Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(F(x)\right)_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a),$$

όπου $F(x)$ είναι η παράγουσα συνάρτηση της f.

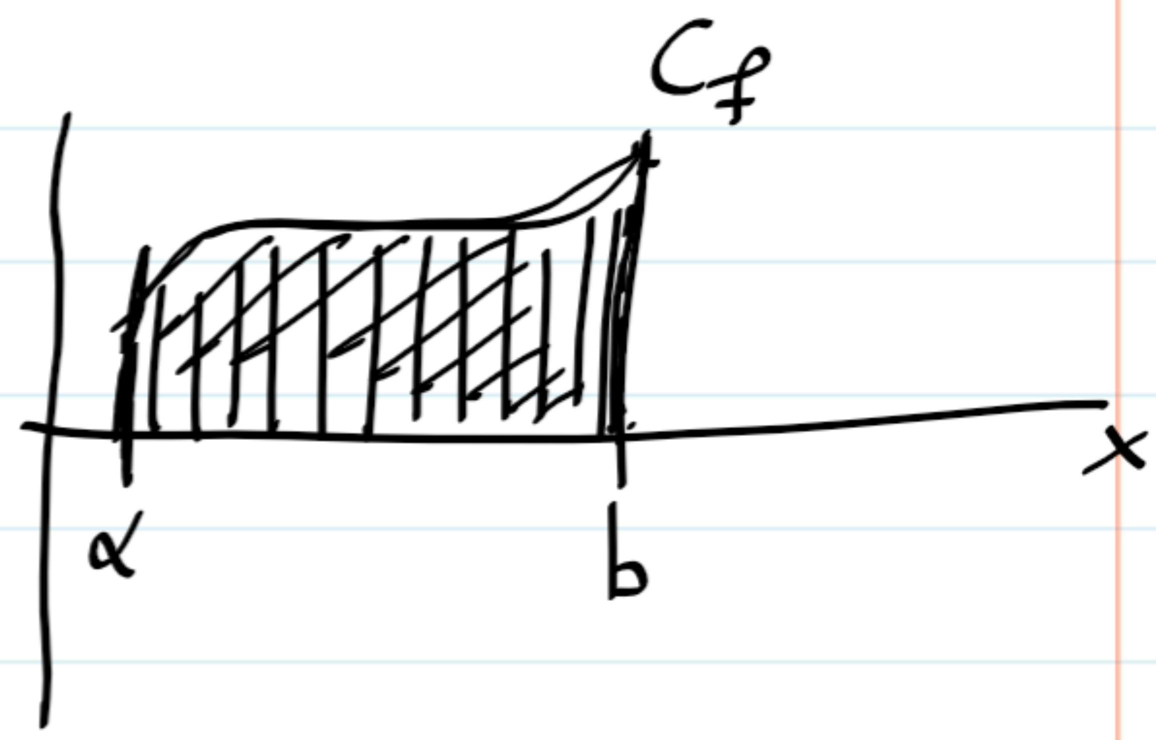
π.χ. $\int_{\alpha=2}^{b=4} x^7\,dx =$ $\qquad f(x)=x^7 \ / \mathbb{R}$

$\qquad x \in [2, 4]$

$$\left(\frac{x^8}{8}\right)_{x=2}^{x=4} =$$

$f(x)>0.$

$$\frac{4^8}{8} - \frac{2^8}{8} = \frac{1}{8}\left(4^8 - 2^8\right) \in R$$



Όταν $f(x)>0$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ ισούται με το εμβαδόν που δημιουργεί ο άξονας xx' οι άξονες $x=a$, $x=b$ και η γραφική παράσταση της $f(x)$.

Έτσι εύλογα δημιουργείται το ερώτημα: τα ορισμένα ολοκληρώματα μπορούν να προσεγγιστούν από τα εμβαδά σχημάτων;

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

1) $\int k f(x) + \lambda g(x)\, dx = k \int f(x) dx + \lambda \int g(x)\, dx, \quad k,\lambda \in \mathbb{R}$

2) $\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) dx$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$

Τυπολόγιο βασικών συναρτήσεων

$\rightarrow \int e^x dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad k \neq -1, \quad c \in \mathbb{R}$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Μέθοδος αντικατάστασης

