



# Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



## Ανάλυση επιφανειακών φορέων

### Ενότητα 9β: Κυκλικές πλάκες

Γιάννης Καλογεράς  
Phd Πολιτικός Μηχανικός  
2024-2025

Σεραφείμ Μπακαλάκος  
Phd Πολιτικός Μηχανικός  
2023-2024

# Διαφορική εξίσωση

- Πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

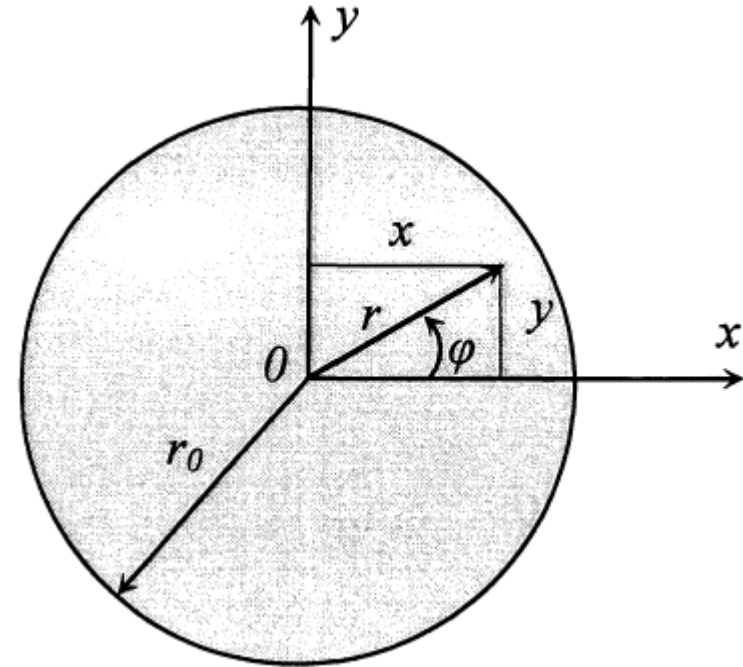
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \text{atan} \left( \frac{y}{x} \right)$$

- $r$ : ακτινική συντεταγμένη
- $\varphi$ : εφαπτομενική συντεταγμένη
- Διαφορική εξίσωση της πλάκας σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Διαφορική εξίσωση της πλάκας σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D}$$



# Αξονοσυμμετρική φόρτιση

- Διαφορική εξίσωση της πλάκας σε πολικές συντεταγμένες (γενικώς):

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D}$$

- Αν η φόρτιση είναι αξονοσυμμετρική δεν υπάρχει μεταβολή κατά την εφαπτομενική διεύθυνση, άρα όλες οι παράγωγοι προς  $\varphi$  μηδενίζουν

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial^n w}{\partial \varphi^n} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0 \quad \dots$$

