

Ο όρος "Βελτιστοποίηση" αναφέρεται συνήθως στην εύρεση μεγίστου ή ελαχίστου μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών χωρίς ή με περιορισμούς. Στη κλασική βελτιστοποίηση αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή τεχνικών του διαφορικού λογισμού, σε αντίθεση με το δεχόμενο μαθηματικό προγραμματισμό όπου τα προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν με παραχωρίσεις και για αυτό αναπτύχθηκαν ειδικές μέθοδοι βελτιστοποίησης όπως μέθοδος Simplex.

1. Ακρότατα χωρίς περιορισμούς

1.1 Ορισμοί

Εστω f μια πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών ορισμένη σε ένα υπούπολο A του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $a \in A$ θα λέγεται σημείο ολικού ή απόλυτου ελαχίστου της f στο A αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(a) \leq f(x) \quad (1.1)$$

Η τιμή της συνάρτησης f στη θέση a θα λέγεται ολικό ή απόλυτο ελάχιστο της f και θα συμβολίζεται με $\min_{x \in A} f(x)$ ή απλώς $\min f(x)$.

ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΦΟΡΑ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΔΗΛΑΔΗ ^(6.2.32)
 $f(\underline{a}) \geq f(\underline{x})$ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΘΗΡΕΙΟ ΟΛΙΚΟΥ Η ΑΠΟΔΥΤΑ
ΜΕΧΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΟΛΙΚΟ Η ΑΠΟΔΥΤΟ ΜΕΧΙΣΤΟ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑ-
ΡΤΗΣΗΣ

ΑΝ Η ΕΧΕΘΗ $f(\underline{a}) \leq f(\underline{x})$ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟΠΙΚΑ ΣΕ ΜΙΑ
Δ-ΧΕΙΤΟΝΙΑ $\Gamma = S(\underline{a}, \delta)$ ΤΟΥ ΘΗΡΕΙΟΥ $\underline{a}$ ΤΟ $\underline{a}$
ΘΑ ΛΕΧΕΤΑΙ ΘΗΡΕΙΟ ΤΟΠΙΚΟΥ Η ΓΧΕΤΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ
ΤΗΣ f ΣΤΟ A ΚΑΙ Η ΤΙΜΗ $f(\underline{a})$ ΤΟΠΙΚΟ Η ΓΧΕΤΙΚΟ
ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΗΣ f . ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟΝ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ
 $\min_{\underline{x} \in \Gamma} f(\underline{x})$

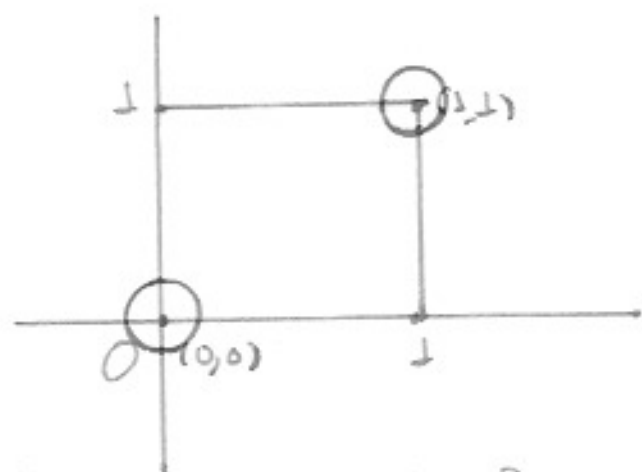
ΑΝΑΛΟΓΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΚΑΙ ΤΟ ΘΗΡΕΙΟ ΤΟΠΙΚΟΥ Η
ΓΧΕΤΙΚΟΥ ΜΕΧΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΤΟΠΙΚΟ Η ΓΧΕΤΙΚΟ ΜΕΧΙ-
ΣΤΟ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΧΜΑ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$
ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΤΟ ΘΗΡΕΙΟ
 $\underline{a} = (1, 2)$. ΔΗΛΑΔΗ $f(x_1, x_2) \geq f(1, 2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΤΟ $\underline{a} = (1, 2)$ ΕΙΝΑΙ ΘΗΡΕΙΟ ΟΛΙΚΟΥ
ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΧΜΑ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $A = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \}$
ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΤΟ $\underline{a} = (0, 0)$

και ολικό μέγιστο στο $g_2 = (1, 1)$. Κανένα όμως από αυτά δεν είναι τοπικό ακρότατο αφού σε οποιαδήποτε γειτονιά του g_1 στο $\mathbb{R}^2$ (οχι στο A) υπάρχουν σημεία που δίνουν στην f μικρότερες τιμές του $\min_{x \in A} f(x) = f(g_1) = 0$

και σε κάθε γειτονιά του g_2 υπάρχουν σημεία που κάνουν την f μεγαλύτερη του $\max_{x \in A} f(x) = f(g_2) = 2$.



