Νόμος Εκθετικής Εξασθένισης

Θέμα 1

Να υπολογιστεί το ποσοστό μονοενεργειακής δέσμης 60 keV φωτονίων X, που διαπερνά φύλλο Al πάχους 2 cm και πυκνότητας 2,7 10^3 kg m^{-3}. Ο μαζικός συντελεστής εξασθένησης είναι 0,028 m^2kg^{-1}.

Τον γραμμικό συντελεστή εξασθένισης μπορούμε να τον υπολογίσουμε από τη σχέση

$$\mu_m = \frac{\mu_1}{\rho_1} \Rightarrow \mu_1 = \mu_m \rho_1 = 0{,}028\ \frac{m^2}{kg}\ 2.7\ 10^3 \frac{kg}{m^3} = 75.6\ \frac{1}{m}$$

$$I = I_0 e^{-\mu x} = I_0\ e^{-75.6*0.02} = I_0\ e^{-1.512} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 0{,}22 \text{ ή } 22\%$$

Θέμα 2

Να υπολογιστεί η εξασθένηση τριών δεσμών ακτίνων X έντασης 40, 100 και 200 , όταν διέρχονται από μαλακούς ιστούς πάχους 10 και 20 cm. Οι αντίστοιχοι μαζικοί συντελεστές εξασθένησης είναι 6,28 10^{-1} cm^2g^{-1}, 1.70 10^{-1} cm^2g^{-1} και 1,36 10^{-1} cm^2g^{-1}. Η πυκνότητα του μαλακού ιστού είναι 1 g cm^{-3}.

Για τον γραμμικό συντελεστή εξασθένισης θα έχουμε:

$$\mu_{m_1} = \frac{\mu_1}{\rho} \Rightarrow \mu_1 = \mu_{m_1}\rho = 0.628\ \frac{cm^2}{g}\ 1\frac{g}{cm^3} = 0.628\ \frac{1}{cm}$$

$$\mu_{m_2} = \frac{\mu_2}{\rho} \Rightarrow \mu_2 = \mu_{m_2}\rho = 0.170\ \frac{cm^2}{g}\ 1\frac{g}{cm^3} = 0.170\ \frac{1}{cm}$$

$$\mu_{m_3} = \frac{\mu_3}{\rho} \Rightarrow \mu_3 = \mu_{m_3}\rho = 0.136\ \frac{cm^2}{g}\ 1\frac{g}{cm^3} = 0.136\ \frac{1}{cm}$$

Για πάχος x=10 cm

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x} = I_0\ e^{-0.628\frac{1}{cm}10cm} = I_0\ 0.019$$

$$I_2 = I_0 e^{-\mu_2 x} = I_0\ e^{-0.170\frac{1}{cm}10cm} = I_0\ 0.1827$$

$$I_3 = I_0 e^{-\mu_3 x} = I_0\ e^{-0.136\frac{1}{cm}10cm} = I_0\ 0.2567$$

Για πάχος x=20 cm

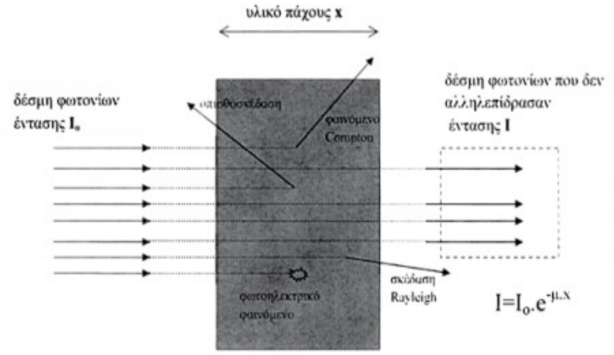
$$I_1 = I_0\ \ e^{-\mu_1 x} = I_0\ \ \ e^{-0.628\frac{1}{cm}20cm} = I_0\ \ 3.5*10\text{^}6$$

$$I_2 = I_0\ \ e^{-\mu_2 x} = I_0\ \ \ e^{-0.170\frac{1}{cm}20cm} = I_0\ \ 0.0334$$

$$I_3 = I_0\ \ e^{-\mu_3 x} = I_0\ \ \ e^{-0.136\frac{1}{cm}20cm} = I_0\ \ 0.256$$

Θέμα 3

Μία δέσμη ακτίνων Χ έντασης $I_0=10^6$ διαπερνά ένα υλικό πάχους x=50cm το οποίο έχει γραμμικό συντελεστή εξασθένισης μ=0,25 cm^{-1}.



α) Σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής εξασθένισης, να υπολογίστε την ένταση της εξερχόμενης Δέσμης I_1.

β) Αν υποδιπλασιαστεί το πάχος του υλικού μέσα από το οποίο διέρχεται η δέσμη, να υπολογίσετε την ένταση της εξερχόμενης δέσμης I_2.

γ) Αν διπλασιαστεί το πάχος του υλικού μέσα από το οποίο διέρχεται η δέσμη, να υπολογίσετε την ένταση της εξερχόμενης δέσμης I_3.

Συγκρίνετε και αιτιολογήστε τα αποτελέσματά σας, όπως αυτά προκύπτουν, σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής εξασθένισης.

α) $I_1 = I_0 e^{-\mu x} = 10^6\ e^{-0.25\frac{1}{cm}50cm} = 22{,}3\ 10^{-6}$

β) $I_2 = I_0 e^{-\mu 2x} = 10^6\ e^{-0.25\frac{1}{cm}25cm} = 0{,}01$

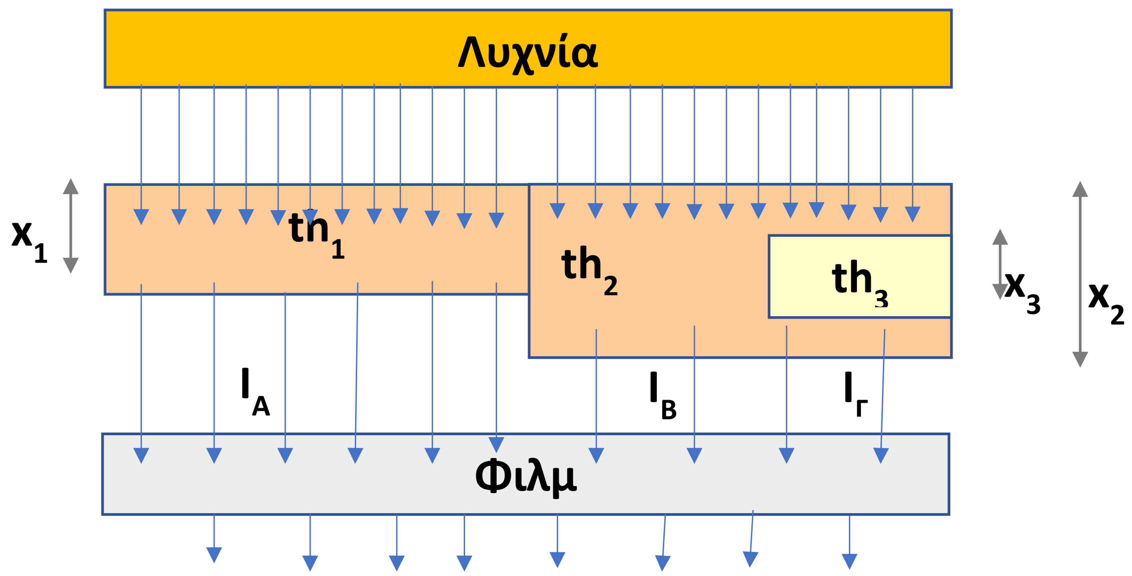
γ) $I_3 = I_0 e^{-\mu 2x} = 10^6\ e^{-0.25\frac{1}{cm}100cm} = 83{,}3\ 10^{-12}$

Συνεπώς $I_2>I_1>I_3$ αποτέλεσμα απολύτως αναμενόμενο δεδομένου ότι $d_2<d_1<d_3$ και σύμφωνα με τον νόμο της Εκθετικής Εξασθένισης η ένταση της ακτινοβολίας εξασθενεί με την αύξηση του πάχους του υλικού μέσα από το οποίο διέρχεται και μάλιστα εκθετικά (δηλαδή πολύ έντονα). Επίσης η εξασθένιση της δέσμης εξαρτάται και από τον συντελεστή εξασθένισης του υλικού, ο οποίος με τη σειρά του εξαρτάται από τον ατομικό αριθμό του υλικού μέσα από το οποίο διέρχεται και από την πυκνότητα του υλικού, στο παράδειγμα μας όμως ο συντελεστής εξασθένισης δεν αλλάζει, συνεπώς αφού παραμένει ο ίδιος δεν μας επηρεάζει.

