

ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ο χώρος της βελτιστοποίησης αναφέρεται στην αναζήτηση βέλτιστων παραμέτρων ενός συνήθως περίπλοκου συστήματος. Προβλήματα βελτιστοποίησης απαντώνται σε πολλά επιστημονικά πεδία όπως φυσική στη χημεία στην οικονομία στη μηχανική στην επιχειρηματική έρευνα Γεωφυσική κ.α.

Στα μαθηματικά διατυπώνεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης μιας ή πολλών μεταβλητών. Σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης τίθενται επιπλέον περιορισμοί τους οποίους οι λύσεις πρέπει να ικανοποιούν.

Μαθηματικό ΥπόβαθροΠίνακες και ΟρίζουσεςΒασικές έννοιες και ορισμοί

Πίνακας είναι ένα σύνολο μην το πλήθος αριθμών a_{ij} $i=1,2,\dots,m$ $j=1,2,\dots,n$ συνήθως πραγματικών οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε m γραμμές και n στήλες. Οι πίνακες θα συμβολίζονται στα επόμενα με κεφαλαία γράμματα $A, B, \Gamma, \dots$ κλπ. γράφουμε δε $A = (a_{ij})$ ή

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Το σύνολο των $m \times n$ πραγματικών πινάκων θα ^(σελ 2) συμβολίζεται με R_{mn} . Οι πίνακες του συνόλου R_n λέγονται τετραγωνικοί τάξεως n ενώ αντίστοιχα οι πίνακες του συνόλου R_n λέγονται διανύσματα-στήλες και του R_{1n} διανύσματα γραμμής.

Με A^T ή A' συμβολίζουμε τον ανάστροφο πίνακα του A

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Θα παριστάνουμε τα διανύσματα στήλες με

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ και } \underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Το σύνολο R_n των διανυσμάτων στήλων συμβολίζεται με R_n

Ενας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in R_n$ λέγεται

α. Τριγωνικός αν $a_{ij} = 0$ για κάθε ζεύγος (i, j) με $i > j$ ή αν $a_{ij} = 0$ για κάθε ζεύγος (i, j) με $i < j$

β. Διαγώνιος αν $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$

γ. Μοναδιαίος αν $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$, $a_{ii} = 1$ για κάθε i

- δ. Μηδενικός αν $a_{ij} = 0$ για όλα τα i, j
- ε. Συμμετρικός αν $A' = A$ δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$
- στ. Αντισυμμετρικός (ή Αντισυμμετρικός) αν $A = -A'$ δηλαδή αν $a_{ij} = -a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$

Ο μηδενικός πίνακας θα συμβολίζεται με O και ο μοναδιαίος με I_n και I .

Στο σύνολο των πινάκων ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις

α) Αθροισμα πινάκων $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in R_{mn}$

β) Γινόμενο πίνακα επί πραγματικό αριθμό

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \in R_{mn}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Γινόμενο δύο πινάκων $A = (a_{ij}) \in R_{m \times 2}$ και

$$B = (b_{ij}) \in R_{2 \times n} \quad \text{τότε}$$

$$A \cdot B = (c_{ij}) \in R_{mn} \quad \text{όπου}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot b_{kj} \quad i=1, 2, \dots, m \text{ και } j=1, 2, \dots, n$$

- Αν A και B είναι κατάλληλοι πίνακες ώστε να είναι επιτρεπτές οι πράξεις και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν τα επόμενα

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$

$$(aA)' = a \cdot A'$$

$$(A')' = A$$

σε κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in R_{nn}$ αντιστοιχεί ένας αριθμός ο οποίος λέγεται ορίζουσα και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det(A)$.

Αν ισχύει $|A| \neq 0$ ο πίνακας A αποκαλείται μη ιδιάζων (ή αντιστρέψιμος). Δηλαδή υπάρχει πίνακας που συμβολίζεται A^{-1} και ισχύει

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Αν A αντιστρέψιμος και έχουμε $A \cdot B = A \cdot \Gamma \Rightarrow B = \Gamma$ νόμος διαγραφής.

Αν B, Γ αντιστρέψιμοι τότε ισχύει $(B \cdot \Gamma)^{-1} = \Gamma^{-1} \cdot B^{-1}$

Εστω $A = (a_{ij}) \in R_{\mu\nu}$ ένας πίνακας διαστάσεων $\mu \times \nu$ και p θετικός ακέραιος $p \leq \mu, \nu$.

Η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε $\mu-p$ γραμμές και $\nu-p$ στήλες (άρα ο πίνακας που απομένει $p \times p$) του A λέγεται ελάσσων ορίζουσα τάξης p του πίνακα A

^(σελ 5)
 Σαν βαθμός ενός πίνακα ορίζεται η μέγιστη τάξη
 μη μηδενικών ελασσόνων οριζουσών του
 Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ το πολυώνυμο $P(\lambda) = |A - \lambda \cdot I|$ ονομάζε-
 ται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και
 είναι νιοστού βαθμού.

