

Εστω ότι έχουμε μη πραγματικές συναρτήσεις
 $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ με πεδίο ορισμού το υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$.

Το γενικό μαθηματικό πρόβλημα της βελτιστοποίησης
με περιορισμούς ανισοτήτες μπορεί να διατυπωθεί ως

εξής: "Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης
 f για όλα τα $x \in A$ που ικανοποιούν τους περιο-
-ρισμούς $g_i(x) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,m$.

Μια δέση ακροτάτου ~~π~~ x ~~χ~~ γίνεται δεκτή αν ανήκει
στο σύνολο $A_0 = \{x \in A : g_i(x) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,m\}$

Θα παρουσιάσουμε δυο μεθόδους. Την μέθοδο Επεκτετα-
-μένη μέθοδο Lagrange, και την μέθοδο Kuhn-Tucker

Επεκτεταμένη μέθοδος Lagrange

Η επεκτεταμένη μέθοδος Lagrange χωρίζει τα σημεία
του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος
σε δυο κατηγορίες: τα εσωτερικά και τα συνοριακά.
Τα εσωτερικά ακρότατα της f προδιορίζονται
αν βρούμε τα ακρότατα της f χωρίς περιορι-
-σμούς (όπως στα προηγούμενα μαθήματα) και
στη συνέχεια ελέγχουμε ποια από αυτά ανή-
-κουν στο εσωτερικό του συνόλου A_0 .

(σελ 64)
Τα ακρότατα τα συνοριακά ικανοποιούν ορισμένους
περιορισμούς ισότητας οπότε θα προδιορίζονται
εν χέει με την μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange

Παράδειγμα : Να βρεθούν τα ακρότατα της

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 \text{ υπό τον περιορισμό}$$

$$x+2y+3z \leq 4$$

Λύση $f_x = 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$$f_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$f_z = 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = -1$$

Το μοναδικό ετάξιμο σημείο είναι το $a_1 = (-1, 0, -1)$

Το a_1 ικανοποιεί τον περιορισμό $x+2y+3z \leq 4$

$$(2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 4 \text{ (αχίει)})$$

Αρα είναι

εσωτερικό σημείο του συνόλου A_0 . Αρα αποτε-

-λεί δεκτή λύση του προβλήματος. Τα συνοριακά
σημεία του συνόλου A_0 είναι εκείνα που ικα-
-νοποιούν τη σχέση $g(x, y, z) = x+2y+3z-4=0$
Εφαρμόζουμε την μέθοδο Lagrange

$$L(x, y, z, \lambda) = (x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - \lambda(x+2y+3z-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2(z+1) - 3\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x+2y+3z-4)$$

Λύνουμε το σύστημα $2(x+1)-\lambda=0 \Leftrightarrow x+1=\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\lambda}{2}-1$

$$2y-2\lambda=0 \Leftrightarrow y=\lambda$$

$$2(z+1)-3\lambda=0 \Leftrightarrow z+1=\frac{3\lambda}{2} \Leftrightarrow z=\frac{3\lambda}{2}-1$$

$$x+2y+3z-4=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}-1+2\lambda+3\left(\frac{3\lambda}{2}-1\right)-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{2}-1+2\lambda+\frac{9\lambda}{2}-3-4=0 \Leftrightarrow \frac{10\lambda}{2}+2\lambda=8 \Leftrightarrow 5\lambda+2\lambda=8$$

$$\Leftrightarrow 7\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{7}$$

$$\text{Αρα } x = \frac{8/4}{2} - 1 = \frac{4}{7} - 1 = -\frac{3}{7}$$

$$y = \frac{8}{7}$$

$$z = \frac{3 \cdot \frac{8}{7}}{2} - 1 = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$

Θα εφετάσουμε το σημείο $\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

Ο Εναυτημένος Εξβιανός πίνακας είναι

$$H_E = H_E(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Εδώ $n-m=3-1=2$. Αρα προσδιορίζουμε το

πρόβλημα των τελευταίων δύο κύριων ελασ-
-τόνων ορίσθων της Εξβιανής

$$\varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 \cdot (-2 \cdot 2) = -10$$

$$\varepsilon_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{Ανάπτυξη κατά μήκος της 2ης γραμμής})$$

$$= -12 \cdot 2 + 2 \cdot \left(-2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -4 + 2 \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3 \cdot 2)) = -4 + 2(-8 - 18) =$$

$$= -4 - 52 = -56$$

Οι εσάγωγες ορίζουσες έχουν το ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του $(-1)^H = (-1)^1 = -1 < 0$. Άρα το

σημείο $a_2 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$ είναι σημείο τοπικού

