

5/3/2025

Θεωρία Χαρακτηριστικών Μεγεθών Ιδιότητες & ιδιοδιανύσματα πίνακα

- $Ax = \lambda x$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ή $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
εύρεση $\lambda \in \mathbb{C}$: για κάποιο $x \in \mathbb{C}^n$ ώστε $Ax = \lambda x$
 $x \neq 0$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{ομογενές σύστημα}$$

Έστω $B = A - \lambda I$

$$Bx = 0 \quad (\Sigma)$$

$$\det B \neq 0$$

$\Downarrow$

υπάρχει ο B^{-1}

$$\underbrace{B^{-1}B}x = B^{-1} \cdot 0$$

$$Ix = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

μοναδική λύση

$$\det B = 0$$

$\Downarrow$

το (Σ) έχει άπειρες λύσεις $x \neq 0$

- Ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \Leftrightarrow$
 $\det(A - \lambda I) = 0 \leadsto$ χαρακτηριστική εξίσωση
 $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \leadsto$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

- Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του A καλείται
φάσμα του A και συμβολίζεται $\sigma(A)$, δηλ.

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0 \}$$

- Από θεμελιώδες θεώρημα της ανάλυσης

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

έχει n ρίζες λ_i στο $\mathbb{C}$

► $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ ώστε $Ax = \lambda x$ ονομάζεται ιδιοδιάνομος των A πιν αριθμοί στην ιδιοτιμή λ .

► (λ, x) καλούνται χαρακτηριστικά μέγεθος ή ιδιοποσά των A .

π.χ. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μέγεθος των A

• Έρευνα ιδιοτιμών : $\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot (-1) = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 \\ = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \searrow \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\sigma(A) = \{2, 3\}$$

• Έρευνα ιδιοδιανωμάτων

$$\triangleright \lambda_1 = 2 : (A - \lambda_1 I)x = 0 \Rightarrow (A - 2I)x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{x \neq 0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$x = (x_1, x_2) = (2x_2, x_2) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ = x_2 (2, 1)$$

Ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$

$$V(2) = \{ \mu (2, 1) : \mu \neq 0 \} \leadsto \text{σύνολο όλων των} \\ \text{ιδιοδιανωμάτων πιν} \\ \text{αριθμοί στην ιδιοτιμή} \\ \lambda_1 = 2$$

$$\triangleright \text{για } \lambda_2 = 3 : (A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = x_1$$

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, x_1) = x_1(1, 1) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ιδιοχώρος της $\lambda_2 = 3$

$$V(3) = \{ k(1, 1) : k \neq 0 \}$$

Παρατηρήσεις

1) $\det(A^T) = \det(A) \quad (\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I))$

2) $\det(A - \lambda I) = \det(-(\lambda I - A)) = (-1)^n \det(\lambda I - A)$
 $A_{n \times n}$

3) Οι ιδιοτιμές ενός διαγωνίου πίνακα ισούται με τα διαγώνια στοιχεία του.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1, -1, 0, 2 ιδιοτιμές του A

4) Οι ιδιοτιμές άνω (κάτω) τριγωνικών πίνακα ισούται με τα διαγώνια στοιχεία

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ άνω τριγωνικός

$\rightarrow$ ιδιοτιμές

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ κάτω τριγωνικός

$\rightarrow$ ιδιοτιμές

Σημαντική παρατήρηση

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$$

$A_{n \times n}$

$$\iff \lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\iff A - \lambda I \text{ μη αναστρέψιμος}$$

$$\iff \text{rank}(A - \lambda I) < n$$

↓
βαθμός πίνακα = πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στήλών του πίνακα.

- $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ καλούνται γραμμικά ανεξάρτητα

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A^T \rightsquigarrow \text{συμμετρικός}$$

3×3

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του A

- εύρεση ιδιοτιμών :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-2 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda) [-\lambda(3-\lambda) - 4] - 2 [2(3-\lambda) - 8] + 4 (4 + 4\lambda)$$

$$= (3-\lambda) (-3\lambda + \lambda^2 - 4) - 2 (6 - 2\lambda - 8) + 4 \cdot 4 (1 + \lambda)$$

$$= -9\lambda + 3\lambda^2 - 12 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 16 + 16\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

$$\bullet -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 6 & 15 & 8 & (-1) \\ \downarrow & 1 & -7 & -8 & \\ -1 & 7 & 8 & 0 & \end{array}$$

