

• Αλγεβρικές Μέθοδοι

Σε πολλές περιπτώσεις πεπερασμένων πινακικών παιχνιδιών παρουσιάζεται το φαινόμενο να υπάρχουν εφικτικές στρατηγικές δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις

$$E(\underline{x}_0, n_j) = k_1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad \text{και}$$

$$E(n_i, \underline{y}_0) = k_2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Το ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.1 Αν και οι δύο παίκτες έχουν εφικτικές στρατηγικές το παιχνίδι έχει τιμή και οι εφικτικές στρατηγικές είναι βέλτιστες.

• Ένα ζευγάρι εφικτικών στρατηγικών θα αναφέρεται συνήθως με τον όρο "αλλη λύση" του παιχνιδιού

Παράδειγμα Στο γνωστό παιχνίδι κορώνα
χρόνια με πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ για τις
στρατηγικές $\underline{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$, $\underline{y}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ έχουμε

$$E(\underline{x}_0, \underline{y}_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$E(\underline{x}_0, \underline{y}_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Αρα } E(\underline{x}_0, y_j) = 0 \quad j=1,2$$

$$E(\underline{y}_1, \underline{x}_0) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$E(\underline{y}_2, \underline{x}_0) = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Αρα } E(\underline{y}_i, \underline{x}_0) = 0 \quad i=1,2$$

Αρα η $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ είναι άλλη λύση

Παράδειγμα Για το παιχνίδι με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{aligned} E(\underline{x}, \underline{y}_1) &= (x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot x + 0(1-x) = x + 2 - 2x = 2 - x \end{aligned}$$

$$E(\underline{x}, \underline{y}_2) = (x \quad 1-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x + 3$$

$$E(\underline{y}_1, \underline{x}) = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = -x + 2$$

$$E(\underline{y}_2, \underline{x}) = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = -x + 3$$

Ετσι οι $E(x, n_j)$ $j=1, 2$ διαφορετικές (ΕΣ 122)

οπως και οι $E(x_i, x)$ $i=1, 2$ διαφορετικές

αρα καμια από τις $\underline{x} = (x, 1-x)' \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

$\underline{y} = (y, 1-y)' \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ δεν μπορεί να είναι
επιβωτική στρατηγική.

• Ο Έλεγχος ύπαρξης απλής λύσης γίνεται συνήθως με το

Θεώρημα 3.2: Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

ενός τετραγωνικού παιχνιδιού είναι αντι-
στρέψιμος. Τότε τα ακόλουθα είναι
ισοδύναμα

i) Το παιχνίδι έχει απλή λύση

(ii) Όλες οι συντεταγμένες των διαυγμά-
-των $(A')'_{\cdot 1}$ και $A'_{\cdot 1}$ έχουν το ίδιο
πρόσημο.

Επιπλέον αν ισχύει ένα από το (i), (ii) η
απλή λύση θα δίνεται από τους τύπους

$$\tilde{x}_0 = \frac{(A^{-1})' \cdot \underline{1}}{\underline{1}' \cdot A^{-1} \cdot \underline{1}}$$

$$\tilde{y}_0 = \frac{A^{-1} \cdot \underline{1}}{\underline{1}' \cdot A^{-1} \cdot \underline{1}}$$

(6ης 123)

(3.2)

όπου $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Παράδειγμα: Για το παιχνίδι $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

βρίσκουμε $A^{-1} = \frac{1}{276} \begin{pmatrix} -10 & 36 & 12 \\ -40 & 6 & 48 \\ 56 & -36 & -12 \end{pmatrix}$

οπότε $A^{-1} \cdot \underline{1} = \begin{pmatrix} 38/276 \\ 14/276 \\ 8/276 \end{pmatrix}$, $(A^{-1})' \cdot \underline{1} = \begin{pmatrix} 6/276 \\ 6/276 \\ 48/276 \end{pmatrix}$

όλες οι συντεταγμένες των $A^{-1} \cdot \underline{1}$ και $(A^{-1})' \cdot \underline{1}$ έχουν το ίδιο πρόσημο άρα υπάρχει

αγνή λύση

$$\tilde{x}_0 = \left(\frac{6}{60}, \frac{6}{60}, \frac{48}{60} \right)' \quad \tilde{y}_0 = \left(\frac{38}{60}, \frac{14}{60}, \frac{6}{60} \right)'$$

(από τους τύπους 3.2 στην κορυφή της σελίδας)

