

Ιδιάζουσα Παραγοντοποίηση Πίνακα (SVD)

ΔΠΜΣ “Πληροφορική και Υπολογιστική Βιοϊατρική”

Δρ. Αρετάκη Αικατερίνη

Λαμία, 2025

- 1 Παραγοντοποίηση SVD
 - Βασικές ιδιότητες
 - Οικονομική SVD
 - Γεωμετρική ερμηνεία της SVD

- 2 Εφαρμογές της SVD
 - Προσέγγιση πίνακα
 - Συμπίεση εικόνας

- 3 Ανάλυση SVD στο Matlab

Ιδιάζουσα παραγοντοποίηση (SVD)

Θεώρημα

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \sigma_n & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = USV^T \quad (1)$$

- Η ισότητα (1) είναι γνωστή ως ιδιάζουσα παραγοντοποίηση του πίνακα A (*Singular Value Decomposition* - SVD).
- Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι οι *ιδιάζουσες τιμές* του $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ σε φθίνουσα διάταξη, δηλαδή $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Απόδειξη της SVD

Οι πίνακες $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι, αφού για κάθε $\mathbf{x} \neq 0$ ισχύει

$$\mathbf{x}A^T A \mathbf{x} = \|A\mathbf{x}\|^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{x}AA^T \mathbf{x} = \|A^T \mathbf{x}\|^2 \geq 0$$

Επίσης, οι $A^T A$ και AA^T έχουν τις ίδιες θετικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ και με την ίδια γεωμετρική πολλαπλότητα, εφόσον

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A) = r \leq n \leq m$$

Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$A^T A = V^T D V, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Οι τιμές $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, r$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A .

Απόδειξη της SVD

Ο ορθογώνιος πίνακας $V = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_r \ \mathbf{v}_{r+1} \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ έχει στήλες τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ του $A^T A$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ και τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ (πολλαπλότητας $n - r$).

Ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} A \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, r$. Αυτά είναι:

1. ιδιοδιανύσματα του AA^T :

$$\begin{aligned} A^T \mathbf{u}_i &= \sigma_i^{-1} A^T A \mathbf{v}_i = \sigma_i^{-1} \sigma_i^2 \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i \\ AA^T \mathbf{u}_i &= \sigma_i A \mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

2. ορθοκανονικά:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j &= \left(\sigma_i^{-1} A \mathbf{v}_i \right)^T \left(\sigma_j^{-1} A \mathbf{v}_j \right) = (\sigma_i \sigma_j)^{-1} \mathbf{v}_i^T (A^T A \mathbf{v}_j) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \mathbf{v}_i^T (\sigma_j^2 \mathbf{v}_j) = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Απόδειξη της SVD

Αν θεωρήσουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_r \quad \mathbf{u}_{r+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m],$$

όπου $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} A \mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, r$ και $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του AA^T αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$, τότε

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T A \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1^T A \mathbf{v}_r & \cdots & \mathbf{u}_1^T A \mathbf{v}_n \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{u}_r^T A \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r^T A \mathbf{v}_r & \cdots & \mathbf{u}_r^T A \mathbf{v}_n \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{u}_m^T A \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m^T A \mathbf{v}_r & \cdots & \mathbf{u}_m^T A \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \sigma_r \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = S$$

Άρα η ισότητα αποδείχθηκε.

Βασικές ιδιότητες

Αν σ είναι ιδιάζουσα τιμή του $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε:

1. υπάρχουν ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ των πινάκων AA^T και $A^T A$, αντίστοιχα της ιδιοτιμής σ^2 τέτοια ώστε

$$A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u} \quad \text{και} \quad A^T\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}.$$

Τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ονομάζονται *αριστερά-ιδιάζοντα* και *δεξιά-ιδιάζοντα* διανύσματα του σ , αντίστοιχα.

2. αν $\mathbf{v}_i$ ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $A^T A$, τότε $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} A\mathbf{v}_i$ είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του AA^T .