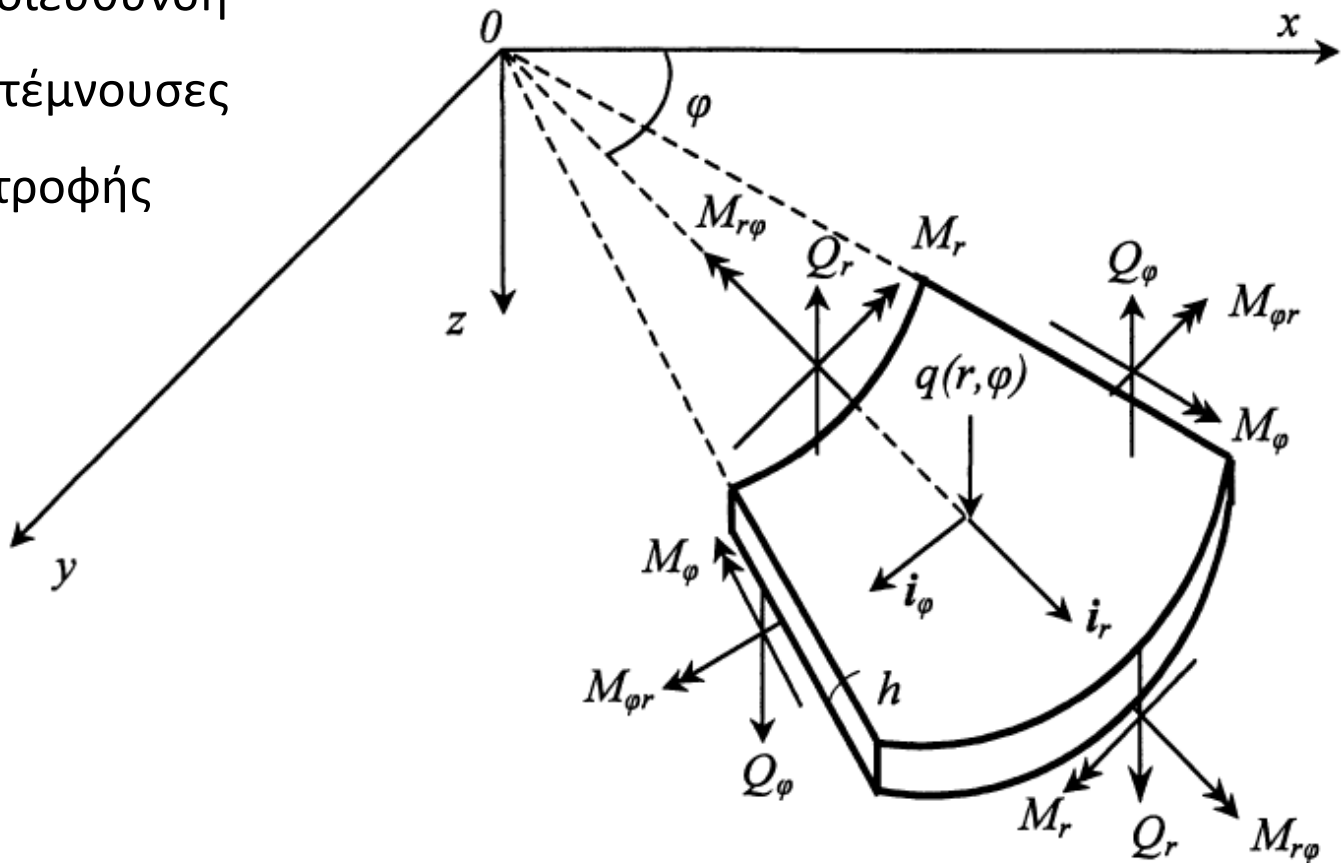
- Η διαφορική εξίσωση της πλάκας απλοποιείται σε

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{qr}{D}$$

# Εντατικά μεγέθη

- Οι ροπές και τέμνουσες εκφράζονται σε πολικές συντεταγμένες.
- Οι ροπές και τέμνουσες αντιστοιχούν σε λωρίδα πλάτους 1m, κατά τα γνωστά
- $M_r / M_\varphi$  είναι η ροπή κάμψης σε επιφάνεια κάθετα στην ακτινική / εφαπτομενική διεύθυνση
- Ομοίως για τις τέμνουσες
- $M_{r\varphi}$  ροπή συστροφής



# Ροπές

- Γενικώς

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$M_\varphi = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

$$M_{r\varphi} = -M_{\varphi r} = D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

- Για αξονοσυμμετρική φόρτιση

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$M_\varphi = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

$$M_{r\varphi} = -M_{\varphi r} = 0$$

# Τέμνουσες και ενεργές τέμνουσες

- Γενικώς

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w)$$

$$Q_\varphi = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 w)$$

$$R_r = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$R_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial r}$$