• Όπως ήδη αναφέραμε δεν είναι απαραίτητο ένα πεπερασμένο πινακικό παιχνίδι να έχει λύση. Ωστόσο ακόμη και τότε θα υπάρχουν υποπαιχνίδια με αγνές λύσεις οι οποίες είναι λύσεις του αρχικού

Η επόμενη διαδικασία προσδιορίζει όλοι τις
 minimax και maximin λύσεις ενός παιχνιδιού
 (οχι απαραίτητα τετραγωνικού) με πίνακα κέρδους
 A

Βήμα 1: Βεβαιωθείτε ότι η τιμή του
 παιχνιδιού δεν είναι μηδέν (αλλιώς
 μεταβάλλεται τον πίνακα του ώστε να
 έχει μόνο θετικά στοιχεία προσθέτοντας
 στα στοιχεία του πίνακα A κατάλληλη θετι-
 -κή ποσότητα α)

Βήμα 2: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.2
 βρείτε όλους τους αντίστοιχους τετραγ-
 -ωνικούς υποπίνακες του A που δίνουν απές
 λύσεις και υπολογίστε το

Βήμα 3: Γράψτε τις απές λύσεις του
 βήματος 2 σαν λύσεις του αρχικού
 παιχνιδιού συμπληρώνοντας με 0 τις
 ανεπάρκτες που δείχνουν. Ελέγξτε με
 χρήση του θεωρήματος 1.2 ή του πορίσματος
 1.3 αν οι λύσεις αυτές είναι βέλτιστες για το

αρχικό παιχνίδι.

(6ε)125)

Βήμα 4: Πάρτε τους κυρτούς συνδυασμούς των διαφορετικών maximin (αντίστοιχα minimax) στρατηγικών που βρέθηκαν στο βήμα 3. Αυτοί θα δώσουν όλες τις βέλτιστες στρατηγικές των δύο παικτών.

Παράδειγμα: Το παιχνίδι με πίνακα

$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ δεν έχει χυθείς βέλτιστες

στρατηγικές. Θεωρώντας το υποπαιχνίδι

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ βρίσκουμε με τον τύπο (3.2)

αφού σύμφωνα με το θεώρημα 3.2 ο πίνακας

A_1 έχει ανήλυσον ότι

$\tilde{x}_0^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)'$ $\tilde{y}_0^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)'$ η οποία

αντιστοιχεί στην

$\tilde{x}_0^{(1)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)'$ $\tilde{y}_0^{(1)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$ του αρχικού

και μπορεί να δείχθει ότι είναι βέλτιστη

Τα άλλα δύο 2×2 υποπαιχνίδια με πινάκες

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ και $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ δεν αντιστοιχούν

σε βέλτιστες λύσεις του αρχικού οπότε η μοναδική (maximin) στρατηγική του I είναι η $\tilde{x}_0^{(1)}$ και η (minimax) του II η $\tilde{y}_0^{(1)}$

• Γραφική λύση πινακικών παιχνιδιών

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση που ο ένας από τους δύο παίκτες έχει να διαλέξει μεταξύ δύο χρηθών στατηχικών δηλαδή όταν το παιχνίδι έχει (ή μπορεί να αναχθεί σε) διαστάσεις $2 \times n$ ή $m \times 2$.

Για την κατανόηση της γεωμετρικής διαδικασίας αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τα παρακάτω

Λήμμα 3.1: Αν $\tilde{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)' \in \mathbb{R}^n$ και

$\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ είναι τυχαία διανύσματα τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\min_{\substack{0 \leq x_j \leq 1 \\ \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j = 1}} \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j = \min_j b_j, \quad \max_{\substack{0 \leq x_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{x}_i = 1}} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{x}_i = \max_i \tilde{x}_i$$

Θεώρημα 3.3 : Για την τιμή U ενός (6517A)
παιχνιδιού ισχύουν οι τύποι

$$U = \underline{U} = \max_{\tilde{y}} \min_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max_{\tilde{x}} \min_j E(\tilde{x}, h_j)$$

$$U = \bar{U} = \min_{\tilde{y}} \max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min_y \max_i E(f_i, y)$$

Θεώρημα 3.4 : Αν $\tilde{x}_0$ και $\tilde{y}_0$ είναι οι βέλτι-
-στες στρατηγικές ενός παιχνιδιού τότε η
τιμή του θα δίνεται από τους τύπους

$$U = E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \max_i E(f_i, \tilde{y}_0) = \min_j E(\tilde{x}_0, h_j)$$