Οι ρίζες της πολυωνομικής επίθεσης $|A - \lambda I| = 0$
 ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα A

Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός τότε όλες οι
 ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθ-
 -μοί.

ΤΕΤΡΑΧΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας
 τάξης n και $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ένα διάνυσμα στην

κάθε ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού
 της μορφής $\underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \cdot x_j$ ονομάζεται

τετραγωνική μορφή ως προς τις n μεταβλητές
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ και θα συμβολίζεται με $T(\underline{x})$

$$T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot A' \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (A + A')}_{A_1} \cdot \underline{x} = \underline{x}' \cdot A_1 \cdot \underline{x}$$

Ο πίνακας $A_1 = \frac{1}{2} (A + A')$ είναι συμμετρικός.
 Μπορούμε επομένως χωρίς βλάβη γενικότητας
 να υποθέσουμε ότι ο πίνακας μιας τετραγωνικής
 μορφής είναι συμμετρικός

Σε μια τετραγωνική μορφή είναι πολλές φορές
χρήσιμο να αλλάζουμε τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$
σε νέες μεταβλητές $y_1, y_2, \dots, y_n$ μέσω ενός γραμμικού
μετασχηματισμού $\underline{x} = C \cdot \underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{x}$ όπου

C ένας $n \times n$ μη ιδιότων πίνακας

$$\text{Τότε } \underline{x}' A \cdot \underline{x} = (\underline{C} \cdot \underline{y})' \cdot A \cdot \underline{C} \cdot \underline{y} = \underline{y}' \underbrace{\underline{C}' A \cdot \underline{C}}_B \cdot \underline{y} = \underline{y}' B \cdot \underline{y}$$

όπου ο $B = \underline{C}' A \cdot \underline{C}$ είναι επίσης ένας συμμετρικός πίνακας.

Παράδειγμα Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Τότε } T(\underline{x}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + x_2, -x_2 + x_3, 2x_2 + x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + x_2) x_1 + (-x_2 + x_3) \cdot x_2 + (2x_2 + x_3) \cdot x_3 =$$

$$= x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 + x_3 x_2 + 2x_2 x_3 + x_3^2 =$$

$$= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + 3x_2 x_3$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (A + A') = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Τότε } T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A_1 \cdot \underline{x} = x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + 3 x_2 x_3$$

Αν είχαμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ τότε

$$T(\underline{x}) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + 5 \cdot x_3^2 + 2x_1x_2 + 0 \cdot x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\underline{x} = C \cdot \underline{y}$ όπου

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ τότε}$$

$$T(\underline{x}) = T(C \cdot \underline{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = T(\underline{y})$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα είναι φανερό ότι η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x})$ παίρνει θετικές τιμές για κάθε τριάδα $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)' \neq (0, 0, 0)'$ ή για κάθε $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)' \neq (0, 0, 0)'$.

Μια τέτοια τετραγωνική μορφή λέγεται οριστικά θετική και ο αντίστοιχος πίνακας οριστικά θετικός πίνακας

Ορισμός Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in R_{nn}$ (η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x}$) λέγεται

α. Οριστικά θετικός (αντίστοιχα οριστικά αρνητικός) αν η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x})$ παίρνει θετικές (αντίστοιχα αρνητικές) τιμές για κάθε μη μηδενικό $\underline{x} \in R_n$

6. Ημιοριστικά θετικός (αντίστοιχα ημιοριστικά αρνητικός) ^(σελ 8)

αν η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x})$ παίρνει μη αρνητικές (αντίστοιχα μη θετικές) τιμές για κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και υπάρχει μη μηδενικό $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $T(\underline{x}_0) = 0$

γ) Μη οριστικός αν δεν ισχύει καμία από τις (α), (β) δηλαδή αν η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x})$ παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές για κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Παρατήρηση Αν ο A είναι τετραγωνικός πινάκας οριστικά θετικός (αντίστοιχα ημιοριστικά θετικός) τότε ο πίνακας $-A$ είναι οριστικά αρνητικός (αντίστοιχα ημιοριστικά αρνητικός) και αντίστροφα

Παράδειγμα Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι οριστικά θετικός αφού $T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x} = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

Παράδειγμα Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ημιοριστικά αρνητικός αφού

$T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x} = -x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 = -(x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2$ παίρνει μη θετικές τιμές και υπάρχει $\underline{x}_0 = (1, 1, 0)$

$$\text{όπου } T(\underline{x}_0) = T(1, 1, 0) = - (1-1)^2 - 4 \cdot 0^2 = 0.$$

Παράδειγμα: ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ είναι
μη οριστικός αφού $T(\underline{x}) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - 2(x_3 - x_2)^2$

$$\text{και έχουμε } T(0, -1, 1) < 0 < T(1, 0, 0)$$

Οι επόμενες προτάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της οριστικότητας ενός πίνακα

Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ας συμβολίσουμε

ε_p την ελάχιστη ορίζουσα p τάξεως η οποία προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε τις $v-p$ τελευταίες γραμμές και τις $v-p$ στήλες

$$\text{δηλαδή } \varepsilon_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \quad p=1, 2, \dots, v$$

(Η ε_p ονομάζεται κύρια ελάχιστη ορίζουσα p τάξεως του πίνακα A)

Τότε ο πίνακας A είναι

a. Οριστικά θετικός (αντίστοιχα οριστικά αρνητικός) αν ισχύει $\varepsilon_p > 0$ (αντίστοιχα $(-1)^p \cdot \varepsilon_p > 0$) για όλα τα $p=1, 2, \dots, v$

b. Ημιοριστικά θετικός (αντίστοιχα ημιοριστικά αρνητικός) αν ισχύει $\varepsilon_p \geq 0$ (αντίστοιχα $(-1)^p \cdot \varepsilon_p \geq 0$) για όλα τα $p=1, 2, \dots, v$

για όλα τα $p=1,2,\dots,n$ και μια τουλάχιστον (βέλδο)
από τις κύριες ελάχιστες ορίζουσες του A μηδενί-
ζεται.

Πρόταση Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι n πραγματικές
ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Τότε ο πίνακας A είναι

- α. Οριστικά θετικός (αντίστοιχα οριστικά αρνητικός)
αν ισχύει $\lambda_k > 0$ (αντίστοιχα $\lambda_k < 0$) για
όλα τα $k=1,2,\dots,n$
- β) Ημιοριστικά θετικός (αντίστοιχα ημιοριστικά
αρνητικός) αν ισχύει $\lambda_k \geq 0$ (αντίστοιχα $\lambda_k \leq 0$)
για όλα τα $k=1,2,\dots,n$ και μια τουλάχιστον
από τις n ιδιοτιμές του A είναι ίση με μη-
δέν.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Βασικές έννοιες και ορισμοί

Εδώ θα ορίσουμε την ευήδη τοπολογική δομή
του n -διάστατου Ευκλείδειου χώρου. $\mathbb{R}^n$ ο οποίος απο-
τελείται από διανύσματα μήκους με n στοιχεία
Αρχικά πρέπει να ορίσουμε ένα τρόπο μέτρησης
του μήκους των διανυσμάτων. Αυτό γίνεται
με την έννοια της νόρμας.

Ορισμός: Νόρμα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις

συνθήκες α) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

β) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Οι πιο συνηθισμένες νόρμες είναι

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (x \cdot x')^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι γίνεται χρήση της δεύτερης νόρμας η οποία ονομάζεται Ευκλείδεια νόρμα. Οτι αποτέλεσμα ισχύει με την Ευκλείδεια νόρμα ισχύει και με τις άλλες δύο.

Επίσης για $n=1$ $\|x\| = |x|$ είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή (πολλές φορές συμβολίζουμε την νόρμα αντί για $\|\cdot\|$ με $|\cdot|$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Δηλαδή $|x|$ σημαίνει νόρμα όχι απόλυτη τιμή)

Επίσης για $n \leq 3$ η $|x|$ ανάχεται στη γνωστή έννοια της απόστασης του σημείου x από την αρχή ο ή το μήκος του διανύσματος x

Απόσταση για $x \neq y$ η ποσότητα

$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ θα εκφράζει την απόσταση των σημείων x και y

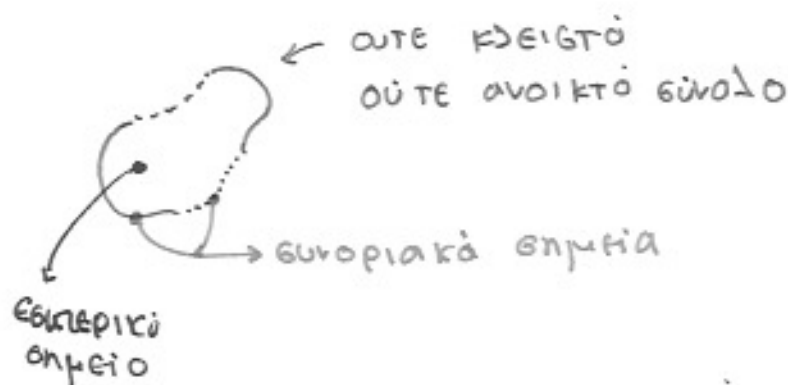
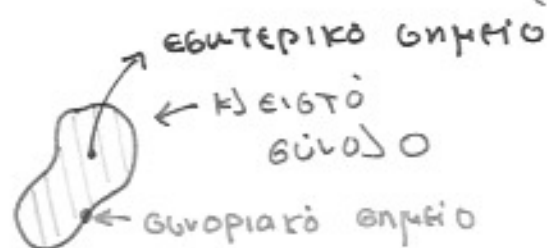
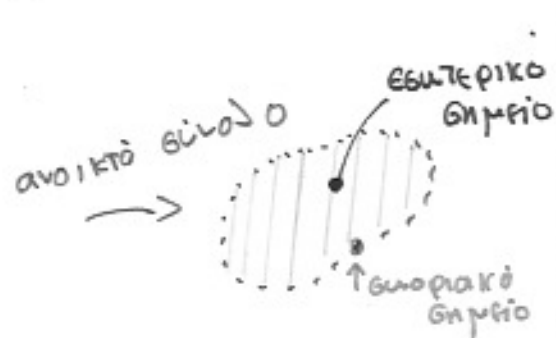
Ορισμός: Αν $a \in \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$ το σύνολο $\Gamma = S(a, \delta)$ περιέχει τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το a απόσταση μικρότερη του δ
 $\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \delta \}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται δ -χειτουνιά ή δ -περιοχή του a

