

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Η θεωρία παιγνίων ή παιχιδιών ασχολείται με την αντιμετώπιση προβλημάτων όπου εμφανίζονται δύο ή περισσότερα άτομα με συγκρουόμενα συμφέροντα και κάθε άτομο επιδιώκει το καλύτερο δυνατό (βέλτιστο) σε βάρος των άλλων ανταγωνιστών. Το αποτέλεσμα τέτοιων παιχιδιών σε ορισμένες περιπτώσεις εξαρτάται μερικώς και από την τύχη, κυρίως όμως βασίζεται στην εφυπνάδα και την επιδεξιότητα των παιχτών. Εκτός από τα συνήθως γνωστά παιχνίδια όπως η πόκα, το τάβλι, το σκάκι κλπ. υπάρχουν πολλές ανταγωνιστικές καταστάσεις όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία παιγνίων, ιδιαίτερα σε περιοχές της επιχειρησιακής έρευνας, των οικονομικών και της πολιτικής και στρατιωτικής επιστήμης. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν η διαφορημική τακτική για ανταγωνιστικά προϊόντα και ο σχεδιασμός της πολεμικής στρατηγικής των αντιμαχόμενων στρατών.

Βασικές έννοιες και ορισμοί

Το κύριο ενδιαφέρον της θεωρίας παιχνιδιών είναι η μελέτη του επόμενου προβλήματος, το οποίο διατυπώθηκε από τον Von Neuman έναν από τους πρωτεργάτες της ανάπτυξης του πεδίου αυτού:

Αν n παίκτες $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ παίξουν δοθέν παιχνίδι Γ πώς πρέπει να παίξει ο κάθε παίκτης ώστε να πετύχει το πλέον ενοίκιο αποτέλεσμα για τον εαυτό του;

Στα περιβόητα παιχνίδια π.χ πόκερ, Τάρια κ.λ.π. το ποσό των χρημάτων που χάνουν οι «άωχοι» ή «αδέφια» παίκτες είναι ίσο με το ποσό που κερδίζουν οι υπόλοιποι.

Επομένως αν παραστήσουμε με U_i το αλγεβρικό όφελος του παίκτη Π_i (δηλαδή $U_i > 0$ αν ο παίκτης κερδίζει και $U_i < 0$ αν ο παίκτης χάνει) θα έχουμε την σχέση
$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0$$
 και για τον λόγο

αυτό παιχνίδια τέτοιου είδους λέγονται παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος

στην αντίθετη περίπτωση, όταν το αλγεβρικό άθροισμα των κερδών των n παικτών δεν είναι μηδέν, θα δούμε ότι έχουμε ένα παιχνίδι μη μηδενικού αθροίσματος. Ένα παράδειγμα για το τελευταίο μας δίνει το πόκερ, όπου ένα ποσοστό των κερδών δίνεται στο τέλος κάθε παρτίδας στο κατάστημα.

Όταν ένας παίκτης παίρνει μέρος σε ένα παιχνίδι θα πρέπει να εφαρμόσει κάποια τακτική, με σκοπό φυσικά να αποκομίσει όσο το δυνατόν περισσότερα ωφέλη. Ο τρόπος ενέργειας του παίκτη σε κάθε περίπτωση καθορίζει τη λεχόμενη στρατηγική του, εννοώντας με αυτό ένα κανόνα (ή σύνολο κανόνων) με βάση τον οποίο ο παίκτης θα αποφασίζει την κίνηση που θα κάνει σε κάθε δυνατή εξέλιξη του παιχνιδιού. Για παράδειγμα, έστω ότι μας έχουν προκαλέσει να παίξουμε μια παρτίδα σκάκι και θαφνικά ανακαλύπτουμε ότι δεν είναι δυνατόν να είμαστε παρόντες στο παιχνίδι

Ένας φίλος μας δέκεται να παίει στη θύκη (6491)
μας, επειδή όμως δεν χυαρίζε να παίζει καθό-
λου εκάκι θα πρέπει να του δοθούν οδηγίες
για το παιχνίδι. Για να είμαστε βίχουροι
ότι ο "αναπληρωτής-παίκτης" θα μπορέσει να
ανταπεφείλθει στις ανάγκες του παιχνιδιού
θα πρέπει οι οδηγίες μας να αναριθμούν
όλες τις δυνατές εφελιξείσ και για κάθε
στάδιο να υποδεικνύουν την κίνηση που θα
χίνει. Είναι φανερό στο παράδειγμα αυτό
ότι ο αριθμός των κινήσεων είναι αρκετά
μεγάλος και ο καθορισμός της στρατηγικής
πολύ δύσκολος όχι όμως αδύνατος, λόγω
της ανάπτυξης της τεχνολογίας (ηλεκτρονικοί
υπολογιστές).