Ιδιάζουσα παραγοντοποίηση (SVD)

Από την SVD παραγοντοποίηση του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} AA^T &= USV^T \cdot VS^T U = U(SS^T)U^T \\ A^T A &= VS^T U \cdot USV^T = V(S^T S)V^T \end{aligned}$$

Ως συμπέρασμα έχουμε ότι:

- Οι στήλες του U (αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots, m$) είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$.
- Οι στήλες του V (δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$) είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Οι ιδιοτιμές των συμμετρικών πινάκων AA^T και $A^T A$ είναι τα τετράγωνα των ιδιζουσών τιμών $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ του $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Οικονομική SVD

- Μία δεύτερη έκδοση της SVD, η οποία εξοικονομεί μνήμη στον υπολογιστή, είναι η “SVD *οικονομικού μεγέθους*”:

$$A = \hat{U} \hat{S} V^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Στην περίπτωση αυτή υπολογίζονται μόνο οι n πρώτες στήλες του U και οι n πρώτες γραμμές του S στην σχέση (1), ενώ ο V παραμένει διάστασης $n \times n$.
- Αν r είναι ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιζουσών τιμών του A , τότε ο βαθμός του A ισούται με r .

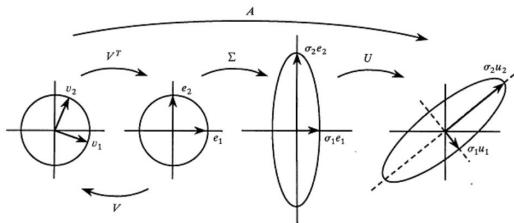
Γεωμετρική ερμηνεία της SVD

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = U \cdot S \cdot V^T \mathbf{x}.$$

Η απεικόνιση f μέσω της SVD του πίνακα A μπορεί να ερμηνευθεί ως μία σύνθεση τριών πράξεων:

1. αρχική περιστροφή μέσω του πίνακα V^T
2. αλλαγή κλίμακας κατά μήκος των αξόνων μέσω των ιδιάζουσων τιμών $\sigma_i > 0$
3. τελική περιστροφή μέσω του πίνακα U



Άσκηση 1

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση SVD του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Θα εκφράσουμε τον πίνακα στη μορφή $A = USV^T$.

1. Ο A είναι 2×2 , άρα οι πίνακες U, S και V θα είναι επίσης 2×2 .
2. Οι συμμετρικοί πίνακες

$$A^T A = \begin{bmatrix} 34 & -11 \\ -11 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 17 & 13 \end{bmatrix}$$

έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 37.7003$ και $\lambda_2 = 1.2997$,
οπότε $\sigma_1 = \sqrt{37.7003} = 6.1401$ και $\sigma_2 = \sqrt{1.2997} = 1.1401$ είναι οι
ιδιάζουσες τιμές του A . Άρα

$$S = \begin{bmatrix} 6.1401 & 0 \\ 0 & 1.1401 \end{bmatrix}$$

3. Τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = [-0.9478 \quad 0.3188]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-0.3188 \quad -0.9478]^T$$

είναι ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A^T A$ αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_1 = 37.7003$ και $\lambda_2 = 1.2997$.

4. Τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \mathbf{v}_1 = [-0.8238 \quad -0.5669]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \mathbf{v}_2 = [-0.5669 \quad 0.8238]^T$$

είναι ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα AA^T αντίστοιχα των ιδιοτιμών λ_1 και λ_2 .

5. Σημειώνοντας $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]$ και $V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$, η παραγοντοποίηση έχει ως εξής:

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} -0.8238 & -0.5669 \\ -0.5669 & 0.8238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.1401 & 0 \\ 0 & 1.1401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.9478 & -0.3188 \\ 0.3188 & -0.9478 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση SVD του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Θα εκφράσουμε τον πίνακα στη μορφή $A = USV^T$.

