

12/3/2025

## Παραγοντοποίηση πίνακα

- χαρακτηριστικό πολυώνυμο των  $A_{n \times n}$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_k &= n \\ \text{όπου } \lambda_i &\in \mathbb{C}, i=1, \dots, k \quad \text{διακεκριμένες ιδιοτιμές} \\ &\text{του } A \end{aligned}$$

- $p_i \Rightarrow$  αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$

- $V(\lambda_i)$  ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$   
= σύνολο των γραμ. ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων  
των  $A$  που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$

$$V(\lambda_i) = \{ x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 : Ax = \lambda_i x \}$$

$$\begin{aligned} \dim V(\lambda_i) &\Rightarrow \text{γεωμετρική πολ/τα της ιδιοτιμής } \lambda_i \\ (\text{dimension}) &= \text{πλήθος γραμ. ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων} \end{aligned}$$

$$\dim V(\lambda_i) = n - \text{rank}(A - \lambda_i I)$$

$$\triangleright 1 \leq \text{γεωμετρική πολ/τα} \leq \text{αλγεβρική πολ/τα}$$

## Ιδιότητες

$$1) \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n a_0 \quad \rightarrow \text{σταθερός όρος του } p_A(\lambda)$$

$$2) \text{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

trace  $A$  = ίχνος του  $A$  = άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του

$$3) \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \text{όλες οι ιδιοτιμές του } A \text{ μη μηδενικές}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} a_0 \neq 0$$

4) Αν  $(\lambda, x)$  ιδιοποδά των  $A \Rightarrow$

$$(\lambda^k, x) \text{ ιδιοποδά των } A^k$$

5) Αν  $A$  θετικά ορισμένος  $(A > 0) \Leftrightarrow$

$$A \text{ ερμιτιανός } (A = A^*) \text{ και } x^* A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \{0\}$$

$\Leftrightarrow$  όλες οι ιδιοτιμές των  $A$  είναι θετικές

6) Αν  $A$  θετικά ημιορισμένος  $(A \geq 0) \Leftrightarrow$

$$A \text{ ερμιτιανός } (A = A^*) \text{ και } x^* A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

$\Leftrightarrow$  οι ιδιοτιμές  $\lambda_i \geq 0, i=1, \dots, n$

7) Θεώρημα Cayley-Hamilton

Αν  $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$  είναι το  
χαρ. πολ. των  $A$

$$\Rightarrow P_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 = \mathbf{0}$$

8) Αν  $\exists A^{-1} \Rightarrow$

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I)$$

$$\text{όπου } P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

## 1<sup>η</sup> παραγοντοποίηση : Θεώρημα Schur

$\forall A_{n \times n} \exists$  ορθομοναδιαίος πίνακας  $U_{n \times n} :$

$$A = U T U^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

όπου  $T$  αν τριγωνικός  
και  $\lambda_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, n$  οι ιδιοτιμές του  $A$ .

- $U$  ορθομοναδιαίος  $\Leftrightarrow U U^* = U^* U = I_n$   
 $\Leftrightarrow$  οι στήλες του  $U$   
είναι κάθετα διανύσματα  
μήκους 1  
 $\Leftrightarrow U^{-1} = U^*$

## 2<sup>η</sup> παραγοντοποίηση : Διαγωνοποίηση πίνακα

Αν  $A_{n \times n}$  έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα  $x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow$

$\exists$  αναστρέψιμος  $P_{n \times n} :$

$$A = P D P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

όπου  $\lambda_i \in \sigma(A), i=1, 2, \dots, n$

και  $P = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$

- Αν  $A$  μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή  
 $\Rightarrow A$  καλείται διαγωνοποιήσιμος
- $P \rightsquigarrow$  πίνακας ομοιότητας

• Αν ο  $A_{n \times n}$  έχει  $n$  διακεκριμένες ιδιοτιμές  
 $\Rightarrow A$  διαγωνοποιείται

► Αν  $A$  διαγωνοποιείται  $\Rightarrow$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

► Αν  $A$  διαγωνοποιήσιμος και αναστρέψιμος

$$\Rightarrow A^{-k} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{-k} & & 0 \\ & \lambda_2^{-k} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^{-k} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Άσκηση