Μία βασική πρακτική εφαρμογή του νόμου της Εκθετικής Εξασθένισης στην ακτινολογία είναι η χρήση του στην επιλογή κατάλληλων κατά περίπτωση φίλτρων στις Λυχνίες ακτίνων Χ.

Επίσης βρίσκει εφαρμογή στην ακτινοπροστασία για την επιλογή των σωστών υλικών και του κατάλληλου πάχους αυτών, ώστε να γίνονται σωστά οι θωρακίσεις των χώρων καθώς επίσης και η σωστή κατασκευή των ακτινοπροστατευτικών συστημάτων (ποδιές, κολάρα ακτινοπροστασίας κλπ) που χρησιμοποιούνται για την ακτινοπροστασία των ασθενών και του προσωπικού.

Θέμα 4



Η λυχνία του παραπάνω σχήματος εκπέμπει ισοτροπικά φωτόνια έντασης ίσης με

$$I_0 = 10^4$$

Το Ακτινοβολούμενο Θέμα αποτελείται από Μαλακό Ιστό με πάχη x_1 =15 mm $x_2 = 16\,mm$ και Οστό με πάχος $x_3 = 6\,mm$. Ο γραμμικός συντελεστής εξασθένισης για το οστό είναι $\mu_O = 0{,}5\frac{1}{mm}$ και για τον μαλακό ιστό είναι $\mu_I = 0{,}04\frac{1}{mm}$.

Χωρίς να λάβουμε υπόψιν τον παράγοντα της σκέδασης

a) Να υπολογίσετε την ένταση της εξερχόμενης δέσμης I_A, I_B, I_Γ.

<u>Μαλακός Ιστός</u>

<u>Πάχη</u>

$x_1 = 15\,mm$

$x_2 = 16\,mm$

<u>Γραμμικός Συντελεστής Εξασθένισης Μαλακού Ιστού</u>

$\mu_I = 0{,}04\dfrac{1}{mm}$

<u>Οστό</u>

<u>Πάχος</u>

$x_3 = 6\,mm$

<u>Γραμμικός Συντελεστής Εξασθένισης Οστού</u>

$\mu_O = 0{,}5 \frac{1}{mm}$

Οι εξερχόμενες δέσμες θα έχουν ένταση

- $I_A = I_0 e^{-\mu_1 x_1} = 10^4 * e^{-0.04*15} = \ldots.$
- $I_B = I_0 e^{-\mu_1 x_2} = 10^4 * e^{-0.04*16} = \ldots.$
- $I_\Gamma = \mathrm{I}_0 e^{-\mu_1 (x_2 - x_3)} e^{-\mu_0 x_3} = \mathrm{I}_0 e^{-0.04(16-6)} e^{-0.5*6} = \ldots.$

<u>Πυρηνική</u>

<u>Θέμα 1</u>

Ένα δείγμα του ισοτόπου ^{131}I, το οποίο έχει χρόνο ημιζωής 8,04 ημέρες, έχει μετρημένη ενεργότητα 5mCi κατά τη στιγμή της αποστολής του με το ταχυδρομείο. Κατά την παραλαβή του σε ένα ιατρικό εργαστήριο μετρείται η ενεργότητα, και βρίσκεται ίση με 4,2 mCi. Πόσος χρόνος έχει μεσολαβήσει ανάμεσα στις δύο μετρήσεις.

Έχουμε

$$R = R_0 e^{-\lambda t}$$

Όπου R_0 η αρχική ενεργότητα και R η ενεργότητα σε χρόνο t.

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\frac{R}{R_0} = -\lambda t \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{R}{R_0}$$

Όμως

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{8{,}04\ \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$t = -\frac{8{,}04\ \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma}{0{,}693}\ln\left(\frac{4{,}2\ \mathrm{mCi}}{5\ \mathrm{mCi}}\right) = 2{,}02\ \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma$$

<u>Θέμα 2</u>

Θεωρείστε ποσότητα 1μg ^{99m}Tc (εκπομπή γ με χρόνο ημίσειας ζωής 6 ώρες). Σε απόσταση 1m από την πηγή τοποθετείται ανιχνευτής ακτίνων γ με διάμετρο 2cm.