Το πρόβλημα εδώ δημιουργήθηκε γιατί τα σημεία g_1 και g_2 είναι συνοριακά σημεία - α

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ακρότατα

Θεώρημα Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $a \in A$ και υπάρχει η παράγωγος $f'(a)$ τότε θα ισχύει $f'(a) = 0$. Δίνεται ότι το A ανοιχτό σύνολο

Θεώρημα: Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι μ τάξεως ($\mu > 1$) στο ανοικτό διάστημα $A \subset \mathbb{R}$ και ότι σε ένα σημείο $a \in A$

ισχύει:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(\mu-1)}(a) = 0, \quad f^{(\mu)}(a) \neq 0$$

I) Αν το μ είναι άρτιος αριθμός τότε το a θα είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f . Για συγκεκριμένα μ

i) Τοπικό ελάχιστο αν $f^{(\mu)}(a) > 0$

ii) Τοπικό μέγιστο αν $f^{(\mu)}(a) < 0$

II) Αν το μ είναι περιττός αριθμός τότε το a θα είναι σημείο καμψής δηλαδή σε μια περιοχή γύρω από το a η συνάρτηση f παίρνει και μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές από το $f(a)$

Θεώρημα: Έστω A ένα ανοιχτό υποδύναμο του $\mathbb{R}^n$

$x \in A$ και η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $D_i f(x)$ $i=1, 2, \dots, n$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x τότε θα ισχύει $\nabla f(x) = 0$

• Ένα σημείο x που πληρεί την σχέση $\nabla f(x) = 0$ λέγεται στάσιμο σημείο της f . Άρα ισχύει το

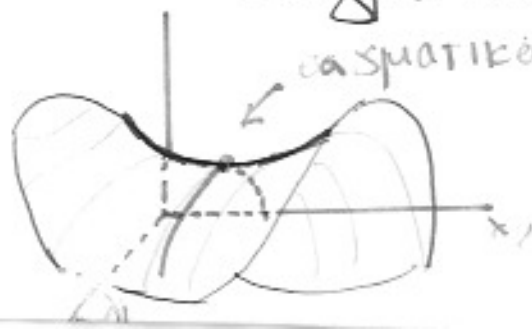
Πόρισμα: Κάθε τοπικό ακρότατο μιας συνάρτησης f είναι και στάσιμο σημείο της f

Προσοχή: Το αντίστροφο δεν αληθεύει, δηλαδή ένα στάσιμο σημείο μπορεί να μην είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Ένα στάσιμο σημείο το οποίο δεν είναι ούτε σημείο τοπικού μέγιστου ή σημείο τοπικού ελαχίστου σε κάθε χειτονιά του ονομάζεται

Γαυματικό σημείο.

Γαυματικό σημείο



Θεώρημα: Έστω A ένα ανοικτό υποδύναμο του $\mathbb{R}^n$ (σε 36)

$\mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση
η μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραχώχους
της τάξης. Αν το $a \in A$ είναι στάσιμο σημείο
της f τότε

α) Μια ικανή συνθήκη για να έχει η f
στο a τοπικό ακρότατο είναι η οριστικό-
τητα του Εσσιανού πίνακα $H_f(x)$ στη θέση
 $x = a$. Δηλαδή

i) Το a είναι σημείο ελαχίστου αν ο

$H_f(a)$ είναι οριστικά θετικός

ii) Το a είναι σημείο μέγιστου αν ο

$H_f(a)$ είναι οριστικά αρνητικός

β) Μια ικανή συνθήκη για να είναι το a σταθμα-
τικό σημείο της f είναι η μη οριστικότητα
του πίνακα $H_f(a)$

γ) Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το είδος
του σημείου a χωρίς εξέταση παραχώχων
ανώτερης της 2ης τάξης αν ο Εσσιανός πίνα-
κας $H_f(a)$ είναι ημιοριστικός