εσχαλίστου της f υπό τον περιορισμό $x+2y+3z=4$

Το σημείο $a_1 = (-1, 0, -1)$

Ο Εσσιανός πίνακας

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $H_f(x)$ είναι οριστικά θετικός

γιατί $\varepsilon_1 = 2 > 0$ $\varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $\varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$

Αρα το σημείο $z_1 = (-1, 0, -1)$ είναι σημείο (6367)
ελαχίστου

$$\text{Το } f(-1, 0, -1) = 0$$

$$f\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right) = \frac{194}{4} \quad \text{Αρα } f(-1, 0, -1) < f\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

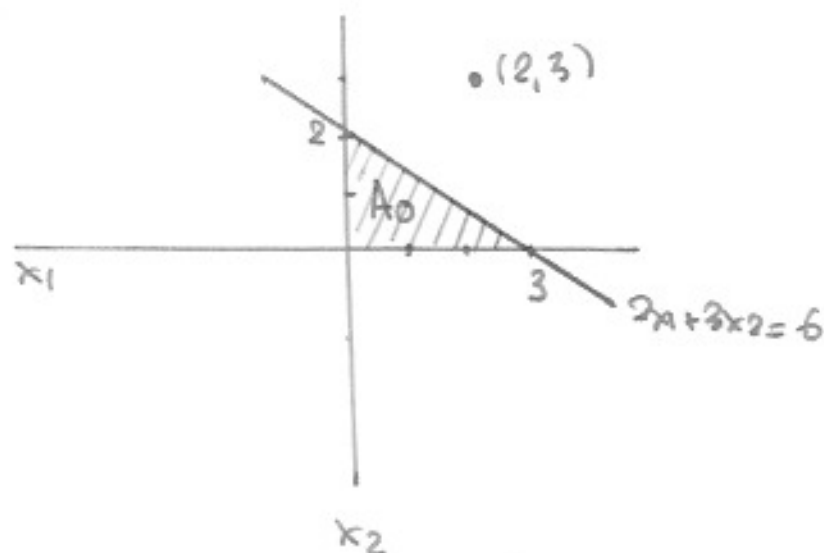
επομένως το $(-1, 0, -1)$ είναι θέση ολικού
ελαχίστου

Άσκηση: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad \text{υπό τους περιορισμούς}$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Λύση Το $A_0 = \{ (x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$



Το ελάχιστο (ακρότατο χωρίς περιορισμούς)

$$f_{x_1} = 2(x_1 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$f_{x_2} = 2(x_2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

Το σημείο $(2, 3)$
θα βρούμε το είδος
του ακρότατου

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_1 = 2 > 0 \quad \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Αρα ο H_f οριστικά θετικός άρα το $(2,3)$ είναι δέον ελάχιστου. Όμως το σημείο $(2,3)$ δεν ανήκει στο A_0 . Δεν ικανοποιεί την συνθήκη $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ άρα απορρίπτεται.

Αρα δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο του A_0 το οποίο να βελτιστοποιεί την f .

Θα πρέπει να εξετάσουμε για ακρότατο συνοριακό σημείο.

Επειδή έχουμε 3 ανισοτικές σχέσεις θα πρέπει να μετατρέψουμε σε ισότητα κάθε σειρά

K ($K=1,2,3$) από τους τρεις ανισοτικούς περιορισμούς, να λύσουμε το πρόβλημα που προκύπτει και στη συνέχεια να ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι υπόλοιποι περιορισμοί.

Έτσι παίρνουμε τα επόμενα 7 προβλήματα (Ο)ς οι δυνατές περιπτώσεις)

$$A_1: 2x_1 + 3x_2 = 6, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

$$A_2: x_1 = 0, \quad 2x_1 + 3x_2 < 6, \quad x_2 > 0$$

$$A_3: x_2 = 0 \quad 2x_1 + 3 \cdot x_2 < 6, \quad x_1 > 0$$

$$B_1: 2x_1 + 3 \cdot x_2 = 6, \quad x_1 = 0, \quad x_2 > 0$$

$$B_2: 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6, \quad x_2 = 0, \quad x_1 > 0$$

$$B_3: x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2x_1 + 3x_2 < 6$$

$$\Gamma_1: 2x_1 + 3 \cdot x_2 = 6, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

Λύνουμε αρχικά την A_1 με την μέθοδο Lagrange

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda \cdot g(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - \lambda \cdot (2x_1 + 3x_2 - 6)$$

$$g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 6$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - 3\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