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και παιχνίδια
όπου ο αριθμός των δυνατών ενεργειών
δεν είναι πεπερασμένος. Για παράδειγμα
ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο έρχεται
τυχαία μια χρονική στιγμή στο διάστημα
8-9 π.μ. και αφίνει σε ένα καθορισμέ-
-νο σημείο $A \perp \in$

Δύο παίκτες ο I και ο II διαθέτουν τυχαία (εξ 92)
 μια χρονική στιγμή μεταξύ 8-9 π.μ και πηγαίνουν
 στο Α. Οποιος από τους δύο βρει το ευρώ την
 στιγμή της αφίξης τους το κερδίζει. Είναι φε-
 -νερò ότι τόσο ο παίκτης I όσο και ο II έχουν
 στη διαθεσή τους μη αριθμηόμενο πλήθος
 εκλογών για τον χρόνο αφίξης τους $t \in [8, 9]$
 Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά και πρακτική
 χρησιμότητα παρουσιάζουν τα παιχνίδια μη-
 -δενικού αθροίσματος με $n=2$ άτομα τα
 οποία διαθέτουν πεπερασμένο πλήθος ενερ-
 -χειών (πεπερασμένα παιχνίδια δύο ατόμων
 μηδενικού αθροίσματος), Αυτά είναι περιε-
 -σότερο γνωστά ως πινακικά παιχνίδια
 και μπορούν να περιγραφούν συνοπτικά
 από ένα πίνακα όπως παρακάτω

I \ II	G_1	G_2	...	G_n
δ^1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
δ^2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...				
...				
δ^m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Πίνακας κέρδους
 του παίκτη I
 (ή της τιμής του
 παίκτη II)

Εδώ ο παίκτης I έχει τις γραμμές (οι οποίες έχουν σχέση με τις στρατηγικές του) ενώ ο παίκτης II τις στήλες. Οι εκλογές $x_1, x_2, \dots, x_m$ του παίκτη I λέγονται χηθείες στρατηγικές του I ενώ οι εκλογές $y_1, y_2, \dots, y_n$ του παίκτη II λέγονται χηθείες στρατηγικές του II (ο όρος χηθείες θα διασαφηνιστεί καλύτερα στις επόμενες παραγράφους).

Όταν ο παίκτης I διαλέξει την στρατηγική x_i και ο παίκτης II την στρατηγική y_j τότε δεχόμαστε ότι ο I παίρνει από τον II ποσό a_{ij} με $a_{ij} > 0$ ή δίνει στο II ποσό a_{ij} με $-a_{ij}$ αν $a_{ij} < 0$. Για τον λόγο αυτό ο πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται πίνακας κέρδους του παίκτη I ή απλώς πίνακας κέρδους.

Παράδειγμα: Δύο παίκτες I και II τοποθετούν συγχρόνως (χωρίς ο ένας να ξέρει την επιλογή του άλλου) από ένα νόμισμα πάνω σε ένα τραπέζι. Αν τα νομίσματα συμφωνούν (δηλ και τα δύο δείχνουν κορώνα, ή και τα δύο χαρμματα) ο II πληρώνει στον I ένα ευρώ. Αν όχι ο

I πληρώνει 1 € στον II. Τότε ο αντίστοιχος πίνακας κέρδους για τον I είναι

I \ II	K	Γ
K	1	-1
Γ	-1	1

Παράδειγμα: Δύο τράπεζες μια μεγάλη και μια μικρή σχεδιάζουν να ανοίξουν από ένα υποκατάστημα σε ένα από τα δύο εμπορικά κέντρα της πόλης. Από διάφορες εκτιμήσεις πιστεύεται ότι αν και τα δύο υποκαταστήματα ανοικτούν σε διαφορετικά κέντρα η μεγάλη τράπεζα θα πάρει το 70% του πληθυσμού που κατοικεί πιο κοντά στο εμπορικό κέντρο που ανοίχτηκε το κατάστημα και το 20% του πληθυσμού που βρίσκεται πλησιότερα του άλλου εμπορικού κέντρου. Αν και τα δύο υποκαταστήματα ανοιχθούν στο ίδιο εμπορικό κέντρο η μεγάλη τράπεζα θα συγκεντρώνει το 60% του πληθυσμού της πόλης. Δίνεται ότι το 60% του πληθυσμού της πόλης βρίσκεται πλησιέστερα στο εμπο-

(6Ε35)
 ρικό κέντρο 1 ενώ το υπόλοιπο 40% βρίσκεται
 πωσιέστερα στο 2. Να δοθεί ο πίνακας κέρδων
 για το παιχνίδι.

I \ II	κέντρο 1	κέντρο 2
κέντρο 1	a_{11}	a_{12}
κέντρο 2	a_{21}	a_{22}

I = μεγάλη τράπεζα

II = μικρή τράπεζα

$$a_{11} = 60, \quad a_{12} = \frac{70}{100} \cdot 60 + \frac{20}{100} \cdot 40 = 50$$

$$a_{21} = \frac{70}{200} \cdot 40 + \frac{20}{100} \cdot 60 = 40, \quad a_{22} = 60$$

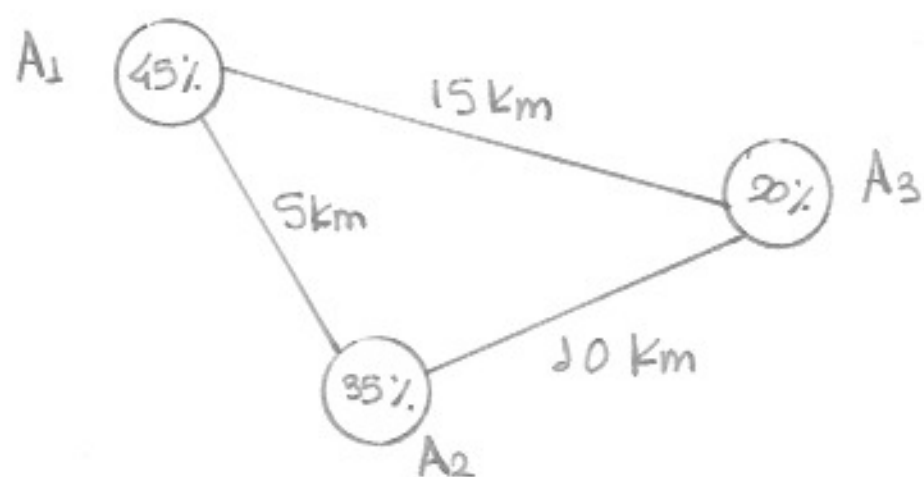
Αρα

I \ II	1	2
1	60	50
2	40	60

Παράδειγμα: Δύο ανταγωνιστικές фирмес

I και II σκοπεύουν να ανοίξουν από ένα
 κατάστημα σε μια από τις πόλεις A_1, A_2
 και A_3 . Αν τα καταστήματα ανοίξουν
 στην ίδια πόλη κάθε фирма θα πάρει το
 50% της αγοράς, ενώ αν ανοίξουν σε