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παιχνίδι
όπου ο ένας τουλάχιστον από τους δύο
παίκτες διαθέτει μόνο 2 στρατηγικές
π.χ το παιχνίδι με πινάκους κέρδους

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix}$$

Η εκλογή της στρατηγικής $\tilde{y} = (y, 1-y)'$ του
παίκτη II θα δίνει προφανώς με βάση
την προτίτηση

$$\min_{\tilde{y}} \max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min_{\tilde{y}} \max_i E[\tilde{x}_i, \tilde{y}] = \min_{\tilde{y}} \max_i (\tilde{x}_i' \cdot A \cdot \tilde{y}) \quad (GE) 128$$

$$= \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq \mu} \{a_i \cdot y + b_i(1-y)\} =$$

$$= \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq \mu} \{(a_i - b_i)y + b_i\}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

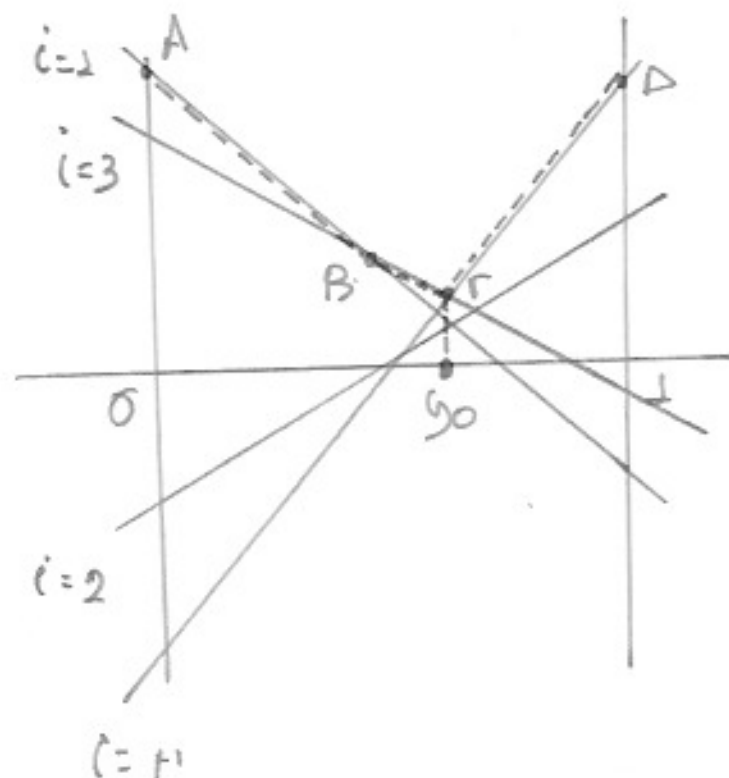
$$f(y) = \max_{1 \leq i \leq \mu} \{(a_i - b_i)y + b_i\} \text{ στο διάστημα}$$

$[0, 1]$ αποδίδεται από μια τετραγωνική

γραμμή (στο σχήμα $AB\Gamma D$) ενώ το $\min \max$

σημείο θα είναι η κορυφή της τετραγωνικής

στην οποία αντιστοιχεί το $f(y_0) = \min_{0 \leq y \leq 1} f(y)$



Η βέλτιστη τιμή y_0 για του παίκτη II (GE) (29)
είναι εύκολο τώρα να βρεθεί εάν τομή δύο
ευθειών που αντιστοιχούν σε δύο χημικές
στратηγίες είναι $\tilde{f}_i, \tilde{f}_j$ του παίκτη I

$$\text{δηλαδή } (a_i - b_i)y_0 + b_i = (a_j - b_j)y_0 + b_j$$

Επίσης σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 η
τιμή του παιχνιδιού θα είναι

$$v = \max_{1 \leq i \leq m} E(\tilde{f}_i, y) = f(y_0)$$

Για την εύρεση της maximin στρατηγικής
του παίκτη I εργαζόμαστε ως εξής:

Δύο από τις ευθείες που περνούν από
το minimax σημείο θα έχουν οπωσδήποτε
αντίθετες κλίσεις. Τότε το αντίστοιχο υπο-
παιχνίδι $A_1 = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$ θα έχει απλή

λύση αφού οι συντεταγμένες των διανυσ-
μάτων $(A_1)^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{|A_1|} \begin{pmatrix} b_j - a_j \\ a_i - b_i \end{pmatrix}, A^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{|A_1|} \begin{pmatrix} b_j - b_i \\ a_i - a_j \end{pmatrix}$

είναι ορθογώνιες.