$\int_1^7 e^{2x}\, dx \rightarrow \underline{u = 2x} \rightarrow \boxed{du = 2dx} \Rightarrow dx = du/2$

$\int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c\right)\Big|_{x=1}^{x=7}, \quad c \in \mathbb{R}$

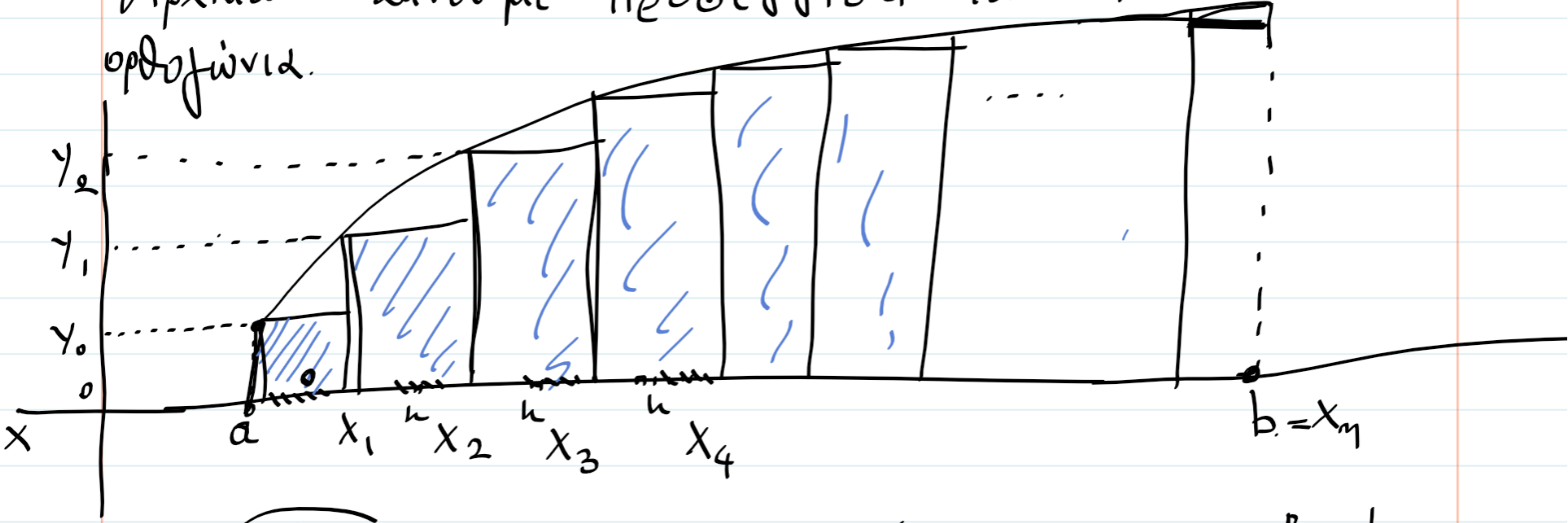
$$\int f(x)\,dx = F(x) \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι όλα τα ολοκληρώματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας ίδιο τύπο, τυπολόγιο και μεθοδολογία; Η απάντηση είναι αρνητική. π.χ $\int_0^1 e^{x^2}dx = ;$

Θεωρούμε μία $f(x)$ ορισμένη στο $[a,b]$ και συνεχή συνάρτηση.

Αρχικά κάνουμε προσέγγιση του εμβαδού με ορθογώνια.