(6396)
διαφορετικές πόλεις το κατάστημα που βρίσκεται
πιο κοντά στη τρίτη πόλη θα καλύψει και την
αγορά αυτής της πόλης. Να δοθεί ο πίνακας
κέρδους της φέρμας I αν οι αποστάσεις των
τριών πόλεων και τα αντίστοιχα ποσοστά των
αγορών τους (με βάση την συνολική αγορά των
 A_1, A_2 και A_3) δίνονται στο επόμενο σχήμα



Ο αντίστοιχος πίνακας κέρδους της φέρμας I

είναι

I \ II			
	A_1	A_2	A_3
A_1	50	45	80
A_2	55	50	80
A_3	20	20	50

Η αρχή minimax - maximin

Όπως έχουμε προαναφέρει ο σκοπός των α-τόμων που συμμετέχουν σ' ένα παιχνίδι είναι η βελτιστοποίηση των κερδών τους (μεγιστοποίηση για τον παίκτη I, ελαχιστοποίηση για τον παίκτη II.). Ωστόσο λόγω των αντικρουόμενων συμφερόντων και της έλλειψης πληροφωριών σχετικά με τις στρατηγικές που διαλέγει ο αντιπαλός παίκτης, το κριτήριο βέλτιστου θα πρέπει να βασιστεί σε μια μάλλον συντηρητική αρχή. Ένα τέτοιο κριτήριο αποτελεί η αρχή minimax (ή maximin) η οποία εξηγείται παρακάτω

Παράδειγμα: Έστω ότι ο πίνακας κερδών του παίκτη I σ' ένα συγκεκριμένο παιχνίδι είναι ο παρακάτω.

I \ II						Ελάχιστο δραμή
	G1	G2	G3	G4	G5	
χ_1	6	1	8	5	-2	-2
χ_2	7	(4)	6	9	5	(4) ← τιμή maximin
χ_3	8	3	5	10	6	3
χ_4	5	-1	-4	-1	7	-4
Μέγιστο στήλης	8	(4)	8	10	7	
		↑ τιμή minimax				

Αν ο παίκτης I διαλέξει την (χρήσια) στρατηγική χ_1 μπορεί να κερδίσει 6, 1, 8, 5, ή -2 μονάδες ανάλογα φυσικά με την εκλογή του παίκτη II. Οπότε ο παίκτης I είναι βίχουρος ότι διαλέχοντας την χ_1 θα έχει κέρδος τουλάχιστον 160 με $-2 = \min\{6, 1, 8, 5, -2\}$.

Αν επιλέξει την χ_2 θα κερδίσει τουλάχιστον $4 = \min\{7, 4, 6, 9, 5\}$ αν επιλέξει την χ_3 κερδίζει τουλάχιστον $3 = \min\{8, 3, 5, 10, 6\}$ και για την χ_4 κερδίζει $-4 = \min\{5, -1, -4, -1, 7\}$.

Επομένως αν ο παίκτης I θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανεξάρτητα από τις

στρατηγικές του II θα πρέπει να μεγιστοποιήσει το ελάχιστο κατά περίπτωση κέρδους δηλαδή να διαλέξει την στρατηγική g_2 στην οποία αντιστοιχεί το $4 = \max\{-2, 4, 3, -4\}$.

Ακολουθώντας ανάλογη πορεία για τον παίκτη II βλέπουμε ότι διαλέχοντας την στρατηγική g_1 έχει μέγιστη ζημία (χάσιμο) ίση με $8 = \max\{6, 7, 8, 5\}$, διαλέχοντας την g_2 χάνει το πολύ $4 = \max\{1, 4, 3, -1\}$ την g_3 χάνει το πολύ $8 = \max\{8, 6, 5, -4\}$ την g_4 χάνει το πολύ $10 = \max\{5, 9, 10, -1\}$ και την g_5 χάνει το πολύ $7 = \max\{-2, 5, 6, 7\}$.

Η πιο λογική στρατηγική για τον παίκτη II θα ήταν η g_2 στην οποία έχει ελαχιστοποίηση της μέγιστης κατά περίπτωση ζημιάς με αντίστοιχη ελάχιστη τιμή $4 = \min\{8, 4, 8, 10, 7\}$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν ο παίκτης I διαλέ-
 -ξει την χυήβια στρατηγική χ_2 μπορεί να κερδι-
 -σει τουλάχιστον $4 = \max_i \min_j a_{ij}$ μονάδες
 ενώ βεβαίως ο παίκτης II μπορεί να τον
 εμποδίσει να κερδίσει περισσότερες από
 $4 = \min_j \max_i a_{ij}$ μονάδες εκδίδοντας την
 χυήβια στρατηγική ϕ_2 . Επειδή εδώ
 ισχύει ότι $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 4 = 0$
 το παιχνίδι μπορεί να παιχθεί κατά τον
 καλύτερο τρόπο όταν οι παίκτες I και II
 χρησιμοποιούν τις χυήβιες στρατηγικές τους
 χ_2 και ϕ_2 . Εφόσον ή οποιαδήποτε παρέκλι-
 -ση του I από την χ_2 ελαττώνει την
 δυνατότητα του να κερδίσει τουλάχιστον
 $0 = 4$ (Αν επέλεγε την χ_1 θα μπορούσε
 να κερδίσει 6, 1, 8, 5, -2 αλλά αν ο
 II επέλεγε την ϕ_5 τότε ο I θα έκανε
 2 πολύ λιγότερο από το 4)