Λύνουμε το σύστημα

$$2(x_1 - 2) - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 + \lambda$$

$$2(x_2 - 3) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = 3\lambda + 6 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3\lambda}{2} + 3$$

$$2x_1 + 3x_2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(2 + \lambda) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 3\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 + 2\lambda + \frac{9\lambda}{2} + 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \frac{9\lambda}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 9\lambda + 14 = 0 \Leftrightarrow 13\lambda = -14 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{14}{13}$$

$$\text{Τότε } x_1 = 2 - \frac{14}{13} = \frac{12}{13}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} \left(-\frac{14}{13}\right) + 3 = \frac{-21}{13} + 3 = \frac{18}{13}$$

Το σημείο είναι το $(\frac{12}{13}, \frac{18}{13})$

Ο εναυτημένος εγγεγρανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$n - \mu = 2 - 1 = 1.$$

Υπολογίζουμε το πρόσημο της τελευταίας κύριας

εξάσσονας ορίζουσας είναι $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= -2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = -8 - 12 = -20 < 0 \quad \text{έχει το}$$

ίδιο πρόσημο με το $G_1' = -1 < 0$ Άρα είναι

θέση ελαχίστου και $f(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}) = \frac{637}{169}$

Όμοια το A_3 δίνει το τοπικό ελαχίστο

$$f(2, 0) = 9.$$

Το A_2 το στάσιμο σημείο $(0, 3)$ δεν ικανοποιεί τον τρίτο περιορισμό $x_1 > 0$ (εδώ 0 > 0)
Άρα (όχι)

Για τα προβλήματα B_1, B_2, B_3 (στα οποία δεν εφαρμόζεται η μέθοδος Lagrange αφού ο αριθ-

-μός των περιορισμών δεν είναι μικρότερος από τον αριθμό των μεταβλητών)

B_1 : έχουμε $x_1 = 0$ και $2x_1 + 3x_2 = 6 \Leftrightarrow 3x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = 2$

Το $x_2 = 2$ ικανοποιεί την συνθήκη $x_2 = 2 > 0$

Το σημείο είναι το $(0, 2)$ $f(0, 2) = (0-2)^2 + (2-3)^2 = 5$

B_2 : έχουμε $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$

Το $x_1 = 3$ ικανοποιεί την συνθήκη $x_1 > 0$ γιατί

$$3 > 0$$

Το σημείο είναι το $(3, 0)$ και $f(3, 0) = (3-2)^2 + (0-3)^2 = 10$

B_3 : $x_1 = 0, x_2 = 0$ ικανοποιεί την συνθήκη $2x_1 + 3x_2 < 6$
γιατί $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 6$ ισχύει

Το σημείο είναι $(0, 0)$ $f(0, 0) = (0-2)^2 + (0-3)^2 = 13$

Για το Γ_1 δίδουμε $2x_1 + 3x_2 = 6$

και

$$x_1 = 0$$

και

$$x_2 = 0$$

το οποίο

είναι άτοπο

Αρα το πρόβλημα Γ_1 δεν έχει καθόλου επι-
κτές λύσεις.

Η μέθοδος που περιγράψαμε έχει ^(βλ. 2) δύο κύρια μειονεκτήματα

- α. Δεν εφασφαλίζει τη βελτιστότητα όλων των τοπικών ακροτάτων τα οποία βρίσκονται στο σύνορο του συνόλου (πχ περίπτωση A_2)
- β. Απαιτεί τη λύση μεγάλου πλήθους παραχύχων προβλημάτων ιδιαίτερα όταν έχουμε πολλούς περιορισμούς (για παράδειγμα ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με 5 ανισοτικές ανήλικες παράχει 32 προβλήματα).

Για τους παραπάνω λόγους η επεκτεταμένη μέθοδος Lagrange δεν έχει ευρεία χρήση. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος Kuhn-Tucker.

Συνθήκες Kuhn-Tucker

Εδώ θα μελετήσουμε αναλυτικά το γενικό πρόβλημα της βελτιστοποίησης μια συνάρτησης $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

Συμβολίζουμε με $A_0 = \{x \in A : g_i(x) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, m\}$

το σύνολο των εφικτών λύσεων και με

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$$

τη συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στις $g_i \quad i=1, 2, \dots, m$.