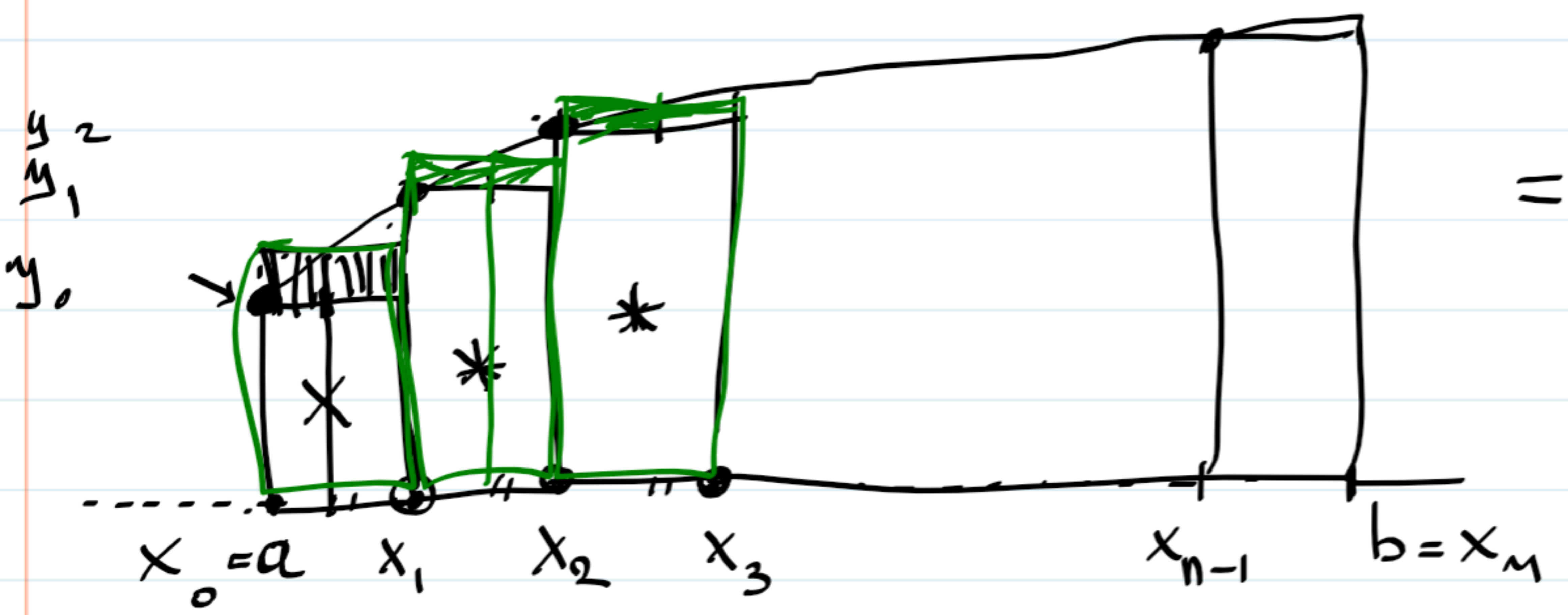


$$E_1 = \beta_1 \cdot \upsilon_1 = (x_1 - a)\cdot f(a) \qquad \text{βάση} \rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_2 = \beta_2 \cdot \upsilon_2 = (b - x_1)\cdot f(x_1) \qquad \text{μέρη}$$

$$\int_a^b f(x) \approx E_1 + E_2 = (x_1 - a)\cdot f(a) + (\cancel{b} - x_1)\cdot f(x_1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\cdot f(x_0) + h\cdot f(x_1) + h\, f(x_2) + \dots + h\cdot f(x_{n-1}) =$$



$$= h\cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$$

μηκος $\to h = \dfrac{b-a}{n}$,

$x_0 = a$

$x_1 = a+h$

$x_2 = x_1 + h = a+h+h = a+2h$

$x_3 = x_2 + h = a+2h+h = a+3h$

$\vdots$

$x_{n-1} = a + (n-1)\cdot h$

$x_n = b = a + nh$

$y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Μικρότερο σφάλμα

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\cdot \left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right)$$

