

14/5/2025

Θεωρία Perron - Frobenius

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$$

• A είναι μη αρνητικός πίνακας ($A \geq 0$) $\Leftrightarrow a_{ij} \geq 0$
 $\forall i, j = 1, \dots, n$

• A είναι θετικός πίνακας ($A > 0$) $\Leftrightarrow a_{ij} > 0 \forall i, j = 1, \dots, n$

$$|A| = [|a_{ij}|]_{i,j=1}^n \geq 0$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \geq 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

► φασματική ακτίνα πίνακα A

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}, \quad \sigma(A) = \text{σύνολο όλων των ιδιοτιμών}$$

π.χ. $\sigma(A) = \{ 3, 1, 0, -2, -5, -7 \}$

$$\rho(A) = 7$$

$\rho(A) \rightarrow$ η αυτίνα την μικρότερου κυκλικού δίσκου με κέντρο το 0 που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα

Φράγματα φασματικής αυτίνας

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall \text{ νόρμα πίνακα}$$

$$\bullet \|A\|_{\infty} = \|A\|_r = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|$$

$$\bullet \|A\|_2 = \|A\|_s = \max_i \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$$

$$\bullet \|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \leadsto \text{Frobenius}$$

$$\bullet \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \leadsto \text{φαρμαζικὴ ὥρτα}$$

Πρόταση 1

$$\text{Έστω } A \in \mathbb{C}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \geq 0$$

$$\text{αν } |A| \leq B \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$$

Πρόταση 2

$$\text{Έστω } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{αν } 0 \leq A \leq B \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \geq 0, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} > 0$

$$A \leq B \Rightarrow \rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} = 3$$

$$(a_{ij} \leq b_{ij}) \quad \sigma(A) = \{-2, 3\}$$

$$\sigma(B) = \{-0.27, 7.27\}$$

$$\rho(B) = 7.27$$

$$\rho(A) = 3 < 7.27 = \rho(B)$$

Πρόταση 3

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq 0, \hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ κύριος υποπίνακας του } A$$

$$\Rightarrow \rho(\hat{A}) \leq \rho(A)$$

$$\text{Ειδικότερα, } \max \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$$

π.x.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{0.0914 \pm i1.57, 2.8171\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_1) = \{1, 1\}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_2) = \{1, 1\}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_3) = \{1, 1\}$$

$$\rho(A_1) = 1$$

$$\rho(A) = \max \{ |0.0914 \pm i1.57|, 2.8171 \}$$

$$= \max \{ 1.5763, 2.8171 \} = 2.8171$$

$$\rho(A_1) = 1 < 2.8171 = \rho(A)$$

Πρόταση

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq 0 \quad \text{τότε}$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sum_j a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j a_{ij}$$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_i a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i a_{ij}$$

π.x.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1+0+2=3=r_1 \\ \rightarrow 3+1+0=4=r_2 \\ \rightarrow 0+1+1=2=r_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \max\{r_1, r_2, r_3\}=4 \\ \min\{r_1, r_2, r_3\}=2 \end{array}$$
$$\downarrow \downarrow \downarrow \quad 2 \leq \rho(A) \leq 4, \quad \rho(A)=2.8171$$

