Παραγοντοποίηση LU

ΔΠΜΣ Πληροφορικής και Υπολογιστικής Βιοϊατρικής

Δρ. Αρετάκη Αικατερίνη

Απρίλιος 2024

Παραγοντοποίηση LU χωρίς οδήγηση

Πρόταση

Αν σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *η διαδικασία απαλοιφής του Gauss βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών στοιχείων χωρίς να γίνουν εναλλαγές γραμμών (χωρίς οδήγηση), τότε ο πίνακας* A *μπορεί να γραφεί*

$$A = LU,$$

όπου

- L *είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στην κύρια διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές Gauss κάτω από τη διαγώνιο,*
- U *είναι άνω τριγωνικός με τους οδηγούς στη διαγώνιο, ο οποίος προκύπτει από την απαλοιφή.*

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση LU του πίνακα
$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 3r_1]{r_2 \to r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 5r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = LU$$

Εφαρμογές της LU

Η LU παραγοντοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί:

- Στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

  1. Επίλυση του $Ly = b$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση
  2. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση

- Στην παραγοντοποίηση Cholesky θετικά ορισμένου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = LL^T,$$

  όπου $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης LU να λυθεί το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

1. Παραγοντοποίηση LU:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 + 1r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

2. Επίλυση του $Ly = b$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 & = 2 \\ -y_1 + y_2 & = -4 \\ 2y_1 \qquad + y_3 & = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

3. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ \quad\;\; - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ \qquad\qquad\;\; 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

4. Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετάθεσης

- *Πίνακας μετάθεσης* P_{ij}: Προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα με εναλλαγή της i-γραμμής και j-γραμμής.
  - $P_{ij}A$: εναλλάσσει την i και τη j γραμμή του πίνακα A
  - AP_{ij}: εναλλάσσει την i και τη j στήλη του πίνακα A
  - Το γίνόμενο πινάκων μετάθεσης είναι επίσης πίνακας μετάθεσης.
- Π.χ.: Ο πίνακας μετάθεσης $P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ εναλλάσσει την 1η και 3η γραμμή ενός πίνακα A:

$$P_{13} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{blue}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} & \color{blue}{a_{33}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \color{blue}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} & \color{blue}{a_{13}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} P_{13} = \begin{bmatrix} \color{blue}{a_{13}} & a_{32} & \color{blue}{a_{11}} \\ \color{blue}{a_{23}} & a_{22} & \color{blue}{a_{21}} \\ \color{blue}{a_{33}} & a_{12} & \color{blue}{a_{31}} \end{bmatrix}$$

LU με μερική οδήγηση

Πρόταση

Αν σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *η διαδικασία απαλοιφής του Gauss βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών στοιχείων με εναλλαγές γραμμών, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης* P *ώστε*

$$PA = LU.$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση $PA = LU$ του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ με χρήση της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

1. Εναλλαγή γραμμών 1 και 3:

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Απαλοιφή Gauss:

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - \frac{1}{7} r_1]{r_2 \to r_2 - \frac{4}{7} r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix} \tag{1}$$

3. Εναλλαγή γραμμών 2 και 3 στο αριστερό και δεξί σκέλος της (1):

$$P_{23}P_{13}A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$PA = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

4. Απαλοιφή Gauss:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Τελική μορφή LU:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

Επίλυση συστήματος με $PA = LU$

Η LU παραγοντοποίηση με μερική οδήγηση μπορεί να εφαρμοστεί στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; PA = Pb \;\Leftrightarrow\; L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

1. Επίλυση του $Ly = Pb$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση
2. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση

Άσκηση 2

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης LU να λυθεί το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}$

1. Από την Άσκηση 1 προκύπτει η παραγοντοποίηση LU του πίνακα A:

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = LU$$

2. Επίλυση του $Ly = Pb$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 16 \\ y_2 &= 6 - \frac{1}{7}16 = \frac{26}{7} \\ y_3 &= 15 - \frac{4}{7}16 - \frac{1}{2}\frac{27}{7} = 4 \end{aligned}$$

3. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26/7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 &= \left(\frac{26}{7} - \frac{20}{7}\right)\frac{7}{6} = 1 \\ x_1 &= (16 - 8 - 1)\frac{1}{7} = 1 \end{aligned}$$

4. Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$