- Για αξονοσυμμετρική φόρτιση

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w)$$

$$Q_\varphi = 0$$

$$R_r = Q_r$$

$$R_\varphi = Q_\varphi$$

# Καμπυλότητες

- Γενικώς

$$k_r = \frac{1}{r_r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$k_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

$$k_{r\varphi} = \frac{1}{r_{r\varphi}} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

$$\varepsilon_r = z k_r$$

$$\varepsilon_\varphi = z k_\varphi$$

$$\gamma_{r\varphi} = -2z k_{r\varphi}$$

- Για αξονοσυμμετρική φόρτιση

$$k_r = \frac{1}{r_r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$k_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$k_{r\varphi} = \frac{1}{r_{r\varphi}} = 0$$

$$\varepsilon_r = z k_r$$

$$\varepsilon_\varphi = z k_\varphi$$

$$\gamma_{r\varphi} = 0$$

# Καταστατικές εξισώσεις

- Γενικώς

$$M_r = D(k_r + \nu k_\varphi)$$

$$M_\varphi = D(k_\varphi + \nu k_r)$$

$$M_{r\varphi} = D(1 - \nu)k_{r\varphi}$$

- Για αξονοσυμμετρική φόρτιση

$$M_r = D(k_r + \nu k_\varphi)$$

$$M_\varphi = D(k_\varphi + \nu k_r)$$

$$M_{r\varphi} = 0$$

# Συνοριακές συνθήκες

- Η κυκλική πλάκα μπορεί να είναι:
  - Πλήρης κυκλικός δίσκος
  - Κυκλικός δακτύλιος
- Απλή έδραση στην θέση  $r = a$  (εξωτερική ή εσωτερική ακτίνα):

a)  $w=0$

b) 
$$M_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$



# Συνοριακές συνθήκες

- Πάκτωση στην θέση  $r = a$

a)  $w=0$

b)  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$

- Ελεύθερη παρειά στην θέση  $r = a$

a)  $M_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0$

b)  $R_r = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0$

# Επίλυση για ομοιόμορφο φορτίο

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{qr}{D}$$

- Ολοκληρώνουμε διαδοχικά την παραπάνω δ.ε. Π.χ.

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2D} + \frac{C_1''}{r}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{qr^3}{4D} + C_1'' r \ln r + C_2'' r$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + C_1' r \ln r + C_2' r + \frac{C_3}{r}$$

- Τελικά φτάνουμε στην ελαστική επιφάνεια της πλάκας

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

# Επίλυση για ομοιόμορφο φορτίο

- Η ελαστική επιφάνεια της πλάκας

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

- Οι σταθερές  $C_1 - C_4$  βρίσκονται από τις συνοριακές συνθήκες και από συνθήκες συμβιβαστότητας, ανάλογα με το πρόβλημα
- Μπορούμε να χωρίσουμε σε μερική λύση της μή ομογενούς δ.ε.

$$w_p = \frac{qr^4}{64D}$$

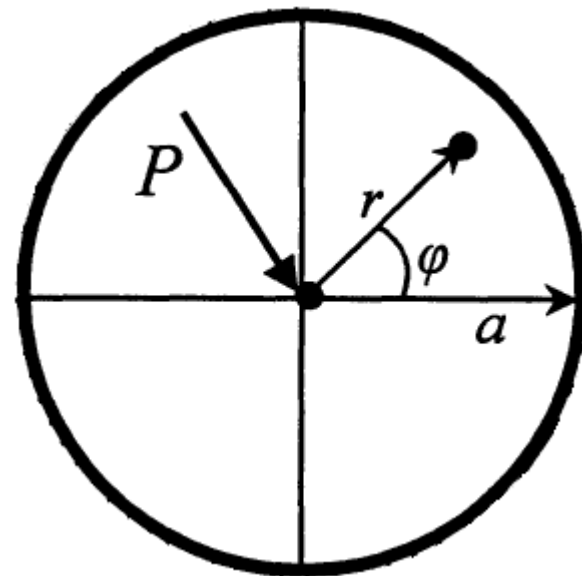
- Και λύση της ομογενούς δ.ε.

$$w_h = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

# Επίλυση για συγκεντρωμένο φορτίο

- Έστω ότι η πλάκα φορτίζεται με συγκεντρωμένη δύναμη  $P$  στο κέντρο της
- Η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{P}{2\pi r}$$