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Να βρείτε τα ακρότατα της f

Λύση $f_x = 3x^2 - 3y$

$f_y = 3y^2 - 3x$

Λύνουμε το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$

και $3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow y^2 - x = 0 \xrightarrow{y=x^2} (x^2)^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^3 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ τότε } y = x^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ τότε } y = 1^2 = 1 \end{cases}$

Άρα τα στάσιμα σημεία είναι $(0,0)$ και $(1,1)$

Ο εσβιανός πίνακας $H_f(x)$ είναι

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

Για τον πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ σύμφωνα με την πρόταση (6ΕΔ9) οι ελπίσες ορίζουσες

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-3)(-3) = -9 \quad \text{αρα } 0$$

$H_f(0,0)$ είναι μη οριστικός

αρα το σημείο $(0,0)$ είναι βαρυστατικό σημείο

Για τον Εξωτερικό πίνακα $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

οι ελάχιστες ορίσεις

$$\varepsilon_1 = 6 > 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - (-3)(-3) = 27 > 0$$

αρα είναι θετικά ορισμένος. Αρα το σημείο $(1,1)$ είναι σημείο ελαχίστου

Παράδειγμα Έστω $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - 2x - 2z$

Να βρείτε τα ακρότατα

Λύση $f_x = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$f_y = 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$f_z = 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Αρα το $(1,0,1)$ είναι σταθιμο σημείο.

Ο Εξωτερικός πίνακας

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Οι εσάγωγες ορίζουσες του $H_f(1,0,1)$ είναι

$$\varepsilon_1 = 2 > 0 \quad \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Ο πίνακας $H_f(1,0,1)$ είναι ημιορισμένος θετικά άρα δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το είδος του σταθιμού σημείου $(1,0,1)$. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε παραγώγους ανώτερους της 2ης τάξης). Μπορούμε όμως και με άλλους τρόπους. Δηλαδή αν $h > 0$

$$f(1,-h,1) = 1 + (-h)^3 + 1 - 2 - 2 = -h^3 - 2$$

$$f(1,0,1) = 1 + 0^3 + 1 - 2 - 2 = -2$$

$$f(1,h,1) = 1 + h^3 + 1 - 2 - 2 = h^3 - 2$$

$$\text{Ισχύει} \quad -h^3 - 2 < -2 < h^3 - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(1,-h,1) < f(1,0,1) < f(1,h,1)$$

Άρα το $\underline{a} = (1,0,1)$ είναι βαρυστατικό σημείο

Παράδειγμα Έστω $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^2 - 2x - 2z$

Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

Λύση $f_x = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$f_y = 4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$f_z = 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Το $(1, 0, 1)$ στάσιμο σημείο

Ο Εσσιανός πίνακας $H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$H_f(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Οι εσάεσθνες ορίθουθε $\epsilon_1 = 2$ $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 0$

Αρα ο πίνακας είναι ημιορίθιτρά θετικός

αρα χρειάζομαστε παραχώρους ανώτερες της 2ης τάξης για να βγάλουμε συμπέρασμα.

Οπως $f(x,y,z) \geq f(1,0,1)$ για

$$x^2 + y^4 + z^2 - 2x - 2z \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^4 + z^2 - 2z + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^4 + (z-1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε}$$

(x,y,z) . Αρα το $(1,0,1)$ σημείο ολικού ελα-

Άσκηση Να βρείτε τα ακρότατα της

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

Λύση $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

$$f_y = 6xy - 6y = 0 \Leftrightarrow 6y(x-1) = 0 \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Αν $y=0$ τότε $3x^2 + 3 \cdot 0^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$$3x(x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Αρα $(0,0)$ $(2,0)$

στάσιμα σημεία

Αν $x=1$ τότε $3 \cdot 1^2 + 3y^2 - 6 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \quad \text{Αρα } (1,1) \quad (1,-1)$$

στάσιμα σημεία

Ο εσβιανός πίνακας $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{bmatrix}$

Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$$(-1) \cdot \varepsilon_1 = +6 > 0 \quad (-1) \cdot \varepsilon_2 = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Αρα ο $Hf(0,0)$ οριστικά αρνητικός άρα
το σημείο $(0,0)$ σημείο μέγιστου

Για το σημείο $(2,0)$ έχουμε

$$H_f(2,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εδώ έχουμε } \epsilon_1 = 6 > 0 \text{ και } \epsilon_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Άρα το $(2,0)$ είναι σημείο ελαχίστου