Ένα σημείο $(\underline{x}, \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ θα λέγεται σημείο καμπής της $L(x, \lambda)$ αν σε κάποια γειτονιά του ισχύει:

$$\boxed{L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \leq L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \leq L(\underline{x}, \underline{\lambda})} \quad (1)$$

Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν ότι τα σημεία καμπής της $L(x, \lambda)$ υπό τον περιορισμό της μη θετικότητας $\lambda_i \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$

ο οποίος συνολικά χράζεται $\lambda \leq \underline{\lambda}$ έχουν άμεση σχέση με τα σημεία ελαχίστου της f υπό τις συνθήκες $g_i(x) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, m$

Λήμμα 1. Αν το σημείο $(\underline{a}, \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\underline{\lambda} \leq \underline{0}$ ικανοποιεί τη σχέση (1) $\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^M$ με $\underline{z} \leq \underline{0}$ τότε ισχύουν οι

$$i) g_i(\underline{a}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{δηλαδή } \underline{a} \in A_0)$$

$$ii) \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\underline{a}) = 0$$

Θεώρημα 1: Αν το $(\underline{a}, \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\underline{\lambda} \leq \underline{0}$ είναι

σημείο καμπής της $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ (υπό την συνθήκη $\underline{\lambda} \leq \underline{0}$) τότε το $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο ελαχίστου της f υπό τους περιορισμούς $g_i(\underline{x}) \leq 0$ $i=1, 2, \dots, m$

• Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f, g_i $i=1, 2, \dots, m$ είναι κυρτές τότε ισχύει το αντίστροφο (αντίστροφο)

Θεώρημα 2: Εστω $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ σημείο ελαχίστου της κυρτής συνάρτησης f υπό τους περιορισμούς $g_i(\underline{x}) \leq 0$, g_i κυρτή $i=1, 2, \dots, m$. Αν για ένα τουλάχιστον $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι σχέσεις $g_i(\underline{x}_0) < 0$ $i=1, 2, \dots, m$ τότε υπάρχει $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^M$, $\underline{\lambda} \leq \underline{0}$ ώστε το $(\underline{a}, \underline{\lambda})$ να είναι σημείο καμπής της $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ υπό την συνθήκη $\underline{\lambda} \leq \underline{0}$.

Από τις προηγούμενες προτάσεις είναι φανερό (βλ. 75) ότι το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της f υπό τους περιορισμούς $g_i(\underline{x}) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,\mu$ μετασχηματίζεται στο πρόβλημα της εύρεσης των σημείων καμψής της συνάρτησης $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ με $\underline{\lambda} \leq 0$. Ισχύει επίσης το επόμενο πόρισμα.

Θεώρημα 3: Αν οι συναρτήσεις $f, g_i \quad i=1,2,\dots,\mu$ είναι διαφορίσιμες τότε κάθε σημείο καμψής της συνάρτησης Lagrange

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \cdot g_i(\underline{x}), \quad \underline{\lambda} \leq 0$$

ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$g_i(\underline{x}) \leq 0$$

$$\lambda_i \cdot g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,\mu$$

$$\lambda_i \leq 0 \quad (\text{συνθήκες Kuhn-Tucker})$$

Θεώρημα 4: Αν οι συναρτήσεις $f, g_i \quad i=1,2,\dots,\mu$ είναι διαφορίσιμες, τότε κάθε σημείο καμψής της συνάρτησης Lagrange $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ με $\underline{x} \geq 0$, $\underline{\lambda} \leq 0$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} \geq 0$$

$$x_j \left[\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} \right] = 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$x_j \geq 0$$

$$g_i(\underline{x}) \leq 0$$

$$i=1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_i g_i(\underline{x}) = 0$$

$$\lambda_i \leq 0$$

(συνθήκες Kuhn-Tucker)

(Η διαφορά θεωρήματος 3 με 4 είναι ότι στο 4 έχουμε $\underline{x} \geq 0$)

Προβολή: Οι συνθήκες Kuhn-Tucker είναι αναγκαί-

-ες συνθήκες τις οποίες ικανοποιεί κάθε σημείο κομμής της συνάρτησης Lagrange.

Δεν είναι όμως απαραίτητα και ικανές,

δηλαδή υπάρχουν εν γένει σημεία $(\underline{x}, \underline{\lambda})$

τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές

χωρίς όμως να αποτελούν σημεία κομμής

της $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ με αποτέλεσμα να χάνεται

αδύνατη η χρήση του θεωρήματος 1 για

την εύρεση λύσεων του προβλήματος της βελτι-

-στοποίησης υπό ανισοτικούς περιορισμούς

Στην ειδική όμως περίπτωση που οι συναρτή-^{(6ε)74}
-σεις f, g_i $i=1,2,\dots,\mu$ είναι κυρτές, το θεώρημα 2
εφασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον
σημείου καμπής $(\underline{x}, \underline{z})$ της $L(\underline{x}, \underline{z})$ και σύμ-
-ψυχα με το θεώρημα 1 το $\underline{z}$ θα είναι σημείο
(τοπικού) ελάχιστου της f υπό τους περιορι-
-σμούς $g_i(\underline{x}) \leq 0$ $i=1,2,\dots,\mu$. Αφού όμως η f
είναι κυρτή θα έχει ένα μόνο ελάχιστο
το οποίο μάλιστα θα είναι ολικό ελάχιστο
(βλ. θεώρημα 6ελ 43). Μπορούμε λοιπόν να
πούμε ότι όταν η προς βελτιστοποίηση
συναρτηση και οι περιορισμοί είναι κυρτοί
τότε το πρόβλημά μας έχει μοναδική λύση,
η οποία θα βρίσκεται από την επίλυση των
συνθηκών Kuhn-Tucker.