$$c_1 = 4 = 1+3+0$$

$$c_2 = 2 = 1+1$$

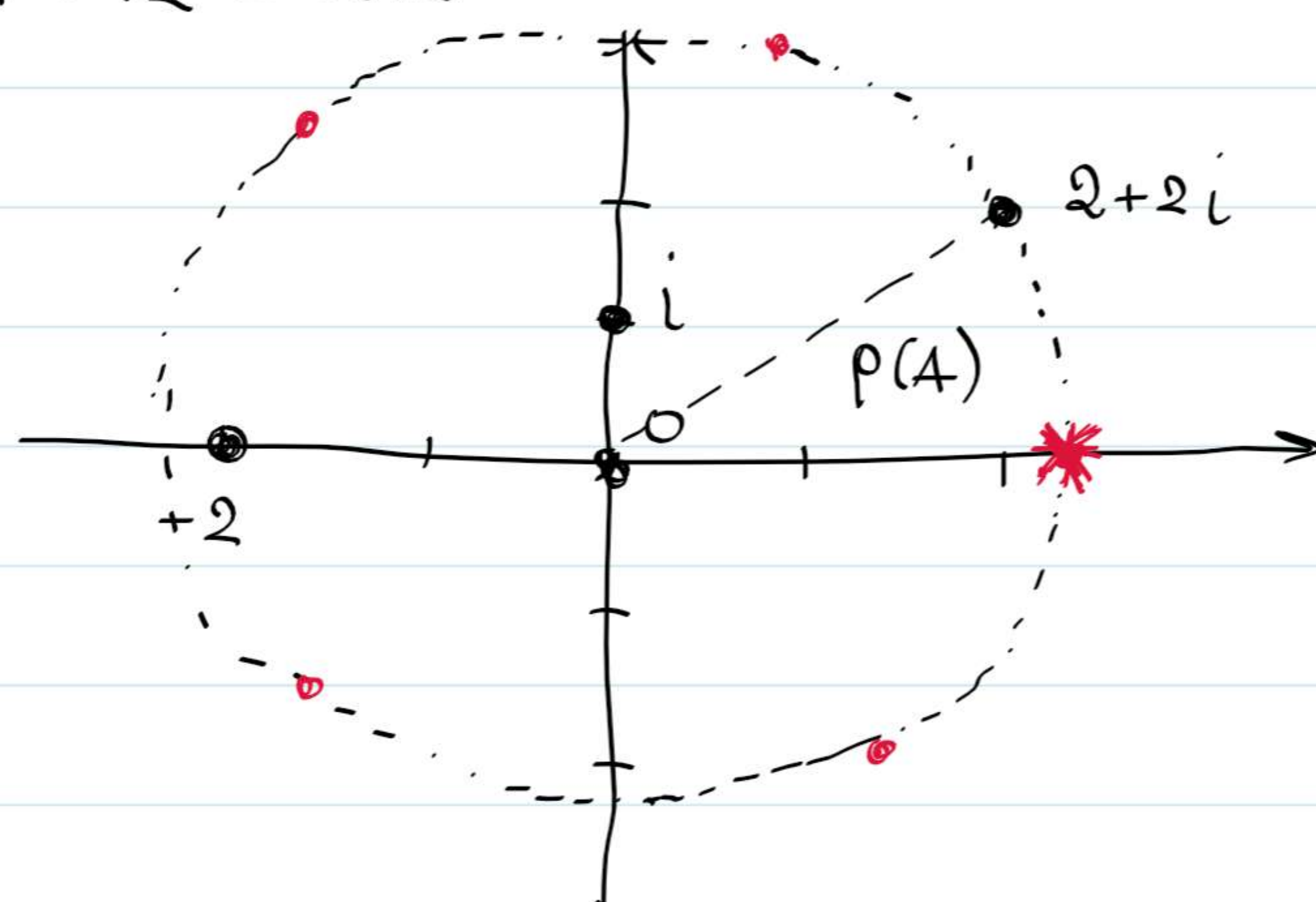
$$c_3 = 3 = 2+0+1$$

$$2 = \min\{c_1, c_2, c_3\} \leq \rho(A) \leq \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$$

$$A \geq 0, \quad \sigma(A) = \{2+2i, -2, i, 0\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \quad 1$$



$$z = a + ib$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho(A) = 2\sqrt{2} \notin \sigma(A)$$

Θεώρημα Perron - Frobenius

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \geq 0$$

$$1) \quad \rho(A) > 0$$

$$2) \quad \rho(A) \in \sigma(A) \quad \text{με} \quad \text{αλγ. πολ/τα} = \text{γεωμ. πολ/τα} = 1$$

$$3) \quad \exists \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x > 0 \quad ; \quad Ax = \rho(A)x, \quad \text{δηλ. } x$$

(κάθε συνιστώσα των x είναι θετικός αριθμός) 1 ιδιοδιάνυσμα των αντιστοιχί στο $\rho(A)$

$$4) \quad |\lambda| < \rho(A) \quad \forall \quad \lambda \text{ ιδιοτιμή των } A$$