Ορισμός: Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ανοικτό αν $\forall a \in A$ υπάρχει δ -χειτουνιά του a η οποία να περιέχεται στο A . Δηλαδή $\forall a \in A \exists \delta > 0 : S(a, \delta) \subset A$.

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ θα λέγεται κλειστό αν το συμπληρωμά του είναι ανοικτό

Ορισμός Ένα σημείο $a \in \mathbb{R}^n$ θα λέγεται εσωτερικό του συνόλου $B \subset \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει δ -χειτουνιά του a η οποία να περιέχεται στο B
 Δηλαδή το στοιχείο $a \in B$ λέγεται εσωτερικό αν $\exists \delta > 0 : S(a, \delta) \subset B$.

Ορισμός Ένα σημείο $a \in \mathbb{R}^n$ θα λέγεται συνοριακό σημείο του συνόλου B αν κάθε δ -χειτουνιά του a έχει κοινά στοιχεία τόσο με το B όσο και με το συμπληρωμά του $\mathbb{R}^n - B$



Ορισμός Αν $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ τότε το σύνολο $E = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = (1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2, \lambda \in \mathbb{R} \}$ θα λέγεται ευθεία που περνά από τα $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$ ενώ το $[\underline{x}_1, \underline{x}_2] = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = (1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2, 0 \leq \lambda \leq 1 \}$ θα λέγεται ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^n$ που περνά από τα $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$

Ορισμός Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$ το ευθύγραμμο τμήμα $[\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ περιέχεται στο K



Ορισμός: Έστω f μια συνάρτηση η μεταβλητών ^(εξ. 14)
ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

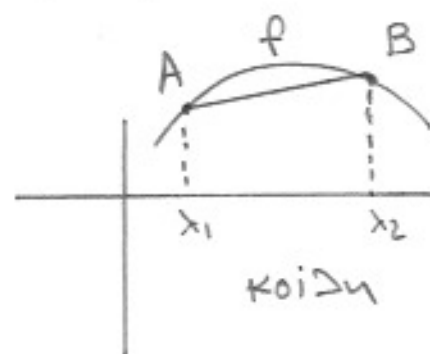
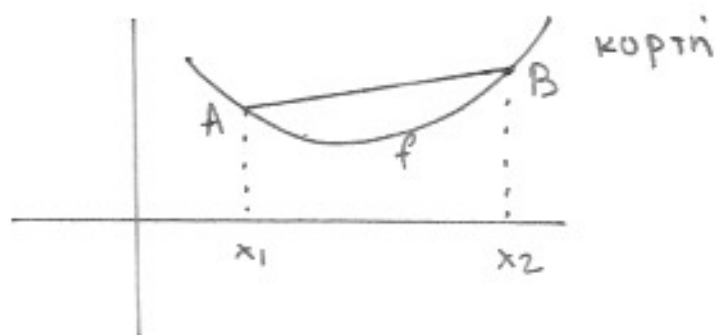
i) Η f θα λέγεται κυρτή αν για κάθε $x_1, x_2 \in K$
και $0 \leq \lambda \leq 1$ ισχύει $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$

ii) Η f θα λέγεται κοίλη αν για κάθε $x_1, x_2 \in K$
και $0 \leq \lambda \leq 1$ ισχύει $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$

Προφανώς αν η f είναι κυρτή τότε $n - f$ είναι
κοίλη και αντίστροφα

Η γεωμετρική ερμηνεία της κυρτής (αντίστοιχα κοίλης)
συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (για $n=1$) είναι:

Αν θεωρήσουμε δύο σημεία x_1, x_2 του πεδίου
ορισμού της τότε το χράφημα της f ανάμεσα σε
αυτά τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται
εξ' οσοκλήρου κάτω (αντίστοιχα πάνω) από το
ευθύγραμμο τμήμα AB



Μια σημαντική κατηγορία κυρτών (κοίλων)
συνάρτησεων είναι οι ημιοριστικές τετραγωνικές
μορφές.