Η έρευνα κατάλληλων προϋποθέσεων οι οποίες να
εφασφαλίζουν τη λύση του προβλήματος μέσω
των συνθηκών Kuhn-Tucker έχει ιδιαίτερο ερευνη-
-τικό ενδιαφέρον και αποτελεί ακόμη αντιμε-
-τιμώ μελέτης (έχει μάλισταδειχθεί ότι η
κυρτότητα των g_i $i=1,2,\dots,\mu$ μπορεί να αντικατα-
-σταθεί με την γενικότερη υπόθεση της κυρτότη-
-τας του συνόλου A των εφικτών λύσεων)

Σημειώνουμε επίσης τα ϵ_i

- α. Αν ένας περιορισμός είναι της μορφής $g_i(x) \geq 0$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σαν $-g_i(x) \leq 0$ και για μοναδικότητα λύσης αρκεί η g_i να είναι κοίδη.
- β. Αν ένας περιορισμός είναι υπό μορφή ισότητας $g_i(x) = 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από τους $g_i(x) \leq 0$, $-g_i(x) \leq 0$ και συγχωνεύοντας τους αντίστοιχους μη θετικούς πολλαπλασιαστές $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2} \geq 0$ σε ένα παίρνουμε τον ελεύθερο (δηλαδή χωρίς περιορισμό μη θετικότητας) πολλαπλασιαστή $\lambda_i = \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}$.
- Αν η g_i είναι συγχρόνως κυρτή και κοίδη τότε και πάλι εφασφαλίζεται η μοναδικότητα της λύσης μέσω των συνθηκών Kuhn-Tucker.
- γ. Για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f υπό τους περιορισμούς $g_i(x) \leq 0$ ($i=1,2,\dots,m$) μπορούμε κάνοντας ανάλοχους συλλογισμούς με τα θεωρήματα 1 έως 4 να δείξουμε ότι οι λύσεις ικανοποιούν πάλι τις συνθήκες Kuhn-Tucker με μόνη διαφορά ότι οι πολλαπλασιαστές λ_i είναι τώρα

μη αρνητικοί. (αντί να είναι μη θετικοί) (66)79

Για μοναδικότητα λύσης αρκεί να είναι η συνάρτηση f κοίδη και το σύνολο A_0 των επιτρεπόμενων λύσεων κυρτό (ή οι συναρτήσεις g_i ($i=1,2,\dots,m$ κυρτές)

Συνδυάζοντας όλα τα μέχρι τώρα αποτελέσματα έχουμε τα εξής:

Για την λύση του γενικού προβλήματος της εύρεσης των (τοπικών) ακροτάτων της συνάρτησης f υπό τους περιορισμούς

$$g_i(\underline{x}) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,m_1$$

$$g_i(\underline{x}) \geq 0 \quad i=m_1+1,\dots,m_2$$

$$g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=m_2+1,\dots,m$$

Οδηγούμε αρχικά την συνάρτηση Lagrange

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\underline{x})$$

Αν οι συναρτήσεις f, g_i ικανοποιούν τους περιορισμούς που δίνονται στον παρακάτω πίνακα η μοναδική βέλτιστη λύση $\underline{x} = \underline{x}^*$ μπορεί να βρεθεί από τις συνθή-

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$g_i(\underline{x}) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,M_1$$

$$g_i(\underline{x}) \geq 0 \quad i=M_1+1, M_1+2, \dots, M_2$$

$$g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=M_2+1, M_2+2, \dots, M$$

$$\lambda_i \cdot g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,M \quad \text{όπου οι πολλαπλα-}$$

-γιατές Lagrange $\lambda_i \quad i=1,2,\dots,M$ περιορίζονται σύμφωνα με την τέταρτη στήλη του παρακάτω πίνακα

Είδος Βελτιστοποίησης	Αναπόμειντες συνθήκες			
	$f(\underline{x})$	$g_i(\underline{x})$	λ_i	i
Ελαχιστοποίηση	κυρτή	κυρτή	≤ 0	$i=1,2,\dots,M_1$
		κοίλη	≥ 0	$i=M_1+1, \dots, M_2$
		κυρτή ή κοίλη (ή γραμμική)	ελεύθερα	$i=M_2+1, \dots, M$
Μεγιστοποίηση	κοίλη	κυρτή	≥ 0	$i=1,2,\dots,M_1$
		κοίλη	≤ 0	$i=M_1+1, M_1+2, \dots, M_2$
		κυρτή ή κοίλη (ή γραμμική)	ελεύθερα	$i=M_2+1, M_2+2, \dots, M$

