

19/3/2025 Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα που
καυορική μορφή Jordan

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leadsto \text{άνω τριγωνικός}$$

$$\sigma(A) = \{1, 1, 3\} \leadsto \text{όλοιο
ιδιοτιμών}$$

$$\bullet \text{ αλγ. πολ}(1) = 2, \quad \text{αλγ. πολ}(3) = 1$$

• Ιδιοδιανύματα:

$$\text{για } \lambda = 3 \Rightarrow (A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_2, x_2, x_2\right) = x_2 \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \quad \forall x_2 \neq 0$$

$$V(3) = \left\{ \mu \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) : \mu \neq 0 \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \right\} \leadsto \text{γραμμικά θίκη}$$

$$\text{γεωμ. πολ}(3) = \dim V(3) = 1$$

$$\bullet \text{ για } \lambda = 1 \Rightarrow (A - I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) = x_1 (1, 0, 0) \quad \forall x_1 \neq 0$$

$$V(1) = \text{span} \{ (1, 0, 0) \}$$

$$\dim V(1) = 1 = \text{γεωμ. πολ}(1) < \text{αλγ. πολ}(1) = 2$$

$$\Rightarrow A \text{ δεν διαγωνοποιείται}$$

Ορισμός | Έστω $A_{n \times n}$ και διάνυσμα $x \neq 0$

x καλείται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A
που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i \iff$

$$(A - \lambda_i I)^k x = 0 \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

• $K(\lambda_i) = \{ x \neq 0 : (A - \lambda_i I)^k x = 0 \} \rightsquigarrow$ γενικευμένος
ιδιοχώρος της
ιδιοτιμής λ_i

► Για $k=1 \Rightarrow$ το γενικευμένο
ιδιοδιάνυσμα x ταυτίζεται
με το κλασικό ιδιοδιάνυσμα

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ έρευν. γεν. ιδιοδ. του A

• $\lambda = 1 : (A - \lambda I)^2 x = 0 \Rightarrow (A - I)^2 x = 0$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x_3 = 0 \Rightarrow \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0)$$

$$= x_1 (1, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0)$$

$\downarrow$
 u_1 ιδιοδιάνυσμα

$$(A - I)u_1 = 0$$

$\downarrow$
 u_2 γεν. ιδιοδ.

$$(A - I)^2 u_2 = 0$$

$$(A - I)u_2 \neq 0$$

► Αλυσίδα από γενικευμένα ιδιοδιάνομα

Αν k είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός :

$$(A - \lambda_i I)^k x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{η αλυσίδα} \quad \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad \text{όπου}$$

$$(I) \quad \begin{cases} x_1 = (A - \lambda_i I)^{k-1} x \\ x_2 = (A - \lambda_i I)^{k-2} x \\ \vdots \\ x_{k-1} = (A - \lambda_i I) x \\ x_k = x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leadsto \text{αλυσίδα} \\ \text{από γεν.} \\ \text{ιδιοδ.} \\ \\ k \Rightarrow \text{μίκος} \\ \text{της αλυσίδας} \end{array}$$

$$(II) \quad \begin{cases} (A - \lambda_i I) x_1 = (A - \lambda_i I)^k x = 0 \\ (A - \lambda_i I) x_2 = (A - \lambda_i I)^{k-1} x \stackrel{(I)}{=} x_1 \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I) x_{k-1} = (A - \lambda_i I)^2 x \stackrel{(I)}{=} x_{k-2} \\ (A - \lambda_i I) x_k = (A - \lambda_i I) x \stackrel{(I)}{=} x_{k-1} \end{cases}$$

x_1 ιδιοδιάνομα των A που αντιστοιχεί στην λ_i

↓
2ος τρόπος εύρεσης της αλυσίδας από γεν. ιδιοδ. ξεκινώντας από το κλαδικό ιδιοδ. x_1

Ερώτημα: $k=?$ για να βρούμε όλα τα γεν. ιδιοδ. των A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i ?

► Αν x και $\lambda_i \in \sigma(A)$ με $\alpha\lambda\delta.\text{πολ}(\lambda_i) = p$
 $\Rightarrow \dim \{ x \neq 0 : (A - \lambda_i I)^p x = 0 \} = p$

δηλ. υπάρχουν p γραμ. ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδ. για την ιδιοτιμή λ_i

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ γεν. ιδιοδ. των A

1) ιδιοτιμές : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^3$

$\sigma(A) = \{1, 1, 1\}$, αλγ. πωλ(1) = 3

2) ιδιοδιάνομα : $(A - I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_3 \end{cases}$

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-2x_3, 0, x_3) = x_3(-2, 0, 1)$

$V(1) = \text{span}\{\underbrace{(-2, 0, 1)}_{u_1}\} \Rightarrow \text{γεν. πωλ}(1) = 1$

3) $\text{γεν. πωλ}(1) = 1 < 3 = \alpha\lambda\gamma. \text{πωλ}(1)$

άρα αναζητούμε 2 γεν. ιδιοδ.
τα οποία θα υπολογίσουμε μέσω των σχέσεων (II)