Για το σημείο $(1,1)$ έχουμε

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

Άρα ο $H_f(1,1)$ είναι μη οριστικός άρα
το σημείο $(1,1)$ είναι σχηματικό

Για το σημείο $(1,-1)$ έχουμε

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \epsilon_1 = 0 \text{ και } \epsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

$$\text{και } (-1)\epsilon_2 = -36$$

Άρα ο πίνακας $H_f(1,-1)$ είναι μη οριστικός
άρα το σημείο $(1,-1)$ είναι σχηματικό σημείο

Θεώρημα Έστω K ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών και $\underline{a} \in K$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f . Τότε

- i) Το $\underline{a}$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f
- ii) Αν για το $\underline{b} \in K$ ισχύει $f(\underline{a}) = f(\underline{b})$ τότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της σε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $[\underline{a}, \underline{b}]$

Λήμμα: Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραχύχους 2ης τάξης στο κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1) \geq (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)' \cdot \nabla f(\underline{x}_1), \quad \forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$$

Θεώρημα: Έστω f μια κυρτή πραγματική συνάρτηση μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραχύχους 2ης τάξης στο κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\underline{a} \in K$ αν και μόνο ισχύει

$$(\underline{x} - \underline{a})' \cdot \nabla f(\underline{a}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in K$$

Πόρισμα Έστω f μια κυρτή πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραχύχους 2ης τάξης στο κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$.

Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να παρουσιάσει
η f ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο $\underline{x}$ του
 K είναι να ισχύει $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$, δηλαδή κάθε
στάθιμο σημείο της f σημείο (ολικού) ελάχιστου

Παρατήρηση: Όλα τα αποτελέσματα της παραγ-
ράφου αυτής ισχύουν και για κοίτες συνάρτη-
σεις αρκεί να αλλάξει η φορά των ανισότη-
των και το "ελάχιστο" να αντικατασταθεί με το
"μέγιστο"

Παράδειγμα: Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρι-
κός πίνακας και $T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x}$ η αντίστοιχη
τετραγωνική μορφή. Γράφοντας

$$T(\underline{x}) = a_{11}x_1^2 + 2 \cdot x_1 \sum_{j \neq 1} a_{1j} \cdot x_j + \sum_{k \neq 1} \sum_{j \neq 1} a_{kj} \cdot x_k \cdot x_j$$

$i=1, 2, \dots, n$ και παραχωρίζοντας ως προς x_i

$$\text{βρίσκουμε } D_i T(\underline{x}) = 2 \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{ή}$$

$$\text{ισοδύναμα σε πίνακική μορφή } \nabla T(\underline{x}) = 2A\underline{x}$$

σύμφωνα με το Λήμμα (6343) η T είναι κυρτή
αν και μόνο αν $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$T(\underline{x}_2) - T(\underline{x}_1) \geq 2(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)' \cdot A \cdot \underline{x}_1. \text{ Μετά από}$$

ορισμένες πράξεις καταλήγουμε στη συνθήκη

$$(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)' \cdot A \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) \geq 0 \text{ από την οποία συμπεραι-} \\ \text{-νουμε ότι ο πίνακας } A \text{ πρέπει να είναι ημιοριστικός}$$

(6E-45)

α) Ακρότατο αν ισχύει $f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$

και ειδικότερα

i) ελάχιστο αν $f_{xx}(a,b) > 0$

ii) μέγιστο αν $f_{xx}(a,b) < 0$

β) Ταχμοειδές δηλαδή σε κάθε γειτονιά του $(a,b)'$

ισχύει μια από τις σχέσεις

$$f(a,y) \leq f(a,b) \leq f(x,b) \text{ ή } f(x,b) \leq f(a,b) \leq f(a,y)$$

$$\text{αν } f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$$

γ) Ακαθόριστο δηλαδή απαιτούνται και άλλοι υπολογισμοί για να προσδιοριστεί το είδος του αν

$$f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) = 0$$

3. Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν τα στάβιμα σημεία των συναρτήσεων

$$i) f(x,y) = x^3 + 2xy + 8y^3 \quad ii) f(x,y) = e^x \cdot \cos y$$

$$iii) f(x,y) = x^2 + y^2 \quad iv) f(x,y) = (x+y) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$v) f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

4. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάβιμα σημεία των συναρτήσεων

$$i) f(x,y,z) = 2xyz - 4xz - 2yz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z$$

$$ii) f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 - 12x$$

$$iii) f(x,y,z) = 2x^2 + y^3 + z^2 - 4x - 3y - 2z$$

$$iv) f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 2xyz$$

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z) = x+2z+yz - x^2 - y^2 - z^2$ ^(6ε>47)
είναι κοίτη στο $\mathbb{R}^3$ και στη συνέχεια βρείτε
την μέγιστη τιμή της

6. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4yz - 8x - 8y$ είναι
κυρτή στο $\mathbb{R}^3$ και στη συνέχεια βρείτε την
ελάχιστη τιμή της

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

Ορισμοί

Έστω ότι έχουμε $m+1$ πραγματικές συναρτήσεις
η μεταβλητών $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ με πεδίο ορισμού
ένα υποσύνολο A του χώρου $\mathbb{R}^n$ και ας ορίσουμε
το σύνολο $A_0 = \{ \underline{x} \in A : g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,m \}$

των εφικτών λύσεων για τους περιορισμούς

$$g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,m.$$

Θα λέμε ότι το σημείο $\underline{q} \in A_0$ είναι

σημείο τοπικού ελαχίστου της f υπό τις συνθή-

-κες $g_i(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,m$ αν ο περιορισμός

της f στο σύνολο A_0 παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο στο $\underline{q}$ δηλαδή υπάρχει δ -χέλιονιά

$T = S(\underline{q}, \delta)$ του $\underline{q}$ ώστε να ισχύει

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) \quad \forall \underline{x} \in A \cap \Gamma.$$

Η τιμή της συνάρτησης f στη θέση $\underline{a}$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της f υπό τις συνθήκες $g_i(\underline{x})=0$ $i=1,2,\dots,\mu$

Με την αντίθετη φορά $f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$ ορίζεται το σημείο τοπικού μέγιστου και το τοπικό μέγιστο της f υπό τις συνθήκες $g_i(\underline{x})=0$ $i=1,2,\dots,\mu$

Επίσης αν ο περιορισμός της f στο σύνολο A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (ή ολικό μέγιστο) στο $\underline{a}$ θα πούμε ότι το $\underline{a}$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου (ή ολικού μέγιστου) της f υπό τις συνθήκες $g_i(\underline{x})=0$ $i=1,2,\dots,\mu$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου

$2x+3y+z=1$ που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή $\underline{a}=(0,0,0)$

Λύση Η απόσταση του τυχαίου σημείου του επιπέδου έστω $M(x,y,z)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ $d(x,y,z)=OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ή ισοδύναμα την $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ υπό την συνθήκη $2x+3y+z=1$

Λύνουμε τον περιορισμό ως προς z και αντικαθισ-
-τώντας στην f παίρνουμε μια συνάρτηση δύο
ανεξάρτητων μεταβλητών x και y

$h(x, y) = f(x, y, 1 - 2x - 3y) = 5x^2 + 10y^2 + 12xy - 4x - 6y + 1$
της οποίας τα ακρότατα μπορούν να προσδιο-
-ριστούν με τις μεθόδους που προαναφέραμε

$$\begin{aligned} h_x = 10x + 12y - 4 = 0 &\Leftrightarrow 5x + 6y = 2 \\ h_y = 20y + 12x - 6 = 0 &\Leftrightarrow 10y + 6x = 3 \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{1}{7}, y = \frac{3}{14}$$

Το στάσιμο σημείο είναι το $(\frac{1}{7}, \frac{3}{14})$

$$h_{xx} = 10, \quad h_{xy} = 12, \quad h_{yy} = 20$$

$$H_h\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$$

Οι ελάχιστες ορίζουσες

$$\varepsilon_1 = 10 > 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 = 10 \cdot 20 - 12^2 = 200 - 144 = 56 > 0$$

Αρα το σημείο $(\frac{1}{7}, \frac{3}{14})$ είναι σημείο ολικού
ελαχίστου το οποίο είναι

$$h\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right) = \frac{1}{14}. \quad \text{Αρα η ελάχιστη απόσταση}$$

$$\delta_0 \text{ είναι } \sqrt{\frac{1}{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange (6.50)
Εστω ότι αναζητούμε τα ακρότατα μιας
πραγματικής συνάρτησης f η μεταβλητών
υπό τον περιορισμό $g(x)=0$. Η μέθοδος
Lagrange αποτελείται από τα παρακάτω
βήματα.