Επομένως οι βέλτιστες στρατηγικές (σελ 130)
των δυο παικτών (για το A_2) θα δίνονται
από τους τύπους

$$\tilde{x}_0^{(1)} = \frac{1}{b_j - a_j + a_i - b_i} \begin{pmatrix} b_j - a_j \\ a_i - b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_0^{(1)} = \frac{1}{b_j - a_j + a_i - b_i} \begin{pmatrix} b_j - b_i \\ a_i - a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 - y_0 \end{pmatrix}$$

και οι βέλτιστες λύσεις του αρχικού
παιχνιδιού είναι

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_0 \\ \vdots \\ 1 - x_0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ θέση} \\ \leftarrow j \text{ θέση} \end{matrix} \quad \tilde{y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ 1 - y_0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 1: Η λύση ενός παιχνιδιού 2πν
δίνεται με όμοιο τρόπο αρχίζοντας
με την εύρεση μιας βέλτιστης στρατηγικής
 $\underline{x} = (x, 1-x)$ για τον παίκτη I

Παρατήρηση 2 Αν από το σημείο Γ του προηγούμενου
 σχήματος περνάμε περισσότερες από μια

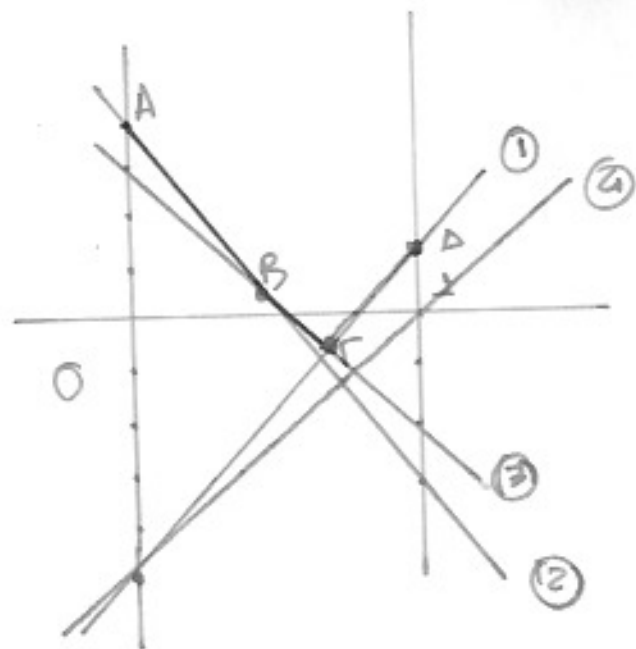
ευθείες τότε σε κάθε ζευγάρι ευθειών (σε Β) με αντίθετες κλίσεις αντιστοιχεί και μια maximin λύση για τον παίκτη I με αποτέλεσμα να έχουμε για αυτόν μια απεί-
-ρια λύσεων

Παράδειγμα Για το παιχνίδι με πίνακα κέρ-
-δους $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ είναι εύκολο να ελεχτεί

κάνεις ότι δεν υπάρχουν βέλτιστες στρατηγι-
-κές. (Δεν ισχύει η 1.8). Αν $y = (y, 1-y)$ είναι
στρατηγική του παίκτη II τότε θα έχουμε
τον επόμενο πίνακα για τις ευθείες με τύπο
 $(a_i - b_i)y + b_i$

Γι' ή για στρατηγική i' του παίκτη I	Αναπτύσσεται για τον παίκτη II
f_1	$1 \cdot y + (-5)(1-y) = 6y - 5$
f_2	$-4y + 4(1-y) = -8y + 4$
f_3	$-2y + 3(1-y) = -5y + 3$
f_4	$0y + (-3)(1-y) = 3y - 3$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που προκύπτουν



Από το σχήμα προκύπτει ότι η minimax στρατηγική για τον παίκτη II θα προκύψει από την τομή των ευθειών ① και ③ οπότε

$$\text{θα έχουμε } 6y - 5 = -5y + 3 \Leftrightarrow y = \frac{8}{11}$$

θεωρώντας το υποπαιχνίδι που αντιστοιχεί

$$\text{στο } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(κρατήσαμε 1η και 3η γραμμή γιατί το βέλτεστο σημείο για την minimax στρατηγική ήταν μεταξύ των ① και ③ ευθειών)