Επίσης οποιαδήποτε παρέκλιση του ΙΙ από ⁽⁶⁶⁾¹⁰⁾ την
62 μεγαλώνει την δυνατότητα του Ι να
κερδίσει περισσότερο από $U=4$.

Οι χυήγίες αυτές στρατηγικές λέγονται
βέλτιστες χυήγίες στρατηγικές.

Σημειώνουμε ότι για τοχαίο πινακικό παιχνίδι
με πίνακα $A = (a_{ij})$ ισχύει εν γένει ότι

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Αν ισχύει $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$ το

παιχνίδι θα λέγεται αυστηρά ή χυήγια

καθορισμένο και οι αντίστοιχες στρατηγικές

βέλτιστες χυήγίες στρατηγικές. Ειδικότερα

η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη Ι θα

λέγεται maximin στρατηγική ενώ η βέλτ

-στη στρατηγική του παίκτη ΙΙ θα λέ-

-γεται minimax στρατηγική. Τέλος ο αριθμός

U που εκφράζει το βέλτιστο όφελος των
δυσ παικτών θα ονομάζεται τιμή του παιχνι-
διού.

Ασκήσεις

(60/102)

1. Να σχηματιστεί ο πίνακας κερδών του παίκτη I για το παιχνίδι:

Κάθε ένας από δύο παίκτες διαλέγει ένα αριθμό από τους $\{1, 2, 3\}$. Ο παίκτης με το μικρότερο αριθμό κερδίζει 2 μονάδες εκτός αν ο αριθμός του είναι κατά 1 ένα μικρότερος οπότε κάνει 4 μονάδες. Αν οι αριθμοί είναι ίσοι δεν υπάρχει αμοιβή για κανένα.

2. Να σχηματιστεί ο πίνακας κερδών του παίκτη I για το παιχνίδι (πέτρα-ψαλίδι-χαρτί). Ο παίκτης που επιλέγει το αντί-κειμενο που κερδίζει παίρνει από τον άλλο 1 €. Αν και οι δύο παίκτες επιλέξουν το ίδιο αντικείμενο δεν υπάρχει αμοιβή για κανένα.

3. Να σχηματιστεί ο πίνακας κερδών του παίκτη I για το παιχνίδι: Ο παίκτης II διαθέτει m αντικείμενα αξίας $a_1, a_2, \dots, a_m$

και μ θέσεις $1, 2, \dots, \mu$ που μπορεί να τα (βελ103)
κρύψει. Το αντικείμενο ατίας κρύβεται πάντα
στη θέση i . Ο παίκτης II διαλέγει και κρύβει
ένα μόνο από τα μ αντικείμενα. Ο παίκτης I
ψάχνει για το κρυμμένο αντικείμενο σε
μία μόνο από τις μ θέσεις και αν το
βρει κερδίζει από τον παίκτη II την
ατία του αντικειμένου ενώ αν δεν το βρει
δεν κερδίζει ούτε χάνει τίποτα.

4. Να σχηματιστεί ο πίνακας κερδών του
παίκτη I για το παιχνίδι (Skin):
σε κάθε ένα από δύο παίκτες δίνεται
ένας άσος καρό και ένας άσος σπαδί.
Ο I παίρνει επίσης ένα, δυο καρό ενώ ο παίκτης
II ένα δυο σπαδί. Ο I δείχνει ένα
από τα χαρτιά του και ο παίκτης II αγνοώντας
την επιλογή του δείχνει ένα από τα δικά του.
Αν τα είδη ταιριάζουν κερδίζει ο παίκτης I
ενώ αν όχι κερδίζει ο II. Το ποσό του
κερδους είναι κάθε φορά 100 με την αριθμη-
τική τιμή του χαρτιού που δείχνει ο νικητής.
Αν παρουσιαστούν δυο διαφορετικά η τιμή είναι μηδέν.

5. Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη (6ε>104)

-τη Ι για το παιχνίδι:

Ο παίκτης ΙΙ διαλέγει ένα στοιχείο (i, j) από τον πίνακα $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ενώ ο Ι μια ολόκληρη γραμμή του.

Αν η γραμμή καλύπτει το στοιχείο ο Ι κερδίζει ποσό ίσο με το στοιχείο, αν όχι τότε ο παίκτης ΙΙ κερδίζει $i+j-2$ χρηματικές μονάδες.

6. Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη Ι για το παιχνίδι:

Ο παίκτης ΙΙ κρύβει στο χέρι 1 ή 2 ή ... ή Ν νομίσματα και ο παίκτης Ι λέει "άρτιος" ή "περιττός". Αν ο Ι μαντέψει σωστά κερδίζει το ποσό που κρύβει ο ΙΙ αλλιώς πληρώνει το ποσό αυτό στο ΙΙ.

7. Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη Ι για το παιχνίδι:

Δύο αντίπαλες αυτοκινητοβιομηχανίες σκοπεύουν να ιδρύσουν από ένα εργοστάσιο σε μια χώρα για την κάλυψη των εσωτερικών της αναγκών σε αυτοκίνητα. Η κάθε βιομηχανία προβληματίζεται αν θα πρέπει να ιδρύσει το εργοστάσιό της στο βόρειο τμήμα της χώρας (Β) όπου κατοικεί το 60% του πληθυσμού της ή στο Νότιο (Ν) όπου κατοικεί το 40%. Αν τα εργοστάσια ιδρυθούν στο ίδιο τμήμα, οι βιομηχανίες θα μοιράσουν ίσμερως την εσωτερική αγορά, ενώ αν ιδρυθούν σε διαφορετικό τμήμα ή κάθε μια θα πάρει αποκλειστικά και μόνο την αγορά του τμήματος όπου

8. Να βρεθούν οι maximin και minimax στρατηγικές (60103)
για τους παίκτες I και II αντίστοιχα του παιχνιδιού
που περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα κερδών
του παίκτη I

I \ II	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
δ_1	1	2	0	3
δ_2	2	3	2	5
δ_3	3	0	1	4

9. Για ποιές τιμές των παραμέτρων
 a και b το διπλανό παιχνίδι
έχει σαν maximin και minimax
στρατηγικές τις δ_2 και σ_2 αντίστοιχα

I \ II	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	1	b	3
δ_2	a	5	10
δ_3	6	2	3

10. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι βέλτιστες χημεί
στρατηγικές για ένα τετραγωνικό πίνακικό παιχνίδι
στο οποίο το κέρδος του παίκτη I όταν αυτός
διαλέξει την στρατηγική δ_i και ο II τη στρατη-
-γική σ_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) είναι ίσο με $a_{ij} = i - j$

11. Δείξτε ότι ενώ τα πίνακικά παιχνίδια με

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αυστηρά καθορισ-
-μένα, δεν ισχύει το ίδιο και για το παιχνίδι που
αντιστοιχεί στον πίνακα $A = A_1 + A_2$

Τυχαιοποιημένες στρατηγικές

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο στην περίπτωση που ισχύει $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$ οι δυο παίκτες μπορούν εύκολα να διαλέξουν βέλτιστες minimax και maximin γνήσιες στρατηγικές. Στα περισσότερα όμως προβλήματα που εμφανίζονται στην πράξη ισχύει $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$ οπότε η εκλογή γνήσιων βέλτιστων στρατηγικών είναι αδύνατη. Στη περίπτωση αυτή οι δυο παίκτες είναι αναγκασμένοι να καταφύγουν στη χρήση τυχαιοποιημένων στρατηγικών.

Ας θεωρήσουμε το παιχνίδι "κορίνα-χράμματα",

I \ II	K	Γ
	K	Γ
K	1, -1	-1, 1
Γ	-1, 1	1, -1

Είναι φανερό ότι

$$\max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = -1 < 1 = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij}$$

και επομένως δεν μπορούμε να διαλέξουμε βέλτιστη γνήσια στρατηγική. Πράγματι αν ο παίκτης I δείχνει μονίμως K μετά από λίγο ο παίκτης II θα μαντέψει την στρατηγική του I και θα δείχνει μονίμως Γ ώστε να χάνει ο I. Αν τώρα ο I δείχνει συνεχώς Γ τότε ο II θα δείχνει K ώστε να κερδίζει 1 μονάδα.

Αρα είναι φανερό ότι καμία από τις χημικές (68107)
στρατηγικές K και Γ δεν συμφέρει τον παίκτη I και
ο λόγος είναι ότι δεν μπορεί να αποκρύψει την
εκλογή του από τον άλλο παίκτη. Μια μέθοδος για
να αποκλεισθεί η πιθανότητα να μπορέσει ο αντι-
παλος παίκτης να μαντέψει την εκλογή μας
είναι να κάνουμε χρήση κάποιου μηχανισμού τύχης.
Συγκεκριμένα στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπο-
ρούσε ο παίκτης I να τοποθετήσει σε ένα κουτί
δύο χαρτιά με τις ενδείξεις "1" και "2", να διαλέ-
ξει ένα από αυτά τα δύο και να δείξει στον
παίκτη II "K" αν διαλέξε το 1 και "Γ" αν δια-
λέξε το 2. Είναι φανερό ότι η πιθανότητα
να διαλέξει ο παίκτης I "K" είναι $\frac{1}{2}$ και
η πιθανότητα να διαλέξει "Γ" είναι επίσης $\frac{1}{2}$
Αν ο παίκτης II διαλέξει "K" τότε το αναμενόμενο
κέρδος του I (μαθηματική ελπίδα, μέση τιμή) μετά
από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του παιχνι-
διού είναι $\frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$ ενώ αν παίκτης II
διαλέξει "Γ" θα είναι $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(+1) = 0$
Με αυτόν τον τρόπο ο παίκτης I ούτε κερδι-
ζει αλλά ούτε χάνει πράγμα προτιμότερο

από το να χάνει μια μονάδα εκδίδοντας μονίμως (6/108)
μια από τις δύο στρατηγικές του.

