2s-6}{s-5} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)},$$

από όπου σύμφωνα με τον [Ορισμό 10.2.4](#) έχουμε:

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)}\right) \quad (10.2.10)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $Y(s)$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ανάλυση σε μερικά κλάσματα ως ακολούθως:

$$\frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων

$$2s-6 = (A+B+C)s^2 + (-3A-7B-6C)s + 2A+10B+5C,$$

και το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -3A-7B-6C &= 2 \\ 2A+10B+5C &= -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -1, C = \frac{2}{3} \quad (10.2.11)$$

Συνδυάζοντας τις (10.2.10), (10.2.11) με τη γραμμικότητα του L^{-1} στη (10.2.9) προκύπτει η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{1/3}{s-5} + \frac{-1}{s-1} + \frac{2/3}{s-2}\right) = \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right),$$

όπου χρησιμοποιώντας την (5) του Πίνακα 10.2.6 για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, συμπεραίνουμε ότι η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{5x} - e^x + \frac{2}{3}e^{2x} \quad (10.2.12)$$

Παρατήρηση. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 8.3 οι διαφορικές εξισώσεις επιλύονται και σε προγραμματιστικό περιβάλλον χρησιμοποιώντας την εντολή `dsolve`. Επειδή η συμβολική εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στα λογισμικά Matlab και Octave, όταν αυτά είναι εφοδιασμένα με τα Symbolic πακέτα, η μερική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης υπολογίζεται με Matlab/Octave, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή `syms`, με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η άγνωστη συνάρτηση y , καθώς και η εντολή `dsolve` με την οποία δηλώνεται η διαφορική εξίσωση με τις αρχικές συνθήκες, ως ακολούθως :

```
syms x y
```

```
[y]=dsolve('D2y-3*Dy+2*y=4*exp(5*x)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=2', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει:

```
y = exp(5*x)/3 - exp(x) + (2*exp(2*x))/3
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση που υπολογίστηκε στην (10.2.12).

ii) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace, τις ιδιότητες της παραγώγου από τις (10.2.5), (10.2.6), (10.2.7) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, έχουμε:

$$L(y'''(x)) + L(y'(x)) = L(e^x) \Rightarrow$$

$$[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] + [sY(s) - y(0)] = \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $Y(s)$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ανάλυση σε μερικά κλάσματα ως ακολούθως:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}. \quad (10.2.13)$$

Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε

$$A = -1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}.$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω συντελεστές στη (10.2.13) και εφαρμόζοντας τη γραμμικότητα του L^{-1} στη (10.2.9) προκύπτει η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται από τη σχέση:

$$y(x) = L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{-1}{s} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{(1/2)(s-1)}{s^2+1}\right) = -L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους στις (1), (5), (6) και (7) του Πίνακα 10.2.6 για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, συμπεραίνουμε ότι η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \quad (10.2.14)$$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, τη συμβολική εντολή `syms` με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η άγνωστη συνάρτηση y , καθώς και την εντολή `dsolve` με την οποία δηλώνεται η δοθείσα διαφορική εξίσωση με τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

```
syms x y
[y]=dsolve('D3y+Dy =exp(x)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0', 'D2y(0)=0', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει

```
y = cos(x)/2 - sin(x)/2 -1 + (exp(x))/2
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση, που υπολογίστηκε στην (10.2.14). ◇◇

10.3. Μετασχηματισμός Laplace σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Οι δύο μετασχηματισμοί Laplace, που ορίστηκαν στους [Ορισμούς 10.2.1.](#) και [10.2.4.](#), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εντολές `laplace` για το μετασχηματισμό Laplace και `ilaplace` για τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave, [Οδηγός Χρήσης Matlab](#)).

Συγκεκριμένα, για το μετασχηματισμό Laplace μίας συνάρτησης f της ανεξάρτητης μεταβλητής x , χρησιμοποιείται η συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθούν η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και η πραγματική μεταβλητή της εξόδου s .

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης f , η εντολή `laplace` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση f .
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .
- την πραγματική μεταβλητή της εξόδου s .

Σύνταξη εντολής: `laplace(f, x, s)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $f(x) = e^{-x} \sin(2x)$ γράφουμε:

```
syms x s
f = exp(-x)*sin(2*x);
[F] = laplace(f, x, s)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$F = 2 / ((s + 1)^2 + 4)$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(F)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης F , η εντολή `ilaplace` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση εξόδου F .
- την πραγματική μεταβλητή της εξόδου s .
- την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Σύνταξη εντολής: `ilaplace(F,s,x)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \text{ γράφουμε:}$$

```
syms s x
F= s/(s^2 + 1)^2;
[f]= ilaplace(F,s,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

$$f = (x \cdot \sin(x)) / 2$$

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(f)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{x \sin(x)}{2}$$

◇◇

10.4. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

10.4.1 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4} dx$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον [Ορισμό 10.1.1](#) και το [Παράδειγμα 10.1.2 \(i\)](#).

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{4}$.

10.4.2 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + 1} dx$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα α' -είδους, αντικαταστήστε $e^x = t$.