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = A^*$$

$$(A^* = \overline{A}^T)$$

$A$ 厄米τιανός

(βλ. π. 2<sup>η</sup> διάλεξη 2025)

$$\sigma(A) = \{0, 3\} \leadsto \text{φάσμα (δωδ. ιδιοτιμές του } A)$$

$$V(0) = \{ \mu \overbrace{(1+i, 1)}^{u_1} : \mu \neq 0 \}$$

$$V(3) = \{ k \overbrace{(1, -1+i)}^{u_2} : k \neq 0 \}$$

2 διαφορετικές ιδιοτιμές  $\Rightarrow A$  διαγωνοποιείται

$$\Rightarrow A = P D P^{-1} = P \begin{pmatrix} \textcircled{0} & 0 \\ 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ όπου}$$

$$P = (\textcircled{u_1} \textcircled{u_2}) = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix}$$

Άσκηση

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A^{2025} + A^{-5} = ?}$$

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda) &= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1 \\ &= (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \pm i, \lambda = 1$$

3 Διαφορετικές ιδιοτιμές  $\Rightarrow$  A διαγωνοποιήσιμος

$$A = P D P^{-1} = P \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \bullet A^{2025} &= P D^{2025} P^{-1} = P \begin{pmatrix} i^{2025} & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2025} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

$$i^2 = -1 \quad / \quad i^{2025} = i^{2024} \cdot i = (i^2)^{1012} \cdot i = i$$

$$(-i)^{2025} = -i^{2025} = -i$$

$$\bullet 0 \notin \sigma(A) \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \exists A^{-5}$$

$$A^{-5} = P \begin{pmatrix} i^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{-5} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^4 \cdot i} = \frac{1(-i)}{-i \cdot i} = -i$$

$$(-i)^{-5} = -i^{-5} = i$$

$$z \bar{z} = |z|^2$$

$$A^{2025} + A^{-5} = P \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \left[ \begin{pmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & & \\ & i & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$P = (x_1 \ x_2 \ x_3) \rightsquigarrow$  βάζει τα ιδιοδιανύσματα  
των ιδιοτιμών  $i, -i, 1$  της  $A$

## Φασματικό Θεώρημα

Αν  $A_{n \times n}$  συμμετρικός (αν. ερμιτιανός)  $\Rightarrow$

$\exists U_{n \times n}$  ορθογώνιος (αν. ορθομονοδιαίος) :  
 $UU^T = U^T U = I_n$   $UU^* = U^* U = I$

$$A = U D U^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

όπω  $\lambda_i \in \sigma(A)$

και  $U$  έχει στήλες τα ορθομονοδικά  
ιδιοδιανύσματα των  $A$

δηλ.  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

π.χ. Από προηγούμενη  
άσκηση

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

όπω  $P = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix}$

εφόσον  $A$  ερμιτιανός  $\Rightarrow$  από φασματικό θεώρημα

$$A = U D U^* = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*$$

$U = P$  ?

$$\begin{aligned} P P^* &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i^2+1 & 1+i-1-i \\ 1-i-1+i & 1+(-1)^2-i^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I \end{aligned}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad PP^* = 3I \Rightarrow P \text{ έχει ορθοκανονικό}$$

$$\frac{1}{3} PP^* = I \Rightarrow \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} P \right)}_Q \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} P^* \right)}_{Q^*} = I$$

$\Downarrow$   
 $P^{-1} = \frac{1}{3} P^*$

$$A = Q D Q^* = \frac{1}{\sqrt{3}} P \cdot D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} P^*$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $v_1 \qquad \qquad v_2$

$v_1, v_2$  ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα των  $A$

$$\|v_1\|^2 = v_1 \cdot v_1 = \left( \frac{1+i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left( \frac{1+i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1-i^2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2-i^2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2 \\ x \circ y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 \end{array} \right.$$

ομοία  $v_2 \circ v_2 = 1, \quad v_1 \circ v_2 = v_2 \circ v_1 = 0$

$$v \circ v = \|v\|^2 \leadsto \text{νόρμα 2 ή Ευκλείδεια νόρμα}$$