Σημειώνουμε ότι ακόμα και αν ο παίκτης II τυχαιο-
ποιήσει την εκλογή του διαλέγοντας την στρατηγική
"K" με πιθανότητα x ($0 \leq x \leq 1$) και την στρατηγι-
κή "Γ" με πιθανότητα $1-x$ το αναμενόμενο κέρδος
του παίκτη I θα είναι πάλι

$$\frac{1}{2}x \cdot (+1) + \frac{1}{2}(1-x) \cdot (-1) + \frac{1}{2}x \cdot (-1) + \frac{1}{2}(1-x) \cdot (+1) = 0$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω ορίζουμε σαν
μικτή ή τυχαιοποιημένη στρατηγική του παίκτη

I ενός πινακικού παιχνιδιού με πίνακα
κέρδους $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ κάθε διάνυσμα

στην $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$ με μη αρνητικές
συντεταγμένες που ικανοποιούν την σχέση

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

Ομοια με τον όρο μικτή ή τυχαιοποιημένη
στρατηγική του παίκτη II θα εννοούμε κάθε

διάνυσμα στην $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ με $y_j \geq 0$
 $j = 1, 2, \dots, n$ και $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$

Οι αριθμοί x_i, y_j παριστάνουν αντίστοιχα (βελίση)
 τις πιθανότητες (ή ισοδύναμα τις σχετικές συχνότη-
 -τες σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων) με τις
 οποίες ο παίκτης I διαλέγει την κίνηση x_i
 και ο παίκτης II διαλέγει την κίνηση y_j .

Σε κάθε ζευγάρι $\tilde{x}, \tilde{y}$ μικτών στρατηγικών
 των δυο παικτών αντιστοιχεί η συνάρτηση αμοι-
 -βής $E(\tilde{x}, \tilde{y})$ του παίκτη I η οποία εκφράζει
 το αναμενόμενο κέρδος του όταν ο I ακολου-
 -θεί την στρατηγική $\tilde{x}$ και ο II την στρα-
 -τηγική $\tilde{y}$ και ορίζεται από τον τύπο

$$E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}' \cdot A \cdot \tilde{y} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

Σημειώνουμε ότι οι χημίτες στρατηγικές
 x_i του παίκτη I αντιστοιχούν στα
 μοναδιαία διανύσματα $\tilde{x}_i = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i θέση}}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^M$
 ενώ οι χημίτες στρατηγικές y_j του παίκτη II
 αντιστοιχούν στα μοναδιαία διανύσματα
 $\tilde{y}_j = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j θέση}}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$. Η συνάρτηση αμοιβής
 δίνεται τότε $E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = a_{ij}$

Κριτήρια βελτιστότητας τυχαιοποιημένων (βελ 110) στρατηγικών.

Ας θεωρήσουμε ένα πινακικό παιχνίδι με πίνακα κέρδους (για τον παίκτη I) $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$

Αν ο παίκτης I παίξει την μικτή στρατηγική $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ το χειρότερο κέρδος που μπορεί να πετύχει θα είναι ίσο με

$$\varphi(\underline{x}) = \min_y E(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.1)$$

όπου το ελάχιστο παίρνεται για όλες τις τυποποιημένες στρατηγικές $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ του παίκτη II

Την καλύτερη λοιπόν λύση για τον παίκτη I θα αποτελεί η εκδοχή στρατηγικής $\underline{x}_0$

η οποία μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος δηλαδή $\varphi(\underline{x}_0) = \max_{\underline{x}} \varphi(\underline{x})$ ή ισοδύναμα

$$\min_{\underline{y}} E(\underline{x}_0, \underline{y}) = \max_{\underline{x}} \min_{\underline{y}} E(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{v} \quad (1.3)$$

Ο παίκτης II βλεπόμενος με τον ίδιο τρόπο θα πρέπει να διαλέξει την στρατηγική $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ η οποία ελαχιστοποιεί την μέγιστη ζημία (αρνητικό κέρδος) δηλαδή

$$\boxed{\max_{\underline{y}} E(\underline{x}, \underline{y}) = \min_{\underline{y}} \max_{\underline{x}} E(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}} \quad (1.4)$$

Οι ποσότητες $\underline{U}, \bar{U}$ των σχέσεων (1.3) και (1.4) λέγονται κάτω και άνω τιμή του παιχνιδιού αντίστοιχα

Πόρισμα 11: Η κάτω τιμή $\underline{U}$ ενός πινακικού παιχνιδιού είναι μικρότερη από την άνω τιμή $\bar{U}$.
 Δηλαδή $\underline{U} \leq \bar{U}$.

• Αν συμβεί $\underline{U} = \bar{U} = U$ η κοινή τιμή U θα λέγεται τιμή του παιχνιδιού οι δε στρατηγικές $\underline{x}_0$ και $\underline{y}_0$ για τις οποίες επιτυγχάνεται αυτή η τιμή μέσω των σχέσεων (1.3) και (1.4) θα λέγονται βέλτιστες maximin και minimax στρατηγικές των παικτών I και II αντίστοιχα

Το βέλτιστο των maximin και minimax στρατηγικών δικαιολογείται από το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 1.1 : Σε κάθε πινακικό παιχνίδι (6.3.112)

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

α) Υπάρχουν $\underline{x}_0 \in S_m$, $\underline{y}_0 \in S_n$ και $U \in \mathbb{R}$ ώστε να

$$\text{ισχύει } E(\underline{x}_0, \underline{y}) \geq U \quad \forall \underline{y} \in S_n \quad (1.5)$$

$$E(\underline{x}, \underline{y}_0) \leq U \quad \forall \underline{x} \in S_m \quad \text{και} \quad (1.6)$$