1. Ο $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ έχει $\text{rank}(A) = 2$, άρα $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
2. Οι συμμετρικοί πίνακες

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$, οπότε $\sigma_1 = \sqrt{2}$ και $\sigma_2 = 1$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A . Άρα

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του $A^T A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$ είναι

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ 0]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [0 \ 1]^T$$

4. Τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του $AA^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 είναι

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$$

5. Το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}_3$ του $AA^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ που αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_3 = 0$ και είναι κάθετο στα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ είναι

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ -1]^T$$

6. Σημειώνοντας $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$ και $V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$, έχουμε:

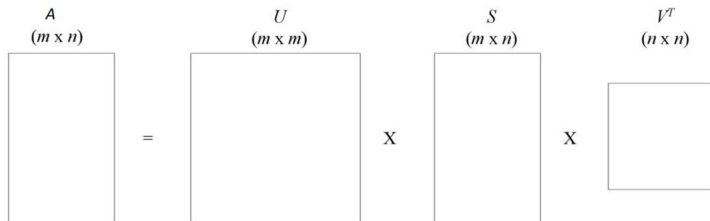
$$A = USV^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.7071 & 0 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Αν θεωρήσουμε τους πίνακες $\hat{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]$ και $\hat{S} = \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
έχουμε την οικονομική SVD

$$A = \hat{U}\hat{S}V^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.7071 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές της SVD

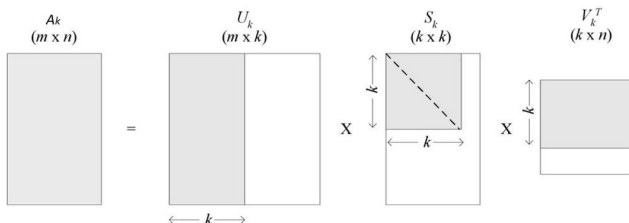
- Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της SVD ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ βαθμού r είναι η προσέγγιση του A από πίνακα A_k με βαθμό $k \leq r$.
- Όπως έχει αναφερθεί, ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιζουσών τιμών του A που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του S , ισούται με το βαθμό του πίνακα A .

$$\begin{array}{c} A \\ (m \times n) \end{array} = \begin{array}{c} U \\ (m \times m) \end{array} \times \begin{array}{c} S \\ (m \times n) \end{array} \times \begin{array}{c} V^T \\ (n \times n) \end{array}$$


Προσέγγιση πίνακα

Επιλέγουμε έναν ακέραιο $k \leq r = \text{rank}(A)$ και εκτελούμε τις ενέργειες:

1. διατηρούμε τις k μεγαλύτερες ιδιάζουσες τιμές του A και θέτουμε τις υπόλοιπες $r - k$ ίσες με μηδέν στον πίνακα S ,
2. διατηρούμε τις πρώτες k στήλες του πίνακα U και θέτουμε τις υπόλοιπες $n - r$ στήλες σε μηδέν, και τέλος
3. διατηρούμε τις πρώτες k γραμμές του πίνακα V^T και θέτουμε τις υπόλοιπες $m - r$ στήλες σε μηδέν.



Προσέγγιση πίνακα

Συνεπώς, προκύπτουν νέοι πίνακες $U_k \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $S_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $V_k \in \mathbb{R}^{k \times n}$:

$$A_k = U_k S_k V_k^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Τι σχέση έχουν οι πίνακες A και A_k ;

- Οι πίνακες A και A_k έχουν τις ίδιες διαστάσεις $m \times n$. Ωστόσο,

$$\text{rank}(A_k) = k, \quad \text{rank}(A) = r, \quad \text{όπου } k \leq r$$

- Αν $k = r$, τότε προφανώς $A_k = A$.
- Αν $k < r$, τότε κατασκευάζεται πίνακας A_k με τη μικρότερη δυνατή απόσταση από τον A ως προς τη νόρμα Frobenius, δηλαδή:

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A[i, j] - A_k[i, j]|^2} \rightarrow \min$$

Προσέγγιση πίνακα

Αν αναλύσουμε τη σχέση $A_k = U_k S_k V_k^T$ με τη μορφή αθροίσματος μέσω του πολλαπλασιασμού πινάκων, έχουμε:

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T. \quad (3)$$

- Κάθε γινόμενο $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ είναι ένας πίνακας A_i διαστάσεων $m \times n$, όπως ακριβώς και ο A .
- Κάθε πίνακας A_i συμμετέχει στη σύνθεση του A με κάποιο βάρος που προσδιορίζεται από την ιδιάζουσα τιμή σ_i .
- Εφόσον τα $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ είναι μοναδιαία διανύσματα, η επίδραση του A_i καθορίζεται από τον παράγοντα σ_i . Επομένως, όσο μεγαλύτερη η τιμή του σ_i τόσο μεγαλύτερη και η συμμετοχή του A_i στη σύνθεση του αρχικού πίνακα A .
- Αν κρατήσουμε τις k μεγαλύτερες ιδιάζουσες τιμές και θέσουμε τις υπόλοιπες μηδέν, θα έχουμε μία προσέγγιση A_k του A , η ποιότητα της οποίας εξαρτάται από το k και τις σ_1 έως σ_k .