Μπορείτε να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2 συγκλίνει στο $\ln 2$.

10.4.3 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $e^x = t$ και εφαρμόστε το [Θεώρημα 10.1.4](#) και τη [\(10.1.5\)](#) για $s = 0$.

Μπορείτε να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}$.

10.4.4 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_4 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β' -είδους.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_4 συγκλίνει στο $3\sqrt[3]{3}$.

10.4.5 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_5 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β' -είδους. Υπολογίστε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα ακολουθώντας τη μεθοδολογία της Εφαρμογής 7.2.3.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_5 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}$.

10.4.6 Να εξετάσετε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$ υπάρχει.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το δεύτερο κριτήριο σύγκρισης για τη συνάρτηση $g(x) = x^{-1}$,

(βλέπε, [Πρόταση 10.1.14](#)).

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_6 αποκλίνει.

10.4.7 Να εξετάσετε τη συμπεριφορά της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ ως προς τη σύγκλιση.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το [Θεώρημα 10.1.16](#).

Απάντηση: Η σειρά συγκλίνει.

10.4.8 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x) = \cos(ax)$, με $a \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον [Ορισμό 10.2.1](#) και υπολογίστε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα ακολουθώντας τη μεθοδολογία της [Εφαρμογής 10.2.2 \(ii\)](#).

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός είναι: $L(\cos(ax)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$.

10.4.9 Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x) + y(x) = \sin(x)$, όταν $y(0) = 1$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων του [Πίνακα 10.2.6](#), ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην [Εφαρμογή 10.2.7](#).

Απάντηση: Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.
- Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.
- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (1999). Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών. Αθήνα: Παν. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.
- Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.
- Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.
- Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). Ολοκληρωτικός λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.
- Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.
- Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.
- Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.
- Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σιαφάρικας, Π. Δ. (2014). Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (τεύχος 1ο). Πάτρα: Gotsis Εκδόσεις.
- Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.
- Srivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Τραχανάς, Σ. Λ. (2013). Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: ΠΕΚ (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from <http://www.gnu.org/software/octave>

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from <http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html>

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

10.1. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα, αν υπάρχουν. Σε περίπτωση σύγκλισης να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα της σύγκλισης αυτών, όπου είναι δυνατόν:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \int_{-\infty}^{-4} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} dx & \text{ii)} \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \\ \text{iii)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx & \text{iv)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx \\ \text{v)} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx & \text{vi)} \int_{-2}^5 \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-4}} dx \\ \text{vii)} \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{-x-2}} dx & \text{viii)} \int_0^2 \frac{1}{1-x^2} dx \\ \text{ix)} \int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^2} dx & \text{x)} \int_0^1 \frac{\cos(2x)-1}{x^2} dx \\ \text{xi)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx & \text{xii)} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \end{array}$$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.2. Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες συγκλίνουν (υπάρχουν) τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \quad \text{ii)} \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx \quad \text{iii)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^p} dx$$

10.3. Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν. Σε περίπτωση σύγκλισης να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα της σύγκλισης αυτών:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+6} \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4 e^n}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Matlab/Octave στη μελέτη σας.

10.4. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} f(x) = x^3 e^{2x} + 3(1-x)^2 & \text{ii)} f(x) = x e^{3x} - 2x \cos(x) - 5x^2 \sin(2x) \\ \text{iii)} f(x) = \cos(2x-4) + \frac{1}{e^x} \cos(2x) & \text{iv)} f(x) = 5e^{2x} - 3x + 4 \sin(x-7) \end{array}$$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.5. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2} & \text{ii)} F(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+4} \\ \text{iii)} F(s) = \frac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)} & \text{iv)} F(s) = \frac{1}{s^2(s+9)} \\ \text{iv)} F(s) = \frac{2s-1}{s^2+6s+1} & \text{v)} F(s) = \frac{s^2+1}{s^3+s^2-s} \end{array}$$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.6. Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να επιλυθούν οι ακόλουθες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και στη συνέχεια να επαληθευτούν με Matlab/Octave:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} y''(x) + 4y(x) = 0, \text{ με } y(0) = y'(0) = 2 \\ \text{ii)} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \text{ με } y(0) = y'(0) = 0 \\ \text{iii)} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{5x}, \text{ με } y(0) = 1, y'(0) = 3 \\ \text{iv)} y''(x) - y(x) = 2\cos(x), \text{ με } y(0) = 0, y'(0) = -1 \\ \text{v)} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3xe^{-x}, \text{ με } y(0) = 4, y'(0) = 2 \\ \text{vi)} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{-x}, \text{ με } y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{array}$$