β) Το παιχνίδι έχει τιμή U και οι $\underline{x}_0 \in S_m$

$\underline{y}_0 \in S_n$ είναι οι βέλτιστες maximin και mini-

-max στρατηγικές αντίστοιχα, δηλαδή

$$U = \min_{\underline{y}} \max_{\underline{x}} E(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{\underline{x}} \min_{\underline{y}} E(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.7)$$

όπου

$$S_m = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

$$S_n = \left\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

Πόρισμα 1.2 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να

έχει ένα πινακικό παιχνίδι τιμή $\underline{U} = \bar{U} = U$

είναι να υπάρχουν στρατηγικές $\underline{x}_0, \underline{y}_0$

τέτοιες ώστε να ισχύει

$$E(\underline{x}, \underline{y}_0) \leq E(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \leq E(\underline{x}_0, \underline{y}) \quad (1.8) \text{ για όλα}$$

τα $\underline{x}, \underline{y}$. Τότε οι $\underline{x}_0, \underline{y}_0$ είναι οι βέλτιστες

maximin και minimal στρατηγικές των παικτών ^(βλ 113) I και II αντίστοιχα και $U = E(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$

• Το Θεώρημα 1.1 και το Πρόβλημα 1.2 είναι πολύ χρήσιμα από την άποψη ότι μας δίνουν απλές ανισοτικές σχέσεις (τις (1.5), (1.6) και (1.8)) μέσω των οποίων μπορούμε να ελέγχουμε αν κάποιες δοσθέντες στρατηγικές είναι βέλτιστες αποφεύχοντας έτσι την μάλλον περιπλοκή σχέση (1.7). Και πάλι η χρήση αυτών των ανισοτήτων δεν είναι εύκολη αφού η επαληθευσή τους θα πρέπει να γίνει για όλες τις τυχαιοποιημένες στρατηγικές $\underline{x} \in S_I$ και $\underline{y} \in S_{II}$. Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν ότι ο έλεγχος αυτός αρκεί να γίνει μόνο για τις χηνίδες στρατηγικές των παικτών πράγμα που είναι εύκολο.

Θεώρημα 1.2: Οι συνθήκες (1.5) και (1.6)

του Θεωρήματος 1.1 είναι ισοδύναμες με τις

$$E(\underline{x}_0, \underline{y}_j) \geq U \quad \text{για κάθε χηνίδα στρατηγική } \underline{y}_j \in S_{II} \text{ του παίκτη II}$$

$$E(\underline{z}_i, \underline{y}_0) \leq U \quad \text{για κάθε χηνίδα στρατηγική } \underline{z}_i \in S_I \text{ του παίκτη I}$$

Πορίσμα 1.3 : Η συνθήκη (1.8) είναι ισοδύναμη με την $E(\tilde{f}_i, \tilde{y}_0) \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{h}_j)$ όπου $\tilde{f}_i \quad i=1,2,\dots,m$, $\tilde{h}_j \quad j=1,2,\dots,n$ είναι οι χυθικές στρατηγικές για τους παίκτες I και II αντίστοιχα

Παράδειγμα Ας θεωρήσουμε ένα παιχνίδι με τον

πίνακα

I \ II	II		
	$\tilde{g}_1$	$\tilde{g}_2$	$\tilde{g}_3$
$\tilde{f}_1$	3	6	-1
$\tilde{f}_2$	4	3	6

κέρδους. Για τις τυχαίες

πονημένες στρατηγικές $\tilde{x}_0 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ και $\tilde{y}_0 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$

ισχύει

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{h}_1) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{4} \quad \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{h}_2) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{4} \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{h}_3) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{17}{4} \quad \tilde{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(\tilde{f}_1, \tilde{y}_0) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{4} \quad \tilde{f}_1 = (1, 0)$$

$$E(\tilde{f}_2, \tilde{y}_0) = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{4} \quad \tilde{f}_2 = (0, 1)$$

Έχουμε $E(\tilde{f}_i, \tilde{y}_0) \leq \frac{15}{4} \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{h}_j) \quad i=1,2$

Οι $\tilde{x}_0$ και $\tilde{y}_0$ θα είναι οι βέλτιστες στρατηγικές των δύο παικτών και η $v = 15/4$ η τιμή του παιχνιδιού

Παράδειγμα (Παιχνίδι Morra των δύο δακτύλων) (σελ 115)

Κάθε παίκτης θηκώνει 1 ή 2 δακτύλα και συγχρόνως
ζει (μαντεύει) πόσα δακτύλα θα θηκώσει ο άλλος.
Αν και οι δύο μαντεύουν σωστά ή λάθος δεν
κερδίζουν τίποτα. Αν ο ένας μαντέψει σωστά
κερδίζει τόσα όσα τα δακτύλα και των δύο μαζί
συμβολίζουμε

χ_{ij} : Ο παίκτης I θηκώνει i δακτύλα και ζει ότι
ο παίκτης II θηκώσει j δακτύλα

ϕ_{ij} : Ο παίκτης II θηκώνει i δακτύλα και ζει
ότι ο παίκτης I θηκώσει j δακτύλα

$i=1,2$ και $j=1,2$

Έχουμε τον επόμενο πίνακα κέρδους

I \ II				
	I	II		
	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{21}	ϕ_{22}
χ_{11}	0	5	-5	0
χ_{12}	-5	0	0	7
χ_{21}	5	0	0	-7
χ_{22}	0	-7	7	0

Ευκολά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι
στρατηγικές $\underline{x}_1 = \underline{y}_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ όσο και οι
 $\underline{x}_2 = \underline{y}_2 = (\frac{7}{12}, 0, 0, \frac{5}{12})$ αποτελούν βέλτιστες λύσεις