με $\lambda \neq \rho(A)$

• Perron root ή ρίζα Perron είναι η $\rho(A)$, $A \geq 0$

• Διάνυσμα Perron είναι το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα

των αντιστοιχί στο $\rho(A)$

$$\text{π.χ.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{4, 1, -1\}$$

$$\rho(A) = 4 \in \sigma(A)$$

άρα 4 είναι η Perron ρίζα

$$(A - 4I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \quad x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 1, 1)$$

άρα $x = (1, 1, 1) > 0$ ιδιοδιάνομα που αντιστοιχεί
 στο $\rho(A) = 4$

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \leadsto \text{διάνομα Perron}$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1 < 4 = \rho(A)$$

$$\lambda_3 = -1$$

Τι συμβαίνει στην περίπτωση $A \geq 0$?

Πρόταση

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq 0 \Rightarrow \rho(A) \in \sigma(A) \text{ και}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x \geq 0 : Ax = \rho(A)x$$

(δηλ. $\exists$ ιδιοδιάνομα που αντιστοιχεί $\rho(A)$ με συνιστώσες ≥ 0)

► $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq 0$ ονομάζεται μη-αναγώγιμος (irreducible)

$$\Leftrightarrow \nexists \text{ πίνακας μεταθέσεως } P : P^T A P = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

όπου X, Z τετραγωνικοί πίνακες

Διαφορετικά, ο A καλείται αναγώγιμος (reducible).

► $A \geq 0$ είναι irreducible $\Leftrightarrow (A+I)^{n-1} > 0$ ←

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$ άρα A irreducible

Γενικευμένο Θ. Perron - Frobenius

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$ και A irreducible $\Rightarrow$

1) $\rho(A) > 0$

2) $\rho(A) \in G(A)$ με $\text{αλγ. πωλ/τα} = \text{γεωμ. πωλ/τα} = 1$

3) $\exists x > 0 : Ax = \rho(A)x$

• $\rho(A) \rightarrow$ ρίζα Perron

• $\muααδισιό$
 $x : Ax = \rho(A)x \rightarrow$ διάνυσμα Perron

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A, B, C \geq 0$

$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow A$ irreducible

$(B+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow B$ reducible

$(C+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow C$ irreducible

$\Rightarrow$ Το γενικευμένο Θ. Perron - Frobenius εφαρμόζεται μόνο στους πίνακες A και C

• επαλήθευση των συμπερασμάτων του θεωρήματος στους A, C

$\rho(A), \rho(C) = ?$. . .

• βροδιασμός των υπόλοιπων ιδιοτιμών και εύρησή με φασματική αγωγή.