(6ε) 80)

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εγχείο της επίθεσης

περιοχής που ορίζεται από τους περιορισμούς
 $x-y \geq 1$, $-x+2y \leq 0$, $x \leq 4$, $y \geq 0$ το οποίο
απέχει ελάχιστη απόσταση από το εγχείο
 $(1,1) \in \mathbb{R}^2$

Λύση: Εδώ θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε
τη συνάρτηση $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ υπό τις
εωθήκες

$$g_1(x,y) = -x+y+1 \leq 0$$

$$g_2(x,y) = -x+2y \leq 0$$

$$g_3(x,y) = x-4 \leq 0$$

$$g_4(x,y) = -y \leq 0$$

Οι συναρτήσεις g_i $i=1,2,3,4$ είναι γραμμικές
οπότε μπορούν να θεωρηθούν κυρτές
ή κοίλες ενώ η f είναι μια οριστικά
θετική τετραγωνική μορφή και επομένως
κυρτή. Άρα η f έχει ένα και μοναδικό εγχείο
ελάχιστου το οποίο είναι δόση των εωθικών
Kuhn-Tucker.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$f_x - \lambda_1 g_{1x} - \lambda_2 g_{2x} - \lambda_3 g_{3x} - \lambda_4 g_{4x} = 0$$

$$f_y - \lambda_1 g_{1y} - \lambda_2 g_{2y} - \lambda_3 g_{3y} - \lambda_4 g_{4y} = 0$$

$$f_x = 2(x-1), \quad f_y = 2(y-1) \quad g_{1x} = -1 \quad g_{1y} = 1$$

$$g_{2x} = -1 \quad g_{2y} = 2 \quad g_{3x} = 1 \quad g_{3y} = 0 \quad g_{4x} = 0 \quad g_{4y} = -1$$

ΕΤΣΙ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$2(x-1) - \lambda_1(-1) - \lambda_2(-1) - \lambda_3 \cdot 1 - \lambda_4 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x-1) + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$2(y-1) - \lambda_1 \cdot 1 - \lambda_2 \cdot 2 - \lambda_3 \cdot 0 - \lambda_4(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(y-1) - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(-x+y+1) = 0$$

$$\lambda_2(-x-2y) = 0$$

$$\lambda_3(x-4) = 0$$

$$-\lambda_4 \cdot y = 0$$

ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΩΝ

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad (i=1,2,3,4)$$

$$-x-y \geq 1$$

$$-x+2y \leq 0$$

$$x \leq 4$$

$$y \geq 0$$

ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ
ΑΠΟ ΤΗ

$$g_i(x) \leq 0$$

$$(i=1,2,3,4)$$

$$\lambda_1 \leq 0$$

$$\lambda_2 \leq 0$$

$$\lambda_3 \leq 0$$

$$\lambda_4 \leq 0$$

Μένοντας το σύστημα των 6 εξισώσεων ως προς τους 6 αγνώστους x, y, z_1, z_2, z_3, z_4

βρίσκουμε 10 λύσεις

x	y	z_1	z_2	z_3	z_4
1	1	0	0	0	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	0
$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	0
2	1	-4	2	0	0
4	1	0	0	6	0
4	3	4	0	10	0
1	0	0	0	0	2
0	0	0	2	0	6
4	0	0	0	6	2

Η μόνη από τις 10 λύσεις που ικανοποιεί τις ανισοτικές συνθήκες είναι η δεύτερη

Άρα $\min f(x, y) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και η ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(1, 1)$ είναι

$$\sqrt{\min f(x, y)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x, y) = (x+2)^2 + y^2 \text{ υπό τον περιορισμό } x^3 + x^2 - 4y^2 \geq 0$$

Λύση

Εδώ $g_1 = -x^3 - x^2 + 4y^2$ δεν είναι κυρτή.