του προβλήματος αφού και για τα δύο (σελ 116)
 Ξευχάρια 16 χύει

$$E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = 0 = E(\tilde{x}_i, n_j) \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

όπου $\tilde{x}_1 = (1, 0, 0, 0)$ $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\tilde{x}_2 = (0, 1, 0, 0)$
 $\tilde{x}_3 = (0, 0, 1, 0)$ $n_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $n_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\tilde{x}_4 = (0, 0, 0, 1)$

Ακόμα περισσότερο μπορεί κανείς να δείξει
 κάνοντας και πάλι χρήση του θεωρήματος 1.2)
 ότι και οι κυρτοί συνδιαγράμμοι

$$\tilde{x}_0 = (1-\lambda)\tilde{x}_1 + \lambda \cdot \tilde{x}_2 = \left(\frac{7\lambda}{12}, \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{12} \right)$$

$$\tilde{y}_0 = (1-\lambda)\tilde{y}_1 + \lambda \cdot \tilde{y}_2 = \left(\frac{7\lambda}{12}, \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{12} \right) \text{ με } 0 \leq \lambda \leq 1$$

αποτελούν βέλτιστες λύσεις για τους δύο παίκτες
 ενώ η τιμή του παιχνιδιού είναι $U=0$.

Υπολογίζουμε τα $E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_0) : i=1, 2, 3, 4$

παράδειγμα $E(\tilde{x}_3, \tilde{y}_0) = (0, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7\lambda}{12} \\ \frac{1-\lambda}{2} \\ \frac{1-\lambda}{2} \\ \frac{5\lambda}{12} \end{pmatrix} =$

$$= (5 \ 0 \ 0 \ -7) \begin{pmatrix} \frac{7\lambda}{12} \\ \frac{1-\lambda}{2} \\ \frac{1-\lambda}{2} \\ \frac{5\lambda}{12} \end{pmatrix} = 5 \cdot \frac{7\lambda}{12} - 7 \cdot \frac{5\lambda}{12} = 0$$

16 χύει $E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_0) = 0 = E(\tilde{x}_0, n_j)$ $i=1, 2, 3, 4$
 Η τιμή του παιχνιδιού είναι $U=0$ $j=1, 2, 3, 4$

Το Θεώρημα Minimax

(6014)

Το Θεώρημα αυτό αναφέρεται στην ύπαρξη βέλτιστων στρατηγικών για πεπερασμένα πινακικά παιχνίδια

Θεώρημα 21 (Minimax) Σε κάθε πεπερασμένο πινακικό παιχνίδι η άνω και κάτω τιμή συμπίπτουν, δηλαδή $\overline{U} = \underline{U} = U$

• Προσοχή: Το Θεώρημα minimax δεν ισχύει πάντοτε αν ο ένας ή και οι δυο παίκτες διαθέτουν μη πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών

Αυτό το βλέπουμε στο παρακάτω παράδειγμα

Παράδειγμα: Κάθε ένας από τους παίκτες I και II διαλέγει ένα θετικό ακέραιο. Ο παίκτης που διαλέξει τον μεγαλύτερο αριθμό κερδίζει 1 χρηματική μονάδα. Ο πίνακας του παιχνιδιού είναι προφανώς $A = (a_{ij})$ με

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i=j \\ 1 & \text{αν } i>j \\ -1 & \text{αν } i<j \end{cases}$$

Επομένως

$$E(i, y) = (0, 0, \dots, \underset{i\text{-th}}{1}, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (6 \in \mathbb{N})$$

$$= (1, 1, \dots, 1, \underset{i\text{-th}}{0}, -1, -1, \dots, -1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 + y_2 + \dots + y_{i-1} - y_{i+1} - y_{i+2} - \dots - y_n$$

$$= \sum_{k < i} y_k - \sum_{k > i} y_k \geq -1 \Rightarrow \underline{U} = -1$$

$$E(x, j) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-th}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-th} = -x_1 - x_2 - \dots - x_{j-1} + x_{j+1} + \dots + x_n$$

$$= -\sum_{k < j} x_k + \sum_{k > j} x_k \leq 1 \Rightarrow \bar{U} = 1$$

Εδω $\underline{U} \neq \bar{U}$ άρα το παιχνίδι δεν έχει τιμή

ΑΓΩΓΕΙΣ

1. Για τον πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ενός παιχνιδιού έχουμε
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \neq j \\ -1 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι στρατηγικές

(6ε119)

$$x_0 = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}\right)' \text{ και } y_0 = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}\right)' \text{ είναι}$$

βέλτιστες και ότι η τιμή του παιχνιδιού είναι $U = \frac{\mu-2}{\mu}$.

2. Δείξτε ότι οι βέλτιστες στρατηγικές του διπλανού παιχνιδιού είναι οι $\tilde{x}_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)'$

$$y_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)' \text{ ενώ η τιμή του είναι } 0.$$

Τι θα συμβεί αν σε όλα τα στοιχεία του πίνακα προσθέσουμε 4 μονάδες

I \ J	g ₁	g ₂	g ₃
g ₁	0	1	-2
g ₂	-1	0	1
g ₃	2	-1	0

3. Δείξτε ότι στο παιχνίδι με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i) οι $\tilde{x}_0 = y_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ είναι βέλτιστες με τιμή

$$U = 1$$

ii) Η $y_0^* = (1, 0)$ δεν είναι βέλτιστη παρόλο που ισχύει ότι $E(\tilde{x}_0, y_0^*) = U$