• $u_1 = (-2, 0, 1)$

• $(A - I)u_2 = u_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \\ a + 2\gamma = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\gamma \\ b = -1 \end{cases}$

$u_2 = (a, b, \gamma) = (-2\gamma, -1, \gamma) = (-2\gamma, 0, \gamma) + (0, -1, 0)$
 $= \gamma(-2, 0, 1) + (0, -1, 0)$

$\Rightarrow u_2 = (0, -1, 0)$ γεν. ιδιοδ.

$$(A-I)u_3 = u_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2b = 0 \\ a + 2\gamma = -1 \\ -b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 0 \\ a = -1 - 2\gamma \end{array}$$

$$u_3 = (a, b, \gamma) = (-1 - 2\gamma, 0, \gamma) = (-1, 0, 0) + \gamma(-2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow u_3 = (-2, 0, 0) \sim \gamma w, \text{ ιδιοδ.}$$

Άρα η ακολουθία από $\gamma w, \text{ ιδιοδ.}$ μήκους 3

$$\text{είναι } \underbrace{\{u_1, u_2, u_3\}}_{\substack{(\text{II}) \\ (A-I)u_i = u_{i-1}}} = \underbrace{\{(A-I)^2 v, (A-I)v, v\}}_{(\text{I})}$$

$$A = M J M^{-1} \Leftrightarrow$$

$$M = [u_1 \ u_2 \ u_3]$$

$$AM = M J$$

$$\left. \begin{array}{l} (A - \lambda_i I)u_1 = 0 \\ (A - \lambda_i I)u_2 = u_1 \\ (A - \lambda_i I)u_3 = u_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$Au_1 = \lambda_i u_1$$

$$Au_2 = u_1 + \lambda_i u_2$$

$$Au_3 = u_2 + \lambda_i u_3$$

$$\left. \begin{array}{l} Au_1 = \lambda_i u_1 \\ Au_2 = u_1 + \lambda_i u_2 \\ Au_3 = u_2 + \lambda_i u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow A \underbrace{[u_1 \ u_2 \ u_3]}_M = [Au_1 \ Au_2 \ Au_3]$$

$$= [\lambda_i u_1 \ u_1 + \lambda_i u_2 \ u_2 + \lambda_i u_3]$$

$$= [u_1 \ u_2 \ u_3] \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot M = M \cdot J}$$

$$A = M J M^{-1}$$

στοιχείωδης πίνακας Jordan

Κανονική μορφή Jordan

$\forall A_{n \times n} \exists$ αναστρέψιμος $M_{n \times n}$:

$$A = M J M^{-1}$$

όπου J καλείται πίνακας Jordan και είναι της μορφής

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}$$

με $J_i = \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{i\tau}) = \begin{pmatrix} J_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i\tau} \end{pmatrix}$

Jordan block

όπου $J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & \ddots \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}, \lambda_i \in \sigma(A)$

στοιχείωδης πίνακας Jordan

π.χ.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

→ J_1

→ J_2

→ $J_{3,1}$

→ $J_{3,2}$

→ J_4

→ κανονική μορφή Jordan

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4)$$

↓ ↓ ↓
στοιχείωδης Jordan
πν αριθμοί σων $\lambda_i = 2$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2x2

3x3

1x1

- Η κανονική μορφή Jordan είναι μοναδική
- ο πίνακας ομοιότητας M έχει πάντα τα γραμ. ανεξ. γιν. ιδιοδ. του A όλων των αντισιδων

Τρόπος κατασκευής μορφής Jordan

$$A_{n \times n} \text{ με χαρ. πολ. } p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$$

$$\text{και ελαχ. πολ. } m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{v_s}$$

$$(v_i \leq p_i)$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ είναι
όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A .

- $S = \# \text{ διαφορετικών ιδιοτιμών} \Rightarrow \# \text{ Jordan block}$
 $1_1, 1_2, \dots, 1_s$
ένα για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$

- αλγ. πολ(λ_i) = $p_i \Rightarrow$ διάσταση των J_i
 $p_i \times p_i$

- v_i = ευθείες των όρων $\lambda - \lambda_i$ στο $m_A(\lambda) \Rightarrow$ διάσταση των μεγαλύτερων
στοιχειωδών υποπινάκων Jordan
που συμβαίνει στον λ_i

- γεωμ. πολ(λ_i) $\Rightarrow$ $\#$ στοιχειωδών υποπινάκων Jordan
δηλ. $\#$ αλυσίδων γεν. ιδιοδ.

$\pi \times \pi$ $A_{10 \times 10}$ με $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^5 (\lambda - 2)^3 \lambda^2$

και $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3 (\lambda - 2)^3 \lambda^2$

Πιθανές μορφές Jordan ?

ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$ με αλγ. πολ(3) = 5
αλγ. πολ(2) = 3, αλγ. πολ(0) = 2

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ποια είναι η κανονική μορφή Jordan του A ?