Παράδειγμα: Έστω $T(\underline{x}) = \underline{x}' A \cdot \underline{x}$ μια τετραχώνια ^(6.15)
μορφή στον $\mathbb{R}^n$

Αν $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ και $0 \leq \lambda \leq 1$ έχουμε

$$(1-\lambda) T(\underline{x}_1) + \lambda T(\underline{x}_2) - T((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2) =$$

$$= (1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - ((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2)' A ((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2) =$$

$$= (1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - ((1-\lambda)\underline{x}_1' + \lambda\underline{x}_2') A ((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2) =$$

$$= (1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - [(1-\lambda)\underline{x}_1' A + \lambda\underline{x}_2' A] ((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda\underline{x}_2) =$$

$$= (1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - ((1-\lambda)^2 \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + (1-\lambda)\lambda \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_2 +$$

$$+ (1-\lambda)\lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda^2 \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2) =$$

$$(1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - (1-\lambda)^2 \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 - (1-\lambda)\lambda \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_2 -$$

$$- (1-\lambda)\lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_1 - \lambda^2 \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 =$$

$$((1-\lambda) - (1-\lambda)^2) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + (\lambda - \lambda^2) \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - (1-\lambda)\lambda \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_2 - (1-\lambda)\lambda \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_1$$

$$= 2(1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + 2(1-\lambda) \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - 2(1-\lambda) \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_2 - 2(1-\lambda) \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_1$$

$$= 2(1-\lambda) [\underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_1 + \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_2 - \underline{x}_1' A \cdot \underline{x}_2 - \underline{x}_2' A \cdot \underline{x}_1] =$$

$$= 2(1-\lambda) (\underline{x}_1 - \underline{x}_2)' A \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_2).$$

Αν ο A είναι ημιοριστικός θετικός τότε έχουμε
 ≥ 0 ορα η T είναι κυρτή ενώ αν ο A
 είναι ημιοριστικός αρνητικός τότε η T είναι
 κοίλη

(6/22/6)

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

με τύπο $f(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot \underline{x}$

Έχουμε $f((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2) = \underline{x}'((1-\lambda)\underline{x}_1 + \lambda \underline{x}_2) =$

$$= (1-\lambda) \underline{x}' \cdot \underline{x}_1 + \lambda \cdot \underline{x}' \cdot \underline{x}_2 = (1-\lambda) f(\underline{x}_1) + \lambda \cdot f(\underline{x}_2)$$

Άρα η f είναι συχρόνως και κυρτή και κοίτη

Ασκήσεις

1. Να χαρακτηρίσουν οι τετραγωνικές μορφές που αντιστοιχούν στους πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

και $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

2. Να βρεθούν οι πίνακες των οποίων οι αντιστοιχίες τετραγωνικές μορφές είναι.

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

3. Δίνεται η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x}$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας A_1 ώστε

$$T(\underline{x}) = \underline{x}' \cdot A_1 \cdot \underline{x}$$

4. Δείξτε ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι (βλ 17)
αντισυμμετρικός (δηλ. $A' = -A$) τότε η αντίστοιχη
τετραγωνική μορφή μηδενίζεται $\forall x \in \mathbb{R}^n$

5. Να εξετάσετε ως προς την οριστικότητα
οι ακόλουθες τετραγωνικές μορφές

i) $x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2$ ii) $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$

iii) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

iv) $12x_1x_2 - 4x_1^2 - 9x_2^2 - x_3^2$ v) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

6. Έστω η τετραγωνική μορφή $T(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

i) Να δοθεί η αναλυτική έκφραση του $T(\underline{x})$

ii) Να βρεθεί η έκφραση που παίρνει η $T(\underline{x})$

όταν εστιάσεται ο γραμμικός μετασχημα-
τισμός $\underline{y} = C \cdot \underline{x}$ όπου

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

iii) Με βάση την τελευταία έκφραση να εξετα-
στεί η οριστικότητα του πίνακα A

7. Δείξτε ότι το σύνολο των οριστικά θετικών
(αντίστοιχα οριστικά αρνητικών) πινάκων τάξης n
είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης

8. Αν για τον συμμετρικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (6.5.18) υπάρχει μη ιδιάζων πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε να ισχύει $A = C' C$ δείξτε ότι ο A είναι οριστικά θετικός

9. Αν για τον (συμμετρικό) τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει μη ιδιάζων πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε να ισχύει $C' A C = I$ δείξτε ότι ο A είναι οριστικά θετικός

10. Να ελεγχθεί η οριστικότητα των επόμενων πινάκων

$$i) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad iii) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$iv) \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad v) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των συμμετρικών τετραγωνικών πινάκων που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές μορφές

$$i) 7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$ii) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

$$iii) 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$iv) 4x_1x_2 + 6x_2x_3 - 4x_1^2 - 2x_2^2 - 9x_3^2$$

$$v) 4x_1^2 + 9x_1x_2 + 2x_2^2 \quad \text{και στη συνέχεια να ελεγχθούν ως προς την οριστικότητα}$$

12. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει (6.19)
 $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$. Πότε ισχύει το $=$;
 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

13. Ένα σύνολο B του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$
 λέγεται φραγμένο αν υπάρχει πραγματικός
 αριθμός $M \geq 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in B$
 να ισχύει $|x| \leq M$.