α) Να υπολογιστεί πόσα φωτόνια καταγράφει ο ανιχνευτής ανά δευτερόλεπτο.

β) Υπολογίστε την μάζα του ισοτόπου ^{67}Ga (χρόνος ημίσειας ζωής 72 ώρες) που απαιτείται για να καταγράψει ο ίδιος ανιχνευτής, στην ίδια απόσταση από την πηγή τον ίδιο ρυθμό φωτονίων

α)

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 = \frac{\ln 2}{T_1}\frac{m_{Te}}{99} N_A = \frac{\ln 2}{6 * 60s}\frac{10^{-6}}{99} 6.02\ 10^{23} = 1.171\ 10^{13}\ \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s$$

Ο ανιχνευτής θα καταγράφει

$$\frac{dN_1}{dt}\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = 1.171\ 10^{13}\ \frac{1}{4\ 10^{-4}} = 2.293\ 10^{17} \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s$$

β)

$$\lambda_1\, N_1 = \lambda_2\, N_2 \Rightarrow \frac{\ln 2}{T_1} N_1 = \frac{\ln 2}{T_2} N_2 \Rightarrow \frac{N_1}{T_1} = \frac{N_2}{T_2} \Rightarrow N_2 = \frac{T_2}{T_1} N_1 \Rightarrow N_2 = \frac{72}{6} N_1 \Rightarrow N_2 = 12 N_1$$

Όμως

$$N\left({}^{99m}Te\right) = N_1 = \frac{m_{Te}}{99} N_A$$
$$N\left({}^{67}Ga\right) = N_2 = \frac{m_{Ga}}{67} N_A$$

Άρα

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\frac{m_{Ga}}{67}}{\frac{m_{Te}}{99}} \Rightarrow \frac{12 N_1}{N_1} = \frac{99\, m_{Ga}}{67\, m_{Te}} \Rightarrow m_{Ga} = \frac{12 * 67}{99} m_{Te} \Rightarrow m_{Ga} = 8.12\, m_{Te} \Rightarrow m_{Ga}$$
$$= 8.12\ 10^{-6} g \Rightarrow m_{Ga} = 8.12\ \mu g$$

<u>Θέμα 3</u>

Θεωρείστε ραδιενεργό πηγή που περιέχει ποσότητα ^{99m} Tc μάζας ίσης με 1 μgr (εκπομπή γ με χρόνο ημίσειας ζωής 6 ώρες).

Α) Σε απόσταση 1m από την πηγή τοποθετείται ανιχνευτής ακτίνων γ με διάμετρο 1cm. Υπολογίστε πόσα φωτόνια ανά δευτερόλεπτο καταγράφει ο ανιχνευτής.

α)

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1\, N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 = \frac{\ln 2}{T_1}\frac{m_{Te}}{99} N_A = \frac{\ln 2}{6 * 3600 s}\frac{10^{-6}}{99} 6.02\ 10^{23}$$
$$= 1.95\ 10^{11}\ \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s$$

Ο ανιχνευτής θα καταγράφει

$$\frac{dN_1}{dt}\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = 1.95\ 10^{11}\ \frac{0.25}{4 * 10^4} = 1{,}22\ 10^{6} \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s$$

Β) 6 ώρες αργότερα, προστίθενται 0.5 μgr ^{99m}Tc. Υπολογίστε πόσα φωτόνια ανά δευτερόλεπτο θα καταγράφει τώρα ο ίδιος ανιχνευτής

Ο χρόνος ημιζωής του ^{99m} Tc είναι 6 ώρες. Συνεπώς σε 6 ώρες θα έχουν απομείνει η μισή της αρχικής ποσότητας ^{99m} Tc, δηλαδή 0,5 μgr. Αν λοιπόν προσθέσουμε επιπλέον 0.5 μgr ^{99m}Tc η συνολική μάζα θα είναι 1 μgr, που είναι ίδια με την αρχική, συνεπώς ο ανιχνευτής θα καταγράψει και πάλι την ίδια ποσότητα φωτονίων δηλαδή $1.95\ 10^{11}\ \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s$.