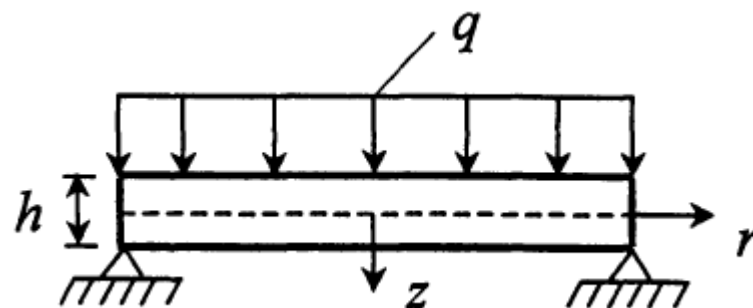
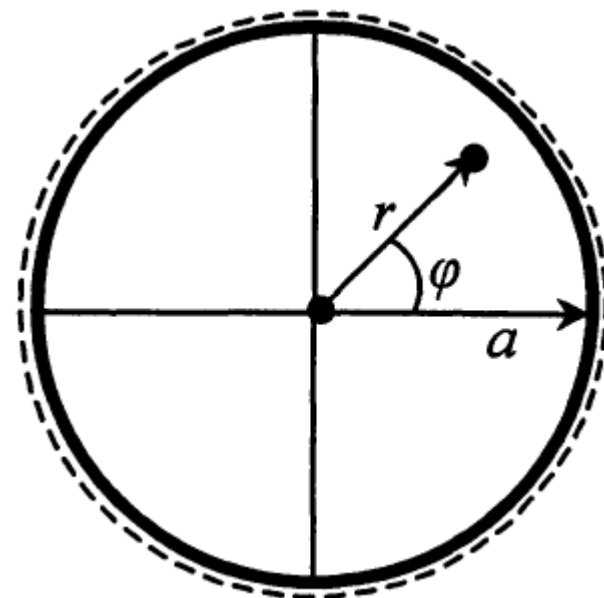


- Με διαδοχικές ολοκληρώσεις, καταλήγουμε την ελαστική επιφάνεια

$$w = \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2}{4} \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \right)$$

# Παράδειγμα 1

- Η πλάκα του σχήματος φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο  $q(x, y) = q$  και είναι απλά εδραζόμενη περιμετρικά.
- Να βρεθούν:
  - i. η αναλυτική έκφραση της βύθισης και η μέγιστη τιμή της
  - ii. η αναλυτική έκφραση των ροπών  $M_r$ ,  $M_\varphi$ ,  $M_{r\varphi}$  και η μέγιστη τιμή τους

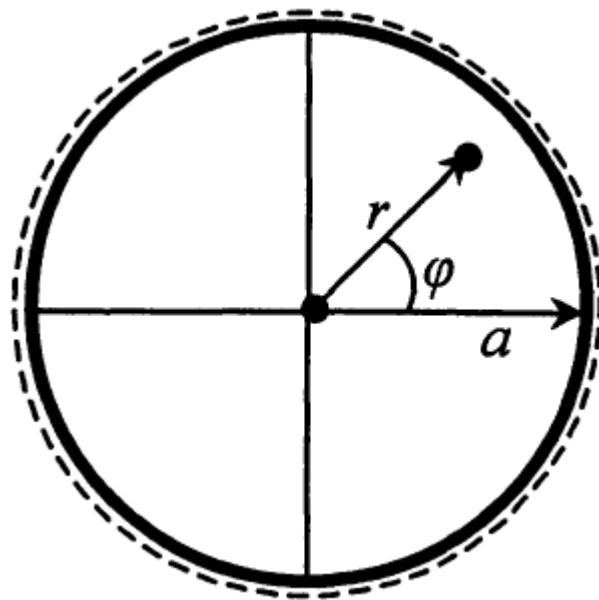


# Παράδειγμα 1

- Η ελαστική επιφάνεια είναι

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

- Παρατηρώ ότι για  $r = 0$  η συνάρτηση  $\ln r \rightarrow \infty$ .
- Όμως η βύθιση στο κέντρο της πλάκας δεν μπορεί να γίνει άπειρη!