Συμπύεση εικόνας

- Μια εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα δεδομένων με πληροφορίες για την απόχρωση της.
- Γκριζες εικόνες: ορθογώνια διάταξη από pixels σε κατακόρυφη και οριζόντια κατεύθυνση. Το χρώμα κάθε pixel ορίζει ένας ακέραιος μεταξύ 0 (μαύρο) και 255 (άσπρο), άρα $2^8 = 256$ διαφορετικές αποχρώσεις του γκρι.
- Έγχρωμες εικόνες (μοντέλο RGB): τρεις χρωματικές συνιστώσες (κόκκινο, πράσινο και μπλε), άρα συνολικά $(2^8)^3 = 2^{24} = 16.777.216$ χρωματικοί συνδυασμοί.
- Μια εικόνα που περιέχει 1000×1000 pixels αναπαρίσταται με έναν 1000×1000 πίνακα, δηλαδή 10^6 στοιχεία. Εφαρμόζοντας την SVD μπορούμε να προσεγγίσουμε τον αρχικό πίνακα και να πετύχουμε σημαντική μείωση του όγκου των δεδομένων.

Εφαρμογή της SVD στη συμπίεση γκριζών εικόνων

Original



Original B/N



r=5, 1.677% used



r=15, 5.031% used



r=25, 8.384% used



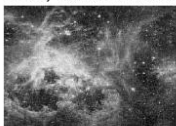
r=35, 11.738% used



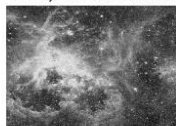
r=40, 13.415% used



r=50, 16.769% used



r=75, 25.153% used

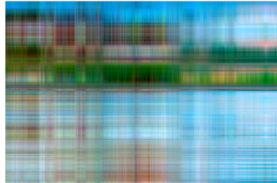


Συμπίεση έγχρωμων εικόνων

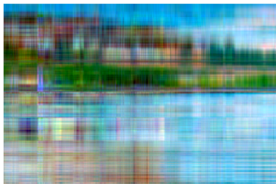
Original Image



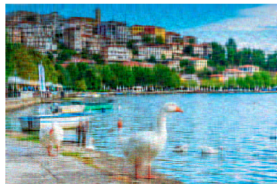
Rank 3



Rank 5



Rank 30



Ανάλυση SVD στο Matlab

Το Matlab επιστρέφει:

- την πλήρη ιδιάζουσα παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με την εντολή:

$$[U,S,V]=\text{svd}(A)$$

- την οικονομική εκδοχή της SVD με την εντολή:

$$[U,S,V]=\text{svd}(A,0).$$

- τις ιδιάζουσες τιμές του A με την εντολή:

$$s = \text{svd}(A)$$

- το άθροισμα $A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$ με την εντολή:

$$U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)'$$



Μ. Αδάμ.

Παραγοντοποιήσεις πίνακα-Θεωρία Perron Frobenius.
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2020.



Golub G. H., van Loan C. F.,

Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
Κωδικός βιβλίου στον Εύδοξο: 50657620.



Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος.

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα.
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, 2016.



M. Embree.

Matrix Methods for Computational Modeling and Data Analytics.
Virginia Tech Lecture Notes, 2019.



P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary.

Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering.

SIAM, 2006.



G.H. Golub, C.F. Van Loan.

Matrix Computations.

The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3d edition, 2012.



L. N. Trefethen, D. Bau.

Numerical Linear Algebra.

SIAM, Philadelphia, 1997.



Matlab Toolbox.

<http://www.mathworks.com>