Μπορούμε όμως και πάλι να γράψουμε τις συνθήκες Kuhn-Tucker (χωρίς φوبικά του περιορισμού για τον αντίστοιχο στη g πολλαπλασιαστή Lagrange)

$$2(x+2) + 3\lambda x^2 + 2\lambda x = 0$$

$$2y - 8\lambda y = 0$$

$$\lambda(x^3 + x^2 - 4y^2) = 0$$

$$x^3 + x^2 - 4y^2 \geq 0$$

Το σύστημα των 3 πρώτων εξισώσεων δίνει τις

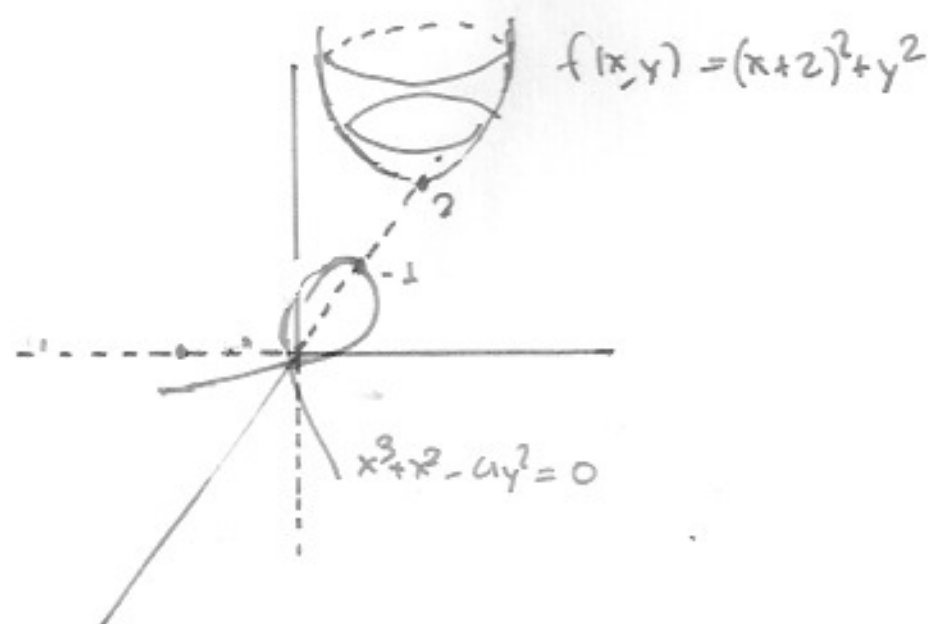
$$\lambda \geq 0, \quad x = -2, y = 0, \lambda = 0 \text{ και}$$

$$x = -1, y = 0, \lambda = -2$$

εκ των οποίων μόνο η δεύτερη είναι δεκτή

Η μοναδική αυτή λύση των συνθηκών

Kuhn-Tucker τυχαίνει να αποτελεί και τη λύση του προβλήματος όπως φαίνεται



Ειδική Περίπτωση

Ακροτάτα συνάρτησης δύο μεταβλητών σε κλειστό σύνολο

Αν $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ όπου A κλειστό σύνολο τότε η f έχει και μέγιστο (οδικό) και ελάχιστο (οδικό).

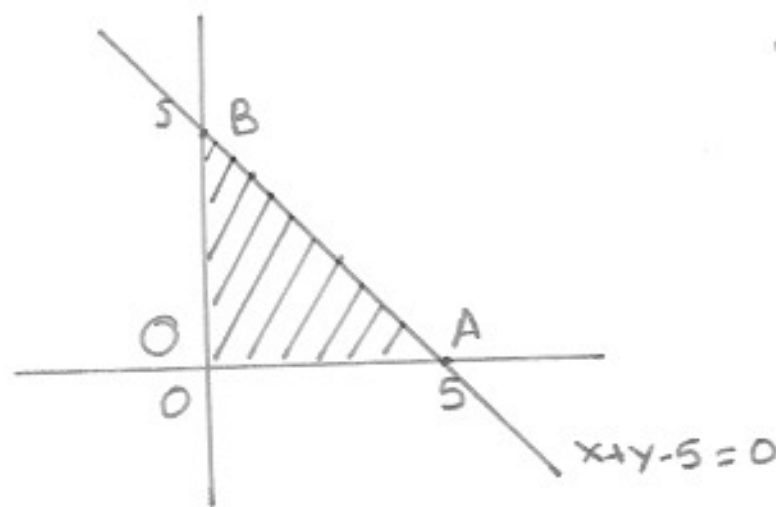
Επομένως αν βρούμε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f και συγκρίνουμε τις τιμές του f στις θέσεις αυτές. Η πιο μικρή τιμή θα είναι η ελάχιστη τιμή της f και η πιο μεγάλη θα είναι η μέγιστη τιμή της f . Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα

Άσκηση Να βρείτε τα ακρότατα της

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y \quad \text{όταν } (x, y) \in A$$

όπου A το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $x=0$, $y=0$, $x+y-5=0$ και πόινω σε αυτές

Λύση



Το σύνολο A αποτελείται από τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου OAB καθώς και τις πλευρές του

Αρχικά θα χνουμε να βρούμε πιθανές δέξες ακροτάτων στο εσωτερικό του A

$$f_x = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f_y = 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Το σημείο $(1, 1) \in A$ (στο εσωτερικό) άρα πιθανή δέξη ακροτάτα.