- Επομένως οι σταθερές  $C_1, C_3$  θα πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε οι όροι που περιέχουν  $\ln r$  να μην απειριστούν. Άρα

$$C_1 = C_3 = 0$$

- Άρα μένουν 2 άγνωστες σταθερές

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_2 r^2 + C_4$$

# Παράδειγμα 1

- Οι άλλες 2 σταθερές θα προσδιορισθούν από τις συνοριακές συνθήκες

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_2 r^2 + C_4$$

- Απλή έδραση για  $r = a$

a)  $w=0$

b)  $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$

- Αντικαθιστώντας  $r = a$  και την συνάρτηση της βύθισης  $w$ :

1)  $\frac{qa^4}{64D} + C_2 a^2 + C_4 = 0$

2)  $\frac{12qa^2}{64D} + 2\nu C_2 + \frac{\nu}{a} \left( \frac{4qa^3}{64D} + 2C_2 a \right) = 0$

# Παράδειγμα 1

- Λύνοντας το προηγούμενο  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα, προκύπτουν οι τιμές των σταθερών

$$C_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^2}{32D}$$

$$C_4 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D}$$

- Άρα η συνάρτηση της βύθισης (ελαστική επιφάνεια) είναι

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$$

- Η μέγιστη τιμή της βύθισης εμφανίζεται για  $r = 0$ , δηλαδή στο κέντρο της πλάκας:

$$w_{max} = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D}$$

# Παράδειγμα 1

- Η συνάρτηση της βύθισης (ελαστική επιφάνεια) είναι

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$$

- Οι ροπές υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad M_\varphi = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad M_{r\varphi} = 0$$

- Αντικαθιστώντας την βύθιση βρίσκουμε

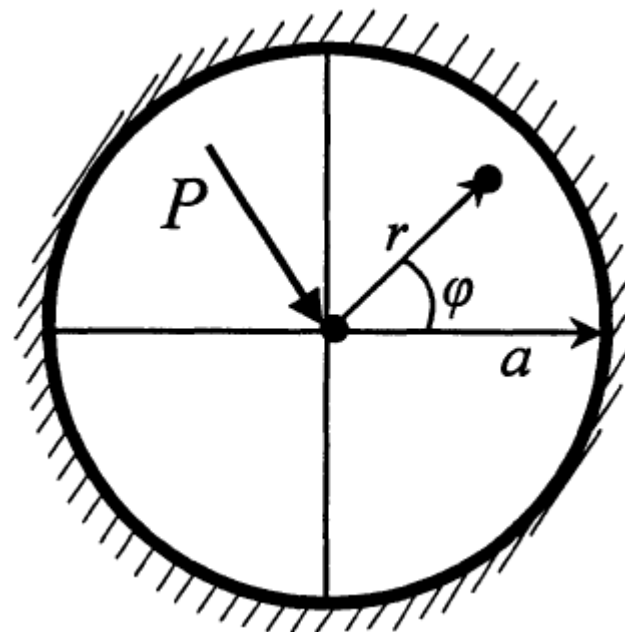
$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu) (a^2 - r^2) \quad M_\varphi = \frac{q}{16} \left[ (3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2 \right]$$

- Παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους για  $r = 0$  (στο κέντρο της πλάκας)

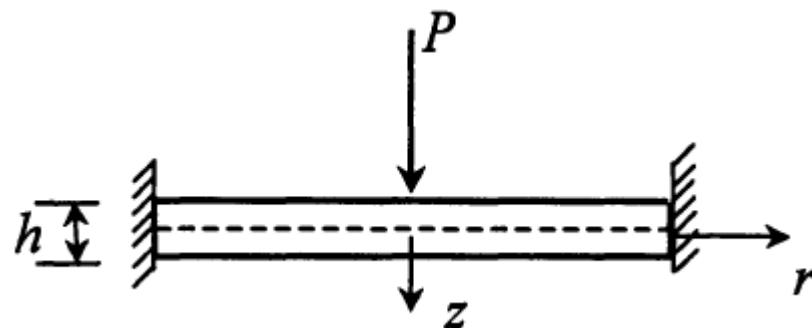
$$(M_r)_{max} = (M_\varphi)_{max} = \frac{q}{16} (3+\nu) a^2$$

## Παράδειγμα 2

- Η πλάκα του σχήματος φορτίζεται με συγκετρωμένο φορτίο  $P$  στο κέντρο της και είναι πακτωμένη περιμετρικά.
- Να βρεθεί η αναλυτική έκφραση της βύθισης και η μέγιστη τιμή της.