Σχήμα Horner

$$\phi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ (διπλή)} \\ \lambda = 8$$

$$\sigma(A) = \{-1, -1, 8\}$$

• αλγεβρική πολ/τα ως ιδιοτιμή $\lambda = -1$ είναι 2
εξόσον είναι διπλή ρίζα του $\phi_A(\lambda)$

• αλγεβρική πολ/τα ως ιδιοτιμή $\lambda = 8$ είναι 1
εξόσον είναι απλή ρίζα του $\phi_A(\lambda)$

► Εύρεση Γενικευμένων

$$\text{i)} \text{ για } \lambda_1 = -1 : (A+I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) = (x_1, -2x_1 - 2x_3, x_3) \\ &= (x_1, -2x_1, 0) + (0, -2x_3, x_3) \\ &= x_1(1, -2, 0) + x_3(0, -2, 1), \quad \forall x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ όχι και τα δύο μηδέν} \end{aligned}$$

εξόσον $(1, -2, 0)$, $(0, -2, 1)$ είναι γραμ. ανεξάρτητα *

$$V(-1) = \left\{ k(1, -2, 0) + \mu(0, -2, 1) : k, \mu \in \mathbb{R} \text{ όχι και οι 2 μηδέν} \right\}$$

έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας

$$\textcircled{A} \lambda_1(1, -2, 0) + \lambda_2(0, -2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1, -2\lambda_1, 0) + (0, -2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1, -2\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$ii) \text{ για } \lambda_2 = 8 \Rightarrow (A - 8I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \quad (1) \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \quad (2) \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \quad (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1)-(3) \Rightarrow -9x_1 + 7x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 \\ (2) \stackrel{x_1=x_3}{\Rightarrow} 4x_1 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \end{array}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_2, 2x_2) = x_2(2, 1, 2)$$

$$V(8) = \{ \mu(2, 1, 2) : \mu \neq 0 \}$$

• Ιδιοτιμές του A : $\sigma(A) = \{-1, -1, 8\}$

• Ιδιοδιανύσματα του A : $u_1 = (1, -2, 0)$, $u_2 = (0, -2, 1)$, $u_3 = (2, 1, 2)$

Είναι
εσωτερικό
γινόμενο

$$\rightarrow \begin{cases} u_2 \cdot u_3 = (0, -2, 1) \cdot (2, 1, 2) \end{cases}$$

$$= 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow u_2 \perp u_3 \quad (u_2, u_3 \text{ αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές } \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8)$$

$$u_1 \cdot u_3 = (1, -2, 0) \cdot (2, 1, 2)$$

$$= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 \perp u_3$$

$$u_1 \cdot u_2 = 4 \neq 0 \Rightarrow u_1 \not\perp u_2 \quad (\text{αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή } \lambda_1 = \lambda_2 = -1)$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A είναι συμμετρικός ($A = A^T$)

$\Rightarrow$ i) οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί

ii) τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

► Τα παραπάνω ισχύουν και για ερμιτιανούς πίνακες.

► Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A ερμιτιανός $\Leftrightarrow A = \overline{A}^T = A^*$

Πενδυκίση : $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$

$$\overline{z} = x - iy$$

π.χ., $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}$, $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1+i} \\ \overline{-1+i} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$
 $A \neq A^*$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}$
 $A = A^* \leadsto A$ ερμιτιανός

• $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1-i \\ -1+i & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-1-i)(-1+i)$
 $= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - ((-1)^2 - i^2)$
 $= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2$
 $= \lambda^2 - 3\lambda$
 $P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow$
 $\lambda = 0, \lambda = 3$

• για $\lambda = 0$: $(A - \lambda I)x = Ax = 0 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + (-1-i)x_2 = 0 \\ (-1+i)x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{\overline{z}z = |z|^2}$

$x_1 = (1+i)x_2$

$x = (x_1, x_2) = ((1+i)x_2, x_2) = x_2(1+i, 1)$

$V(0) = \left\{ \mu \underbrace{(1+i, 1)}_{u_1} : \mu \neq 0 \right\}$

• για $\lambda = 3$: $(A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1-i \\ -1+i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (-1+i)x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = (-1+i)x_1$

$x = (x_1, x_2) = (x_1, (-1+i)x_1) = x_1(1, -1+i)$

$V(3) = \left\{ k \underbrace{(1, -1+i)}_{u_2} : k \neq 0 \right\}$

$u_1 \cdot u_2 = (1+i, 1) \cdot (1, -1+i) = (1+i)\overline{1} + 1 \cdot \overline{(-1+i)} = 1+i-1-i = 0$

επειδή εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}$

$\Rightarrow u_1 \perp u_2$