Βήμα 1: Σχηματίζουμε την συνάρτηση Lagrange
ή Lagrangian $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
και ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange

Βήμα 2: Θεωρώντας την L σαν συνάρτηση $n+1$
μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ υπολογίζουμε τα
σταθίμα σημεία της. Οι n πρώτες συντεταχ-
μένες $a_1, a_2, \dots, a_n$ κάθε τέτοιου σημείου δίνουν
ένα πιθανό σημείο ακρότατου $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
της f υπό τον περιορισμό $g(x)=0$

Βήμα 3: Ελέγχουμε σε ποια από τα σημεία
που βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα η f
παρουσιάζει ακρότατο και σε ποια όχι.

ΣΧΟΛΙΟ
• Η θεωρητική επεξήγηση των βημάτων 1 και 2
δίνεται από το επόμενο θεώρημα, ενώ στα
θεωρήματα 3 και 4 δίνεται ένα κριτήριο για την
πραγματοποίηση της διερεύνησης του βήματος 3

Θεώρημα 1: Έστω f, g δύο συνεχώς διαφορίσι- (68/51)
 -μες συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύν-
 -ολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\underline{a} \in A$ ένα τοπικό ακρότατο της
 f υπό τον περιορισμό $g(\underline{x})=0$. Αν στο σημείο
 $\underline{a}$ δεν μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι
της g , τότε υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\nabla f(\underline{a}) = \ell \nabla g(\underline{a}), \text{ δηλαδή για } \underline{x} = \underline{a}, \lambda = \ell$$

ικανοποιούνται οι εξισώσεις $\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} - \lambda \cdot \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_i} = 0$
 $i = 1, 2, \dots, n$

• Στην περίπτωση που οι περιορισμοί είναι περι-
 -εσσότεροι του ενός έστω $g_i(\underline{x})=0 \quad i=1, 2, \dots, m$
 τότε η συνάρτηση Lagrange παίρνει την μορφή

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\underline{x}) \quad \underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)'$$

Θεώρημα 2: Έστω $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ συνεχώς διαφο-
 -ρίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό
 σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ($m < n$) και $\underline{a} \in A$ ένα τοπικό
 ακρότατο της f υπό τους περιορισμούς $g_i(\underline{x})=0$
 $i=1, 2, \dots, m$. Αν ο βαθμός του $m \times n$ πίνακα
 $D_{\underline{g}} g_i(\underline{a})$ είναι m τότε θα υπάρχουν μ

(6752)
 μ πραγματικοί αριθμοί $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_\mu$ ώστε να ισχύει

$$\nabla f(\underline{a}) = \ell_1 \nabla g_1(\underline{a}) + \ell_2 \nabla g_2(\underline{a}) + \dots + \ell_\mu \nabla g_\mu(\underline{a})$$

δηλαδή για $\underline{x} = \underline{a}$, $\underline{\lambda} = \underline{\ell}$ ικανοποιούνται οι εξισώ-

-σεις
$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

Θεώρημα 3: Έστω $f, g_1, g_2, \dots, g_\mu$ πραγματικές συναρτή-

-σεις n μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο ανοικτό σύνολο

$A \subset \mathbb{R}^n$. Έστω ακόμη

$$H_\varepsilon = H_\varepsilon(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P' & Q \end{pmatrix} \quad \text{ο επαυξημένος}$$

εξισωμένος πίνακας όπου

$$P = P(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \nabla' g_1(\underline{x}) \\ \nabla' g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ \nabla' g_\mu(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

$$Q = Q(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \left(\frac{\partial^2 L(\underline{x}, \underline{\lambda})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$O = (0) \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu} \quad \text{μηδενικός πίνακας}$$

Αν το $(\underline{a}, \underline{\ell})$ είναι στάσιμο σημείο της συναρτήσεως Lagrange $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$ τότε το $\underline{a}$ είναι:

i) Σημείο μεγίστου της f αν αρχίζοντας με (6.53) την κύρια εδάφεια ορίζουσα τάξης $2\mu+1$ της εββιανής $H_E(\underline{a}, \underline{e})$ οι τελευταίες $\nu-\mu$ κύριες εδάφειες έχουν τιμές ενάλλαξ θετικές και αρνητικές με πρώτο πρόσημο το $(-1)^{\mu+1}$

ii) Σημείο ελάχιστου της f αν αρχίζοντας με την κύρια εδάφεια ορίζουσα τάξης $2\mu+1$ της εββιανής $H_E(\underline{a}, \underline{e})$ οι τελευταίες $\nu-\mu$ κύριες εδάφειες έχουν πρόσημο ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^\mu$