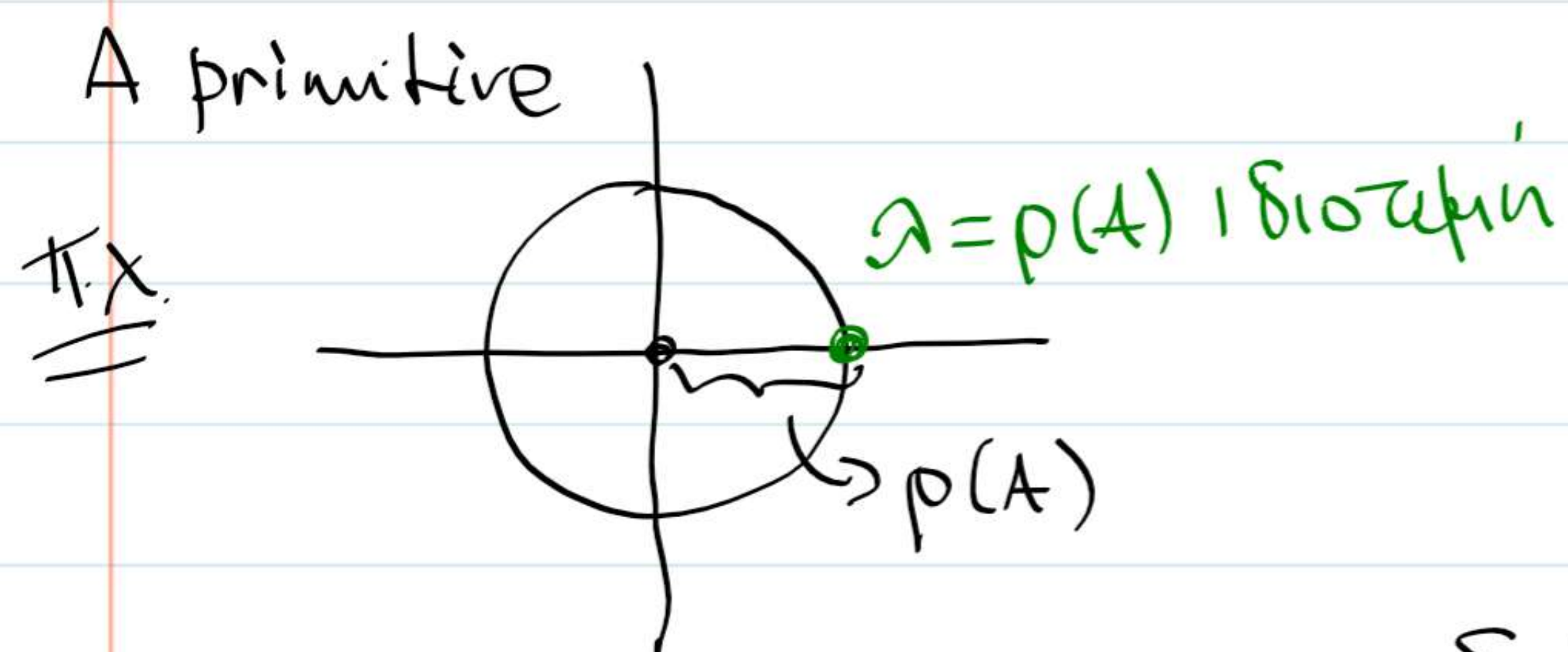
4/6/2025

Ορισμός

Πρωταρχικός πίνακας (primitive) $\Leftrightarrow A \geq 0$ και

A irreducible

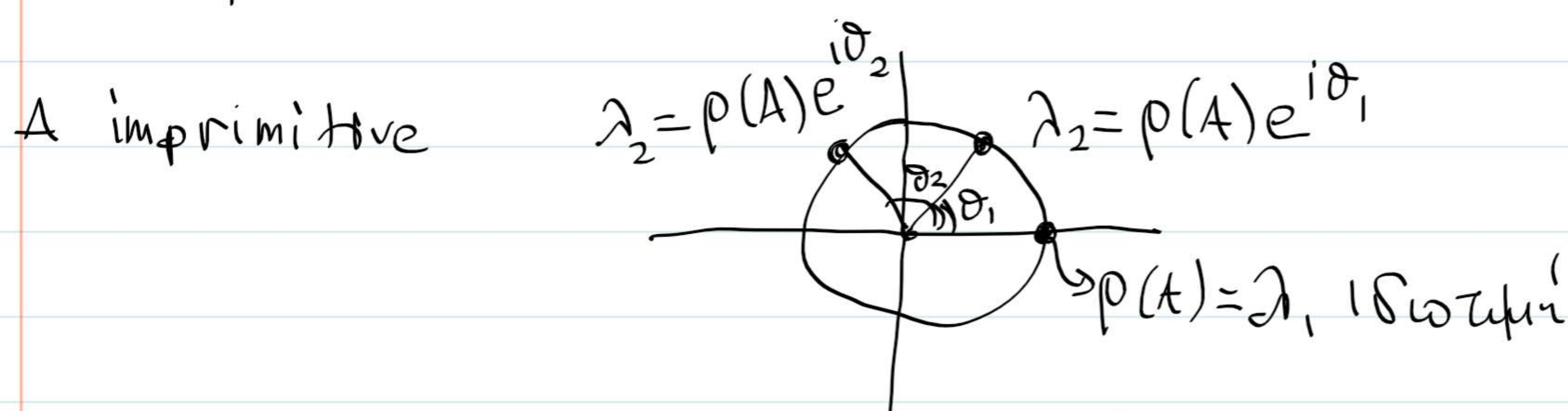
(δηλ. $(I+A)^{n-1} > 0$)