Πχ

$$\int_{0=a}^{3=b} x^2\, dx$$

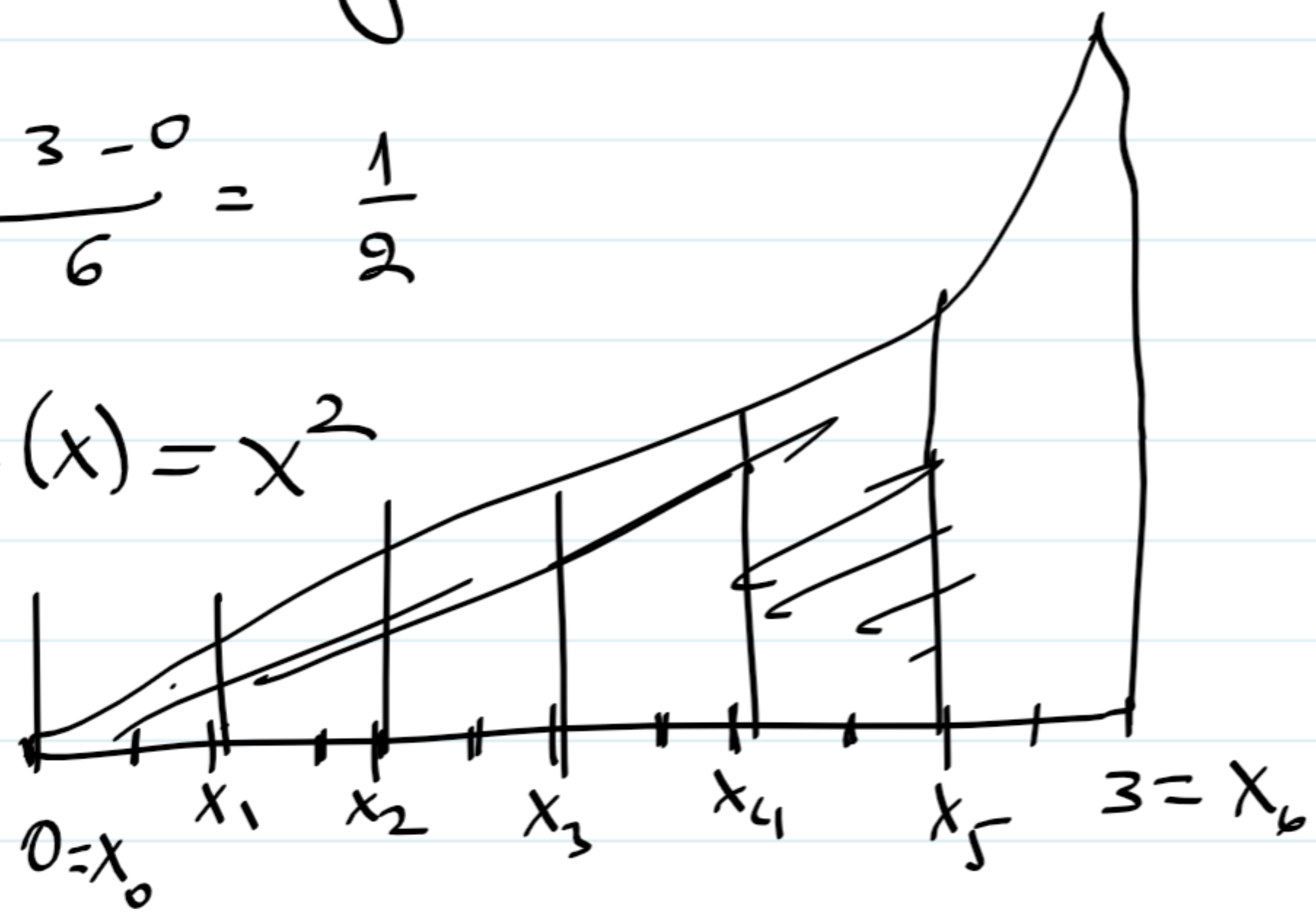
Σε $n = 6$ ορθογώνια.

Πραγματική τιμή:

$$\int_0^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 \text{ τμ}$$

$$h = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

$f(x) = x^2$



$x_0 = 0$

$x_1 = 1/2$

$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3/2 = 1.5$

$x_4 = 0 + 4 \cdot 1/2 = 2$

$x_5 = 2.5$

$x_6 = 3$

$y_i = f(x_i) = x_i^2$

$y_0 = f(x_0) = 0$ $\qquad$ $y_1 = f(x_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$y_2 = f(x_2) = 1^2 = 1$

$$y_3 = f(x_3) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$y_4 = f(x_4) = 2^2 = 4$$