Αν κινείται το (x, y) στην ευθεία OA τότε $y=0$ $x \in [0, 5]$

Τότε $f(x,y) = f(x,0) = x^2 - 2x \quad x \in [0,5]$

Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,0)$ στο $[0,5]$

$f'(x,0) = 2x - 2$

x	0	1	5
$f'(x,0)$	/	-	+
$f(x,0)$	T.M	T.E	T.M

Ακρότατα έχουμε για $x=0$, $x=1$, $x=5$

Αρα τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, $(5,0)$ είναι πιθανές δέξεις ακροτάτων της $f(x,y)$

Αν το (x,y) κινείται στην πλευρά AB χωρίς το A . Τότε ισχύει $x+y-5=0$ ή $y=-x+5$

Αρα $f(x,y) = f(x, -x+5) = x^2 + (-x+5)^2 - 2x - 2(-x+5) =$

$= x^2 + x^2 - 10x + 25 - 2x + 2x + 10 = 2x^2 - 10x + 15$

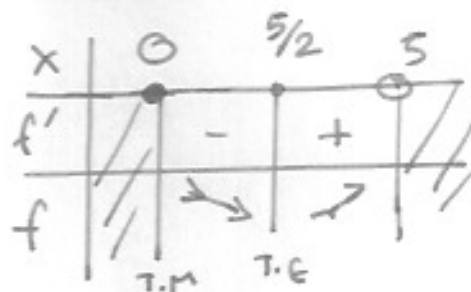
Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

με τον $2x^2 - 10x + 15$ (ας την συμβολίσουμε f)

όταν $x \in [0,5]$. (Ανοικτό στο 5 γιατί δεν συμπεριλαμβάνει το σημείο A)

$$f' = 4x - 10$$

(6ελ 87)



Εκουμε ακρότατα για $x=0$ και $x=5/2$

Αν $x=0$ τότε $y=5-0=5$ $(0,5)$

Αν $x=5/2$ τότε $y=5-5/2=5/2$ $(5/2, 5/2)$

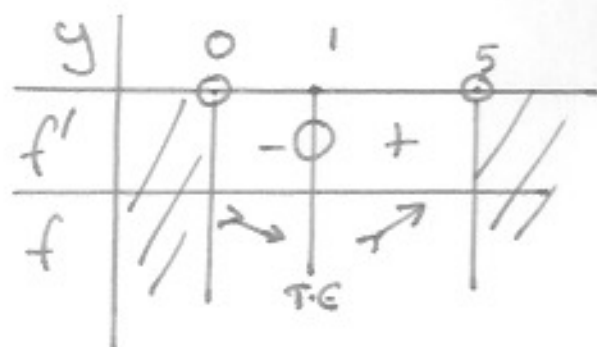
Αρα τα σημεία $(0,5)$ $(5/2, 5/2)$ είναι πιθανές δέξεις ακροτάτων της $f(x,y)$

Τέλος αν το σημείο (x,y) κινείται στην ευθεία $x=0$ πλευρά OB χωρίς τα σημεία O και B

Τότε $f(x,y)=f(0,y)=y^2-2y$ με $y \in (0,5)$

Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης με τύπο y^2-2y (ας την συμβολίσουμε f)

$$f' = \frac{df}{dy} = 2y - 2$$



Έχει ακρότατο για $y=1$ Αρα το σημείο $(0,1)$ είναι πιθανό ακρότατο της $f(x,y)$

Υπολογίζουμε την τιμή της $f(x,y)$ στα (βελ 88)
σημεία $(1,1)$ $(0,0)$ $(1,0)$ $(5,0)$ $(0,5)$ $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$
 $(0,1)$

$$f(1,1) = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$f(0,5) = 0^2 + 5^2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 = 15$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{5}{2} =$$

$$f(1,0) = 1^2 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 10 = \frac{50}{4} - 10 = \frac{5}{2}$$

$$f(5,0) = 5^2 + 0^2 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 0 = 15$$

$$f(0,1) = 0^2 + 1^2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1$$

Πιο μικρή τιμή είναι το -2 . Άρα η f
παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(1,1)$
και είναι ίσο με -2

Πιο μεγάλη τιμή είναι το 15 το οποίο παρου-
σιάζεται στα σημεία $(5,0)$ και $(0,5)$

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με 15
και εμφανίζεται σε δύο σημεία στο
 $(5,0)$ και στο $(0,5)$