Δείξτε ότι το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 4\}$
 είναι φραγμένο ενώ το σύνολο
 $\mathbb{R}^2 - B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 > 4\}$ δεν είναι

14. Ένα υποσύνολο B του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$
 λέγεται φραγμένο κάτω (αντίστοιχα πάνω)
 αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\forall x \in B$
 να ισχύει $a_i \leq x_i$ (αντίστοιχα $x_i \leq a_i$) $\forall i = 1, 2, \dots, n$.
 Εξετάστε αν τα σύνολα

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 2)^2 \leq 9\}$$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 3 \cdot x_2, x_1 \geq 0\}$$

$$B_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2 + 3, x_2 \leq 0\} \quad \text{είναι}$$

φραγμένα κάτω και επάνω.

15. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι
κυρτά και ποια όχι

i) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 6x_2^2 \leq 6\}$

ii) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

(Υποδείξη: Καντε χράψημα)

16. Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται οι έννοιες των ημι-
χώρων και του υπερεπιπέδου ως εξής

$$H^+(\underline{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{a}' \cdot x > \delta\}$$

$$H^-(\underline{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{a}' \cdot x < \delta\}$$

$$H(\underline{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{a}' \cdot x = \delta\}$$

Δείξτε ότι τα παραπάνω σύνολα είναι
κυρτά και μη φραχμένα

17. Δείξτε ότι η τομή δυο κυρτών συνόλων
είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει το ίδιο για την
ένωση

18. Εξετάστε ως προς την κυρτότητα τις συναρτή-
σεις

i) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

iii) $f_4(x) = |x|$ όταν $x \in \mathbb{R}^n$

19. Αν K είναι ένα κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$ (βλ 2.1)
 και f_i $i=1, 2, \dots, \mu$ είναι μ κυρτές συναρτήσεις
 ορισμένες στο K δείξτε ότι ο γραμμικός
 συνδυασμός $f = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_\mu \cdot f_\mu$ είναι
 κυρτή συνάρτηση.

20. Αν ξ είναι τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 ένας οριστικός πίνακας δείξτε ότι η συνάρτηση
 $f(\underline{x}) = \xi' \cdot \underline{x} + \underline{x}' \cdot A \cdot \underline{x}$ είναι αυστηρά κυρτή ή κοι-
 $\rightarrow \eta$

Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση πολλών μεταβλητών

Έστω $g \in \mathbb{R}^n$ λέμε $\lim_{\underline{x} \rightarrow g} f(\underline{x}) = \ell$ όταν

οι τιμές τα $f(\underline{x})$ μπορούν να περιοριστούν σε

οποιαδήποτε γειτονιά του ℓ όταν το $\underline{x}$ περιορί-
 ζεται σε κατάλληλη γειτονιά του g .

Η f θα λέγεται συνεχής στο $g \in A$ αν
 ισχύει $\lim_{\underline{x} \rightarrow g} f(\underline{x}) = f(g)$

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \subset \mathbb{R}^n$ ορισμένη στο
 ανοιχτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$

Τότε με $D_i f(\underline{x}) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} = f'_{x_i}(\underline{x})$ συμβολίζουμε τη
μερική παράγωγο της f ως προς την i συντεταγμένη (6ελ22)

$$D_i f(\underline{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{t} \quad \underline{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)'$$

$$\begin{aligned} \bullet \nabla f(\underline{x}) &= \text{grad}(\underline{x}) = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)'(\underline{x}) = \\ &= (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_n f(\underline{x}))' \end{aligned}$$

Το $\nabla f(\underline{x})$ δίνει την κατεύθυνση στην οποία ο
ρυθμός αύξησης της τιμής της f μεγιστοποιείται
ενώ το $-\nabla f(\underline{x})$ την κατεύθυνση όπου μεγιστο-
ποιείται ο ρυθμός μείωσης της f

• Έστω $\underline{x}$ ένα σημείο του ανοικτού συνόλου
 $A \subset \mathbb{R}^n$ και έστω ότι σε μια χείτονια του $\underline{x}$
ορίζονται οι μερικές παράγωγοι $D_i f$ $i=1, \dots, n$
οι οποίες είναι επιπλέον συνεχείς στο $\underline{x}$.