και μια στρατηγική $x = (x, 1-x)$ του παίκτη I παίρνουμε

Για στρατηγική n_j του II	Αναμενόμενο κέρδος $E(x, n_j)$ του παίκτη I
n_1	$x + (-2)(1-x) = 3x - 2 \rightarrow (x, 1-x) \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
n_2	$-5x + 3(1-x) = -8x + 3 \rightarrow (x, 1-x) \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

και η maximin στρατηγική αντιστοιχεί (68/133)
 στην τομή των ευθειών με τύπο $3x-2$ και $-8x+3$
 $3x-2 = -8x+3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$

Αρα $x_0 = (\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11}, 0)$ $y_0 = (\frac{8}{11}, \frac{3}{11})$ και

$$0 = -\frac{7}{12} = \underbrace{6 \cdot \frac{8}{11}}_{\substack{\uparrow \\ y \\ \text{1η ευθεία} \\ \text{των } y}} - 5 = -5 \cdot \underbrace{\frac{8}{11}}_{\substack{\uparrow \\ y \\ \text{3η ευθεία} \\ \text{των } y}} + 3 = 3 \cdot \underbrace{\frac{5}{11}}_{\substack{\uparrow \\ x \\ \text{1η ευθεία} \\ \text{των } x}} - 2 = -8 \cdot \underbrace{\frac{5}{11}}_{\substack{\uparrow \\ x \\ \text{2η ευθεία} \\ \text{των } x}} + 3$$

• Υπεροχή Στρατηγικών

Αν θεωρήσουμε το παιχνίδι με πίνακα

κέρδους $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Αφού όλα

τα στοιχεία της 3ης γραμμής είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης γραμμής είναι φανερό ότι ο παίκτης I δεν θα διαλέξει ποτέ τη γνήσια στρατηγική

χ_1 . Ομοία αφού τα στοιχεία της 3ης στήλης είναι μικρότερα ή ίσα από τα στοιχεία της 1ης στήλης ο παίκτης II δεν θα πρέπει ποτέ να διαλέξει την γνήσια στρατηγική ϕ_1 .

Σε τέτοιες περιπτώσεις θα λέμε ότι έχουμε (6.134)
υπεροχή ή κυριαρχία στρατηγικών

Πιο συγκεκριμένα η στρατηγική $\underline{x}_1 \in S_\mu$
του παίκτη I θα λέμε ότι υπέρχει της
 $\underline{x}_2 \in S_\mu$ (ή ότι η $\underline{x}_2$ κυριαρχείται από την $\underline{x}_1$)
αν και μόνο αν ισχύει

$$E(\underline{x}_1, \underline{y}) \geq E(\underline{x}_2, \underline{y}) \quad \forall \underline{y} \in S_\nu \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα η στρατηγική $\underline{y}_1 \in S_\nu$ του παίκτη

II θα υπέρχει της στρατηγικής $\underline{y}_2 \in S_\nu$
(ή $\underline{y}_2$ κυριαρχείται από την $\underline{y}_1$) αν και μόνο

αν ισχύει $E(\underline{x}, \underline{y}_1) \leq E(\underline{x}, \underline{y}_2) \quad \forall \underline{x} \in S_\mu \quad (3.4)$

Στην περίπτωση που έχουμε γνήσιες στρατηγικές

$$x_1 = i, \quad x_2 = k \quad \text{η σχέση (3.3) γίνεται}$$

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad j = 1, 2, \dots, \nu$$

ενώ για $\underline{y}_1 = j, \quad \underline{y}_2 = j \quad \text{η (3.4) δίνει}$

$$a_{ij} \leq a_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, \mu$$

• Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι γραμμές ή στή-
λες που αντιστοιχούν σε κυριαρχούμενες γνήσιες

στратηγικές μπορούν να διαγραφούν (GBS)
πετυχαίνοντας έτσι μείωση των διαστάσεων του
πίνακα του παιχνιδιού

Θεώρημα 3.5 Αν η i γραμμή του πίνακα
κέρδους A ενός παιχνιδιού κυριαρχείται από
μία άλλη τότε

- 1) Υπάρχει maximin στρατηγική $\underline{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)' \in S_m$
του παίκτη I για την οποία ισχύει $x_i = 0$
ii) Για κάθε maximin στρατηγική

$$\underline{x}_0^* = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)' \in S_{m-1}$$

υποπαιχνιδιού που προκύπτει με διαγραφή
της i γραμμής του A η αντίστοιχη
στратηγική $\underline{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m)' \in S_m$
είναι maximin για το αρχικό.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τον
παίκτη II

Παράδειγμα. Στο διπλανό
παιχνίδι μπορούν να
γίνουν διαδοχικά οι
ακόλουθοι αφαρμογές:

I \ II	c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	2	0	1	2
d_2	5	7	8	1
d_3	7	1	-1	0

(6E > B6)

- a. Διαγραφή 1ης στήλης (η $\underline{g_4}$ υπερέχει)
 b. Διαγραφή 3ης γραμμής (η $\underline{x_2}$ υπερέχει)
 c. Διαγραφή 3ης στήλης (η $\underline{g_2}$ υπερέχει)

Επ' ου φτάνουμε στο παιχνίδι

I \ II		
	g_2	g_4
x_1	-2	0
x_2	5	1

απ' όπου βρίσκουμε

$$\underline{x}_0^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad \underline{y}_0^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8} \right)$$

$\theta = -\frac{1}{4}$ και για το αρχικό έχουμε

$$\underline{x}_0 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right)' \quad \underline{y}_0 = \left(0, \frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8} \right)'$$

Ασκηση 6E18

1 Να λυθούν τα παιχνίδια με πινάκες

i) $\begin{pmatrix} 19 & 15 & 16 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2. Να λύθούν τα παιχνίδια με πινάκες ^{(66) (37)} κέρδους

$$i) \begin{pmatrix} -12 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Πινακικά Παιχνίδια και Γραμμικός Προγραμματισμός

Έστω ένα παιχνίδι με πίνακα κέρδους του παίκτη I

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Η εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής του I θα γίνει με βάση την ποσότητα

$$\underline{U} = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = U$$

ή ισοδύναμα λόγω του θεωρήματος 3.3

$$\text{την } \underline{U} = \max_{\tilde{x}} \min_j E(\tilde{x}, h_j) = U.$$

Για κάθε διάνυσμα $x \in S_M$ θα πρέπει να

βρίσκεται η ελάχιστη τιμή των v παραστά-

-σεων

$$E(\tilde{x}, h_j) = \tilde{x}' A \cdot h_j = q_{j1} \cdot x_1 + q_{j2} \cdot x_2 + \dots + q_{jm} \cdot x_m$$

$j=1, 2, \dots, n$

και στη συνέχεια το maximum ως προς x_i (GAB8)

Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του μεγαλύ-

-τερου αριθμού $u \in \mathbb{R}$ για τον οποίον

ισχύουν οι ανισότητες $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq u$ (4.1)

$$j=1, 2, \dots, n$$

Υποθέτοντας ότι όλα τα στοιχεία του
πίνακα A είναι θετικά (αν όχι προσθέ-
-τουμε κατάλληλο αριθμό ώστε να γίνουν)

θα έχουμε $u > 0$ οπότε οι εκέςεις

$$(4.1) \text{ δίνονται } \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{x_i}{u} \geq 1, j=1, 2, \dots, n$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι θα έπρεπε επιπλέον
να ισχύει $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ φτάνουμε στο ακό-

-λουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμμα-
-τισμού

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{x_i}{u} \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{u} = 1$$

$$\frac{x_i}{u} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

Θέτοντας $x'_i = \frac{x_i}{U}$ $i=1, 2, \dots, \mu$ θα έχουμε (6.3)

$$\min x'_1 + x'_2 + \dots + x'_\mu$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x'_1 + a_{21} \cdot x'_2 + \dots + a_{\mu 1} x'_\mu &\geq 1 \\ \vdots & \\ a_{1\nu} x'_1 + a_{2\nu} x'_2 + \dots + a_{\mu\nu} x'_\mu &\geq 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$x'_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, \mu$$

Με ανάλοχα επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι η εύρεση της minimax στρατηγικής του παίκτη II οδηγεί στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max (y'_1 + y'_2 + \dots + y'_\nu)$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot y'_1 + a_{12} y'_2 + \dots + a_{1\nu} y'_\nu &\leq 1 \\ \vdots & \\ a_{\mu 1} \cdot y'_1 + a_{\mu 2} y'_2 + \dots + a_{\mu\nu} y'_\nu &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$y'_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, \nu$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι το π.χ.π. (4.3) είναι το δυϊκό του (4.2) οπότε σύμφωνα

με γνωστό αποτέλεσμα του διόρισμού (Ge2140)

$$\max(\gamma_1' + \gamma_2' + \dots + \gamma_n') = \min(\pi_1' + \pi_2' + \dots + \pi_m') \Rightarrow \underline{v} = \bar{v}$$

Γραμμικό προγραμματιστικό θα μελετήσουμε
στα παρακάτω κεφάλαια