*Αν ζητούνταν και οι ροπές, αυτές θα έπαιρναν την μέγιστη τιμή τους στο κέντρο ( $r = 0$ ) και την ελάχιστη τιμή τους στην πάκτωση ( $r = a$ )*

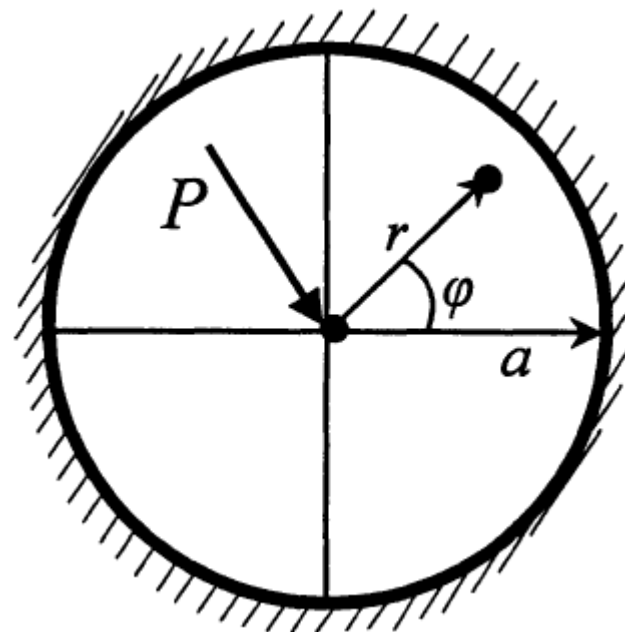


## Παράδειγμα 2

- Η ελαστική επιφάνεια είναι

$$w = \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2}{4} \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \right)$$

- Παρατηρώ και πάλι ότι για  $r = 0$  η συνάρτηση  $\ln r \rightarrow \infty$ .
- Όμως η βύθιση στο κέντρο της πλάκας δεν μπορεί να γίνει άπειρη!



- Επομένως η σταθερά  $C_3$  θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε ο όρος που περιέχει  $\ln r$  να μην απειριστεί. Άρα

$$C_3 = 0$$

- Άρα μένουν 2 άγνωστες σταθερές

$$w = \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2}{4} \ln r + C_2 r^2 + C_4 \right)$$

## Παράδειγμα 2

- Οι άλλες 2 σταθερές θα προσδιορισθούν από τις συνοριακές συνθήκες

$$w = \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2}{4} \ln r + C_2 r^2 + C_4 \right)$$

- Πάκτωση για  $r = a$

a)  $w=0$

b)  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$

- Αντικαθιστώντας  $r = a$  και την συνάρτηση της βύθισης  $w$ :

1)  $C_2 a^2 + C_4 + \frac{1}{4} a^2 \ln a = 0$

2)  $2C_2 + \frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{4} = 0$

## Παράδειγμα 2

- Λύνοντας το προηγούμενο  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα, προκύπτουν οι τιμές των σταθερών

$$C_2 = -\frac{1}{4} \ln a - \frac{1}{8}$$

$$C_4 = \frac{a^2}{8}$$

- Άρα η συνάρτηση της βύθισης (ελαστική επιφάνεια) είναι

$$w = \frac{P}{16\pi D} (2r^2 \ln r - 2r^2 \ln a + a^2 - r^2)$$

- Η μέγιστη τιμή της βύθισης εμφανίζεται για  $r = 0$ , δηλαδή στο κέντρο της πλάκας:

$$w_{max} = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

Δεν ορίζεται το  $r^2 \ln r$  στο  $r = 0$ , οπότε με L'Hospital υπολογίζουμε το

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln r}{r^{-2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{-1}}{-2r^{-3}} = 0$$