Παρατήρηση: Τα θεωρήματα 1 και 2 δίνουν αναγκαία συνθήκη για ακρότατα ενώ το θεώρημα 3 δίνει ικανή συνθήκη. Υπάρχουν όμως και συνθήκες ικανές και αναγκαίες οι οποίες όμως στη πράξη είναι δυσχρηστές. Μια τέτοια συνθήκη είναι

Θεώρημα 4: Εστω $r_1, r_2, \dots, r_{n-\mu}$ οι $n-\mu$ το πολύ - θος πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$\det \begin{pmatrix} 0 & P \\ P' & Q - r \cdot I_n \end{pmatrix} = 0$$

όπου τα P, Q όπως στο Θεώρημα 3 και η συνάρτηση υπολογίζεται σε ένα σταθερό σημείο $(\underline{a}, \underline{e})$ της συνάρτησης Lagrange $L(\underline{x}, \underline{\lambda})$. Τότε τα Γ_i $i=1, 2, \dots, n-m$ θα είναι:

i) Αρνητικά αν το $\underline{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου

ii) Θετικά αν το $\underline{a}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σημείο τομής των

επιπέδων $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ και $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή $\underline{Q} = (0, 0, 0)$

Λύση: Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρ-

-τηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ υπό τους

περιορισμούς $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$ και

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5).$$

Οι αναγκαίες συνθήκες από το Θεώρημα 2 είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2x_2 - \lambda_2 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \Leftrightarrow -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0 \Leftrightarrow 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

Λύνουμε το σύστημα των 5 παραπάνω εξισώσεων και βρίσκουμε το μοναδικό στάσιμο σημείο

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{37}{46}, \frac{16}{46}, \frac{13}{46}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23} \right)$$

Για να δείξουμε ότι το σημείο $a = \left(\frac{37}{46}, \frac{16}{46}, \frac{13}{46} \right)$ είναι σημείο ελαχίστου (ολικού αφού είναι μοναδικό) θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$H_E = H_E \left(\frac{37}{46}, \frac{16}{46}, \frac{13}{46}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23} \right) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Ο υποπίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ προκύπτει από $\begin{bmatrix} g_{1x_1} & g_{2x_1} \\ g_{1x_2} & g_{2x_2} \\ g_{1x_3} & g_{2x_3} \end{bmatrix}$

$$g_{1x_1} = 1 \quad g_{1x_2} = 1 \quad g_{1x_3} = 3$$

$$g_{2x_1} = 5 \quad g_{2x_2} = 2 \quad g_{2x_3} = 1$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ προκύπτει από τον πίνακα (6+256)

$$\begin{bmatrix} L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & L_{x_1 x_3} \\ L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} & L_{x_2 x_3} \\ L_{x_3 x_1} & L_{x_3 x_2} & L_{x_3 x_3} \end{bmatrix}$$

Εδώ $n - \mu = 3 - 2 = 1$. Θα πρέπει να ελέγχουμε μόνο το πρόβλημα της ορίζουσας $\det H_E$

$$\det H_E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 460 > 0 \text{ είναι οριστική}$$

$$\mu \text{ το } (-1)^n = (-1)^2 = 1.$$

Αρα το σημείο με την ελάχιστη απόσταση είναι το $\underline{a} = \left(\frac{37}{46}, \frac{16}{46}, \frac{13}{46} \right)$ και η ζητούμενη ελάχιστη απόσταση από την αρχή υπό τις

συνθήκες $g_1(\underline{x}) = 0$ και $g_2(\underline{x}) = 0$ είναι

$$\sqrt{f(\underline{a})} = \sqrt{\left(\frac{37}{46} \right)^2 + \left(\frac{16}{46} \right)^2 + \left(\frac{13}{46} \right)^2} = \sqrt{0,8478} = 0,9208$$

Άσκηση: Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η

συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ υπό τον περιορισμό

$$g(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$$

Λύση: Η Lagrangian είναι

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14)$$

Εκούμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda = 0$$

Λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων και βρίσκουμε

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (2, 2, 1, 1) \text{ ή } (2, -2, 1, 1) \text{ ή } \left(\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