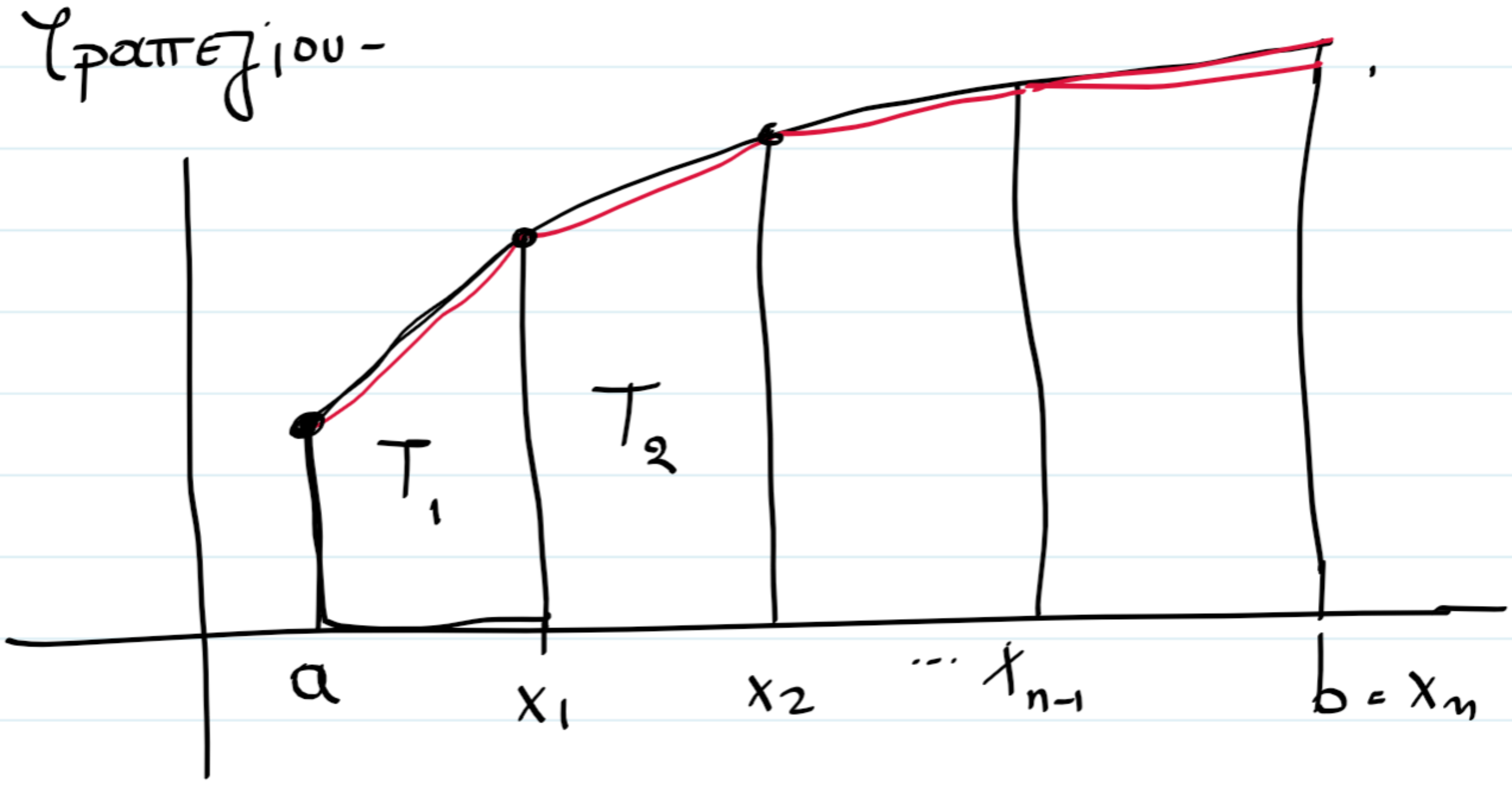
$$y_5 = f(x_5) = 2.5^2 = 6.25$$

$$y_6 = f(x_6) = f(b) = 9$$

$$\int_0^3 x^2 dx \cong \frac{1}{2}\left(0 + 0.25 + 1 + 2.25 + 4 + 6.25\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(3.5 + 10.25\right) = \underline{\underline{6.875}}$$

Τύπος Τραπεζίου -



$$y_i = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots,n, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

όπου n είναι το πλήθος των ορθογωνίων τραπεζίων.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$$

$$= \frac{f(a)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h$$

Τύπος τραπεζίου $\longrightarrow$ $\cong h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \right)$

π.χ. 2 $\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{0+9}{2} + \frac{1}{4} + 1 + 2.25 + 4 + 6.25 \right)$

$$= \frac{1}{2}(18,25) = 9.125$$

Το οποίο αποτελεί "πλησιέστερη" προσέγγιση στην πραγματική τιμή του ολοκληρώματος που είναι η τιμή 9.