Τότε η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο
 $\underline{x}$ και το διαφορικό $df(\underline{x}; \underline{h}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
δίνεται από τον τύπο

$$df(\underline{x}; \underline{h}) = \sum_{i=1}^n D_i f(\underline{x}) \cdot h_i = (\nabla f(\underline{x}))' \cdot \underline{h} = \underline{h}' \cdot \nabla f(\underline{x}) \quad (\text{αλ 23})$$

Με ανάλογες υποθέσεις για τις μερικές παραχώχους ανωτέρας τάξεως $D_{ij}f$, $D_{ijk}f \dots$ παίρνουμε τα διαφορικά

$$d^2 f(\underline{x}; \underline{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(\underline{x}) \cdot h_i \cdot h_j$$

$$d^3 f(\underline{x}; \underline{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} f(\underline{x}) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k$$

Είναι φανερό ότι το διαφορικό δεύτερης τάξης μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων

$$d^2 f(\underline{x}; \underline{h}) = \underline{h}' \cdot H_f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$$

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\underline{x}) & D_{12}f(\underline{x}) & \dots & D_{1n}f(\underline{x}) \\ D_{21}f(\underline{x}) & D_{22}f(\underline{x}) & \dots & D_{2n}f(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\underline{x}) & D_{n2}f(\underline{x}) & \dots & D_{nn}f(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Θεώρημα (Τύπος του Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών). Έστω ότι η συνάρτηση f και οι παραχώχοί της με τάξη μικρότερη του $m \in \mathbb{N}$ είναι διαφορίσιμης σε όλα τα σημεία

του ανοικτού συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$. Αν a και b είναι ^(6.2.24)
 δύο σημεία του A για τα οποία ισχύει $[a, b] \subset A$
 τότε υπάρχει σημείο ξ του ευθυγράμμου τμήμα-
 -τος $[a, b]$ τέτοιο ώστε

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{k!} d^k f(a; h) \right) + \frac{1}{m!} d^m f(\xi; h)$$

$$\text{όπου } h = b - a$$

• Στην ειδική περίπτωση όπου $m=2$ έχουμε

Πόρισμα: Αν u f έχει συνεχείς μερικές
 παραγώγους 2ης τάξης σε όλα τα σημεία
 του ανοικτού συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ και a, b είναι
 δύο σημεία του A για τα οποία ισχύει
 $[a, b] \subset A$ τότε

$$f(a+b) = f(a) + h' \nabla f(a) + R_2(a, h), \quad h = b - a$$

$$\text{όπου } R_2(a, h) = \frac{1}{2} \cdot h' \cdot H f(a + \theta h) \cdot h \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\text{ισχύουν } \lim_{h \rightarrow 0} R_2(a, h) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_2(a, h)}{|h|} = 0$$

Λόγω των τελευταίων σχέσεων λέμε συνήθως
 ότι το υπόλοιπο $R_2(a, h)$ είναι 2ης τάξης

και γράφουμε

(6Ε3 25)

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{h}' \cdot \nabla f(\underline{a}) + o(|\underline{h}|^2) = \sum_{i=1}^n D_i f(\underline{a}) \cdot h_i + o(|\underline{h}|^2)$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x, y, z) = \sin x \cdot e^y - 2y^3 + 3 \cdot z^2 \cdot \cos x$

Τότε $\nabla f(x, y, z) = (\cos x \cdot e^y - 3z^2 \sin x, \sin x \cdot e^y - 6y^2, 6z \cos x)'$

Αφού οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς τότε το ολικό διαφορικό της δίνεται από τον τύπο

$$df(x, y, z; h_1, h_2, h_3) = (h_1, h_2, h_3)' \nabla f(x, y, z) =$$

$$= h_1 \cdot (\cos x \cdot e^y - 3z^2 \sin x) + h_2 \cdot (\sin x \cdot e^y - 6y^2) + h_3 \cdot 6z \cos x$$

Συνήθως αντί για τα σύμβολα h_1, h_2, h_3 χρησιμοποιούμε αντίστοιχα τα σύμβολα dx, dy, dz Έτσι

$$df(x, y, z) = (\cos x \cdot e^y - 3z^2 \sin x) dx + (\sin x \cdot e^y - 6y^2) dy + 6z \cos x dz$$

και στο σημείο $(0, 1, 1)$

$$df(0, 1, 1) = e dx - 6 dy + 6 dz$$

Παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R} \times (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^x \cdot \ln(1+y)$$

$$\nabla f(x, y) = \left(e^x \ln(1+y), \frac{e^x}{1+y} \right)' \quad (6 \text{ ε } 26)$$

Ο εσσιανός πίνακας των μερικών παραχρήων
 δεύτερης τάξης είναι

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \ln(1+y) & \frac{e^x}{1+y} \\ \frac{e^x}{1+y} & -\frac{e^x}{(1+y)^2} \end{pmatrix}$$