Ο εναυτημένος Εξβιανός πίνακας είναι:

$$H_E = H_E(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Αφού $n-m=3-1=2$ το είδος των σταθιμων σημείων θα εξαρτάται από το πρόσημο των τετραγωνικών δυο κύριων εξαβδώνων οριζουδών της Εξβιανής

Όταν $\underline{x} = (2, 2, 1)$ και $\lambda = 1$ (Ανταδύ το πρώτο από τα 3 στάδια ημεία) ο εσθιανός πίνακας γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Οι δύο τελευταίες κύριες ελασσόνες ορίζουσες είναι

$$E_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

$$E_4 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 3 το σημείο $(2, 2, 1)$ οι ορίζουσες E_3, E_4 είναι αρνητικές και έχουν ίδιο πρόσημο με το $(-1)^n = (-1)^1 = -1 < 0$

Άρα το σημείο $(2, 2, 1)$ είναι σημείο ελαχίστου

Για το δεύτερο σημείο $(2, 2, 1)$ και $\lambda = 1$ η

εσθιανή είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Οι ελάχιστες ορίζουσες $E_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32$

και $E_4 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64$. Άρα όπως και το προ-

ηγούμενο είναι σημείο ελαχίστου

Για το σημείο $(\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5})$ και $\Delta = \frac{7}{5}$

δουλεύοντας ανάδοχα έχουμε $E_3 = \frac{64}{5} > 0$ και

$E_4 = 32 > 0$ κανένα από τα κριτήρια (i) και (ii) του θεωρήματος δεν ισχύει.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το σημείο $(\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5})$ δεν είναι τοπικού ακρότατου

Για να βεβαιωθείμε για την φύση του θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & P \\ P' & Q - r \cdot I_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 0 \\ 4 & 2-r & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2x-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = 0$$

Κίναμε ως προς r και βρίσκουμε τις $p_i(r)$

$$r_1 = 2 \quad \text{και} \quad r_2 = 2 \frac{x_2^2 - 5\Delta + 5}{x_2^2 + 5}$$

Εφαρμόζουμε τα r_1, r_2 για το σημείο $(\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5}, \frac{7}{5})$

$$\text{οπότε } r_1 = 2 \text{ και } r_2 = 2 \frac{0^2 - 5\frac{7}{5} + 5}{0^2 + 5} = 2 \frac{-7+5}{5} = -\frac{4}{5}$$

Έχουμε $r_1 > 0$ και $r_2 < 0$. Άρα κανένα από τα κριτήρια του Θεωρήματος 4 δεν ισχύει άρα το σημείο $(\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5}, \frac{7}{5})$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Αν εφαρμόζαμε το Θεώρημα 4 για τα σημεία $(2, 2, 1, 1)$ και $(2, -2, 1, 1)$ θα είχαμε

$$r_1 = 2 > 0 \text{ και } r_2 = \frac{8}{9} > 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4 θα ήταν τοπικά ελάχιστα}$$

Ασκήσεις

1. Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 + 5y^2$ υπό τον περιορισμό $2x + 3y = 6$
2. Να βρεθούν τα σημεία της περιφέρειας κύκλου κέντρου $(0, 2)$ και ακτίνας 1 που απέχουν από το σημείο $(3, 2)$ ελάχιστη και μέγιστη απόσταση

3. Να βρεθεί το σημείο τομής των επιπέδων (66362)
 $3x+y+z=2$ και $4x+2y+z=3$ που βρίσκεται
πιο κοντά στην αρχή των αξόνων
4. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με
δοσμένη διαγωνίου d να βρεθεί εκείνο το οποίο
μεγιστοποιεί τον όγκο
5. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα
με δοσμένο όγκο a^3 να βρεθεί εκείνο που
έχει το ελάχιστο εμβαδό επιφάνειας
6. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα
με δοσμένο εμβαδό επιφάνειας $2a^2$ να
βρεθεί εκείνο με τον μέγιστο όγκο
7. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόστα-
ση της αρχής των αξόνων από την τομή
του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ και του
επιπέδου $x+y-z=0$
8. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης
 $f(\underline{x})$ υπό τον περιορισμό $g_i(\underline{x})=0$ στις
επόμενες περιπτώσεις

$$i) f(x, y) = \frac{1}{2}xy \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$ii) f(x, y) = x^2 + 2y \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$iii) f(x, y) = x^2 - y^2 \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$iv) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 \quad g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + 0 \cdot x_3^2 + 3 \cdot x_4^2 - 9$$

$$v) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - 1$$