

7/5/2025

Ψευδοαντίστροφος πίνακας ή Γενικευμένος αντίστροφος

• $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται αντίστροφος του A
 $\Leftrightarrow AX = XA = I_n$

και γράφεται $X = A^{-1}$

• $\exists \text{ ο } A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank } A = n$

Εφαρμογή του $A^{-1} \Rightarrow$ επίλυση γραμμικών
 συστημάτων ή εξισώσεων
 με n αγνώστους

$A \cdot X = b \Rightarrow X = A^{-1}b$ μοναδική λύση
 $n \times n \quad n \times 1 \quad n \times 1$

Τι συμβαίνει αν $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ή $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$
 αλλά δεν υπάρχει ο A^{-1} ($\text{rank } A < n$)?

► Moore-Penrose ψευδοαντίστροφος ή γενικευμένος αντίστροφος
 ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ είναι ο πίνακας

$X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

- 1) $AXA = A$
- 2) $XAX = X$
- 3) $(AX)^* = AX$ (ο AX είναι ερμιτιανός πίνακας)
- 4) $(XA)^* = XA$ (ο XA — " —)

και γράφεται $X = A^+$

Σημείωση: Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και υπάρχει ο A^{-1}
 $\Rightarrow A^+ \equiv A^{-1}$

Ιδιότητες ψευδοαντιστροφών

- 1) A^+ είναι μοναδικός
- 2) $(A^+)^+ = A$
- 3) $(\lambda A)^+ = \frac{1}{\lambda} A^+, \lambda \neq 0$
- 4) $\lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$
- 5) $0^+ = 0$

► $A_{m \times n}$ είναι πλήρως βαθμιά (full rank)

$$\text{rank } A = \min\{m, n\}$$

~) αν $\text{rank } A = m \leq n \Rightarrow$ πλήθος γραμμών - A full row rank

$$\Rightarrow \text{rank}(AA^*) = \text{rank}(A) = m$$

$$\Rightarrow \exists (AA^*)^{-1}_{m \times m}$$

Τότε $X = A^* (AA^*)^{-1}_{m \times m}$ είναι ο ψευδοαντιστροφός του A
διότι ικανοποιεί και τις 4 ιδιότητες που ορίζουν

$$\bullet AXA = A \left(A^* (AA^*)^{-1} \right) A = \underbrace{(AA^*) (AA^*)^{-1}}_{I_m} A = A$$

$$\begin{aligned} \bullet XAX &= \left(A^* (AA^*)^{-1} \right) A \left(A^* (AA^*)^{-1} \right) = A^* (AA^*)^{-1} \underbrace{(AA^*) (AA^*)^{-1}}_{I_m} = A^* (AA^*)^{-1} = X \\ &= A^* (AA^*)^{-1} \cdot I_m = A^* (AA^*)^{-1} = X \end{aligned}$$

$$\bullet (AX)^* = \left(A A^* (AA^*)^{-1} \right)^* = I = \underbrace{(AA^*) (AA^*)^{-1}}_{I} = A \cdot \underbrace{\left(A^* (AA^*)^{-1} \right)^*}_X$$

• $(XA)^{\star} = XA$ ομοίως με πριν

$$\Rightarrow \boxed{A^{\dagger} = A^{\star} (A A^{\star})^{-1}}_{n \times m}, \text{rank } A = m \leq n$$

ii) αν $\text{rank } A = n \leq m$ ($\rightarrow$ πλήθος στεινών — A full column rank)

$$\Rightarrow \text{rank}(A^{\star} A) = \text{rank}(A) = n$$

$n \times n$

$$\Rightarrow \exists (A^{\star} A)^{-1}$$

$$\boxed{A^{\dagger} = (A^{\star} A)^{-1} A^{\star}}_{n \times m}, \text{rank } A = n \leq m$$

iii) Αν $\text{rank } A = r < \min\{m, n\}$ τότε $A = U S V^{\star}$

$$\Rightarrow A^{\dagger} = V S^{\dagger} U^{\star}$$

αν $S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \rightsquigarrow S^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$

οπότε $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ιδιοτιμές του A

Παράδειγμα | $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{\dagger} = ?$

α' τρόπος | $\text{rank } A = 2 = \text{πλήθος στεινών του } A$
 $\Rightarrow$ full column rank

από (ii) $\Rightarrow A^{\dagger} = (A^{\star} A)^{-1} A^{\star} = (A^T A)^{-1} A^T$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -b \\ -\gamma & a \end{pmatrix}$$

6' τρόπος | $A = U S V^T \Rightarrow A^+ = V S^+ U^T$
(άσκηση ↓)

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$$

3×2

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση | Να βρεθεί ο A^+ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×4

Εφαρμογή του A^+ στην επίλυση γραμμικών συστημάτων

$$\begin{matrix} A x = b \\ m \times n \\ \text{rank } A = n \leq m \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = ? \\ x \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

$m \rightarrow$ πλήθος εξισώσεων
 $n \rightarrow$ πλήθος αγνώστων

$m \geq n \Rightarrow$ παραπάνω εξισώσεις από αγνώστους

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \Rightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

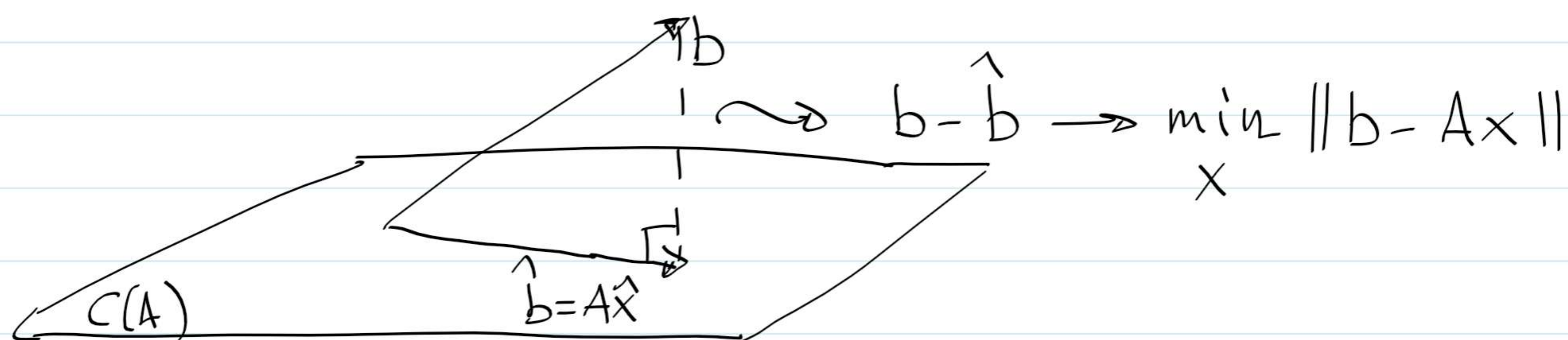
$a_i \in \mathbb{R}^m$

$b \in \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Εφόσον $\text{rank } A = n \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$ γραμμικά
ανεξάρτητα διανύσματα
που παράγουν τον χώρο
στηλών της A

$$b \in C(A) = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Για να υπάρχει λύση του $Ax=b$ θα πρέπει $b \in C(A)$



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2^2 \longrightarrow \text{πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων}$$

$$\text{Αν } \text{rank } A = n \Rightarrow \hat{x} = A^+ b = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^+} b$$