Επίσης οι μερικές παραχρήοι 3ης τάξης
 είναι

$$f_{x^3} = f_{xxx} = e^x \ln(1+y), \quad f_{x^2y} = f_{xyx} = \frac{e^x}{1+y}, \quad f_{xy^2} = f_{yyx} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}$$

$$f_{y^3} = f_{yyy} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}$$

Το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο (0,0)
 είναι

$$e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2} (2xy - y^2) + \frac{1}{6} (3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_4$$

$$\text{όπου } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} R_4 = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{R_4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Θεώρημα: Εστω ότι η συνάρτηση n μεταβλητών ^(ΘΕΩ 27)

g είναι συνεχώς διαφορίσιμη (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραχώχους 1ης τάξης) στο ανοικτό σύνολο

$A \subset \mathbb{R}^n$ και ότι για το σημείο $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ ισχύει $g(\underline{a}) = 0$ και $\left. \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}=\underline{a}} \neq 0$

Τότε θα υπάρχει μια χείτονα $\Gamma^* \subset \mathbb{R}^{n-1}$

του σημείου $\underline{a}^* = (a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ και μια

πραγματική συνάρτηση $n-1$ μεταβλητών

$\varphi: \Gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα επόμενα

i) $\forall \varphi$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο Γ^*

$$(i) \quad \varphi(\underline{a}^*) = a_1$$

(ii) $g(\varphi(x_2, x_3, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0$ για κάθε σημείο $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ του Γ^* .

• Λόγω του συμπεράσματος (iii) μπορούμε να πούμε ότι η φ βρίσκεται σε πεπεσμένη μορφή στην επίθεση $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ή ισοδύναμο η φ αποτελεί λύση της $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ σε μια περιοχή Γ^* του σημείου $\underline{a}^*$

Παράδειγμα Έστω F μια πραγματική (6Ε28)

συνάρτηση δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές
παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}$ σε μια γειτονιά του

σημείου $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Αν ισχύει $F(a,b)=0$ και

$\frac{\partial F(a,b)}{\partial x} \neq 0$ τότε θα υπάρχει διάστημα

(b_1, b_2) το οποίο να περιέχει το b τέτοιο
ώστε $\forall y \in (b_1, b_2) \wedge F(x,y)=0$ να

ορίζει μοναδική λύση $x=\varphi(y)$ ως προς
 x και να ισχύει $\varphi(b)=a$ και

$$F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in (b_1, b_2).$$

Επιπλέον η φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη
στο (b_1, b_2) με παράγωγο

$$\varphi'(y) = - \frac{F_y(\varphi(y), y)}{F_x(\varphi(y), y)}$$

Παράδειγμα Έστω $F(x,y) = x - y + x \cdot \cos y$

$$F_x = 1 + \cos y \quad F_y = -1 - x \sin y \quad \text{είναι}$$

συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ και ισχύει $F(0,0)=0$
και $F_x(0,0)=2 \neq 0$

Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα
θα υπάρχει μια ζευγόνια $\Gamma = (-\delta, \delta)$ του μηδέν
και μοναδική συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση
 $\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε
 $\varphi(0) = 0$

$$F(\varphi(y), y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) - y + \varphi(y) \cdot (\cos y) = 0 \quad \forall y \in (-\delta, \delta)$$

και
$$\varphi'(y) = - \frac{-1 - \varphi(y) \cdot \sin y}{1 + (\cos y)} = \frac{1 + \varphi(y) \cdot \sin y}{1 + (\cos y)}$$

Ασκήσεις

1. Υποθέτουμε ότι η πίεση σε ένα σημείο
 (x, y, z) ενός υγρού δίνεται από τον
τύπο $f(x, y, z) = x^2 \cdot y + 2 \cdot y \cdot z^2 + 3x \cdot y \cdot z$. Να βρε-
-θεί η κατεύθυνση προς την οποία θα πρέ-
-πει να κινηθεί ένας δύτες που βρίσκεται
στη θέση $\alpha = (1, 1, 1)$ ώστε να ελαττωθεί
η πίεση όσο το δυνατόν χρηδωρότερα

2. Να βρεθούν το ∇f και ο Εσσιανός πίνακας H_f των συναρτήσεων

$$f_1(x, y, z) = 3 \cdot x^2 \cdot e^y + \ln z$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - xy - yz - 3zx$$

$$f_3(x, y, z) = x^3 \cdot e^y + \sin y + z \cdot \ln x$$

3. Να βρεθούν τα $\nabla f(\underline{a})$ και $H_f(\underline{a})$ για τις συναρτήσεις

$$i) f(x, y, z) = x^3 + 2 \cdot y^3 + 3xyz + z^3 \quad \underline{a} = (1, 1, 1)'$$

$$ii) f(x, y) = e^x \cdot \sin y \quad \underline{a} = (0, 0)'$$

$$iii) f(x, y, z) = e^x \cdot (\cos y + z^2 \cdot \sin y) \quad \underline{a} = (0, 0, 0)'$$

$$iv) f(x, y, z) = x \cdot \cos y + y \cdot \cos z + z \cos x \quad \underline{a} = (0, 0, 0)'$$

και στη συνέχεια να αναπτυχθούν σε σειρά Taylor γύρω από το $\underline{a}$