και $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή του A μεγίστου μέτρου

δηλ. βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου κέντρου O και ακτίνας $\rho(A)$

Διαφορετικά, ο πίνακας καλείται μη-πρωταρχικός (imprimitive)



$\Rightarrow A_{n \times n} \geq 0$, irreducible είναι primitive $\Leftrightarrow$

i) $A^k > 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

ή ii) $A^{n^2-2n+2} > 0$

Άσκηση 5 (Aguiar - edass) $\exists$ ακριβώς 1 θετική ιδιοτιμή λ : $|\lambda| = \rho(A)$

• $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Από P-f εφόσον $A_1 > 0 \Rightarrow \rho(A) > 0$ απλή ιδιοτιμή του A_1

αθροίσματα γραμμών : $r_1 = 1+1+2=4$
 $r_2 = 4+1+1=6$
 $r_3 = 2+4+6=12$ $\rightarrow \min\{r_i\} \leq \rho(A) \leq \max\{r_i\}$
 $4 \leq \rho(A) \leq 12$

αθροίσματα στηλών : $c_1 = 7, c_2 = 6, c_3 = 9$

$\rightarrow \min\{c_i\} \leq \rho(A) \leq \max\{c_i\} \Rightarrow 6 \leq \rho(A) \leq 9$

$$\bullet A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \rho(A) \in G(A)$$

$$(A_9 + I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 14 \\ 28 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Rightarrow A_9$ reducible $\Rightarrow$ δεν ικανοποιεί το γεν. Perron-Frobenius $\rightarrow$ δεν χαρακτηρίζεται των πολ/τα της $\rho(A)$

$$\min\{2, 3\} \leq \rho(A) \leq \max\{2, 3\} \Rightarrow 2 \leq \rho(A) \leq 3$$

$$\bullet A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \rho(A) \in G(A)$$

$$(A_2 + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 20 \\ 4 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 44 \end{pmatrix} > 0$$

άρα A_2 irreducible και από γενικευμένο P-F
 $0 < \rho(A_2)$ είναι απλή ιδιοτιμή

? 1 ιδιοτιμή : $|\lambda| = \rho(A) \Rightarrow ? A_2$ primitive

$$\lambda = x + iy \rightarrow |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_2 \text{ primitive} \Leftrightarrow A_2^{n-2n+2} = A_2^{9-6+2} = A_2^5 > 0$$

ή ισοδύναμα $\Leftrightarrow A_2^k > 0$ για κάποιο k

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 16 \\ 4 & 13 & 16 \\ 16 & 16 & 33 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow A_2 \text{ primitive}$$

$A_2 \geq 0$, irreducible

και primitive

$\Rightarrow$

δεν υπάρχουν άλλες ιδιοτιμές
μείζοντος μέτρου $|\lambda| = \rho(A)$

εκτός από την φασματική
αύξια $\rho(A)$

Διαγωνισίτητες πίνακα

$$A = P^{-1} D P = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$P = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \quad , \quad x_i \neq 0 \text{ ιδιοδιάνυσματα}$$

των A που αντιστοιχούν

στις ιδιοτιμές λ_i

• αν $A = A^T \Rightarrow A$ διαγωνισιείται (φασματικό θεώρημα)

• αν A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\Rightarrow$
 A διαγωνισιείται

• αν A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδι-
άνυσματα

• αν A έχει ελάχιστο πολυώνυμο

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

όπου λ_i οι διαφορετικές ιδιοτιμές
των $A \Rightarrow A$ διαγωνισιείται

$$A x = b \rightarrow L \cdot (U x) = b \begin{matrix} \nearrow \tilde{L} y = \tilde{b} \quad (1) \\ \searrow [D] \\ \downarrow y \\ U x = y \quad (2) \\ [D] \end{matrix}$$

- $A = U S V^*$ $\Rightarrow A^+ = V S^+ U^*$
 $m \times n$
 $m > n$

$$S^+ = \text{diag} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

- $\text{du } A \text{ s'xeu } \text{rank } A = n < m \Rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
 $m \times n$

- $\text{ar } A \text{ s'xeu } \text{rank } A = m > n \Rightarrow A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$
 $m \times n$