Παράρτημα

Πίνακας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

1.	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	
2.	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	
3.	$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
4.	$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	
5.	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$	
6.	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$	
7.	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	
8.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin(x)$
9.	$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x) \quad \sin(2k\pi + x) = \sin(x) \quad k \in \mathbb{Z}$	
10.	$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x) \quad \cos(2k\pi + x) = \cos(x) \quad k \in \mathbb{Z}$	
11.	$\tan(\pi - x) = -\tan(x) \quad \tan(\pi + x) = \tan(x) \quad \tan(2k\pi + x) = \tan(x) \quad k \in \mathbb{Z}$	
12.	$\cot(\pi - x) = -\cot(x) \quad \cot(\pi + x) = \cot(x) \quad \cot(2k\pi + x) = \cot(x) \quad k \in \mathbb{Z}$	
13.	$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \tan(-x) = -\tan(x) \quad \cot(-x) = -\cot(x)$	
14.	$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$	$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Πίνακας τριγωνομετρικών εξισώσεων

Εξίσωση	Λύση
$\sin(x) = \sin(\omega)$	$x = 2k\pi + \omega$ ή $x = (2k + 1)\pi - \omega$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\cos(x) = \cos(\omega)$	$x = 2k\pi \pm \omega$, $k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x) = \tan(\omega)$	$x = k\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x) = \cot(\omega)$	$x = k\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$

Πίνακας με τα σημαντικότερα όρια των ακολουθιών

1.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0$	$a \in \mathbb{R}^+$
2.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$	$ r < 1$, $r \in \mathbb{R}$
3.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{r^n} = 0$	$r > 1$, $r \in \mathbb{R}$
4.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$a \in \mathbb{R}^+$
5.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	
6.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	
7.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$	$a \in \mathbb{R} - \{0\}$
8.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$	
9.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$a \in \mathbb{R}$
10.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$	

Πίνακας με κανόνες παραγώγισης

1.	$(c \cdot f(x))' = cf'(x)$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$	$a, b \in \mathbb{R}$
3.	$(f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'$	
4.	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$	
5.	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'}{g^2(x)}$	
6.	$((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
7.	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	

Πίνακας παραγωγίσης στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	Παράγωγος $f'(x)$	Πεδίο ορισμού
1.	c	$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$x^n,$ $n \in \mathbb{R},$	$(x^n)' = n x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
3.	e^x	$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
5.	$a^x,$ $a > 0,$ $a \neq 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\sin(x)$	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\tan(x)$	$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
9.	$\cot(x)$	$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
10.	$\sec(x)$	$(\sec(x))' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
11.	$\operatorname{co} \sec(x)$	$(\operatorname{co} \sec(x))' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
12.	$\sin^{-1}(x)$	$(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
13.	$\cos^{-1}(x)$	$(\cos^{-1}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
14.	$\tan^{-1}(x)$	$(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\cot^{-1}(x)$	$(\cot^{-1}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\sinh(x)$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\cosh(x)$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
18.	$\tanh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$

19.	$\coth(x)$	$(\coth(x))' = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{(\sinh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$
20.	$\sinh^{-1}(x)$	$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
21.	$\cosh^{-1}(x)$	$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
22.	$\tanh^{-1}(x)$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$

Πίνακας ολοκλήρωσης στοιχειωδών συναρτήσεων

1.	$\int 0 dx = c, c \in \mathbb{R}$
2.	$\int 1 dx = x + c, x \in \mathbb{R}$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\}$
4.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, x \neq 0$
5.	$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\}$
6.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c, f(x) \neq 0$
7.	$\int e^x dx = e^x + c, x \in \mathbb{R}$
8.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, 0 < a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
9.	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c, x \in \mathbb{R}$
10.	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c, x \in \mathbb{R}$
11.	$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + c$
12.	$\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) + c$
13.	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) k \in \mathbb{Z}$
14.	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c, ((k-1)\pi, k\pi), k \in \mathbb{Z}$
15.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = \sin^{-1}(x) + c, x \in (-1,1)$
16.	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c = \tan^{-1}(x) + c, x \in \mathbb{R}$
17.	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c \quad \text{και} \quad \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c, x \in \mathbb{R}$
18.	$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x) + c \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\coth(x) + c$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c, x \in \mathbb{R}$
20.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \cosh^{-1}(x) + c, x \in \mathbb{R} - [-1,1]$

Πίνακας με Αναπτύγματα Maclaurin στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	Maclaurin	Περιοχή σύγκλισης
1.	e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
2.	$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \dots$	$ x < 1$
3.	$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
5.	$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\tan^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots$	$ x \leq 1$
8.	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$	$ x < 1$
9.	$(1+x)^a$ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n =$ $= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 +$ $+ \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x < 1$
10.	$(1+x)^a$ $a \in \mathbb{N}_0$	$1 + \sum_{n=1}^a \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 +$ $= + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \dots + x^a$	$x \in \mathbb{R}$

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x) = L^{-1}(F(s))$ $x \geq 0$	$L(f(x)) = F(s)$	Πεδίο ορισμού s
1.	c	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
2.	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	\sqrt{x}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$	$s > 0$
4.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$
5.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
6.	$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
7.	$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
8.	$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
10.	$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
11.	$x \sin(ax)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
12.	$x \cos(ax)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
13.	$e^{ax} \sin(bx)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
14.	$e^{ax} \cos(bx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
15.	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
16.	$\sin(ax) - ax \cos(ax)$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
17.	$u(x-a), a \in \mathbb{R}$ συνάρτηση βήματος	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$s > 0$

